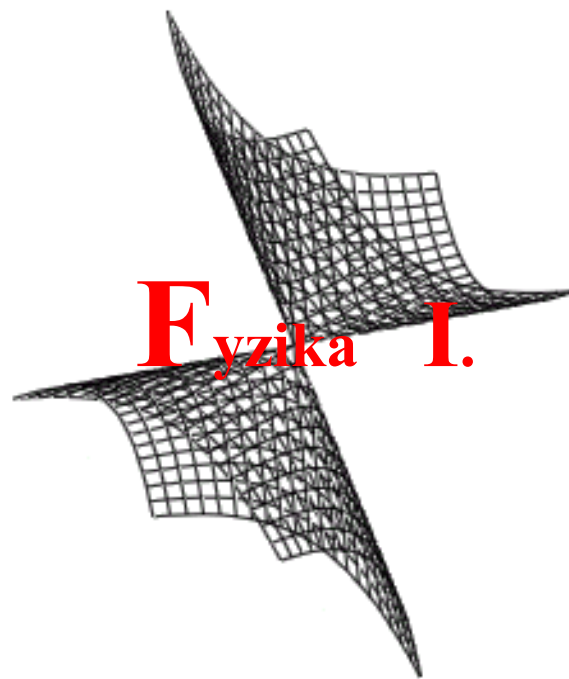




Predmet : Fyzika I.
Spracoval : Jozef DUBOVAN
Rok: 2001

Úvod: (prosím prečítať)

Obsahom danej práce je prierez predmetu Fyzika 1. pre odbory elektro v II. semestri. Je vychádzané z požiadaviek na skúšku z daného predmetu, pričom práca je rozdelená (ako i originálne požiadavky) na tri časti.

1. časť – Základné pojmy a vzťahy
2. časť – Teoretické otázky
3. časť – Doporučené príklady

V prvej časti práce je uvedených 53. otázok, pričom je k nim priradená stručná teória na vysvetlenie (plus obrázky 34). Pri ich písaní som čerpal z niekoľkých kníh, ktoré sú uvedené v závere práce a samozrejme z prednášok a cvičení.

Snažil som sa tu o dôsledné rozlíšenie vektorov od skalárov. Vektory sú označené šípkou, alebo sú písané tučným písmom. Ku každej novo zavedenej veličine je na konci pripísaná jej jednotka a v zátvorke i jej rozmer.

V druhej časti sú uvedené požadované odvodenia (je ich 23) na skúšku z daného predmetu, pričom som sa snažil popísať postup ako som k tomu prišiel.

Tretia časť obsahuje **niektoré** vypočítané doporučené príklady na skúšku. Nie je tam vypočítaný žiadny príklad, ktorý je riešený v knihe. Táto časť má 9. oddielov pričom pri každom sú napísané doporučené príklady (červeným sú vypísané tie príklady, ktoré nie sú v knihe riešené) a vypočítané príklady.

Keďže ide hlavne o pomôcku, ktorú som vytvoril pre seba pri príprave na skúšku z tohto predmetu je možné že sa sem tam vlúdila i nejaká chybička preto sa za prípadné matematické a pravopisné chyby vopred ospravedlňujem.

júl 2002

Tu uvádzam prepis originálnych požiadaviek ku skúške z Fyziky 1, odbor elektro u pána Prof. RNDr. Petra Buryho, CSc.

ZOZNAM ZÁKLADNÝCH POJMOV A VZŤAHOV

1. Definujte skalárny a vektorový súčin dvoch vektorov. Definujte veľkosť vektora a vyjadrite ho pomocou zložiek.
2. Aké súradnicové sústavy vo fyzike používame a akými súradnicami v nich určujeme polohu hmotného bodu ? Ktoré sú základné, vedľajšie a odvodené jednotky používané vo fyzike ?
3. Definujte vektor rýchlosti a zrýchlenia.
4. Definujte vektor uhlovej rýchlosti a uhlového zrýchlenia.
5. Vyjadrite rýchlosť a zrýchlenie pre všeobecný prípad pohybu bodu po kružnici.
6. Napíšte vzťah, vyjadrujúci rozklad zrýchlenia na tangenciálnu a normálovú zložku.
7. Sformulujte Newtonove pohybové zákony.
8. Definujte impulz sily a vyjadrite jeho súvis s celkovou zmenou hybnosti.
9. Definujte prácu sily, definujte kinetickú energiu.
10. Vyjadrite výkon sily. Ako je definovaná účinnosť ?
11. Definujte moment sily a moment hybnosti.
12. Napíšte Galileiho transformáciu a odpovedajúci zákon skladania rýchlostí.
13. Napíšte Lorentzove transformácie.
14. Čo rozumiete pod kontrakciou dĺžky a dilatáciou času ?
15. Napíšte vzťah pre sčítanie rýchlostí v špeciálnej teórii relativity.
16. Charakterizujte časopriestor. Aké hodnoty môže nadobúdať priestorovo – časová odľahlosť?
17. Aké sú dôsledky Lorentzových transformácií na dynamické veličiny (hybnosť, energia)?
18. Napíšte Newtonov gravitačný zákon a definujte vektor intenzity gravitačného poľa !
19. Definujte potenciálnu energiu v konzervatívnom poli. Definujte potenciál v gravitačnom poli !
20. Vyjadrite vzťah intenzity a potenciálu gravitačného poľa ! Vyjadrite princíp superpozície pre gravitačné pole !
21. Vyjadrite tok vektora intenzity gravitačného poľa uzavretou plochou !
22. Napíšte pohybové rovnice pre sústavu hmotných bodov (prvá a druhá veta impulzová).
23. Uveďte definíciu ťažiska. Napíšte vety o ťažisku.
24. Definujte moment zotrvačnosti. Napíšte Steinerovu vetu.
25. Napíšte podmienky rovnováhy tuhého telesa !
26. Vyjadrite kinetickú energiu pre všeobecný prípad pohybu tuhého telesa !
27. Vyjadrite moment hybnosti tuhého telesa !
28. Napíšte pohybovú rovnicu pre otáčanie tuhého telesa okolo pevnej osi účinkom vonkajších momentov !
29. Napíšte pohybovú rovnicu pre netlmený harmonický pohyb ! Napíšte všeobecné riešenie!
30. Napíšte pohybovú rovnicu pre tlmený kmitavý pohyb ! Definujte logaritmický dekrement útlmu!
31. Napíšte pohybovú rovnicu pre tlmený harmonický oscilátor s vynútenými kmitmi. Kedy je oscilátor v rezonancii?
32. Definujte základné veličiny pre kmitavý pohyb (amplitúda, frekvencia, perióda, fáza)!
33. Napíšte definície relatívneho predĺženia, relatívneho priečneho skrátenia, relatívneho posunutia !
34. Definujte ťahové a šmykové napätia! Napíšte Hookov zákon pre ťahové a pre šmykové namáhanie !
35. Napíšte vlnovú rovnicu (jednorozmerný prípad), napíšte jej všeobecné riešenie!
36. Ktoré veličiny charakterizujú rovinnú harmonickú vlnu, ako sú definované ?
37. Napíšte stavovú rovnicu ideálneho plynu. Ktoré sú ďalšie základné zákony ideálneho plynu ?
38. Definujte počet stupňov voľnosti molekuly! Čo hovorí ekvipartičný teorém ?
39. Napíšte stavovú rovnicu reálneho plynu. Čo je to kritická teplota ?
40. Akými vzťahmi je popísaná teplotná rozťažnosť látok ?

41. Definujte teplo a prácu! Definujte teplotné kapacity pri stálom objeme a stálom tlaku.
42. Napíšte Mayerovu rovnicu.
43. Napíšte základné termodynamické zákony (vety) !
44. Vyjadrite súvis prírastku entropie s dodaným teplom (termodynamickú definíciu entropie)!
45. Napíšte termodynamickú definíciu teploty !
46. Definícia entropie pre nerovnovážne stavy. Vyjadrite zákon o narastaní entropie !
47. Charakterizujte adiabatický dej. Napíšte Poissonovu rovnicu pre adiabatický dej.
48. Určite prácu a zmenu vnútornej energie pri izotermickom, izobarickom, izochorickom a adiabatickom deji.
49. Čo je to Carnotov cyklus, aká práca sa pri ňom vykonáva a čomu sa rovná jeho účinnosť?
50. Aká je maximálna (ideálna) účinnosť tepelného stroja?
51. Napíšte základné zákony hydrostatiky.
52. Napíšte základné rovnice popisujúce prúdenie kvapaliny.
53. Akým vzťahom je daná sila odporu pri pohybe telesa v kvapaline ?

TEORETICKÉ OTÁZKY

1. Odvodte vzťah, vyjadrujúci rozklad zrýchlenia na zložku tangenciálnu a dostredivú !
2. Odvodte vzťahy pre vodorovný a šikmý vrh.
3. Ukážte, že impulz sily je rovný celkovej zmene hybnosti!
4. Dokážte, že zmena kinetickej energie je rovná práci pôsobiacich síl !
5. Dokážte platnosť prvej a druhej vety impulzovej!
6. Dokážte vety o ťažisku!
7. Dokážte platnosť Steinerovej vety pre moment zotrvačnosti !
8. Odvodte rovnicu pre reaktívny pohyb (Ciolkovského rovnicu) !
9. Odvodte výraz pre celkovú kinetickú energiu rotujúceho telesa!
10. Odvodte pohybovú rovnicu pre rotačný pohyb tuhého telesa okolo pevnej osi!
11. Odvodte vzťah medzi intenzitou a potenciálom gravitačného poľa!
12. Odvodte vzťah pre prácu gravitačnom poli!
13. Nájdite riešenie pohybovej rovnice pre tlmený kmitavý pohyb!
14. Odvodte vzťah pre energiu deformovaného telesa!
15. Napíšte všeobecné riešenie jednorozmernej vlnovej rovnice a ukážte, že vyhovuje danej rovnici!
16. Odvodte Lorentzove transformácie!
17. Odvodte vzťah pre tlak plynu na stenu nádoby!
18. Odvodte výraz pre vnútornú energiu ideálneho plynu!
19. Odvodte Mayerov vzťah!
20. Odvodte rovnicu adiabaty (Poissonovu rovnicu) !
21. Odvodte výraz pre prácu plynu pri izotermickej, adiabetickej a izobarickej expanzii!
22. Odvodte vzťah pre účinnosť Carnotovho cyklu!
23. Odvodte Bernoulliho rovnicu.

1. časť

Základné pojmy a vzťahy

1. Definujte skalárny a vektorový súčin dvoch vektorov. Definujte veľkosť vektora a vyjadrite ho pomocou zložiek.

Zložky vektora :

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \text{ kde}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sú jednotkové vektory, ktoré tvoria pravotočivú pravouhlú sústavu.

Absolútna hodnota (veľkosť) vektora.

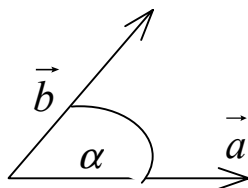
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Pod **skalárnym** súčinom dvoch vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ rozumieme skalárnu veličinu, ktorú dostaneme ako súčin absolútnych hodnôt vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ a kosínusu uhla nimi zovretého.

Ozn:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = a \cdot b \cos \alpha$$

Obr. 1

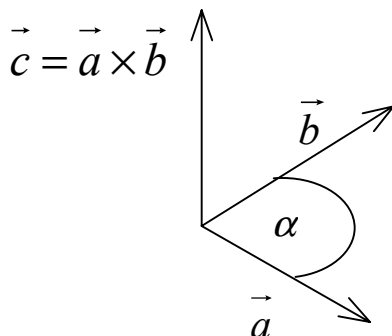


Pod **vektorovým** súčinom dvoch vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ rozumieme vektor $\vec{c}$, ktorého smer je kolmý na rovinu určenú vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$, a smeruje na tú stranu tejto roviny, z ktorej sa javí stotožnenie vektora $\vec{a}$ s vektorom $\vec{b}$ na kratšej ceste v smere proti pohybu hodinových ručičiek.

Ozn:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Obr. 2

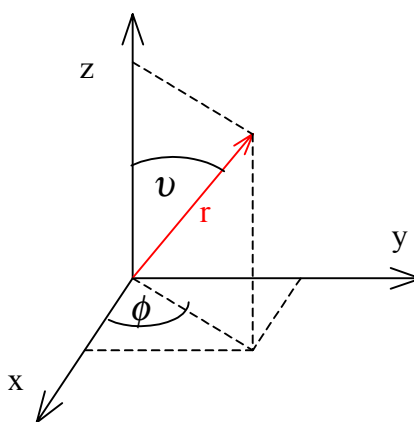


2. Aké súradnicové sústavy vo fyzike používame a akými súradnicami v nich určujeme polohu hmotného bodu ? Ktoré sú základné, vedľajšie a odvodené jednotky používané vo fyzike ?

Súradnicové systémy.

pravouhlé (kartézske) ,	polárne	, cylindrické	, sférické
x	$x = r \cdot \cos \phi$	$x = r \cdot \cos \phi$	$x = r \cdot \cos \phi \cdot \sin \nu$
y	$y = r \cdot \sin \phi$	$y = r \cdot \sin \phi$	$y = r \cdot \sin \phi \cdot \sin \nu$
z		$z = z$	$z = r \cdot \cos \nu$

Obr. 3



Jednotky (SI - sústava).

a) základné

dĺžka	(l , a ..) , meter , [m]
hmotnosť	(m , M ..) , kilogram , [kg]
čas	(t , τ) , sekunda , [s]
elektrický prúd	(I , i) , ampér , [A]
termodynamická teplota	(T , Θ) , kelvin , [K]
svietivosť	(I) , kandela , [cd]
látkové množstvo	(n) , mól , [mol]

b) doplnkové

rovinný uhol	(α , β) , radián , [rad]
priestorový uhol	(Ω , Ψ) , steradián , [sr]

c) odvodené

odvodzujú sa zo základných (odvodených) jednotiek pomocou def. vzťahov a sú koherentné vzhľadom na základné (odvodené) jednotky.

d) vedľajšie

napr. minúta (min), liter (l)

e) násobky

spravidla sa tvoria podľa tretej mocniny desiatich (10^3), pričom sa používajú predpony napr. **m, μ , n, p, f, a, k, M, G, T, P, E**

3. Definujte vektor rýchlosti a zrýchlenia.

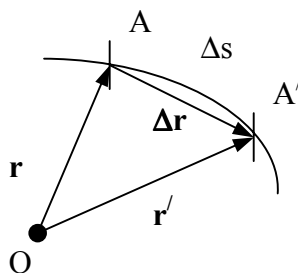
Dráha pohybu

Pri mech. pohybe sledujeme, ako sa mení jeho poloha vzhľadom na vzťažný bod.

V teoret. úvahách vo fyzike používame na tento účel tzv. *polohový vektor* $\mathbf{r}$.

Rýchlosť pohybu $\mathbf{v}$;

Obr. 4



$\Delta \mathbf{r}$ – zmena veľkosti
polohového vektora
 Δt – časová zmena
 $\mathbf{v}$ – okamžitá rýchlosť

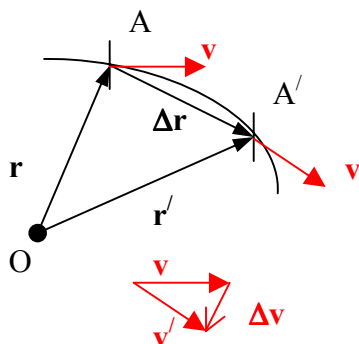
Označme $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}$ a $t' - t = \Delta t$
potom:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, v = |\vec{v}| = \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

Jednotka [m . s⁻¹]

Zrýchlenie $\mathbf{a}$;

Obr. 5



$\Delta \mathbf{v}$ – zmena veľkosti
rýchlosti za čas Δt
zrýchlenie a) dostredivé
b) tangenciálne

Označme $\mathbf{v}' - \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}$ a $t' - t = \Delta t$
potom:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Jednotka [m . s⁻²]

4. Definujte vektor uhlovej rýchlosti a uhlového zrýchlenia.

Uhlová rýchlosť ω ;

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}$$

Pre pohyb po kružnici platí:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_0, \alpha = \omega_0 \cdot t$$

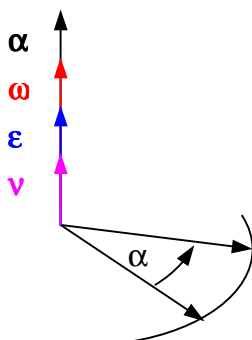
, keď predpokladáme že pre $t = 0$ je $\alpha = 0$, je možné písať:

$$s = R \cdot \omega$$

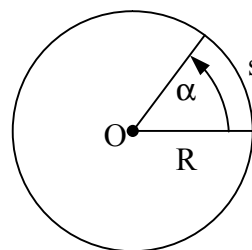
Pre veľkosť rýchlosti v , ktorou sa bod pohybuje po kružnici, platí

$$v = \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\alpha}{dt} = R \cdot \omega$$

Obr. 6



Obr. 7



Uhlové zrýchlenie ϵ ;

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\alpha}}{dt^2}$$

ak $\epsilon = 0$, potom ide o rovnomerný pohyb bodu po kružnici

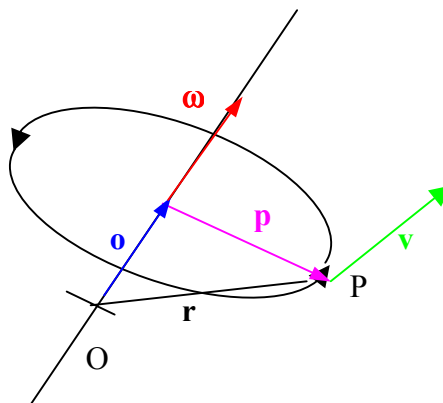
ak $\epsilon < 0$, potom ide o rovnomerne spomalený pohyb bodu po kružnici

ak $\epsilon > 0$, potom ide o rovnomerne zrýchlený pohyb bodu po kružnici

Jednotka ϵ [rad/s², (rozmer: s⁻²)], ω [rad/s, (rozmer s⁻¹)]

5. Vyjadrite rýchlosť a zrýchlenie pre všeobecný prípad pohybu bodu po kružnici.

Obr. 8



Rýchlosť $\vec{v}$;

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{p} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{o}) = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\omega} \parallel \vec{o}$$

Zrýchlenie $\vec{a}$;

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

6. Napíšte vzťah, ktorý vyjadruje rozklad zrýchlenia na tangenciálnu a normálnu zložku.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}; \quad d\vec{\tau} = -\frac{1}{R} \cdot ds \cdot \vec{\rho}$$

čiže môžeme písať

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} - \frac{1}{R} v \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\rho} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} - \frac{v^2}{R} \cdot \vec{\rho}$$

teda

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}; \quad \vec{a}_n = -\frac{v^2}{R} \cdot \vec{\rho}$$

pre a platí

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Vid' obr. 1,2 časť Teoretické otázky

7. Sformulujte Newtonove pohybové zákony.

Prvý Newtonov pohybový zákon (princíp zotrvačnosti):

Teleso, ktoré je v pokoji, alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, zotrúva vo svojom pohybovom stave, kým nie je prinútené vplyvom nejakých interakcií (síl) svoj pohybový stav zmeniť.

Platnosť tohto zákona je viazaná na tzv. *inerciálne sústavy*.

Druhý Newtonov pohybový zákon (princíp sily):

Zavedieme veličinu, ktorou môžeme kvantitatívne ohodnotiť mech. pohyb, čiže *hybnosť* def. vzťahom :

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$$

Potom II. N.Z. môžeme definovať takto :

Sila pôsobiaca na hmotný bod sa rovná časovej zmene hybnosti hmotného bodu, ktorú vyvolala.

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}, \text{ ak } m = \text{konšt.}$$

Tretí Newtonov pohybový zákon (princíp akcie – reakcie):

(nie je vždy dostatočný !)

Sily, ktorými na seba navzájom pôsobia dve telesá, sú rovnako veľké a opačného smeru.

$$\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}$$

Jednotka $\mathbf{p}$ [m. kg .s⁻¹], $\mathbf{f}$ [N , (rozmer m.kg.s⁻²)]

8. Definujte impulz sily a vyjadrite jeho súvis s celkovou zmenou hybnosti.

Impulz sily $\mathbf{I}$:

- je to časový účinok sily def. vzťahom :

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{f} \cdot dt = \int_0^t d(m \cdot \vec{v}) = \Delta \vec{p}, \text{ pričom}$$

integrujeme cez celý časový úsek, za ktorý účinok sily skúmame.

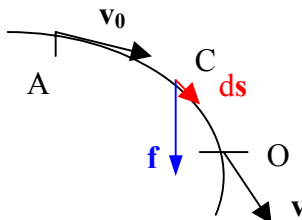
Z predchádzajúceho vzťahu vidíme, že impulz sily $\mathbf{I}$ sa rovná (ak $m = \text{konšt.}$) zmene hybnosti $\mathbf{p}$

Jednotka $\mathbf{I}$ [N. s, (rozmer kg. m. s⁻¹)]

9. Definujte prácu sily, definujte kinetickú energiu

Kinetická energia E_k (W_k , U_k):

Obr. 9



$$\int \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{v_0}^v m \cdot v \cdot dv = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 \quad 1.)$$

na pravej strane rov. 1.) je zmena veličiny E_k , ktorú nazývame *kinetická energia hmotného bodu*. Čiže E_k je def.

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Práca sily A :

na ľavej strane rov. 1.) je veličina

$$A = \int \vec{f} \cdot d\vec{s}, \quad 2.)$$

t.j. krivkový integrál sily $\vec{f}$ na úseku OA uvedenej dráhy (obr. 9). Vzťah 2.) definuje fyz. veličinu *prácu*.

Obsah rovnice 1.) môžeme vyjadriť takto:

Zmena kinetickej energie hmotného bodu, ktorá sa realizuje na istom úseku dráhy pohybu, rovná sa práci, ktorú na tomto úseku dráhy pohybu vykonala sila $\vec{f}$ pôsobiaca počas pohybu na hmotný bod.

Jednotka E_k aj A [J, (rozmer $m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$)]

10. Vyjadrite výkon sily. Ako je definovaná účinnosť ?

Výkon P :

def. vzťahom :

$$P = \frac{dA}{dt},$$

čiže vyjadruje vykonanú prácu za jednotku času.

Účinnosť η :

$$\eta = \frac{P}{P_p} \cdot 100 = \frac{A}{A_0} \cdot 100 < 100 \%$$

P – výkon

P_p – príkon

A – práca potrebná

A_0 – práca vynaložená

Jednotka P [W , (rozmer $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$)], η [%]

11. Definujte moment sily a moment hybnosti.

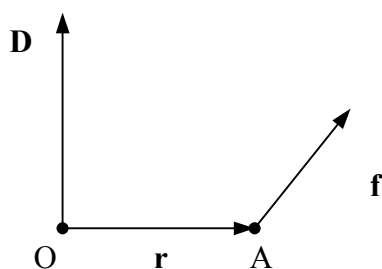
Moment sily D (M) :

Ako vieme III. N.Z. nevyjadruje celkom skutočnosť (obsahuje implicitné tvrdenie, že sila $\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}$, keď obidve meriame v tom istom okamihu, čo odporuje faktu, že teleso sa nepodrobuje účinku sily vyvolanej iným telesom ihneď, ale až po konečnom časovom intervale).

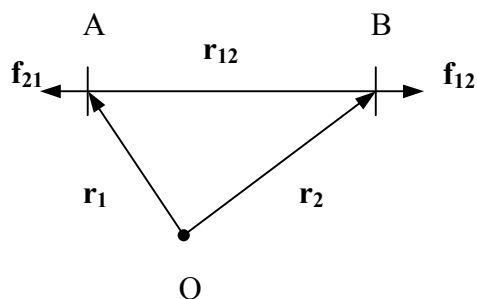
Vzťah $\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}$, nevyjadruje ten fakt, že sily $\mathbf{f}_{12}$ a $\mathbf{f}_{21}$ pôsobia v spoločnej priamke. Aby bola táto okolnosť vyjadrená je zavedená veličina *moment sily D* definovaný vzťahom:

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{f},$$

Obr.10



Obr.11



$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{21} = - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{12} , D_{21} = - D_{12} , 1.)$$

rovnica 1.) už danú skutočnosť, že sily $\mathbf{f}_{12}$ a $\mathbf{f}_{21}$ pôsobia v spoločnej priamke vyjadruje.

Moment hybnosti $\mathbf{G}$ (L):

- je definovaný:

$$\vec{G} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}, \text{ pričom platí}$$

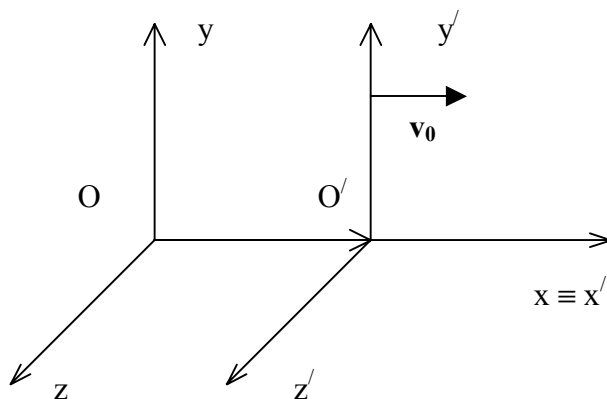
$$\vec{D} = \frac{d\vec{G}}{dt}, \text{ teda } \vec{G} = \int \vec{D} \cdot dt$$

Význam veličín $\mathbf{p}$ a $\mathbf{G}$ spočíva v tom, že v izolovaných sústavách platia princípy ich zachovania.

Jednotka D [N.m, (rozmer $m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$)], G [$kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$]

12. Napíšte Galileiho transformáciu a odpovedajúci zákon skladania rýchlostí.

Obr.12



Prechod z čiarkovanej inerciálnej sústavy sa realizuje tzv. Galileiho transformáciami:

$$t = t', x = x' + v_0 \cdot t, y = y', z = z'$$

Z nich bezprostredne vyplýva zákon skladania rýchlostí:

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{x}{t'} = \frac{x'}{t'} + v_0 = v'_x + v_0, \text{ alebo vektorovo}$$

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v_0}$$

13. Napíšte Lorentzove transformácie.

Nesúlads medzi Galileiho transformáciami a Maxwellovými rovnicami elektrodynamiky podnietilo preskúmanie Galileiho transformácií, pričom sa došlo k záveru že Galileiho transformácie nevyjadrujú skutočnosť pri skladaní vysokých rýchlostí.

Lorentzove transformácie:

Maxwellove rovnice sú invariantné práve oproti nasledujúcim transformáciám (Lorentzove):

$$x' = \frac{x - v_0 \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}}; y' = y; z' = z$$

$$\beta = \frac{v_0}{c}, \text{ kde } \begin{array}{l} v_0 - \text{je rýchlosť, akou sa pohybuje teleso} \\ c - \text{je rýchlosť šírenia sa svetla (} c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \text{ , presnejšie } 299.792.458 \pm 1 \text{ m.s}^{-1} \text{ vo vákuu) } \end{array}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v_0 \cdot x}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

Bolo nutné zavrhnúť predpoklad, že hmotnosť je konštantná, lebo závisí od mech. pohybu podľa daného vzťahu:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ kde } m_0 \text{ je tzv. pokojová hmotnosť}$$

Z daných transformácií vyplýva, že rýchlosť svetla je *hraničnou* rýchlosťou materiálnych objektov v prírode.

14. Čo rozumiete pod kontrakciou dĺžky a dilatáciou času ?

Kontrakcia dĺžok (-y)

– je to relatívna zmena (kontrakcia – skrátenie) pozorovanej dĺžky (napr. tyče) v sústave, ktorá sa pohybuje rýchlosťou v_0 oproti inej sústave (pozdĺž spoločnej osi $x \equiv x'$) vzhľadom na ktorú je tyč nepohyblivá (v pokoji), pričom toto skrátenie je tým väčšie čím sa rýchlosť v_0 viac blíži k rýchlosti svetla vo vákuu.

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2}, \text{ kde } l_0 \text{ je pokojová dĺžka tyče}$$

Dilatácia času

– je to predĺženie časového intervalu vymedzujúceho dve udalosti, ktoré sa udiali v pohybujúcej sa sústave rýchlosťou v_0 , ak pozorujeme dané udalosti zo sústavy, ktorá je v rel. pokoji.

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ kde } t_0 \text{ je vlastný časový interval}$$

15. Napíšte vzťah pre sčítanie rýchlostí v špeciálnej teórii relativity.

Nech sa vzťažná sústava S' pohybuje vzhľadom na sústavu S konštantnou rýchlosťou v v smere spoločnej osi $x \equiv x'$.

Vzhľadom na sústavu S sa pohybuje nejaký bod rýchlosťou v_x . Rýchlosť v'_x , ktorou sa hmotný bod pohybuje oproti sústave S' je daný vzťahom:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x \cdot v}{c^2}}$$

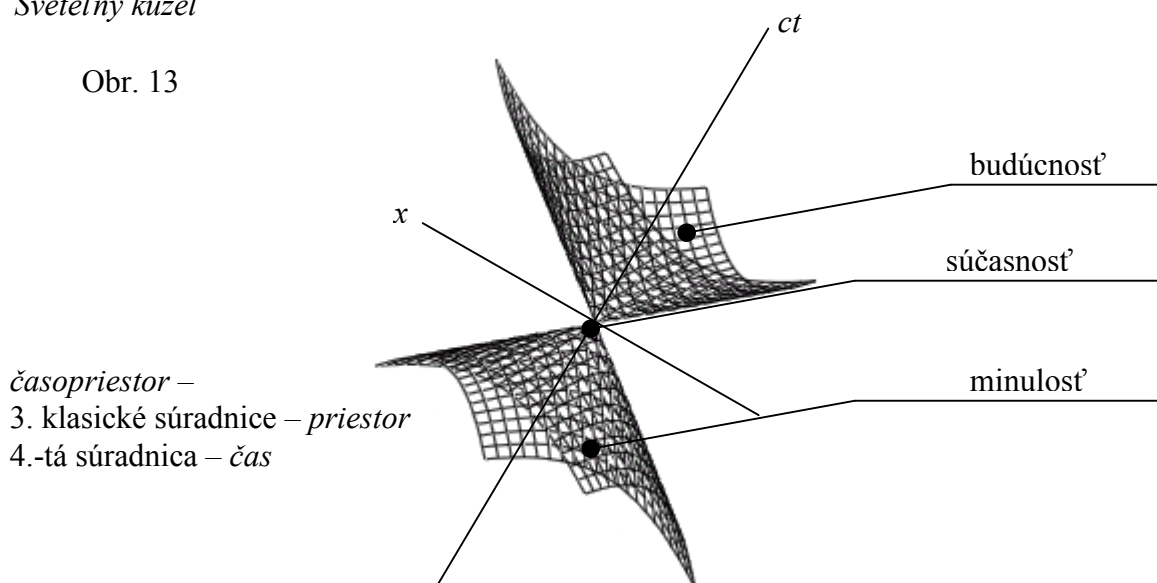
Pre výpočet rýchlosti v_x , platí vzťah :

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x \cdot v}{c^2}}$$

16. Charakterizujte časopriestor. Aké hodnoty môže nadobúdať priestorovo – časová odľahlosť?

Svetelný kužeľ

Obr. 13



$$\vec{r}^x = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + \omega\vec{l}, \omega = i.c.t$$

$$d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \cdot \Delta t^2$$

Ak $d^2 > 0 \Rightarrow v > c \Rightarrow$ potom neexistuje súvislosť medzi udalosťami

Ak $d^2 < 0 \Rightarrow v < c \Rightarrow$ dve udalosti môžu, ale aj nemusia kauzálne súvisieť

Ak $d^2 = 0 \Rightarrow v = c \Rightarrow$ udalosti sú spojené svetelným lúčom

17. Aké sú dôsledky Lorentzových transformácií na dynamické veličiny (hybnosť, energia)?

Ako vieme z klasickej fyziky podľa II. N.Z. platí:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}),$$

Teraz však platí:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ teda } \vec{p} = m \cdot \vec{v} = \frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ak prepíšeme vzťah pre hmotnosť na mocninový rad t.j.:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^4}{c^4} + \dots\right)$$

Pri pomerne malých hodnotách sa s dobrou presnosťou možno obmedziť na prvé dva členy radu:

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2 \cdot \frac{1}{c^2},$$

Vzťahujme teraz celú úvahu na jednu časticu napr. molekulu plynu potom z klasickej fyziky vieme že $\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$ je kinetická energia molekuly plynu teda:

$$m = m_0 + \frac{U_k}{c^2}$$

$$m - m_0 = \frac{U_k}{c^2}, \text{ čo je}$$

$$\Delta m = \frac{U_k}{c^2}$$

prírastok hmotnosti molekuly plynu rovnajúcemu sa prírastku kinetickej energie delenej štvorcem rýchlosti svetla.

Podobný myšlienkový pokus viedol Einsteina k záveru, že hmotnosť každého materiálneho objektu možno vyjadriť ako podiel celkovej energie a c^2 ,

$$m = \frac{U}{c^2}, U = m \cdot c^2$$

Vzťah $U = m \cdot c^2$ vyjadruje vzájomný súvis medzi energiou a hmotnosťou akéhokoľvek materiálneho objektu.

18. Napíšte Newtonov gravitačný zákon a definujte vektor intenzity gravitačného poľa !

Všeobecný Newtonov gravitačný zákon:

Dva hmotné body s hmotnosťami m_1 a m_2 , ktorých vzájomná vzdialenosť je r , pôsobia na seba príťažlivými silami, spadajúcimi do spojnice bodov, s hodnotou

$$f = \kappa \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

alebo matematicky vo vektorovom tvare:

$$\vec{f}_{12} = -\kappa \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r}_{12},$$

znamienko „-“ hovorí o príťažlivej sile.

Intenzita gravitačného poľa E :

v istom mieste gravitačného poľa ju definujeme ako podiel sily f , ktorá v danom mieste poľa pôsobí na hmotný bod s hmotnosťou m , a hmotnosti m :

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{m} = \frac{-\kappa \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r}}{m} = -\kappa \cdot \frac{M}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Jednotka E [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$]

19. Definujte potenciálnu energiu v konzervatívnom poli. Definujte potenciál v gravitačnom poli !

Práca v konzervatívnom poli:

Konzervatívne pole je také pole, ktorého sily nie sú funkciami času, závisia iba od polohy.

Pre prácu v takomto poli platí vzťah:

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$$

- práca vykonaná po uzavretej ploche sa rovná 0
- nezávisí na tvare dráhy, iba na počiatočnej a konečnej polohe

Potenciálna energia E_p :

Ako vieme práca je def.:

$$A = \int_S \vec{f} \cdot d\vec{r}, \text{ pričom } \vec{f} = -\kappa \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r}$$

čiže:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -\kappa \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\kappa \cdot m \cdot M \cdot \int_{r_1}^{r_2} \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{r^3} = -\kappa \cdot m \cdot M \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\kappa \cdot m \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -\kappa \cdot m \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

lebo $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$

$\Rightarrow$, že $E_p = k \cdot \frac{m \cdot M}{r}$, prácu poľa sme vyjadrili ako rozdiel pot. energií

(podľa správnosti by sa mala k výrazu pre pot. energiu pripočítavať ešte int. konšt. C, ale tá zo zač. podmienok vyjde rovná nule.)

$$A = (E_{p1} - E_{p2}) \Rightarrow A = -\Delta E_p$$

Gravitačné pole koná prácu na úkor svojej potenciálnej energie.

Potenciál gravitačného poľa φ (V):

def:

$$\varphi = \frac{E_p}{m'}, \text{ kde } m' \text{ je hmotnosť hmotného bodu}$$

Pre potenciál platí princíp superpozície.

Jednotka φ [$m^2 \cdot s^{-2}$]

20. Vyjadrite vzťah intenzity a potenciálu gravitačného poľa ! Vyjadrite princíp superpozície pre gravitačné pole !

Vzťah medzi intenzitou a potenciálom GP:

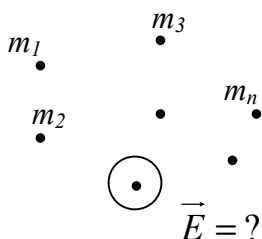
$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \quad (-\nabla\varphi)$$

Princíp superpozície (skladania):

- môžeme povedať, že v lineárnej sústave sa účinok súčtu nezávislých príčin rovná súčtu účinkov jednotlivých príčin pôsobiacich samostatne.

a)

Obr. 14



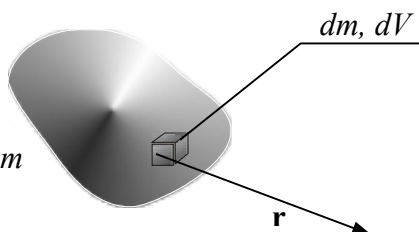
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

$\vec{E} = ?$

b)

Obr. 15

teleso o
hmotnosti m



$$\vec{E} = -\kappa \int_V \frac{\rho \cdot dV}{r^3} \cdot \vec{r}$$

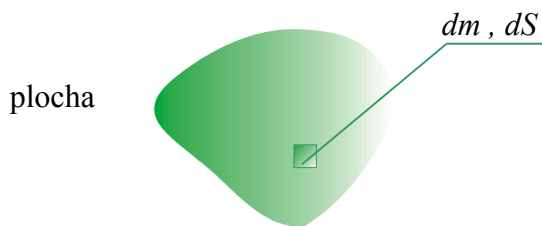
$$dm = \rho \cdot dV$$

- integrujeme cez celý objem telesa

ρ - hustota

c)

Obr. 16



$$\vec{E} = -\kappa \int_s \frac{\sigma \cdot dS}{r^3} \cdot \vec{r}$$

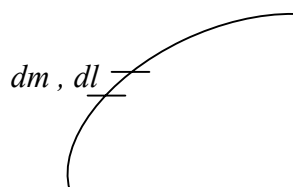
$$dm = \sigma \cdot dS$$

σ – plošná
hustota

- integrujeme cez celú plochu

d)

Obr. 17



$$\vec{E} = -\kappa \int_l \frac{\gamma \cdot dl}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$dm = \gamma \cdot dl$$

21. Vyjadrite tok vektora intenzity gravitačného poľa uzavretou plochou !

- je definovaný :

$$T = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\kappa \cdot M \cdot \int_0^{4\pi} d\omega = -4\pi \cdot \kappa \cdot M$$

22. Napíšte pohybové rovnice pre sústavu hmotných bodov (prvá a druhá veta impulzová).

Prvá veta impulzová:

Predstavme si tuhé teleso, ako sústavu hmotných bodov. Môžeme o ňom napísať:

$$m_i \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i$$

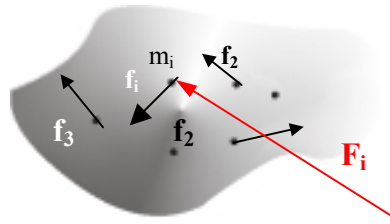
kde m_i je hmotnosť i – teho vnútorného bodu

$\mathbf{a}_i$ je zrýchlenie vnútorného bodu

$\mathbf{f}_i$ je výslednica síl, ktorou ostatné body pôsobia na i – ty bod

$\mathbf{F}_i$ je výslednica vonkajších síl, ktorá pôsobí na i – ty bod

Obr. 18



Je zrejmé, že môžeme napísať:

$$\sum m_i \cdot \mathbf{a}_i = \sum \mathbf{f}_i + \sum \mathbf{F}_i \quad (1.)$$

Z princípu akcie – reakcie vyplýva, že $\sum \mathbf{f}_i = 0$,

Je jasné, že $\sum m_i = m$, a keďže pohyb telesa je postupný môžeme napísať $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}$ teda:

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i = \vec{F} \quad (2.)$$

Upravujme rovnicu 1.) trochu inak ak $\mathbf{a}_i = d\mathbf{v}_i / dt$ potom môžeme napísať:

$$\sum m_i \cdot \vec{a}_i = \sum m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \sum m_i \vec{v}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Táto rovnica matematicky vyjadruje 1. vetu impulzovú:

Vektorový súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso sa rovná časovej zmene celkovej hybnosti telesa.

pre izolovanú sústavu platí :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \text{konšt.}$$

Druhá veta impulzová:

Uvažujme jediný hmotný bod. Jeho pohybová rovnica je $\mathbf{f} = m \cdot \mathbf{a} = m \cdot d\mathbf{v} / dt$. Násobme vektorovo zľava vektorom $\mathbf{r}$, ktorý predstavuje polohový vektor hmot. bodu vzhľadom na vzťažný bod O.

Teda :

$$\vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})$$

Vieme, že $\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{D}$ a $\mathbf{r} \times m \cdot \mathbf{v} = \mathbf{G}$ čiže môžeme písať:

$$\vec{D} = \frac{d\vec{G}}{dt} \text{ - mat. vyjadrenie 2.V.I}$$

Dá sa dokázať, že daný vzťah platí aj pre sústavu hmotných bodov, a preto môžeme napísať vyjadrenie druhej vety impulzovej:

Vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso, alebo sústavu hmotných bodov sa rovná časovej zmene momentu hybnosti telesa resp. sústavy.

V prípade izolovanej sústavy niet vonkajších síl, takže $\mathbf{D} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$ a teda :

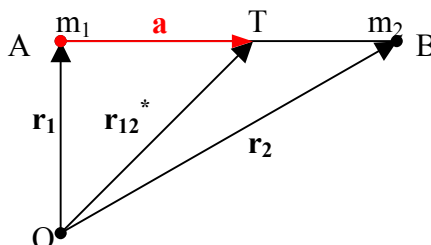
$$\frac{d\vec{G}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{G} = \text{konšt.}$$

23. Uveďte definíciu ťažiska. Napíšte vety o ťažisku.

Ťažisko:

Pod *ťažiskom* (*hmotným stredom*) sústavy dvoch hmotných bodov rozumieme taký bod T na ich spojnici (obr.19), ktorý túto spojnicu delí v nepriamom pomere hmotností uvedených hmotných bodov.

Obr.19



Platí teda:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{m_2}{m_1}$$

Po viacerých úpravách by sme prideme k danému vzťahu pre vektor $\mathbf{r}_{12}^*$, ktorý teraz napíšme všeobecne:

$$\vec{r}^* = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i},$$

pre súradnice ťažiska platia analogické vzťahy:

$$x^* = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m_i}, \quad y^* = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i}, \quad z^* = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{\sum m_i}$$

Ak pokladáme teleso, za útvar so spojitou rozloženou hmotnosťou, potom sa sumácie v predošlých vzťahoch zmenia na integrály a bude platiť:

$$\vec{r}^* = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

kde príslušné integrácie treba vykonať cez celé teleso. Ak vyjadríme $\rho = dm / d\tau$ potom treba vykonať príslušné integrácie cez celý objem telesa.

Veta o pohybe ťažiska:

(pre danú tematiku vid' otázku 22. prvá veta impulzová po rovniciu 2.) danej otázky)

Teda :

$$\sum m_i \vec{a}_i = m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i = \vec{F} \quad 1.)$$

Pri zložitejšom pohybe telesa majú jeho jednotlivé body rozličné rýchlosti $\mathbf{v}_i$ a rozličné zrýchlenia $\mathbf{a}_i$. Ale aj v tomto prípade sa dá rovnica 1.) upraviť na jednoduchší tvar a to nasledovne:

Zo vzťahu pre polohový vektor ťažiska sústavy hmotných bodov:

$$\vec{r}^* = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

možno povedať, že $\sum m_i = m$ teda:

$$\begin{aligned} \sum m_i \cdot \vec{r}^* &= \sum m_i \cdot \vec{r}_i \\ m \cdot \vec{r}^* &= \sum m_i \cdot \vec{r}_i \quad 2.) \end{aligned}$$

rovniciu 2.) dvakrát derivujeme podľa času:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 \vec{r}^*}{dt^2} &= \sum m_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ m \cdot \vec{a}^* &= \sum m_i \cdot \vec{a}_i \\ m \cdot \vec{a}^* &= \vec{F} \quad 3.) \end{aligned}$$

Rovnica 3.) je matematickým vyjadrením vety o pohybe ťažiska:

Ťažisko sústavy hmotných bodov, resp. telesa sa pohybuje tak, ako by sa pohyboval bod s hmotnosťou celej sústavy, resp. telesa, keby naň pôsobila sila rovnajúca sa vektorovému súčtu všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu, resp. na teleso.

24. Definujte moment zotrvačnosti. Napíšte Steinerovu vetu.

Moment zotrvačnosti $I(J)$:

def:

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2$$

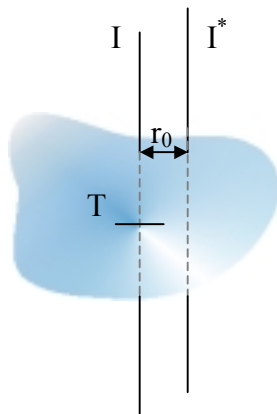
ak predpokladáme, že hmotnosť telesa je spojito rozložená v celom objeme telesa sumácia prejde v integrál:

$$I = \int r_i^2 dm$$

čo je moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania.

Steinerova veta:

Obr.20



$$I = I^* + m \cdot r_0^2 \quad 1.)$$

Rovnica 1.) je matematickým vyjadrením Steinerovej vety:

Moment zotrvačnosti I telesa vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom sa rovná momentu zotrvačnosti I^ vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom a s danou osou rovnobežnú, zväčšenú o $m \cdot r_0^2$.*

Kde m je hmotnosť telesa a r_0 je vzájomná vzdialenosť spomínaných os
Jednotka I [kg.m²]

25. Napíšte podmienky rovnováhy tuhého telesa !

Prvá a druhá veta imp. dovedna celkom charakterizujú pohyb tuhého telesa t.j.:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{D} = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

Keď je teleso v pokoji platia tieto dve podmienky rovnováhy:

a) $\sum \vec{F}_i = 0$

Keď je teleso v rovnováhe, súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso sa rovná nule.

b) $\sum \vec{D}_i = 0$

Keď je teleso v rovnováhe, súčet momentov všetkých vonkajších síl vzhľadom na ľubovoľný bod sa rovná nule.

26. Vyjadrite kinetickú energiu pre všeobecný prípad pohybu tuhého telesa !

Mechanický (ľubovoľne zložitý) pohyb telesa sa dá rozložiť na súčet *vhodných postupných (translačných) a otáčavých (rotačných)* pohybov. Vieme, že pri pohybe translačnom je kinetická energia E_k vyjadrená nasledujúcim vzťahom:

$$E_k = \frac{1}{2} . m . v^2$$

Pochopiteľne ak teleso vykonáva ešte rotačný pohyb je vzťah pre kin. energiu zložitejší. Nech teleso vykonáva otáčavý pohyb okolo svojej osi a súčasne sa jeho ťažisko pohybuje po nejakej rovinnej krivke. Nech rýchlosť nejakého i – teho hmotného elementu je $\vec{v}_i$ a rýchlosť ťažiska je $\vec{v}^*$ potom ak rýchlosť i – teho elementu vzhľadom na ťažisko označíme $\vec{v}'_i$ tak platí:

$$\vec{v}_i = \vec{v}^* + \vec{v}'_i \quad 1.)$$

Kinet. energia i – teho hmotného elementu s hmotnosťou m_i je :

$$E_{k_i} = \frac{1}{2} . m_i . v_i^2$$

Po dosadení 1.) do predošlého vzťahu dostaneme:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v^{*2} + \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i'^2 + m_i \cdot \vec{v}^* \cdot \vec{v}_i'$$

Kinetickú energiu celého telesa potom dostaneme sumáciou :

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \sum_i \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v^{*2} + \sum_i \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i'^2 + \sum_i m_i \cdot \vec{v}^* \cdot \vec{v}_i' \quad 2.)$$

1. 2. 3.

Pre jednotlivé členy rovnice 2.) platí:

1. ak si označíme $\Sigma m_i = M$ čo je celková hmotnosť celej sústavy člen môžeme napísať:

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot v^{*2}$$

2. ak si pozrieme druhý člen môžeme ho napísať v nasledujúcom tvare ako kin. energiu otáčajúceho sa telesa okolo svojej osi:

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \sum_i m_i \cdot r_i^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

čiže :

$$\frac{1}{2} \cdot I^* \cdot \omega^2$$

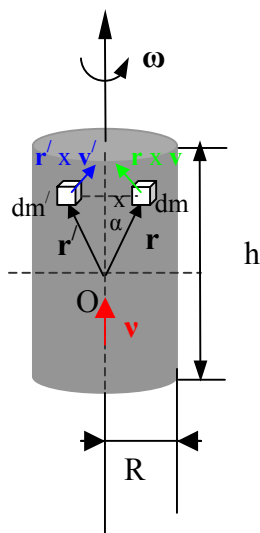
3. Dá sa dokázať, že tretí člen sa rovná nule.

Teda energia telesa konajúceho všeobecný pohyb je:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^{*2} + \frac{1}{2} \cdot I^* \cdot \omega^2$$

27. Vyjadrite moment hybnosti tuhého telesa !
(otáčajúceho sa okolo svojej osi)

Obr.21



Pre moment hybnosti (ak vychádzame z obr. 21) platí :

$$\vec{G} = \int \vec{r} \times \vec{v} . dm$$

Je zrejmé, že k celkovému momentu hybnosti prispievajú len zložky, ktoré sú rovnobežné s vektorom $\vec{\omega} = \omega . \vec{v}$, lebo kolmé zložky sa navzájom kompenzujú. Zložka do osi otáčania vektora, reprezentujúceho príspevok od elementu dm k celk. momentu hybnosti má hodnotu:

$$(\vec{r} \times \vec{v}) . \vec{v} = r . v . \sin \alpha . dm = v . x . dm = x^2 . \omega . dm$$

lebo $x = r . \sin \alpha$ a $v = x . \omega$. Pre vektor $\vec{G}$ platí $\vec{G} = G . \vec{v}$ čiže platí :

$$G = \int x^2 . \omega . dm = \omega . \int x^2 . dm = I . \omega$$

Pre moment hybnosti teda platí:

$$\vec{G} = I . \omega . \vec{v} = I . \vec{\omega}$$

Ak nie sú pri otáčaní splnené tieto podmienky, výraz pre moment hybnosti je omnoho zložitejší.

28. Napíšte pohybovú rovnicu pre otáčanie tuhého telesa okolo pevnej osi účinkom vonkajších momentov !

Pohybová rovnica telesa konajúceho otáčavý pohyb bezprostredne vyplýva z druhej vety impulzovej, ktorej matematické vyjadrenie je:

$\vec{D} = \frac{d\vec{G}}{dt}$ čiže, ak dosadíme predchádzajúci vzťah (z otázky 27.) môžeme písať:

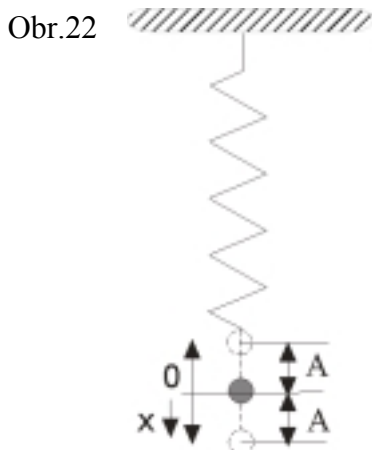
$$\vec{D} = \frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon}$$

Ak je teleso symetrické môžeme písať skalárne:

$$D = I\varepsilon$$

(iné odvodenie pozri *Teoretické otázky č.10*)

29. Napíšte pohybovú rovnicu pre netlmený harmonický pohyb ! Napíšte všeobecné riešenie!



Netlmené kmity:

Príkladom lineárneho oscilátora môže, byť napr. pohyb telesa zaveseného na pružine. V takomto prípade pôsobí na teleso sila rovná:

$$f = -k \cdot x, \quad k > 0, \quad k = \text{konšt.}$$

Pohybová rovnica takéhoto telesa je:

$$m \cdot a = -k \cdot x$$

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x$$

kde $\omega^2 = k / m$

$\omega = d\alpha / dt$ – kruhová frekvencia

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\alpha = \omega \cdot t$$

Pre rýchlosť v platí

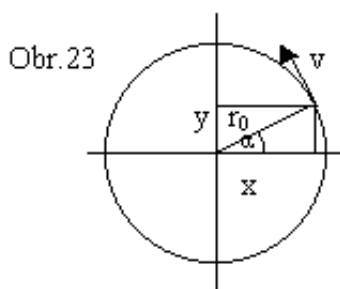
$$v = \frac{dx}{dt} = -r_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

Riešením takejto rovnice je:

$$x = r_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (\text{alebo } x = A \cdot \cos(\omega \cdot t))$$

$$y = r_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

čo sa dá nakresliť i takto:



30. Napíšte pohybovú rovnicu pre tlmený kmitavý pohyb ! Definujte logaritmický dekrement útlmu!

Kmitavý pohyb, ktorý sa realizuje iba účinkom sily $f = -k \cdot x$, nazývame voľnými kmitmi, v skutočnosti sa k takémuto stavu môžeme len priblížiť. Na teleso konajúce kmitavý pohyb okrem sily $f_1 = -k \cdot x$ pôsobí i sila, ktorá je priamoúmerná rýchlosti a pôsobí proti pohybu teda sila $f_2 = -r \cdot v$.

Teda **pohybová rovnica** má tvar:

$$\begin{aligned} F &= f_1 + f_2 \\ m \cdot a &= -kx - r \cdot v \\ m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx - r \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Ak si napíšeme :

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \frac{r}{m} = 2 \cdot b$$

môžeme písať:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2 \cdot b \cdot \frac{dx}{dt}, \text{ kde 1.)}$$

ω_0^2 – kruhová frekvencia a b – je koeficient útlmu.

Riešime pomocou substitúcie:

$$x = z \cdot e^{-b \cdot t}, \text{ kde } z = z(t)$$

Dosadením do 1.) dostaneme vzťah:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 \cdot z, \text{ kde}$$

$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2$, a ktorého riešením v závislosti v akom vzájomnom pomere sú veličiny ω_0 a b sú vzťahy:

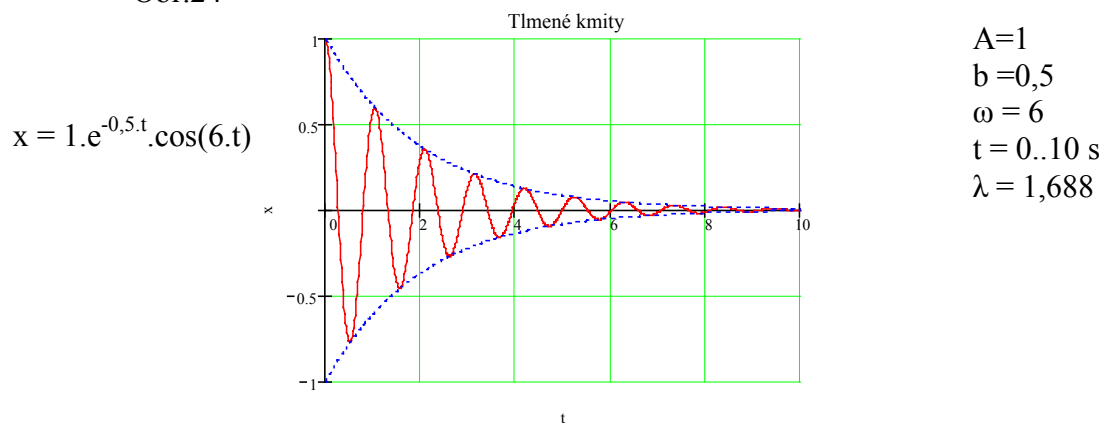
$$\text{a) } z = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow x = A \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) = A^* \cdot \cos(\omega \cdot t), \text{ kde } A^* = A \cdot e^{-b \cdot t}$$

tu je definovaný aj **logaritmický dekrement útlmu** t.j.:

$$\lambda = \frac{A^*(t)}{A^*(t+T)} = \frac{A \cdot e^{-b \cdot t}}{A \cdot e^{-b \cdot (t+T)}} = e^{-b \cdot T}, \text{ kde } T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \text{ je doba kmitu.}$$

Časový priebeh kmitov viď obr. 24

Obr.24



b) $x = C_1 \cdot e^{-\beta_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\beta_2 \cdot t}$, kde $\beta_1 = b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ $\beta_2 = b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$

- je to pohyb *aperiodický*, pričom int. konštanty C_1 a C_2 vypočítame zo začiatkových podmienok
- v zjednodušenom prípade sa toto riešenie bez int. konštánt uvádza takto:

$$x = A \cdot e^{-b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \cdot t}$$

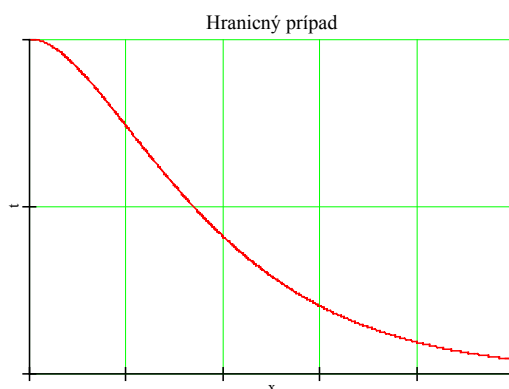
c) $x = A \cdot e^{-b \cdot t} (1 + b \cdot t)$

-je to *hraničný* prípad medzi periodickým a aperiodickým pohybom oscilátora.
(vid'. obr. 24)

-podobne, ako v prípade b), je riešenie v zjednodušenom prípade:

$$x = A \cdot e^{-b \cdot t}$$

Obr.25



31. Napíšte pohybovú rovnicu pre tlmený harmonický oscilátor s vynútenými kmitmi.
Kedy je oscilátor v rezonancii?

Harmonický oscilátor s vynútenými kmitmi:

V tomto prípade okrem síl f_1 a f_2 pôsobí ešte sila f_3 , ktorú nazývame *vynucujúca sila*, pričom táto sila sa s časom periodicky mení.

Teda platí:

$$f_1 = -k \cdot x, f_2 = -r \cdot dx/dt, f_3 = H \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

V takomto prípade bude mať pohybová rovnica tvar:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x - r \cdot \frac{dx}{dt} + H \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

Ak označíme $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{r}{m} = 2 \cdot b$, $\frac{H}{m} = h$ môžeme písať:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot x - 2 \cdot b \cdot \frac{dx}{dt} + h \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

Oficiálne je to diferenciálna rovnica druhého rádu s konšt. koeficientmi s pravou stranou (riešenie neodvádzam).

Riešenie po viacerých úpravách:

$$x = A \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) + B \cdot \cos(\Omega \cdot t + \beta) \quad 1.)$$

kde:

$$B = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot b^2 \cdot \Omega^2}} \text{ a } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{2 \cdot b \cdot \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

V ustálenom stave stačí uvažovať iba druhý člen rovnice 1.) (lebo prvý člen po krátkom čase prakticky vymizne.)

Rezonancia :

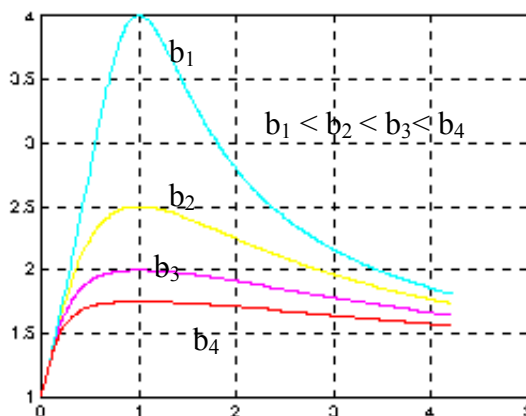
Nastáva vtedy, keď sa vlastná frekvencia oscilátora ω_0 rovná frekvencii Ω vynucujúcej sily pričom amplitúda závisí od odporu prostredia (ak tlmiaci člen $b = 0$ vtedy je amplitúda maximálna).

Rezonančnú amplitúdu vypočítame podľa vzťahu:

$$A_r = \frac{h}{2 \cdot b \cdot \sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$$

Rezonančné krivky:

Obr.26



32. Definujte základné veličiny pre kmitavý pohyb (amplitúda, frekvencia, perióda, fáza)!

Amplitúda (A, x_0, u_0):

-predstavuje maximálnu výchylku z rovnovážnej polohy pri harmonickom pohybe

Frekvencia (f, ν):

-predstavuje počet kmitov za jednotku času

Perióda (T):

-predstavuje čas, za ktorý sa celý pohyb opakuje

Fáza (φ):

-predstavuje polohu bodu (ak ho premietneme na kružnicu) na začiatku počítania času

33. Napíšte definície relatívneho predĺženia, relatívneho priečného skrátenia, relatívneho posunutia !

Relatívne predĺženie ε :

Účinok vonkajších síl na teleso má za následok deformáciu telies. Deformáciu rozoznávame *plastickú* a *elastickú*. Ak sa zaoberáme špeciálne prípadom deformácie v *ťahu* resp. v *tlaku* stretávame sa tu z pojmom *relatívne predĺženie*, ktoré je mierou deformácie a číselne značí jednotkové predĺženie napr. tyče. Jeho def. je:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \text{ kde } \Delta l = (l - l_0)$$

l_0 – je počiatočná dĺžka (napr. tyče)

l – je konečná dĺžka (napr. po deformácii)

Δl – je relatívna zmena dĺžky l_0

Relatívne priečne skrátenie η :

Pri jednostrannom ťahu, alebo tlaku sa nemení len dĺžka tyče, ale aj jej priečny rozmer d . Je definované:

$$\eta = \frac{\Delta d}{d_0}, \text{ kde } \Delta d = d_0 - d$$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{m} \text{ kde } m \text{ je Poissonova konštanta.}$$

d_0 – je počiatočný priemer (napr. tyče)

d – je konečný priemer (napr. po deformácii)

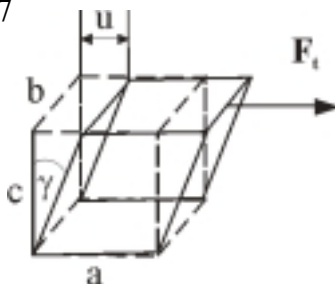
Δd – je relatívna zmena priemeru d_0

Relatívne posunutie γ :

Daná veličina vystupuje pri deformácii v šmyku a je mierou tejto deformácie a je definované:

$$\gamma = \frac{u}{c}$$

Obr.27



34. Definujte ťahové a šmykové napätia! Napíšte Hookov zákon pre ťahové a pre šmykové namáhanie !

Ťahové napätie σ :

Ak sa zaoberáme špeciálnym prípadom deformácie t.j. deformáciou v ťahu resp. tlaku môžeme Hookov zákon vyjadriť nasledovným tvrdením:

Hodnota napätia je priamoúmerná relatívnemu predĺženiu. Čo môžeme zapísať ako:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

σ – napätie v ťahu

E – modul pružnosti v ťahu (Youngov) [Pa]

Šmykové napätie τ :

V tomto tiež špeciálnom prípade Hookov zákon môžeme vyjadriť takto:

Hodnota tangenciálneho napätia τ je priamoúmerná príslušnému relatívnemu posunutiu. Čiže:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

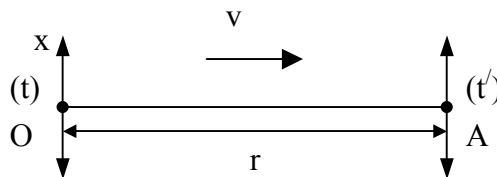
τ – napätie v šmyku

G – modul pružnosti v šmyku [Pa]

Jednotka σ, τ [Pa, rozmer($\text{m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$)]

35. Napíšte vlnovú rovnicu (jednorozmerný prípad), napíšte jej všeobecné riešenie!

Obr.28



Predstavme si nejaké vlnenie postupujúce pozdĺž priamky. Za začiatok si zvolíme napr. bod O, ktorý nech je zdrojom vlnenia, pričom pohyb hmot. bodu v mieste O spĺňa rovnicu:

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Vlna dôjde z bodu O do bodu A za čas $\tau = r / v$. Pre výchylku bodu v bode A môžeme písať:

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t')$$

Pre t' zrejme platí:

$$t' = t - \tau = t - (r / v)$$

Čiže platí :

$$x(r, t) = x_0 \cdot \cos \omega \cdot \left(t - \frac{r}{v} \right)$$

Ak položíme $\omega r / v = 2 \cdot \pi \cdot r / T \cdot v = 2 \cdot \pi \cdot r / \lambda = k \cdot r$ kde $2 \cdot \pi / \lambda = k$ z daného vyplýva, že $v = \omega / k = f \cdot \lambda$.

Teda môžeme napísať:

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot r)$$

Častejšie sa však používa namiesto $x - u$, $x_0 - u_0$ a namiesto $r - x$ teda môžeme napísať:

$$u = u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Vo všeobecnom prípade, ak vlnenie nie je periodické vzťah pre výchylku píšeme takto:

$$u(x, t) = u \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad 7.)$$

$$u(x, t) = u(z)$$

Rovnicu 7.) dvojnásobne zderivujeme najprv podľa t a potom podľa x teda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ak $z = t - x/v$ teda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \left(-\frac{1}{v}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \left(\frac{1}{v^2}\right)$$

Z toho:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- čo je jednorozmerná **vlnová rovnica**. Vo všeobecnosti má vlnová rovnica tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta u, \text{ kde } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

36. Ktoré veličiny charakterizujú rovinnú harmonickú vlnu, ako sú definované ?

u_o - amplitúda

λ – vlnová dĺžka – je to najväčšia vzdialenosť dvoch bodov s rovnakou výchylkou a rýchlosťou v rovnakom čase $\Rightarrow$ rozdiel fáz je 2π .

ω – kruhová (uhlová) frekvencia $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi / T$

k – vlnové číslo $k = 2\pi / \lambda$

v – rýchlosť šírenia vln $v = \omega / k = \lambda / T = \lambda \cdot f$

f – frekvencia

37. Napíšte stavovú rovnicu ideálneho plynu. Ktoré sú ďalšie základné zákony ideálneho plynu ?

Stav určitého množstva ideálneho plynu je charakterizovaný *stavovými* veličinami a to : *objemom V , teplotou T a tlakom* . Pričom na teoretické úvahy používame *absolútnu teplotnú stupnicu*.

Základné zákony ideálneho plynu.

- empiricky objavené.

Boylev – Mariottov zákon – udáva súvis medzi objemom a tlakom, pri stálej teplote pričom sa nemení množstvo plynu.

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 = \text{konšt.}$$

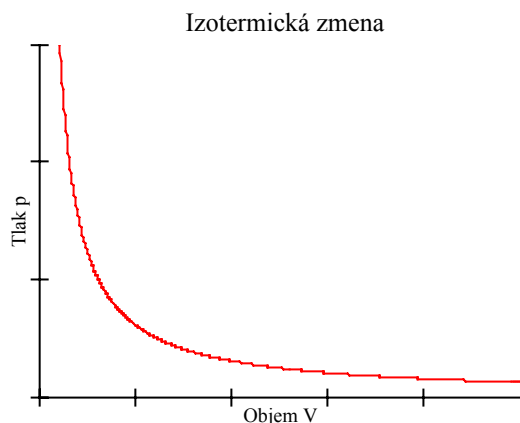
$$T = \text{konšt.}$$

$$m = \text{konšt.}$$

, čiže *izotermická zmena*, pričom grafickú závislosť p od V , je vyjadrená rovnostrannou hyperbolou, ktorá sa nazýva *izoterma*.

p – V diagram

Obr.29



Gay – Lussacove zákony – udávajú závislosť tlaku plynu do teploty pri konštantnom objeme, ako aj závislosť objemu plynu pri konštantnom tlaku . Matematicky ich možno vyjadriť:

$$p = p_0 \cdot (1 + \gamma_v \cdot t)$$

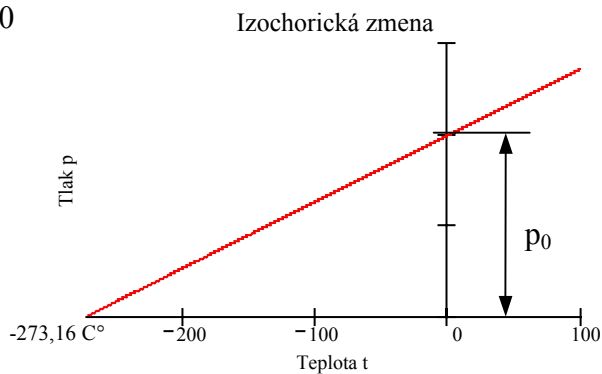
$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma_p \cdot t)$$

$$\gamma_v = \gamma_p = \frac{1}{273} \cdot K^{-1}$$

alebo:

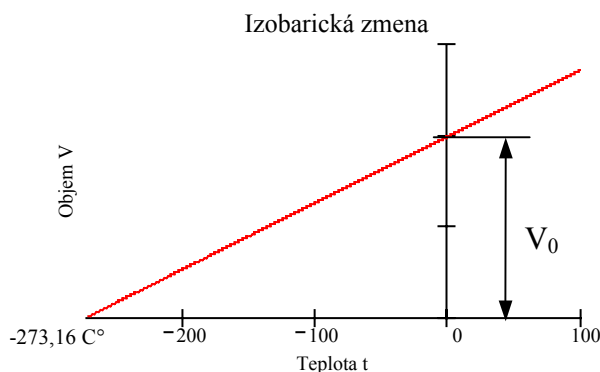
(*izochorický*): $\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = \text{konšt.} \quad V = \text{konšt.}$

Obr.30



(izobariký): $\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = \text{konšt. } p = \text{konšt.}$

Obr.31



Daltonov zákon:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_i = \Sigma p_i$$

Výsledný tlak zmesi navzájom nereagujúcich plynov sa rovná súčtu parciálnych tlakov zložiek zmesi.

Stavová rovnica ideálneho plynu:

$$\frac{p.V}{T} = \text{konšt.}$$

Pre jeden mól id. plynu platí:

$$p.V = R.T$$

Pre n molov plynu potom platí:

$$p.V = n.R.T$$

kde R – je všeobecná plynová konštanta

$$R = 8,314. \text{ K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

38. Definujte počet stupňov voľnosti molekuly! Čo hovorí ekvipartičný teorém ?

Počet stupňov voľnosti (mechanickej sústavy):

Def:

Je to počet nezávislých parametrov (napr. súradníc), ktorých zmeny charakterizujú možné druhy mechanického pohybu tejto sústavy.

Ekvipartičná teoréma (Zákon rovnomerného rozdelenia energie):

V termodynamickej rovnováhe sústavy pri termodynamickej teplote T je energia častíc rovnomerne rozdelená na všetky nezávislé kvadratické zložky (časti, sčítance), z ktorých

sa energia skladá, a to tak, že každá kvadratická zložka energie má strednú hodnotu

$$\text{rovnú } E_1 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T .$$

Pre strednú hodnotu energie jednoatómového plynu môžeme písať:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_x + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_y + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_z = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

Alebo všeobecne:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \cdot i \cdot k \cdot T \text{ kde } i - \text{ je celkový počet kvadratických členov vo výraze pre energiu}$$

k – je Boltzmanova konštanta

T – termodyn. teplota

39. Napíšte stavovú rovnicu reálneho plynu. Čo je to kritická teplota ?

Stavová rovnica reálneho plynu (Van der Waalsova):

$$\left(p + \frac{a \cdot N^2}{V^2} \right) \cdot (V - b \cdot N) = N \cdot k \cdot T, \text{ kde}$$

a – príťažlivé sily molekúl

b – vplyv vlastného objemu molekúl

Kritická teplota:

Vychádza zo série izoterm, ktorých vodorovný úsek, zodpovedajúci kondenzácii sa z rastúcou teplotou skracuje až na nulu. Tento bod sa nazýva *kritický*, a vyznačuje sa kritickým tlakom, kritickým merným objemom a kritickou teplotou, pričom kritická teplota je teplota, ktorú ak prekročíme nepodari sa nám skvapalniť plyn nijakým spôsobom.

40. Akými vzťahmi je popísaná teplotná rozťažnosť látok ?

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + p \cdot \Delta t) \quad p = \frac{\rho_{100} - \rho_0}{\rho_0 \cdot 100}$$

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) \quad \alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \Delta t}$$

$$V = V_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t) = a_0 \cdot b_0 \cdot c_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)^3 \approx V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta t) \quad \beta = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta t}$$

41. Definujte teplo a prácu! Definujte teplotné kapacity pri stálom objeme a stálom tlaku.

Práca plynu:

Platí:

$$dA = -f \cdot dx = -p \cdot S \cdot dx = -p \cdot dV$$

teda :

$$A' = -A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

Teplo:

Platí :

$$dQ = C \cdot dT$$

teda :

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C \cdot dT$$

Teplotné kapacity:

Def:

$$C_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_v$$

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p$$

- pri stálom objeme (V –konšt.) - pri stálom tlaku (p- konšt.)

42. Napíšte Mayerovu rovnicu.

$$C_p = C_v + nR$$

(Odvodenie vid' *Teoretické otázky* 19. odvodenie)

43. Napíšte základné termodynamické zákony (vety) !

Prvá veta termodynamická (I.VT):

Vnútorňú energiu sústavy môžeme meniť konaním práce, alebo dodaním tepla čiže:

$$dU = dQ + dA$$

Druhá veta termodynamická (II.VT):

Existuje niekoľko rovnocenných formulácií tejto vety:

Planckova formulácia:

Nie je možné zostrojiť periodicky pracujúci stroj, ktorý by nič iné nerobil, len by odoberal teplo zo zásobníka a konal rovnocennú prácu.

Ak by daná veta pre stroj neplatila bolo by to *perpetuum mobile druhého druhu*.

Clausiusova formulácia:

Pri styku dvoch telies s rozličnou teplotou, teplo prechádza vždy z telesa teplejšieho na teleso chladnejšie, a nikdy nie naopak.

44. Vyjadrite súvis prírastku entropie s dodaným teplom (termodynamickú definíciu entropie)!

Entropia:

Def:

$S = \int_A^B \frac{dQ}{T}$ pričom pre jej diferenciál platí: $dS = \frac{dQ}{T}$ tento diferenciál je úplný (totálny), ktorého integrál nezávisí na integračnej ceste.

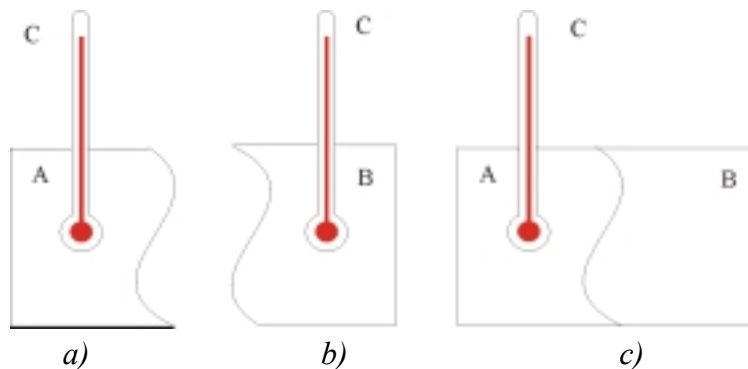
Jednotka S [J.K⁻¹]

45. Napíšte termodynamickú definíciu teploty !

Ak máme zaviesť fyzikálnu veličinu *teplota*, musíme najprv uvážiť kedy možno tvrdiť, že dve makroskopické sústavy majú *rovnakú teplotu*.

Nech existujú dve makroskopické sústavy A a C, B a C, o ktorých možno povedať, že sú v termodynamickej rovnováhe, t.j. ak sa výška ortuťového stĺpca nemení. Prived'me sústavu A a sústavu B do tepelného styku a ak sa výška ortuťového teplomera nezmení (sústava C), sú teda v *termodynamickej rovnováhe*.

Obr. 32



Je zrejmé, že rovnosť dvoch tepelných stavov je *synonymná* z termodynamickou rovnováhou.

Môžeme teda napísať tento tranzitívny zákon:

Ak

$$T_A = T_C \quad \text{a} \quad T_B = T_C \quad \text{potom} \quad T_A = T_B$$

Je jasné, že takáto definícia rovnosti dvoch tepelných stavov nevyžaduje žiadnu teplotnú stupnicu.

V prípade teploty jej priradíme *extenzívnu* veličinu (veličina, ktorej parametre sú aditívne a závisia od veľkosti systému napr. vnútorná energia atď.), ktorej hodnota závisí na stave, ktorý *intenzívna* veličina (ktorou je i teplota) charakterizuje. Takúto extenzívnu veličinu v prípade teploty nazývame *termometrická premenná*. Najjednoduchšou funkčnou závislosťou medzi teplotou a termometrickou premennou je úmernosť:

$$T(X) = b \cdot X$$

Ak má termodynamická premenná hodnotu X_0 pre istý stav zvolenej termodynamickej sústavy, ktorej voľbou prisúdime teplotu T_0 , potom máme:

$$T_0 = T(X_0) = b \cdot X_0 \quad \text{a} \quad b = \frac{T_0}{X_0}$$

Takže, empirická teplotná stupnica je def. vzťahom:

$$T(X) = T_0 \cdot \frac{X}{X_0}$$

Tento vzťah má takú istú formu ako vzťah plynúci z účinnosti tzv. Carnotovho cyklu:

$$T = T_0 \cdot \frac{Q}{|Q_0|} \quad 1.)$$

kde Q – je teplo, ktoré prijme látka vo vratnom Carnotovom cykle od sústavy (telesa) teploty T

Q_0 – je teplo, ktoré látka odovzdá sústave zo základnou teplotou T_0 . Takto definovaná teplotná stupnica má tú vlastnosť, že nezávisí na konkrétnej látke. Zvolíme teraz za základný teplotný stav trojný bod vody a príslušnej teplote podľa dohody priradíme číselnú hodnotu $\{T_0\} = 273,16$, potom teplote určenej vzťahom 1.) hovoríme *termodynamická teplota*, ktorej jednotkou je *kelvin* (K), ktorú SI definuje takto:

Kelvin, jednotka termodynamickej teploty, je $\frac{1}{273,16}$ - tá časť termodynamickej teploty trojného bodu vody.

46. Definícia entropie pre nerovnovážne stavy. Vyjadrite zákon o narastaní entropie !

V nerovnovážnom stave samovoľne prebiehajú procesy, ktoré sú nevratné. Pre nerovnovážny adiabatický proces ($dQ \equiv 0$) je vždy $S_2 > S_1$. Nevratný adiabatický prechod z jedného rovnovážneho stavu do druhého je vždy sprevádzaný nárastom entropie systému. Čiže ide o nevratnú zmenu pre, ktorú platí:

$$\int_{\text{nevrat. } A}^B \frac{dQ}{T} < \int_{\text{vrat. } A}^B \frac{dQ}{T} = S_B - S_A$$

Vyjadrite túto zmenu pre ideálny plyn.

Pre stav A platí tepl. T_0 a objem V_0 a pre stav B platí tepl. T a objem V :

Najskôr si ale vyjadríme diferenciál dS :

$$dS = dQ / T \Rightarrow dQ = T.dS$$

$$T.dS = dQ = dU + p.dV$$

$$dU = n . C_v . dT$$

$$p = n.R.T/V$$

Po rozpísaní a dosadení pre diferenciál entropie dostaneme:

$$dS = \frac{n.C_v.dT}{T} + \frac{n.R.dV}{V}$$

Po zintegrovaní dostaneme:

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{n.C_v.dT}{T} + \frac{n.R.dV}{V} = n.C_v.\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + n.R.\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

Zákon o narastaní entropie:

Prechod izolovaného systému z nerovnovážneho stavu do rovnovážneho je sprevádzaný vzrastom entropie, ktorá po dosiahnutí rovnováhy nadobudne maximálnu hodnotu.

Hodnotu entropie systému možno teda znížiť iba pomocou vonkajšieho zásahu tým, že sa poruší jeho rovnovážny stav. V špeciálnom prípade, keď sú všetky deje v sústave vratné, entropia sústavy sa nemení.

47. Charakterizujte adiabatický dej. Napíšte Poissonovu rovnicu pre adiabatický dej.

Adiabatická stavová zmena:

Realizuje sa pri dokonalej tepelnej izolácii, pri ktorej nenastáva výmena energie plynu s okolím prostredníctvom tepla. Dokonalá izolácia však nie je reálne uskutočniteľná, preto sa reálne deje viac či menej približujú k adiabetickej zmene.

Ak neberieme do úvahy nedokonalosť tepelnej izolácie môžeme teda písať:

$$dQ = 0 \Rightarrow dU = dA \text{ lebo } dU = dA + dQ \quad 1.)$$

Pre dU platí:

$$dU = n.C_v.dT$$

Pre $dA = -dA' = -p.dV$

Potom zo vzťahu 1.) dostaneme:

$$n.C_v.dT + p.dV = 0 \quad 2.)$$

Zo stavovej rovnice plynu vyplýva $p.V = n.R.T$ ak ju zderivujeme dostaneme:

$$p.dV + V.dp = n.R.dT$$

Vyjadríme dT :

$$dT = \frac{p.dV + V.dp}{n.R}$$

Dosaďme do 2.):

$$n.C_v \cdot \frac{p.dV + V.dp}{n.R} + p.dV = 0$$

Po roznásobení a úpravách dostaneme:

$$p.dV.(C_v + R) + C_v.V.dp = 0$$

Podľa Mayerovho vzťahu platí $C_p = C_v + R$ teda :

$$p.dV.C_p + C_v.V.dp = 0 \quad | : p.V.C_v$$

$$\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

Zavedme konštantu κ , ktorá je def. $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ a nazýva sa Poissonova a teda :

$$\kappa \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$\kappa \cdot \ln(V) + \ln(p) = \ln(\text{konšt.})$$

$$\ln(V^\kappa) + \ln(p) = \ln(\text{konšt.})$$

$$\ln(V^\kappa \cdot p) = \ln(\text{konšt.})$$

$$V^\kappa \cdot p = \text{konšt.}$$

Rovnica $p.V^\kappa = \text{konšt.}$ je tzv. Poissonova rovnica. Hodnota κ je vždy väčšia ako 1, lebo

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + nR}{C_v} = 1 + \frac{nR}{C_v} \quad .$$

48. Určite prácu a zmenu vnútornej energie pri izotermickom, izobarickom, izochorickom a adiabatickom deji.

Izotermický dej:

$$T = \text{konšt.} \Rightarrow dT = 0 \Rightarrow dU = 0 \Rightarrow dQ = dA'$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p.dV = n.R.T. \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = n.R.T. \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

- ak plyn koná prácu
 $\Rightarrow$ izotermická expanzia
- ak plynu dodávame prácu
 $\Rightarrow$ izotermická kompresia

Izobarický dej:

$$p = \text{konšt.} \Rightarrow dp = 0$$

$$dQ = dU + dA'$$

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_V \cdot dT = C_V \cdot (T_2 - T_1)$$

$$A' = \int_1^2 dA' = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = p \cdot \int_{V_1}^{V_2} dV = p \cdot \Delta V = p \cdot (V_2 - V_1)$$

Izochorický dej:

$$V = \text{konšt.} \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow dA' = 0 \Rightarrow \text{plyn nekoná prácu}$$

$$dQ = dU$$

$$Q = \int_1^2 dU = \int_{T_1}^{T_2} C_V \cdot dT = C_V \cdot (T_2 - T_1) = \Delta U$$

Adiabatický dej:

$$dQ = 0 \quad - \text{ systém je dokonale tepelne izolovaný}$$

$$\Rightarrow 0 = dU + dA' \Rightarrow dA' = -dU \Rightarrow \text{plyn môže konať prácu len na úkor svojej vnútornej energie.}$$

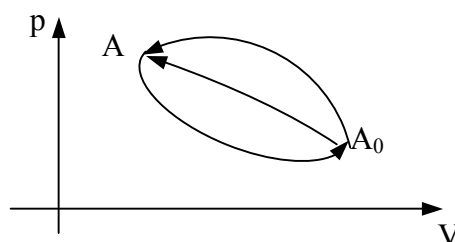
$$A' = -\Delta U$$

49. Čo je to Carnotov cyklus, aká práca sa pri ňom vykonáva a čomu sa rovná jeho účinnosť?

Pod kruhovým (cyklickým) dejom rozumieme taký dej, pri ktorom sa plyn alebo sústava po viacerých stavových zmenách vráti späť do pôvodného stavu. Celková zmena vnútornej energie, ktorá v priebehu kruhového deja nastáva sa rovná nule. čo matematicky možno zapísať:

$$\oint dU = 0$$

Obr.33



Keď prevedieme plyn zo stavu A_0 do stavu A , nezávisí zmena vnútornej energie od spôsobu prechodu, ale len od začiatočného a koncového stavu.

Podľa I.V.T platí:

$$dU = dQ + dA' \Rightarrow \oint dA' + \oint dQ = 0 \Rightarrow A' + Q = 0 \quad 1.)$$

Zo vzťahu 1.) vyplýva, že pri kruhovom deji plyn môže získavať energiu z okolia napr. pomocou tepla a odovzdávať napr. formou mechanickej práce.

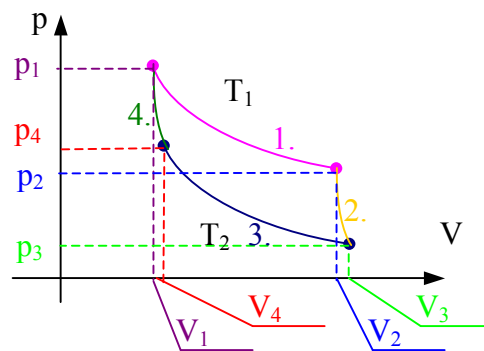
Pri teo. úvahách má osobitný význam v termodynamike pojem *vratný (reverzibilný) dej*. Vratnosť spočíva v tom, že priebeh deja možno ľubovoľne malou zmenou niektorej stavovej veličiny, kedykoľvek zmeniť na opačný.

Carnotov cyklus:

Uvažujme kruhový dej počas ktorého nastávajú štyri po sebe nasledujúce vratné stavové zmeny:

- 1.) izotermická expanzia
- 2.) adiabatická expanzia
- 3.) izotermická kompresia
- 4.) adiabatická kompresia

Obr.34



Pre prácu vykonanú v Carnotovom cykle platí:

$$A = n.R.(T_1 - T_2) \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \text{ pričom práca, ktorá sa v priebehu cyklu vykoná, je číselne}$$

daná plochou obrazca utvoreného dvoma izotermami a dvoma adiabatami.

Pre účinnosť tohto cyklu platí

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad - \text{ plyn odoberie teplo } Q_1 \text{ a odovzdá teplo } Q_2'$$

50. Aká je maximálna (ideálna) účinnosť tepelného stroja?

Maximálnu (ideálnu) účinnosť by dosiahol ten stroj, ktorý by celé dodané teplo menil na prácu. Čiže takýto stroj by porušoval II.V.T (Planckova formulácia) a bolo by to perpetuum mobile II. druhu.

51. Napíšte základné zákony hydrostatiky.

Archimedov zákon:

Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované silou, ktorej hodnota sa rovná tiaži kvapaliny rovnakého objemu, aký zaujíma ponorené teleso resp. ponorená časť telesa.

$$\rho_k \cdot V_T \cdot g = m_k \cdot g$$

ρ_k – hustota kvapaliny

V_T – objem telesa

g – gravitačné zrýchlenie

m_k – hmotnosť kvapaliny

Pascalov zákon:

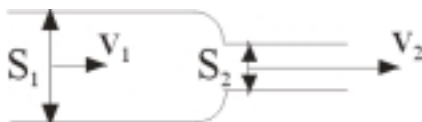
Tlak v kvapaline vyvolaný vonkajšou silou je vo všetkých miestach kvapaliny konštantný.

$$p = \text{konšt.}$$

52. Napíšte základné rovnice popisujúce prúdenie kvapaliny.

Rovnica kontinuity (spojitosti) toku:

Obr.35



$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

$$\text{,alebo } S \cdot v = \text{konšt.}$$

Bernoulliho rovnica:

(- odvodenie vid' T.O. 2.časť otázka 23.)

Pri ustálenom prúdení ideálnej kvapaliny je súčet kinetickej a potenciálnej energie objemovej jednotky kvapaliny a tlaku všade rovnaký.

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h + p = \text{konšt.}$$

Pre vodorovnú trubicu ($h_1 = h_2$) možno písať:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + p_2$$

53. Akým vzťahom je daná sila odporu pri pohybe telesa v kvapaline ?

$$F_{odp} = C \cdot \eta^i \cdot v^j \cdot r^k$$

C – koef. odporu (závisí od tvaru telesa)

η – súčiniteľ viskozity

v – rýchlosť

r – polomer

2.část

Teoretické otázky.

1. Odvodte vzťah, vyjadrujúci rozklad zrýchlenia na zložku tangenciálnu a dostredivú.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_t + \vec{a}_n \\ \vec{a}_t &= a_t \cdot \vec{\tau}, \vec{a}_n = -a_n \cdot \vec{\rho} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}\end{aligned}$$

platí :

$$|d\vec{\tau}| = d\alpha, \text{ keďže}$$

$$R \cdot d\alpha = ds, \text{ potom}$$

$$|d\vec{\tau}| = \frac{1}{R} \cdot ds$$

smer vektora $d\vec{\tau}$ určíme diferencovaním rovnice $\vec{\tau}^2 = 1$, čím dostaneme vzťah $\vec{\tau} \cdot d\vec{\tau} = 0$. Keďže $\vec{\tau}$ ani $d\vec{\tau}$ sa nerovnajú 0, môže toto platiť len ak $\vec{\tau}$ je kolmé na $d\vec{\tau}$, t.j. vtedy keď $d\vec{\tau}$ spadá do smeru normály krivky.

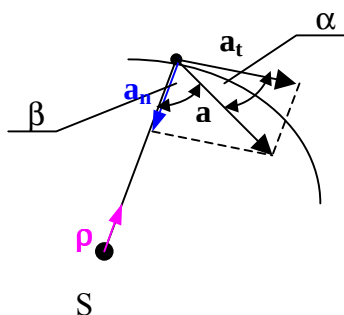
Pri uvedenej voľbe jednotkového vektora $\vec{\rho}$ možno písať:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} - \frac{1}{R} \cdot v \cdot \frac{ds}{dt} \vec{\rho},$$

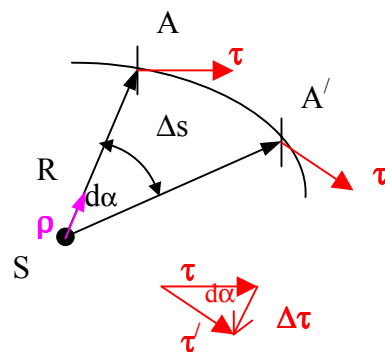
platí

$$\frac{ds}{dt} = v \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} - \frac{v^2}{R} \vec{\rho},$$

Obr. 1

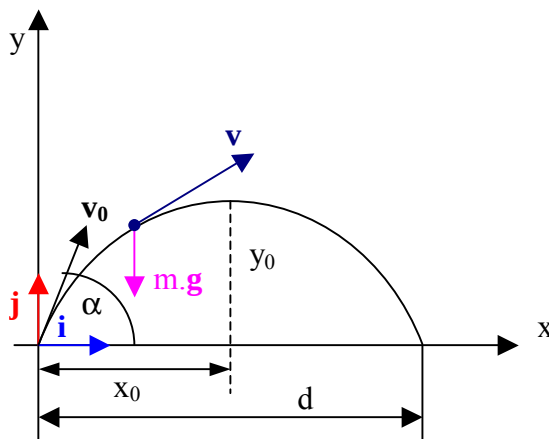


Obr. 2



2. Odvodte vzťahy pre vodorovný a šikmý vrh.

Obr.3



Šikmý vrh.

Je to v tom prípade ak α spĺňa nerovnosť $0 < \alpha < 90^\circ$

Pre rýchlosti v smere osí x , y a z platí:

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha, \quad 1.)$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t, \quad 2.)$$

$$v_z = 0$$

Po z integrovaní dostávame :

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha, \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \quad 3.)$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad 4.)$$

Dosadíme vyjadrené t z rovnice 3.) do rovnice 4.) :

$$y = x \cdot \tan \alpha - x^2 \cdot \frac{g}{2 \cdot v_0 \cdot \cos^2 \alpha} \quad 5.)$$

Pre vrchol paraboly platí:

$$\frac{dx}{dy} = 0, t.j.$$

$$\operatorname{tg} \alpha - x \cdot \frac{g}{v_0 \cdot \cos^2 \alpha} = 0$$

Stadiaľ x_0 sa rovná :

$$x_0 = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{g} \quad 6.)$$

Pre súradnicu vrcholu platí (dosadíme vzťah 6.) do vzťahu 5.)):

$$y_0 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}$$

Dĺžka vrhu je potom daná vzťahom:

$$d = 2 \cdot x_0 = 2 \cdot \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

Dĺžka d je teda najväčšia pre $\alpha = 45^\circ$.

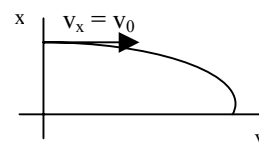
Vodorovný vrh.

$v_0 \neq 0, \alpha = 0^\circ$ - vodorovný vrh ;

$$v_x = v_0, v_y = -g \cdot t ;$$

$$x = v_0 \cdot t \Rightarrow t = x / v_0 \text{ dosadíme do } y ;$$

$$y = -1/2 \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow y = -1/2 \cdot g \cdot (x^2 / v_0^2)$$



3. Ukážte, že impulz sily je rovný celkovej zmene hybnosti.

Impulz sily je def. vzťahom:

$$\vec{I} = \int \vec{f} . dt,$$

kde integrujeme za celý čas pôsobenia sily $\vec{f}$

Sila $\vec{f}$ je def. vzťahom:

$$\vec{f} = m . \frac{d\vec{v}}{dt}$$

po dosadení dostávame

$$\vec{I} = \int \vec{f} . dt = \int m . \frac{d\vec{v}}{dt} . dt = m . \int_0^t d\vec{v} = [m . \vec{v}]_0^t = (m . \vec{v})_t - (m . \vec{v})_0$$

ak $m = \text{konšt.}$

Vieme, že $\vec{v}$ v čase t je $\vec{v}$ a $\vec{v}$ v čase $t = 0$ je $\vec{v}_0$ a ak $\vec{p} = m . \vec{v}$ potom platí:

$$\vec{I} = m . \vec{v} - m . \vec{v}_0 = \Delta \vec{p}$$

Čiže impulz sily je (ak $m = \text{konšt.}$) rovný celkovej zmene hybnosti.

4. Dokážte, že zmena kinetickej energie je rovná práci pôsobiacich síl !

Vieme, že práca je def.:

$$A = \int \vec{f} . d\vec{s}$$

vieme, že sila $\vec{f}$ je definovaná :

$$\vec{f} = m . \vec{a} = m . \frac{d\vec{v}}{dt},$$

čiže platí:

$$\vec{f} . d\vec{s} = m . \frac{d\vec{v}}{dt} . d\vec{s}, \quad 1.)$$

ale pre rýchlosť $\vec{v}$ platí tento vzťah:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

čiže vzťah 1.) prejde na tento vzťah:

$$\vec{f} d\vec{s} = m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

z vektorového počtu je jasné že :

$$\vec{v} d\vec{v} = v \cdot dv$$

Vrátíme sa do integrálu:

$$A = \int_{v_0}^v m \cdot v \cdot dv = m \cdot \int_{v_0}^v v \cdot dv = m \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot v \right]_{v_0}^v = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2,$$

Ak si označíme:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2, \text{ potom môžeme napísať}$$

$$A = \Delta E_k$$

Čiže zmena (rozdiel) kinetickej energie sa rovná práci pôsobiacich síl.

5. Dokážte platnosť prvej a druhej vety impulzovej!

Prvá veta impulzová:

Matematické vyjadrenie:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

rozpíšme vyjadrenie na pravej strane rovnice

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{f}$$

skutočne platí :

$$\vec{f} = \vec{f}$$

Druhá veta impulzová:

Matematické vyjadrenie:

$$\vec{D} = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

tak isto rozpíšme pravú stranu:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \cdot \vec{v}) = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{D}$$

skutočne platí:

$$\vec{D} = \vec{D}$$

6. Dokážte vety o ťažisku!

Veta o ťažisku:

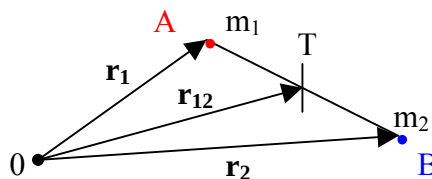
Pre vektor $\vec{r}^*$, ktorý spája ťažisko zo začiatkom sústavy platí:

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m} \cdot \int \vec{r} \cdot dm \text{ ak ide o teleso homogénne.}$$

Ak nie tak platí tento vzťah:

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \text{ ktorý budeme dokazovať pre dva hmotné body.}$$

Obr.4



Platí :

$$\left. \begin{aligned} \frac{AT}{TB} &= \frac{m_2}{m_1} \\ \frac{\vec{r}_{12} - \vec{r}_1}{\vec{r}_2 - \vec{r}_{12}} &= \frac{m_2}{m_1} \\ m_1 \cdot (\vec{r}_{12} - \vec{r}_1) &= m_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_{12}) \end{aligned} \right| \begin{aligned} \vec{r}_{12} \cdot (m_1 + m_2) &= m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 \\ \vec{r}_{12} &= \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

čo sa dá napísať :

$$\vec{r}^* = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i \vec{r}_i}{m}, \text{ kde } m = m_1 + m_2 + \dots + m_i = \sum_{i=1}^n m_i$$

podobne sa dá dokázať i pre viac hmot. bodov

Veta o pohybe ťažiska:

Matematické vyjadrenie vety

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}^*$$

$$\sum m_i \cdot \vec{a}_i = m \cdot \vec{a}^*$$

$$\sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}^*}{dt^2}$$

$$\sum \frac{d^2 (\vec{r}_i \cdot m_i)}{dt^2} = \frac{d^2 (\vec{r}^* \cdot m)}{dt^2}$$

$$\sum m_i \vec{r}_i = m \cdot \vec{r}^*$$

$$\frac{\sum m_i \vec{r}}{m} = \vec{r}^*$$

$$\frac{\sum m_i \vec{r}}{\sum m} = \vec{r}^*$$

Vektor spájajúci ťažisko
s počiatkom sústavy

Čiže veta platí.

7. Dokážte platnosť Steinerovej vety pre moment zotrvačnosti.

Matematické vyjadrenie Steinerovej vety je:

$$I = I^* + m \cdot r_0^2$$

Dôkaz je vykonávaný pre rovinný útvar:

Obr. 5



Z definície $I = \sum m_i \cdot r_i^2$ s ohľadom na označenie na obr. 5 môžeme písať:

$$r_i^2 = (\vec{r}_0 + \vec{r}_i^*)^2 = r_0^2 + r_i^{*2} + 2 \cdot \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_i^*$$

Pre I platí:

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2 = \sum m_i \cdot r_0^2 + \sum m_i \cdot r_i^{*2} + 2 \cdot \vec{r}_0 \cdot \sum m_i \cdot \vec{r}_i^* \quad 1.)$$

1.

2.

3.

1. člen $\sum m_i \cdot r_0^2 = m \cdot r_0^2$
2. člen $\sum m_i \cdot r_i^{*2} = I^*$
3. člen $2 \cdot \mathbf{r}_0 \cdot \sum m_i \cdot \mathbf{r}_i^* = 0$, lebo vzťah $\sum m_i \cdot \mathbf{r}_i^* = 0$ vystupuje v čitateli výrazu pre polohový vektor ťažiska vzhľadom na ťažisko.

Čiže vzťah 1.) prejde na tvar:

$$I = I^* + m \cdot r_0^2$$

čo bolo treba dokázať.

8. Odvodte rovnicu pre reaktívny pohyb (Ciolkovského rovnicu)!

Raketa spolu s palivom predstavuje izolovanú sústavu. Vieme, že hybnosť izolovanej sústavy sa nemení je konštantná. Teda platí:

$$\vec{p}_t = m \cdot \vec{v}$$

Nech za čas dt uniknú z rakety plyny vznikajúce horením s hmotnosťou dm' , ktoré unikajú rýchlosťou $\vec{u}$ vzhľadom na tú istú sústavu. Teda za čas dt sa zvýši rýchlosť sústavy z $\vec{v}$ na $\vec{v} + d\vec{v}$, čiže pre hybnosť platí:

$$\vec{p}_{t+dt} = (m - dm') \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) + dm' \cdot \vec{u}$$

Hybnosť sa zachováva, teda platí:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{t+dt} &= \vec{p}_t \\ (m - dm') \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) + dm' \cdot \vec{u} &= m \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Ak si uvedomíme že $dm' = -dm$ potom môžeme vzťah upraviť:

$$\begin{aligned} (m + dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) - dm \cdot \vec{u} &= m \cdot \vec{v} \\ m \cdot \vec{v} + m \cdot d\vec{v} + dm \cdot \vec{v} + dm \cdot d\vec{v} - dm \cdot \vec{u} &= m \cdot \vec{v} \\ m \cdot d\vec{v} + dm \cdot \vec{v} + dm \cdot d\vec{v} - dm \cdot \vec{u} &= 0 \\ dm \cdot \vec{v} - dm \cdot \vec{u} &= -m \cdot d\vec{v} \quad : -m \\ \frac{dm}{m} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= d\vec{v} \\ d\vec{v} &= \frac{dm}{m} (\vec{u} - \vec{v}) = \frac{dm}{m} (\vec{v}_r) \end{aligned}$$

ak zanedbáme výraz $dm \cdot dv$ ako veľmi malý a $\mathbf{v}_r = (\mathbf{u} - \mathbf{v})$

Upravujeme ďalej, ak si uvedomíme že:

$$\mathbf{v} = v \cdot \boldsymbol{\rho} \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_r = -v_r \cdot \boldsymbol{\rho}$$

tak predošlá rovnica prejde na tento skalárny tvar:

$$\begin{aligned} dv &= -\frac{dm}{m} \cdot v_r \\ v &= -v_r \cdot \int \frac{1}{m} dm \\ v &= -v_r \cdot \ln(m) + C \quad 1.) \end{aligned}$$

C určíme zo začiatkovej podmienky :

V čase $t = 0$ bola $v = v_0$ a $m = m_0$

Dosadením do 1.) dostaneme :

$$v_0 = -v_r \cdot \ln(m_0) + C \Rightarrow C = v_0 + v_r \cdot \ln(m_0)$$

čiže :

$$v = -v_r \cdot \ln(m) + C + v_0 + v_r \cdot \ln(m_0)$$

$$v = v_0 + v_r \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Ciolkovského rovnica

9. Odvodte výraz pre celkovú kinetickú energiu rotujúceho telesa!

Ako vieme práca je definovaná ako $A = \Delta E_k$ kde E_k je defin. vzťahom:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad 1.)$$

Ak bod koná pohyb po kružnici jeho rýchlosť je daná vzťahom:

$$v_i = r_i \cdot \omega$$

Dosadíme do 1.) a dostávame kin. energiu jedného bodu teda :

$$E_{k_i} = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2$$

Celková kin. energia potom je:

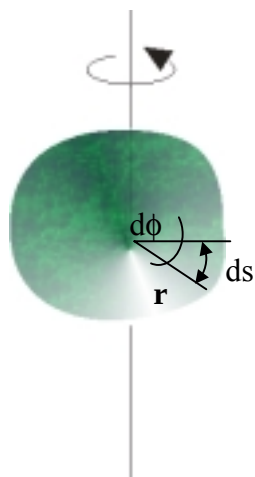
$$E_k = \sum_i E_{k_i} = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum_i m_i \cdot r_i^2 \quad 2.)$$

člen $\sum_i m_i \cdot r_i^2 = I$ čiže vzťah 2.) prejde na tvar:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad \text{čo je celk. kin. energia rot. telesa}$$

10. Odvoďte pohybovú rovnicu pre rotačný pohyb tuhého telesa okolo pevnej osi!

Obr.6



$$dA = F \cdot ds = F \cdot r \cdot d\varphi = M \cdot d\varphi$$

$$dA = dE_k$$

$$d\left(\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2\right) = M \cdot d\varphi$$

$$I \cdot \omega \cdot d\omega = M \cdot d\varphi \bigg/ \frac{d}{dt}$$

$$I \cdot \omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = M \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$I \cdot \omega \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M} \cdot \omega$$

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

Pre moment hybnosti platí:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{d\vec{G}}{dt} \quad \left| \quad \frac{d\vec{G}}{dt} = I \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) \right. & \Rightarrow & \quad \vec{G} = I \cdot \vec{\omega} \\ \frac{d\vec{G}}{dt} &= I \cdot \vec{\varepsilon} \quad \left| \quad \frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \cdot I)}{dt} \right. & & \end{aligned}$$

11. Odvodte vzťah medzi intenzitou a potenciálom gravitačného poľa!

Elementárnu prácu dA môžeme zapísať:

$$dA = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

$$dA = -dE_p$$

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = -dE_p / 1/m' \quad \text{porovnáme a vynásobíme } 1/m'$$

$$\frac{\vec{f}}{m'} \cdot d\vec{r} = -d \frac{E_p}{m'}$$

$$\vec{E} d\vec{r} = -d\varphi$$

$$\vec{E} = \frac{-d\varphi}{d\vec{r}} \quad \text{-derivujeme podľa zložiek vektora } \mathbf{r}, \text{ čiže v smere gradientu.}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{d\varphi}{dx} \cdot \vec{i} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \vec{j} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \vec{k} \right)$$

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) \quad (-\nabla \varphi)$$

12. Odvodte vzťah pre prácu gravitačnom poli!

Vieme, že pre prácu platí :

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Pre silu v GP platí:

$$\vec{f} = -\kappa \frac{m.M}{r^3} \cdot \vec{r}$$

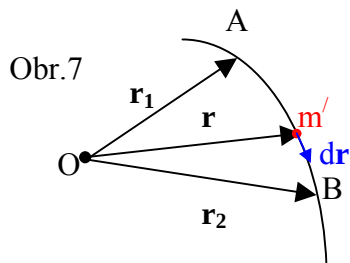
Dosaďme do pôvodného integrálu:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -\kappa \frac{m.M}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\kappa.m.M. \int_{r_1}^{r_2} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3}$$

Z vektorového počtu je jasné, že $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r \cdot dr$ preto:

$$A = -\kappa.m.M. \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\kappa.m.M. \left[\ominus \frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -\kappa.m.M. \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Znamienko “ $\ominus$ ”, pri výraze $\frac{1}{r}$ využijeme na zmenu (obrátenie) hraníc integrovania.



Obr.7

13. Nájdite riešenie pohybovej rovnice pre tlmený kmitavý pohyb!

Rovnica tlmeného harmonického pohybu má tvar:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2.b \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad 1.)$$

Dosaďme substitúciu:

$$x = x_0 \cdot e^{\alpha t}$$

$$x' = \alpha \cdot x_0 \cdot e^{\alpha t}$$

$$x'' = \alpha^2 \cdot x_0 \cdot e^{\alpha t}$$

Dosaďme do rovnice 1.), a dostaneme:

$$\alpha^2 \cdot x_0 \cdot e^{\alpha t} + \omega_0^2 \cdot x_0 \cdot e^{\alpha t} + 2.b \cdot \alpha \cdot x_0 \cdot e^{\alpha t} = 0 / x_0 \cdot e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 + 2.b \cdot \alpha + \omega_0^2 = 0$$

Vyriešime kvadratickú rovnicu:

$$a = 1, b = 2.b, c = \omega_0^2$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2.b \pm \sqrt{4.b^2 - 4.1.\omega_0^2}}{2.1} = \frac{2.(-b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2})}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

Vieme, že $\omega^2 = \omega_0^2 - b^2$, pričom teraz závisí od vzájomného pomeru ω_0^2 a b^2 , aké bude konečné riešenie.

- I. ak $\omega_0^2 > b^2$, potom :

$$(b^2 - \omega_0^2) < 0, -\omega^2 = -(\omega_0^2 - b^2) \text{ a teda platí:}$$

$$\alpha_{1,2} = -b \pm i.\omega$$

dosaďme do pôvodnej substitúcie :

$$x = x_0 \cdot e^{(-b \pm i.\omega).t} = x_0 \cdot e^{-b.t} \cdot e^{i.\omega.t} = x_0 \cdot e^{-b.t} \cdot (\cos \omega.t + i \cdot \sin \omega.t)$$

zoberieme reálnu časť riešenia:

$$x = x_0 \cdot e^{-b.t} \cdot \cos(\omega.t + \varphi), \text{ kde } \varphi - \text{je fázový posun}$$

- II. ak $\omega_0^2 = b^2$, potom :

$$x = x_0 \cdot e^{-b.t}, \text{ čo je pohyb hraničný}$$

- III. ak $\omega_0^2 < b^2$, potom :

$$x = x_0 \cdot e^{-b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}.t}, \text{ čo je pohyb aperiodický.}$$

(Pozn.

Podľa správnosti by mali jednotlivé riešenia obsahovať ešte integračné konštanty, ktoré by sa mali určiť zo začiatočných podmienok, čiže napr. vzťah v II. by mal vyzeráť:

$x = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-b \cdot t}$, lebo ide o dvojnásobný koreň a teda x po určení začiatočných podmienok (x v čase $t = 0$ je x_0 a tiež $v = 0 \Rightarrow$, že b sa tiež rovná nule) by malo byť $x = x_0 \cdot e^{-b \cdot t} \cdot (1 + b \cdot t)$

14. Odvodte vzťah pre energiu deformovaného telesa!

Vieme, že energia je definovaná:

$$E_{pe} = A = \int f \cdot dl \quad \text{pre relatívne predĺženie platí:}$$

$$\varepsilon = \frac{f}{E \cdot S} \quad \text{stadial' pre silu } f \text{ platí: } f = \varepsilon \cdot E \cdot S$$

$$\text{ďalej pre rel. predĺženie platí: } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

$$\text{ak chceme vyjadriť element predĺženia potom platí: } d\varepsilon = \frac{dl}{l_0} \Rightarrow dl = d\varepsilon \cdot l_0.$$

Dosadíme do integrálu a dostaneme:

$$E_{pe} = \int_0^{\varepsilon} \varepsilon \cdot E \cdot S \cdot l_0 \cdot d\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 \cdot V \quad (V = S \cdot l_0) \quad 1.)$$

Výraz 1.) vyjadruje *elastickú potenciálnu energiu*, ktorej objemová hustota (po vylomení výrazu 1.) objemom) je:

$$e_p = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2$$

Ak by sme počítali pre jednoduchý prípad deformácie v šmyku dostali by sme výraz:

$$e_p = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \gamma^2$$

15. Napíšte všeobecné riešenie jednorozmernej vlnovej rovnice a ukážte, že vyhovuje danej rovnici!

Vlnová rovnica :

$$\frac{d^2}{dt^2}u = v^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}u$$

Riešenie :

$$u = u_0 \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

Vyjadríme ľavú stranu a dostaneme:

$$\frac{d^2}{dt^2}u_0 \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = -u_0 \cdot \cos\left[\omega \cdot \frac{(-t \cdot v + x)}{v}\right] \cdot \omega^2$$

Vyjadríme pravú stranu a dostaneme:

$$v^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}u_0 \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = -u_0 \cdot \cos\left[\omega \cdot \frac{(-t \cdot v + x)}{v}\right] \cdot \omega^2$$

Skutočne platí $P = L$

16. Odvodte Lorentzove transformácie!

Vychádzajme, že pre sústavu S platí:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (c.t)^2 = 0$$

Pre sústavu S' platí podobne:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (c.t')^2 = 0$$

Ak vieme, že platí:

$y = y'$, $z = z'$ a $c = c'$ a ak porovnáme a dosadíme dostaneme:

$$x^2 - (c.t)^2 = x'^2 - (c.t')^2 \quad 1.)$$

Pre súradnice x a x' platí:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma \cdot (x - v \cdot t) \\ x &= \gamma \cdot (x' + v \cdot t') \end{aligned} \quad 2.)$$

, pričom činiteľ γ je nezávislý na x, x' či t, alebo t', aby transformácia bola lineárna.

Z predošlých rovníc 1.) vyjadríme t' a spolu s x' dosadíme do rovnice 1.) a vyjadríme nasledovným spôsobom činiteľ γ .

(Pri odvodzovaní som namiesto t' používal t1 namiesto x' - x1 a namiesto γ písmeno g):

Vieme, že platí

$$x_1 = g \cdot (x - v \cdot t)$$

$$x = g \cdot (x_1 + v \cdot t_1)$$

Vyjadríme si z nich t_1

$$\frac{[x - g \cdot [g \cdot (x - v \cdot t)]]}{(g \cdot v)} = t_1$$

$$\frac{-(-x + g^2 \cdot x - g^2 \cdot v \cdot t)}{(g \cdot v)} = t_1$$

Dosadíme za x_1 a t_1

$$x^2 - (c \cdot t)^2 = x_1^2 - (c \cdot t_1)^2$$

Roznásobíme

$$0 = [g \cdot (x - v \cdot t)]^2 - \left[c \cdot \frac{-(-x + g^2 \cdot x - g^2 \cdot v \cdot t)}{(g \cdot v)} \right]^2 - [x^2 - (c \cdot t)^2]$$

$$0 = g^2 \cdot (x - v \cdot t)^2 - c^2 \cdot \frac{(x - g^2 \cdot x + g^2 \cdot v \cdot t)^2}{(g^2 \cdot v^2)} - x^2 + c^2 \cdot t^2$$

$$0 = g^2 \cdot (x - v \cdot t)^2 - c^2 \cdot \frac{(x - g^2 \cdot x + g^2 \cdot v \cdot t)^2}{(g^2 \cdot v^2)} - x^2 + c^2 \cdot t^2$$

$$0 = g^2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot v \cdot t + v^2 \cdot t^2) - c^2 \cdot \frac{(x - g^2 \cdot x + g^2 \cdot v \cdot t)^2}{(g^2 \cdot v^2)} - x^2 + c^2 \cdot t^2$$

$$0 = g^2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot v \cdot t + v^2 \cdot t^2) - c^2 \cdot \frac{(x^2 - 2 \cdot g^2 \cdot x^2 + 2 \cdot g^2 \cdot x \cdot v \cdot t + g^4 \cdot x^2 - 2 \cdot g^4 \cdot x \cdot v \cdot t + g^4 \cdot v^2 \cdot t^2)}{(g^2 \cdot v^2)} - x^2 + c^2 \cdot t^2$$

Privedieme na tvar:

$$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot t + C \cdot t^2 = 0$$

Vieme, že x ani t sa nerovná nule, teda musia sa rovnať koeficienty A, B, C nule.
Ak teda položíme napr. výraz C rovný nule dostaneme Lorentzov činiteľ g ,
ktorý potom ďalej dosádzame. (K rovnakým výsledkom by sme došli ak by sme položili i ostatné koeficienty rovné nule, ale výraz pri C je najjednoduchšie zistiteľný i riešiteľný.)

$$C = v^2 \cdot g^2 - c^2 \cdot g^2 + c^2$$

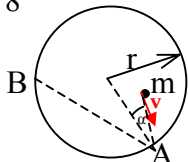
$$g^2 \cdot (v^2 - c^2) + c^2 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = g$$

Výraz $\gamma = g$, je tzv. *Lorentzov činiteľ* a po dosadení do rovníc 1.) dostaneme Lorentzove transformácie (časy t a t' dostaneme ak, vyriešime sústavu rovníc 2.) už vynásobené vyjadreným činiteľom γ).

17. Odvodte vzťah pre tlak plynu na stenu nádoby!

Obr. 8



N – molekúl
 m – hmotností

$I_0 = f_0 \cdot t_0$ - impulz sily = zmene hybnosti $\Rightarrow$

$$I_0 = f_0 \cdot t_0$$

$$m \cdot v \cdot \cos \alpha - -(m \cdot v \cdot \cos \alpha) = 2 \cdot m \cdot v \cdot \cos \alpha$$

pre čas t platí:

$$t = \frac{\overline{AB}}{v} = \frac{2 \cdot r \cdot \cos \alpha}{v},$$

$$\frac{1}{t} = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \cos \alpha}, \text{ čo je počet zrážok za jednu sekundu.}$$

$$I_1 = F_1 \cdot t_1$$

$$F_1 = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \cos \alpha} \cdot 2 \cdot m \cdot v \cdot \cos \alpha = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Platí:

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{m \cdot v_i^2}{r} = \frac{m}{r} \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2$$

pre tlak platí:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{m \cdot \sum_i v_i^2}{r \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{m \cdot \sum_i v_i^2}{4 \cdot \pi \cdot r^3} = \frac{m \cdot \sum_i v_i^2}{3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3} = \frac{m \cdot \sum_i v_i^2}{3 \cdot V}$$

Pre strednú kvadratickú hodnotu rýchlosti môžeme písať:

$$v_s^2 = \frac{\sum_i v_i^2}{N} \Rightarrow \sum_i v_i^2 = v_s^2 \cdot N$$

teda píšeme ďalej:

$$p = \frac{m \cdot v_s^2 \cdot N}{3 \cdot V}$$

18. Odvodte výraz pre vnútornú energiu ideálneho plynu!

Pri ideálnom plyne je vnútorná energia U_0 daná súčtom kinetických energií jednotlivých molekúl a pre jeden mól môžeme vypočítať jej hodnotu tak, že strednú kinetickú energiu vynásobíme Avogadrovým číslom N . Píšeme :

$$U_0 = N \cdot \varepsilon = N \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

Vieme, že pre Boltzmanovu konšt. k platí :

$$k = \frac{R}{N} \quad \text{teda}$$

$$U_0 = N \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N} \cdot T = \frac{3}{2} \cdot R \cdot T$$

Čiže vnútorná energia ideálneho plynu závisí iba od teploty T .

19. Odvodte Mayerov vzťah!

Pre tepelné kapacity platí:

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT} \Rightarrow dU = C_V \cdot dT \text{ lebo } V = \text{konšt.} \Rightarrow dV = 0$$

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \frac{dU + dA'}{dT} = \frac{C_V \cdot dT + p \cdot dV}{dT} \quad 1.)$$

Z stavovej rovnice ideálneho plynu platí:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T / \text{zderivujeme}$$

$$p \cdot dV + V \cdot dp = n \cdot R \cdot dT$$

Za konšt. tlaku ale platí, že $dp = 0$ teda :

$$p \cdot dV = n \cdot R \cdot dT$$

Dosaďme do 1.) a dostaneme:

$$C_p = \frac{C_V \cdot dT + p \cdot dV}{dT} = \frac{C_V \cdot dT + n \cdot R \cdot dT}{dT} = C_V + n \cdot R$$

Čo je hľadaný Mayerov vzťah.

20. Odvodte rovnicu adiabaty (Poissonovu rovnicu)!

Realizuje sa pri dokonalej tepelnej izolácii teda platí, že $dQ = 0$:

$$dQ = 0 \Rightarrow dU = dA \text{ lebo } dU = dA + dQ \quad 1.)$$

Pre dU platí:

$$dU = n \cdot C_V \cdot dT$$

Pre dA = - dA' = -p. dV

Potom zo vzťahu 1.) dostaneme:

$$n \cdot C_V \cdot dT + p \cdot dV = 0 \quad 2.)$$

Zo stavovej rovnice plynu vyplýva $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ ak ju zderivujeme dostaneme:

$$p \cdot dV + V \cdot dp = n \cdot R \cdot dT$$

Vyjadríme dT :

$$dT = \frac{p.dV + V.dp}{n.R}$$

Dosaďme do 2.):

$$n.C_v \cdot \frac{p.dV + V.dp}{n.R} + p.dV = 0$$

Po roznásobení a úpravách dostaneme:

$$p.dV.(C_v + R) + C_v.V.dp = 0$$

Podľa Mayerovho vzťahu platí $C_p = C_v + R$ teda :

$$p.dV.C_p + C_v.V.dp = 0 \quad | : p.V.C_v$$

$$\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

Zavedme konštantu κ , ktorá je def. $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ a nazýva sa Poissonova a teda :

$$\kappa \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$\kappa \cdot \ln(V) + \ln(p) = \ln(\text{konšt.})$$

$$\ln(V^\kappa) + \ln(p) = \ln(\text{konšt.})$$

$$\ln(V^\kappa \cdot p) = \ln(\text{konšt.})$$

$$V^\kappa \cdot p = \text{konšt.}$$

Rovnica $p.V^\kappa = \text{konšt.}$ je tzv. Poissonova rovnica. Hodnota κ je vždy väčšia ako 1, lebo

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + nR}{C_v} = 1 + \frac{nR}{C_v}.$$

21. Odvodte výraz pre prácu plynu pri izotermickej, adiabetickej a izobarickej expanzii!

Izotermická expanzia:

$T = \text{konšt.} \Rightarrow dU = 0$ teda môžeme písať $dQ + dA = 0$ teda (ak $dA' = -dA$) $dQ = dA'$.
Plyn zmení svoj tlak z p_1 na p_2 a objem z V_1 na V_2 teda môžeme písať:

$$Q = A' = p_1.V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = n.R.T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

lebo zo stav. rovnice pre id. plyn platí:

$$p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$$

a keďže $T_1 = T$

Adiabatická expanzia:

Izolujme dokonale plyn a nechajme ho rozopnúť z tlaku p_1 na p_2 , z objemu V_1 na V_2 a jeho teplota poklesne z teploty T_1 na T_2 . Teda platí $dQ = 0 \Rightarrow dA = -dU$. Píšeme:

$$A = \int -dU = - \int_{T_1}^{T_2} C_V \cdot dT = \int_{T_2}^{T_1} C_V \cdot dT = C_V \cdot (T_1 - T_2)$$

Izobarická expanzia:

Keďže vo všeobecnosti je tlak funkciou objemu teda $p(V)$, nie je možné ihneď vypočítať integrál platný pre prácu teda :

$$A' = \int p \cdot dV$$

Ale pri izobarickom deji je tlak p KONŠTANTNÝ, teda môžeme písať:

$$A' = p \cdot \int_{V_1}^{V_2} dV = p \cdot (V_2 - V_1)$$

Tlak je konšt., nastane zmena objemu z V_1 na V_2 a z teploty T_1 na teplotu T_2 .

22. Odvodte vzťah pre účinnosť Carnotovho cyklu!

Účinnosť Carnotovho cyklu def.

$$\eta = \frac{A'}{A'_1} = \frac{A'}{Q_1} = \frac{A'_1 - A'_3}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} = \frac{n \cdot R \cdot (T_1 - T_2) \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

lebo $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_3}{V_4}$

23. Odvodte Bernoulliho rovnicu.

Pre sily f_1 a f_2 platí :

$$f_1 = p_1 \cdot S_1, \quad f_2 = p_2 \cdot S_2$$

Pre element práce platí :

$$dA = f_1 \cdot ds_1 - f_2 \cdot ds_2$$

Pre elementy dráhy môžeme napísať:

$$ds_1 = v_1 \cdot dt, \quad ds_2 = v_2 \cdot dt$$

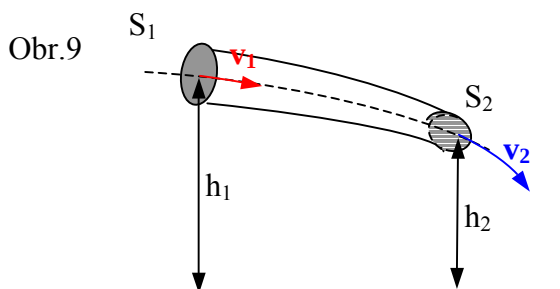
Teda pre prácu platí:

$$dA = f_1 \cdot ds_1 - f_2 \cdot ds_2 = p_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt - p_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt$$

Z rovnice kontinuity platí:

$$p_1 \cdot S_1 \cdot dt = p_2 \cdot S_2 \cdot dt = d\tau$$

Nastala pri zvažovanom elementárnom posunutí taká zmena akoby sme boli premiestnili elementárne množstvo kvapaliny $d\tau$ z prierezu S_1 do prierezu S_2 a zmenili jeho rýchlosť z v_1 na v_2 . Uvažovaný prírastok energie pri tomto elementárnom posunutí môžeme vyjadriť ako rozdiel celkovej energie element. množstva, kvapaliny $d\tau$ o hmotnosti dm v mieste prierezu S_1 a S_2 (viď obr.).



Teda môžeme písať:

$$dU = \frac{1}{2} dm \cdot v_1^2 + dm \cdot g \cdot h_1 - \left(\frac{1}{2} dm \cdot v_2^2 + dm \cdot g \cdot h_2 \right)$$

, keďže zmena energie sa rovná práci pôsobiacich síl teda $dU = dA$ môžeme písať

$$\frac{1}{2} dm \cdot v_2^2 + dm \cdot g \cdot h_2 - \left(\frac{1}{2} dm \cdot v_1^2 + dm \cdot g \cdot h_1 \right) = (p_1 - p_2) \cdot d\tau \quad 1.)$$

Ak vydelíme rovnicu 1.) elementom objemu $d\tau$ dostaneme $\rho = \frac{dm}{d\tau}$ teda hustotu.

$$\frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.h_2 - \left(\frac{1}{2}\rho.v_1^2 + \rho.g.h_1\right) = (p_1 - p_2)$$

$$\frac{1}{2}\rho.v_1^2 + \rho.g.h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.h_2 + p_2$$

Preto vo všeobecnosti pre akékoľvek dva prierezy prúdovej trubice možno písať:

$$\frac{1}{2}\rho.v^2 + \rho.g.h + p = \text{konšt.}$$

3.časť

Doporučené príklady.

V tejto časti sú vypočítané **niektoré** doporučené príklady. Jedná sa o príklady, ktoré nie sú riešené v knihe.

1. Kinematika pohybu hmotného bodu

Doporučené príklady č: 6, 9, 15, 17, 19

27, 33, 47, 53

Vypočítané príklady č: 47, 53

47. Aká je priemerná rýchlosť pohybu automobilu v prípade, že :

- prvú polovicu svojho času sa pohybuje rýchlosťou $v_1 = 100 \text{ km.h}^{-1}$ a druhú polovicu času sa pohybuje rýchlosťou $v_2 = 60 \text{ km.h}^{-1}$;
- polovicu z celkovej svojej dráhy prejde rýchlosťou $v_1 = 100 \text{ km.h}^{-1}$ a druhú polovicu dráhy rýchlosťou $v_2 = 60 \text{ km.h}^{-1}$?

Riešenie:

a)

$$v_1 := 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_2 := 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$s = s_1 + s_2 \quad s_1 = v_1 \cdot t_1$$

$$s = v_p \cdot t \quad s_2 = v_2 \cdot t_2$$

Označme čas $t_1 = t/2$ a čas $t_2 = t/2$

$$s_1 = v_1 \cdot \frac{t}{2} \quad s_1 = 100 \cdot \frac{t}{2} \quad s_1 = 50 \cdot t$$

$$s_2 = v_2 \cdot \frac{t}{2} \quad s_2 = 60 \cdot \frac{t}{2} \quad s_2 = 30 \cdot t$$

$$v_p \cdot t = 50 \cdot t + 30 \cdot t \quad / \quad t$$

$$v_p = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

b)

$$\text{Nech platí :} \quad s = v_1 \cdot t_1 \quad s_c = s + s = 2 \cdot s \quad (1.)$$

$$s = v_2 \cdot t_2 \quad t = t_1 + t_2$$

potom pre výpočet priemernej rýchlosti platí tento vzťah :

$$v_p = \frac{s_c}{t}$$

$$v_p = \frac{2 \cdot s}{t_1 + t_2} \quad (2.)$$

z (1.) vyplýva že :

$$t_1 = \frac{s}{v_1} \quad ; \quad t_2 = \frac{s}{v_2}$$

po dosadení do (2.) dostávame:

$$v_p = \frac{2 \cdot v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} \quad ; \quad v_p = 75 \quad \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

53. Hmotný bod koná po kružnici s polomerom $R = 20 \text{ cm}$ so stálym uhlovým zrýchlením $\varepsilon = 2 \text{ s}^{-2}$. Vypočítajte hodnotu tangenciálneho, normálového a celkového zrýchlenia na konci 4. sekundy od začiatku pohybu ak v čase $t_0 = 0 \text{ s}$ bol hmotný bod v pokoji !

Riešenie:

platí :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (1.)$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon = 40 \quad \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R \cdot \omega)^2}{R} = R \cdot \omega^2 = R \cdot \varepsilon^2 \cdot t^2 = 1280 \quad \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

$$v = R \cdot \omega$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega = \varepsilon \cdot t$$

z (1.) vyplýva že:

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2}$$

$$a = \sqrt{40^2 + 1280^2}$$

$$a = 200 \cdot \sqrt{41} \quad a = 1280.625 \quad \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

2. Dynamika hmotného bodu

Doporučené príklady č: 67, 68, 73, 77

99, 102, 110, 115

Vypočítané príklady č: 99, 115

99. Železničný vozeň sa pohybuje po vodorovnej priamej trati a brzďíme ho silou, ktorá sa rovná $1/10$ tiaže vozňa. Vypočítajte čas meraný od začiatku brzdenia, za ktorý sa vozeň zastaví, ako aj dráhu, ktorú do začiatku brzdenia až do zastavenia prejde, ak v okamihu, keď sa začalo brzdiť, mal vozeň rýchlosť $v_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$!

Riešenie:

$$F_b = 0,1 \cdot G$$

$$F = m \cdot a$$

$$0,1 \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

$$a = 0,1 \cdot g$$

$$a = 0,981 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$-a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = - \int a \, dt$$

$$v = -a \cdot t + v_0 \quad 1.)$$

$$\text{v okamihu zastavenia } v = 0 \Rightarrow:$$

$$0 = -a \cdot t + v_0$$

$$t = \frac{v_0}{a} \rightarrow t = 20,387359836901121305 \text{ s}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = v \cdot dt$$

dosadíme v z rov. 1.)

$$s_0 = 0$$

$$s = \int v \, dt = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + s_0$$

po úprave dostaneme:

$$s = \frac{(v_0)^2}{2 \cdot a} \rightarrow s = 203,87359836901121305 \text{ m}$$

115. Ak na pružinu, ktorá sa nachádza v zvislom puzdre, položíme guľôčku hmotnosti $m = 0,1 \text{ kg}$, stlačí sa pružina o $\Delta s = 2 \text{ mm}$. Do akej výšky vyletí guľôčka, keď pružinu ďalej stlačíme o $s_1 = 15 \text{ cm}$ a náhle uvoľníme?

Riešenie:

Pre stlačenú pružinu platí, že jej pot. energia sa rovná :

$$U_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Pre guľôčku vo výške h platí, že jej pot. energia sa rovná:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

Pre silu akou je namáhaná pružina platí:

$$F = k \cdot x$$

Koeficient k vypočítame nasledovne:

$$F = m \cdot g \Rightarrow m \cdot g = k \cdot \Delta s$$

$$k = m \cdot \frac{g}{\Delta s}$$

Zo zachovania mech. energie vieme:

$$U_p = E_p$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{g}{\Delta s} \cdot (s_1)^2$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (s_1)^2$$

$$h = \frac{(s_1)^2}{2 \cdot \Delta s} \rightarrow h = 5.6250 \text{ m}$$

3. Gravitačné pole

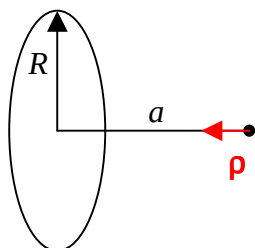
Doporučené príklady č: 85, 87, 88

121

Vypočítané príklady č: 121

121. Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa drôtu hmotnosti m , ohnutého do tvaru kružnice s polomerom R v bode P na osi kružnice vo vzdialenosti a od jej stredu.

Obr. 1



Riešenie:

Pre r platí :

$$r = \sqrt{R^2 + a^2}$$

potom pre potenciál GP platí:

$$\phi = \frac{-\kappa}{\sqrt{R^2 + a^2}} \cdot \int 1 \, dm \rightarrow \phi = \frac{-\kappa}{(R^2 + a^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \cdot m$$

ako vieme pre intenzitu GP zase platí daný vzťah:

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi$$

ale pre nás postačuje táto časť :

$$\vec{E} = \frac{d}{da} \phi \cdot \vec{\rho}$$

po zderivovaní dostaneme:

$$\vec{E} = \frac{\kappa}{(R^2 + a^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} \cdot m \cdot \vec{\rho} \cdot a$$

4. Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa.

Doporučené príklady č: 126, 128, 132, 142, 144,

152, 154, 159, 161, 163, 169, 173

Vypočítané príklady č: 154, 159, 163, 169

154. Nájdite polohu ťažiska drôtu ohnutého do tvaru štvrtkružnice s polomerom $R=10\text{ cm}$!

Riešenie:

Pre súradnice ťažiska platí:

$$x_T = x_T, \quad z_T = 0$$

Pre x platí:

$$x = r \cos(\phi)$$

vyjadrime si dm :

$$dm = m \cdot \frac{dl}{\frac{\pi \cdot r}{2}}$$

lebo:

$$l = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4} \rightarrow l = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r$$

dosadíme do integrálu:

$$x_T = \frac{1}{m} \cdot \int x dm = \frac{1}{m} \int r \cdot \cos(\phi) \frac{2 \cdot m}{\pi \cdot r} dl$$

element dl si vyjadríme nasledovne:

vieme že platí:

$$\sin(d\phi) = \frac{dl}{r}$$

ale pre malé uhly platí:

$$\sin(d\phi) = d\phi \quad \text{teda}$$

$$d\phi = \frac{dl}{r} \quad dl = d\phi \cdot r$$

dosadíme do integrálu s hranicami od 0 do $\pi/2$

$$x_T = \frac{1}{m} \cdot \int_0^{\pi/2} r \cdot r \cdot \cos(\phi) \frac{2 \cdot m}{\pi \cdot r} d\phi$$

$$x_T = 2 \cdot \frac{r}{\pi}$$

čiže:

$$x_T = y_T = 2 \cdot \frac{r}{\pi}$$

po dosadení:

$$x_T = 2 \cdot \frac{r}{\pi} \rightarrow x_T = 2 \cdot \frac{r}{\pi}$$

- 159.** Do telesa tvaru gule, zaveseného na vlákne, narazí vodorovne letiaci náboj, ktorého hmotnosť je 1000 – krát menšia ako hmotnosť telesa, a uviazne v tomto telese. Aká bola rýchlosť náboja pri náraze, keď sa teleso po náraze vychýlilo zo svojej rovnovážnej polohy tak, že záves zvieral so zvislým smerom uhol 10° ? Dĺžka závesu od upevnenia po stred gule je $v = 1$ m.

Riešenie

V tomto prípade budeme vychádzať z dvoch zákonov. A to zo zákona o zachovaní hybnosti sústavy a zo zákona o zachovaní mechanickej energie.

pre hybnosti platí že:

$$m_n \cdot v = m_s \cdot v_s$$

kde m_s je hmotnosť zaveseného telesa po náraze

m_n je hmotnosť náboja a v_s je rýchlosť tohto telesa po náraze :

vieme, že po náraze malo teleso svoju hmotnosť plus hmotnosť náboja t.j.:

$$m_s = m + \frac{1}{1000} \cdot m \rightarrow m_s = \frac{1001}{1000} \cdot m$$

čiže môžeme zapísať:

$$\frac{1}{1000} \cdot m \cdot v = \frac{1001}{1000} \cdot m \cdot v_s$$

$$\frac{1}{1001} \cdot v = v_s \quad 1.)$$

Teraz vychádzajme zo zákona zachovania mechanickej energie:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_s)^2 = m \cdot g \cdot h$$

stadial'to sa rýchlosť telesa po náraze rovná:

$$v_s = \sqrt{2 \cdot (g \cdot h)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

keďže sa jedná o pravouhlý trojuholník h si ľahko zistíme:

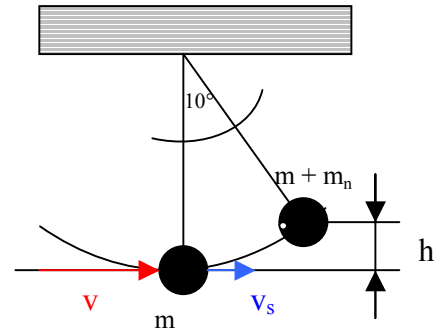
$$h = 1 - \sin(80)$$

teda

$$v_s = \sqrt{2 \cdot \left[9.81 \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{9}\right) \right) \right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$v_s = 0.54595960097838546503 \quad \text{m.s}^{-1}$$

Obr.2



teraz dosadíme do vzťahu 1.):

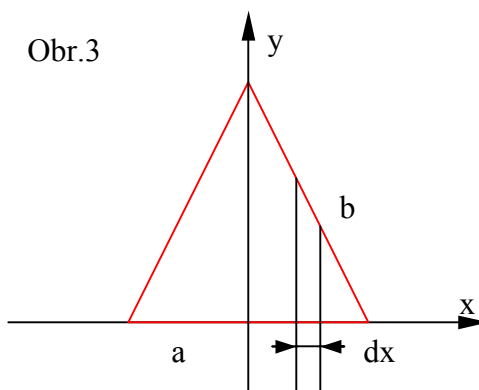
$$\frac{1}{1001} \cdot v = v_s$$

$$\frac{1}{1001} \cdot v = 0.54595$$

$$v = 546.49595 \text{ m.s}^{-1}$$

163. Nájdite moment zotrvačnosti rovnorodej dosky tvaru rovnoramenného trojuholníka s ramenami b a základňou $2a$ vzhľadom na os kolmú na základňu a prechádzajúcu protiľahlým vrcholom, keď hmotnosť dosky je m !

Riešenie:



Pretože sa jedná o plošný útvar použijeme vzťah:

$$I = \rho \cdot \int_S r^2 \cdot dS$$

Ako vidíme potrebujeme určiť dS t.j.

$$dS = y \cdot dx$$

teraz si určíme y z tohoto pomeru

$$y : a - x = b : a \quad (1.)$$

výška na stranu a je daná z Pytagorovej vety takto:

$$v_a = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Zo vzťahu 1.) určíme y a dosadíme do integrálu.

Integrujeme 2 - krát pôvodný integrál od 0 po a (keby sme integrovali od $-a$ po a dostali by sme 0). Teda:

$$y = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \cdot (a - x)$$

$$I = 2 \cdot \rho \cdot \int_0^a x^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \cdot (a - x) \right] dx$$

$$I = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot a^3 \cdot \sqrt{b^2 - a^2}$$

V ďalšom výpočte nám zavádzať ρ . To odstránime takto:

Ako vieme ρ je hustota teda platí:

$$\rho = \frac{dm}{dS}$$

dS poznáme:

$$dS = y \cdot dx$$

a dm vypočítame:

$$dm = m \cdot \frac{y \cdot dx}{\frac{2a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}{2}}$$

$$dm = m \cdot y \cdot \frac{dx}{a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}$$

dosadíme do vzťahu pre ρ :

$$\rho = \frac{m \cdot y \cdot \frac{dx}{a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}}{y \cdot dx}$$

$$\rho = \frac{m}{a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}$$

vrátime sa do vypočítaného integrálu a dosadíme

$$I = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot a^3 \cdot \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$I = \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}} \cdot a^3 \cdot \sqrt{b^2 - a^2} \rightarrow I = \frac{1}{6} \cdot m \cdot a^2$$

169. Homogénna kruhová doska s polomerom $r = 0,3 \text{ m}$ a hmotnosťou $m = 60 \text{ kg}$ sa pri svojom otáčavom pohybe okolo osi kolmej na rovinu dosky a prechádzajúcej stredom dosky podrobuje účinku otáčavých síl, ktorých moment má konštantnú zložku do smeru osi otáčania hodnoty $M = 0,1 \text{ N.m}$. Vypočítajte uhlové zrýchlenie otáčavého pohybu dosky, ako aj prácu, ktorú vykonajú vonkajšie sily za prvé tri minúty otáčania dosky, keď v čase $t = 0$ bola doska v pokoji!

Riešenie:

Ako vieme pre uhlové zrýchlenie ε zo vzťahu $M = I \cdot \varepsilon$ platí:

$$\varepsilon = \frac{M}{I} \quad 1.)$$

Čiže potrebujeme I :

I vypočítame zo vzťahu :

$$I = \int r^2 dm \quad \text{kde,} \quad 2.)$$

$$dm = m \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{\pi \cdot r^2} \cdot dx \rightarrow dm = 2 \cdot m \cdot \frac{x}{r^2} \cdot dx$$

Dosadíme do vzťahu 2.) a vypočítame :

$$I = \int_0^r x^2 \cdot 2 \cdot m \cdot \frac{x}{r^2} dx \rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot m$$

Dosadíme do vzťahu 1.) a vypočítame :

$$\varepsilon = \frac{M}{\left(\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot m\right)}$$

$$\varepsilon = 0.037037 \text{ s}^{-2}$$

Práca je rovná rozdielu kinetických energií, pričom pre kin. energiu rotujúceho telesa platí:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad \text{teda pre prácu platí :}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\omega_0)^2$$

Zo zadania vieme, že $\omega_0 = 0$ teda druhý člen sa rovná nule. Z toho vypláva :

$$A = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad \text{kde,} \quad \omega = \varepsilon \cdot t \quad \text{a} \quad \varepsilon = \frac{M}{I}$$

teda

$$A = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left(\frac{M \cdot t}{I}\right)^2 \rightarrow A = \frac{1}{2 \cdot I} \cdot M^2 \cdot t^2$$

$$A = 60 \text{ J}$$

5. Stavba a mechanické vlastnosti hmotných látok

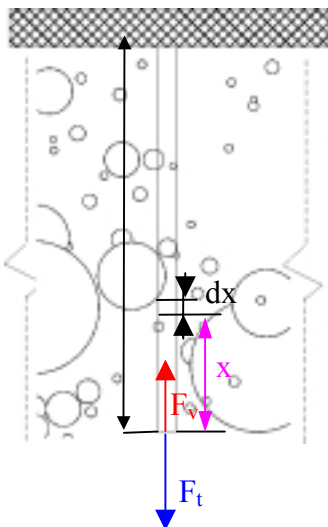
Doporučené príklady č: 182, 183
191, 192

Vypočítané príklady č: 191

191. O koľko by sa účinkom vlastnej tiaže predĺžilo oceľové lano dĺžky 9000 m, spustené do mora do takej hĺbky, aby lano voľne viselo a bolo celé ponorené do vody ak hustota lana je $\rho_1 = 7,7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ a hustota vody je $\rho_2 = 1,03 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ a modul pružnosti v ťahu ocele $E = 21,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$?

Riešenie:

Obr.4



Vychádzajme zo vzťahu :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Teda platí:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

Stadiaľto vyjadríme Δl :

$$\Delta l = \frac{F}{(S \cdot E)} \cdot l_0 \quad (1.)$$

Vyjadríme element zmeny dĺžky t.j. $d(\Delta l)$. Vzhľadom na to teda platí, že l_0 je rovné dx .

$$l_0 = dx$$

F je sila, ktorá pôsobí na element dx , ktorý sa predĺži. Ako vieme v kvapaline sa výraznejšie uplatňuje hydrostatická vztlaková sila F_v , ktorá pôsobí oproti sile ťahovej F_t . Ťahová sila je v tomto prípade len sila gravitačná. Teda platí:

$$F = F_t + F_v \quad \text{kde}$$

$$F_t = m \cdot g$$

$$F_t = V \cdot \rho_1 \cdot g$$

$$F_t = S \cdot x \cdot \rho_1 \cdot g$$

A pre silu F_v platí:

$$F_v = -V \cdot \rho_2 \cdot g$$

$$F_v = -S \cdot x \cdot \rho_2 \cdot g$$

Dosadíme do vzťahu 1.) pre element predĺženia $d(\Delta l)$:

$$d(\Delta l) = \frac{S \cdot x \cdot \rho_1 \cdot g - S \cdot x \cdot \rho_2 \cdot g}{(S \cdot E)} \cdot dx$$

$$d(\Delta l) = \frac{g}{E} \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot x \cdot dx$$

Výslednú hodnotu Δl dostaneme, keď sčítame všetky elementárne predĺženia teda keď budeme integrovať cez celú dĺžku l :

$$\Delta l = \int_0^l \frac{g}{E} \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot x dx$$

$$\Delta l = \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \frac{g}{E} \cdot (\rho_1 - \rho_2)$$

$$\Delta l = 12.269 \text{ m}$$

6. Mechanické kmity

Doporučené príklady č: 235, 237, 239, 240, 244

254, 256, 258, 260, 265, 269

Vypočítané príklady č: 258, 260, 265, 269

258. Aký je koeficient útlmu b , tlmených harmonických kmitov hmotného bodu, keď podiel dvoch za sebou idúcich maximálnych výchyliek hmotného bodu na tú istú stranu je 2 aperióda tlmených kmitov $T = 0,5$ s ? Aká by bola perióda netlmených kmitov za rovnakých podmienok ?

Riešenie:

Pre logaritmický dekrement útlmu platí:

$$\lambda = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = b \cdot T$$

Stadiť pre b platí

$$\frac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{T} = b$$

$$\frac{x_1}{x_2} = 2$$

Čiže po dosadení:

$$\frac{\ln(2)}{0.5} = b$$

$$b = 1.38629 \text{ s}^{-1}$$

Pre frekvenciu netlmených kmitov platí

$$(\omega_0)^2 = \omega^2 + b^2$$

$$(2 \cdot \pi \cdot f_0)^2 = (2 \cdot \pi \cdot f)^2 + b^2$$

$$f_0 = \frac{\sqrt{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{1}{T}\right)^2 + b^2}}{2 \cdot \pi}$$

$$T_0 = 2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{4 \cdot \pi^2 + b^2 \cdot T^2}}$$

$$T_0 = 0.4969850 \text{ s}$$

260. Nájdite amplitúdu výsledného harmonického pohybu, ktorý vznikne zložením dvoch jednosmerných kmitavých pohybov s amplitúdami 3 a 5 cm, keď rozdiel ich fáz je 60° !

Riešenie:

Pre výpočet amplitúdy platí tento jednoduchý vzťah:

$$x_0 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \cos(\phi)}$$

Kde uhol ϕ je fázový posuv medzi priebehmi:

$$x_0 = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$x_0 = 7 \text{ cm}$$

265. Vypočítajte rýchlosť šírenia pozdĺžnych a priečných vĺn v oceli s hustotou $\rho = 7800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, keď modul pružnosti v ťahu $E = 2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ a modul pružnosti v šmyku ocele $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$!

Riešenie:

Pre výpočet rýchlostí platia tieto jednoduché vzťahy:

Pozdĺžna:

$$v_1 := \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$v_1 = 5063.697 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Priečna:

$$v_2 := \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$v_2 = 3202.563 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

269. Rušeň sa blíži k pozorovateľovi rýchlosťou $v = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Aký vysoký základný tón píšťaly počuje pozorovateľ, ktorý je v pokoji, ak strojvodca počuje tón frekvencie $f = 300 \text{ s}^{-1}$ a ak rýchlosť vo vzduchu za daných podmienok $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Riešenie:

Z Dopplerovho princípu v takomto prípade platí:

$$f_0 := \frac{(c + v) \cdot f}{c - u}$$

Pričom rýchlosť u je v tomto prípade rovná nule lebo pozorovateľ je v pokoji.

$$f_0 = 317.647 \text{ s}^{-1}$$

7. Mechanika kvapalín a plynov.

Doporučené príklady č: 202, 205, 212

219, 220, 226, 229

Vypočítané príklady č: 220, 226

220. Aká sila F je potrebná na zdvihnutie rovinatej hate, ktorá je pod tlakom vody, ak hmotnosť hate $m = 250 \text{ kg}$, šírka hate $b = 3 \text{ m}$ a hĺbka vody $h = 1,5 \text{ m}$ a keď koeficient trenia hate o opory $\mu = 0,3$?

Riešenie:

Vieme, že sila, ktorou pôsobí kvapalina na hať je daná :

$$dF = p \cdot dS$$

Pre element sily platí $dS = b \cdot dx$ a ak je tlak p daný ako $p = x \cdot \rho \cdot g$ tak môžeme písať:

$$dF = b \cdot \rho \cdot g \cdot x \cdot dx$$

Teraz sčítame elementy cez celú hĺbku h teda :

$$F_N = \int_0^h b \cdot \rho \cdot g \cdot x \cdot dx \rightarrow F_N = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot b \cdot \rho \cdot g$$

Po dosadení dostaneme :

$$F_N = \int_0^{1.5} 3 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot x \cdot dx \rightarrow F_N = 33108.75 \text{ N}$$

Táto sila F_N (nazveme ju normálová) pôsobí na hať. Ak ťahom pôsobíme smerom na hor pôsobí proti tejto sile sila tiaže haťe a sila trenia, ktorú spôsobuje tlak pôsobiaci na hať, ktorá trie o opory. Nato aby sme ju prekonali musí sa sila f rovnať silám, ktoré proti nej pôsobia teda:

$$f = G + F_T$$

$$G = m \cdot g \quad F_T = \mu \cdot F_N$$

Teda :

$$f = m \cdot g + \mu \cdot F_N$$

$$f = 250 \cdot 9.81 + 0.3 \cdot 33108.75 \rightarrow f = 12385.125 \text{ N}$$

226. Nádoba valcovitého tvaru má v stene nad sebou dva otvory vo výškach h_1 a h_2 od dna. V akej výške h má byť hladina tekutiny nad dnom nádoby, aby tekutina striekala z obidvoch otvorov do rovnakej vzdialenosti na vodorovnú podložku na, ktorej je nádoba položená?

Riešenie:

Pohyb vytekajúcej kvapaliny je vlastne vodorovný vrh teda platí:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1)^2 & x_1 &= v_1 \cdot t_1 \\ h_2 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_2)^2 & x_2 &= v_2 \cdot t_2 \end{aligned}$$

Vyjadrime si zo vzťahov pre výšky časy a dostaneme:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}}$$

Pre rýchlosti platí tzv. Toricelliho vzťah:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h_1)}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h_2)}$$

Zo zadanie vieme, že sa $x_1 = x_2$:

$$x_1 = x_2$$

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$$

Dosaďme vyjadrené časy a rýchlosti:

$$\sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h_1)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h_2)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}}$$

a dostaneme:

$$h = h_1 + h_2$$

**8. Termika a molekulárno – kinetická
teória ideálneho plynu.**

Doporučené príklady č: 277, 278, 285, 312

291, 297, 308, 337, 339, 348, 349

Vypočítané príklady č: 297, 308, 337, 348

297. Sklený pyknometer objemu $V_0 = 15 \text{ cm}^3$ je pri teplote $t_0 = 0 \text{ °C}$ naplnený ortuťou. Keď teplotu okolia zvýšime na $t = 100 \text{ °C}$, z pyknometra vytečie $\Delta V = 234 \text{ mm}^3$ ortuti. Vypočítajte, aký je teplotný súčiniteľ objemovej rozťažnosti ortuti!

Riešenie:

$$\beta = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta t}$$

$$\beta := \frac{0.234}{15 \cdot 100}$$

$$\beta = 1.56 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

308. V kalorimetri bolo 1500 g vody teploty 6 °C , do ktorej sme pridali 120g ľadu neznámej teploty t . Po vyrovnaní teplôt sme z vody kalorimetra ľad vybrali a vážením sme zistili, že jeho hmotnosť sa zväčšila o 12 g. Aká bola pôvodná teplota ľadu?

Riešenie:

Pribratý ľad (voda, ktorá zamrzla) odovzdal toto teplo Q_1 :

$$Q_1 = \Delta m \cdot l$$

Pôvodný ľad sa oteplil preto prijal Q :

$$Q = m \cdot c_L \cdot (0 - t)$$

Voda sa týmto následkom ochladila a odovzdala teplo Q_2 :

$$Q_2 = m \cdot c_V \cdot (t_1 - 0)$$

Keď že, nastal vo vode stav rovnováhy teplá sa museli vyrovnať teda :

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$m \cdot c_L \cdot (0 - t) = \Delta m \cdot l + m \cdot c_V \cdot (t_1 - 0)$$

$$0.12 \cdot 2093 \cdot (0 - t) = 0.012 \cdot 333.6 \cdot 10^3 + 1.5 \cdot 4186 \cdot (6 - 0)$$

$$t = -165.94 \text{ °C}$$

337. Vypočítajte, koľko váži vzduch v miestnosti, ktorej rozmery sú $a = 4 \text{ m}$, $b = 5 \text{ m}$, $c = 3 \text{ m}$ pri tlaku $0,1 \text{ MPa}$ a pri izbovej teplote $t = 20 \text{ °C}$. Hustota vzduchu pri teplote 0 °C a tlaku $0,1 \text{ MPa}$ je $1,293 \text{ kg} \cdot \text{m}^3$.

Riešenie:

Pre vzduch bude platiť (ak položíme $V = \text{konšt.}$):

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p}{T}$$

Stadiaľto vypočítame tlak vzduchu ak by sme ho schladili na 0 °C (čo potrebujeme na to aby sme mohli porovnať tlaky a hustoty pri konšt. teplote teda :

$$p = \frac{p_0}{T_0} \cdot T, \text{ kde } p_0, V_0 \text{ sú počiatočné stav. hodnoty a } p, V \text{ zmenené.}$$

$$p = \frac{0,1}{293,16} \cdot 273,16 \rightarrow p = 9,317778687406194569510^{-2} \text{ MPa}$$

Keďže hustota sa so zníženým tlakom zmenila ale teplota je už rovnaká bude pre hustoty a tlaky zrejme platiť tento pomer:

$$\frac{p_x}{\rho_x} = \frac{p}{\rho}, \text{ kde } p_x \text{ a } \rho_x \text{ sú porovnávacie veličiny a } p \text{ a } \rho \text{ sú získavané.}$$

$$\rho = \frac{p}{p_x} \cdot \rho_x \quad \rho = \frac{0,0931778}{0,1} \cdot 1,293$$
$$\rho = 1,20478895 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Objem je konštanta teda môžeme pre tiaž G písať:

$$G := \rho \cdot V \cdot g$$

$$G = 709,139 \text{ N}$$

348. Vzduchová bublinka na dne jazera v hĺbke $h = 21$ m má pri teplote $t_1 = 4$ °C polomer $r_1 = 1$ cm. Pomaly stúpa na povrch, pričom sa jej objem zväčšuje. Vypočítajte aký bude mať polomer, keď dosiahne povrch jazera, ktorý má teplotu $t_2 = 27$ °C ! Povrchové napätie neberte do úvahy. Atmosférický tlak $b = 0,1$ MPa .

Riešenie:

Pre bublinku platí stavová rovnica:

Dosadíme do 1.):

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad 1.)$$

$$\frac{(h \cdot \rho \cdot g + b) \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r_1)^3 \right]}{T_1} = \frac{\left[b \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r)^3 \right] \right]}{T_2}$$

Keď je pod hladinou:

$$p_1 = h \cdot \rho \cdot g + b$$

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r_1)^3$$

$$T_1 = 273.16 + 4$$

Vyjadríme r :

$$r_2 = \frac{\sqrt[3]{T_2 \cdot (h \cdot \rho \cdot g + b) \cdot b^2 \cdot (T_1)^2 \cdot r_1}}{b \cdot T_1}$$

Keď je nad hladinou:

Dosadíme:

$$p_2 = b$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r_2)^3$$

$$T_2 = 273.16 + 27$$

$$r_2 = \frac{\sqrt[3]{(273.16 + 27) \cdot (21 \cdot 1000 \cdot 9.81 + 0.1 \cdot 10^6) \cdot (0.1 \cdot 10^6)^2 \cdot (273.16 + 4)^2 \cdot 0.01}}{0.1 \cdot 10^6 \cdot (273.16 + 4)}$$

$$r_2 = 1.491 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

9. Základy termodynamiky.

Doporučené príklady č: 372, 374, 378, 389, 394, 396

403, 417, 420, 426, 434, 438

Vypočítané príklady č: 403, 417

403. Stroj pracujúci s výkonom $P = 368$ W vyvrtá za 2 minúty otvor do liatinového bloku o hmotnosti $m = 20$ kg. O koľko stupňov sa blok ohreje, keď 80 % práce konanej pri vŕtaní, prispieva k zväčšeniu vnútornej energie bloku? Špecifická tepelná kapacita liatiny $c = 544$ J. kg⁻¹.K⁻¹.

Riešenie:

Pre prácu platí:

$$A := P \cdot t$$

Pre vnútornú energiu, zo zadania platí:

$$U := 0.8 \cdot A$$

Keďže platí:

$$dU = m \cdot c \cdot dT \quad U = m \cdot c \cdot \Delta t$$

$$\Delta t := \frac{U}{(m \cdot c)}$$

$$\Delta t = 3.246 \text{ } ^\circ\text{C}$$

417. Koľko tepla treba na izotermickú expanziu 2 litrov vodíka tlaku 0,08 MPa na štvornásobný objem ? Aký bude výsledný tlak ?

Riešenie:

Platí :

$$V_2 = 4 \cdot V_1$$

Vieme, že pri izotermickej zmene platí tento tvar stavovej rovnice:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad 1.)$$

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = \frac{p_1 \cdot V_1}{4 \cdot V_1}$$

$$p_2 := \frac{0.08}{4}$$

$$p_2 = 0.02 \quad \text{MPa}$$

Pre prácu platí :

$$dQ = dU + dA$$

$$dQ = n \cdot C_v \cdot dT + p \cdot dV$$

$$T = \text{const} \quad dT = 0$$

$$dQ = p \cdot dV$$

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV$$

Zo vzťahu 1.) možno písať:

$$p = \frac{p_1 \cdot V_1}{V}$$

Po dosadení do integrálu dostaneme:

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 \cdot V_1}{V} dV$$

$$Q = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$Q = 0.08 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot \ln\left(\frac{8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}\right)$$

$$Q = 221.81 \text{ J}$$

Literatúra:

Hajko a kol.: FYZIKA V PRÍKLADOCH, ALFA Bratislava 1983

Použitá literatúra:

1. – 2. časť

1. *Základy fyziky*, Vladimír Hajko, Juraj Daniel – Szabo, vyd. 1, Bratislava, VEDA 1980.
2. *Fyzika*, F. Krupka, L. Kalivoda, vyd. 1, Praha, SNTL/ALFA 1989
3. *Fyzika 1*, Dionýz Ilkovič, vyd. 4, Bratislava, ALFA 1969
4. *Všeobecná fyzika 1– Mechanika a molekulová fyzika*, Š. Veis, J. Maďar, V. Martišovits, vyd. 1, Bratislava, ALFA 1978
- + časti prednášok z predmetu Fyzika 1, prednášajúci : Prof. RNDr. Peter BURY, CSc , letný. sem. 2001, EF ŽU

3 .časť

5. *Fyzika v príkladoch*, Vladimír Hajko a kol., vyd. 5, Bratislava, ALFA 1983

OBSAH :

	<i>Strana</i>
<i>Úvod</i>	1
 <i>1.časť</i>	
1. otázka	4
2. otázka	5
3. otázka	6
4. otázka	7
5. otázka	8
6. otázka	8
7. otázka	9
8. otázka	9
9. otázka	10
10. otázka	11
11. otázka	11
12. otázka	12
13. otázka	13
14. otázka	13
15. otázka	14
16. otázka	14
17. otázka	15
18. otázka	16
19. otázka	16
20. otázka	17
21. otázka	18
22. otázka	19
23. otázka	20
24. otázka	22
25. otázka	23
26. otázka	23
27. otázka	25
28. otázka	26
29. otázka	26
30. otázka	27
31. otázka	28
32. otázka	30
33. otázka	30
34. otázka	31
35. otázka	32
36. otázka	33
37. otázka	33
38. otázka	35
39. otázka	36
40. otázka	36
41. otázka	37
42. otázka	37
43. otázka	37
44. otázka	38
45. otázka	38

46. otázka	39
47. otázka	40
48. otázka	41
49. otázka	42
50. otázka	44
51. otázka	44
52. otázka	44
53. otázka	45

2. časť

1. odvodenie	46
2. odvodenie	47
3. odvodenie	49
4. odvodenie	49
5. odvodenie	50
6. odvodenie	51
7. odvodenie	52
8. odvodenie	53
9. odvodenie	54
10. odvodenie	55
11. odvodenie	56
12. odvodenie	56
13. odvodenie	57
14. odvodenie	58
15. odvodenie	59
16. odvodenie	59
17. odvodenie	61
18. odvodenie	62
19. odvodenie	63
20. odvodenie	63
21. odvodenie	64
22. odvodenie	65
23. odvodenie	66

3. časť

1. oddiel	68
2. oddiel	70
3. oddiel	71
4. oddiel	72
5. oddiel	75
6. oddiel	77
7. oddiel	78
8. oddiel	80
9. oddiel	82

Literatúra	84
-------------------------	-----------

Fyzika TEO F1 Dubovan Jozef 2001