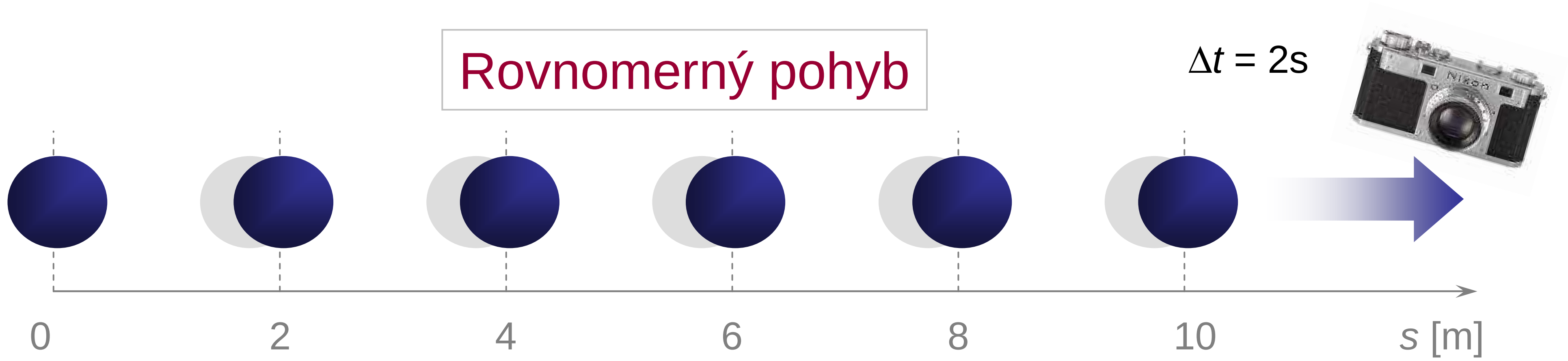
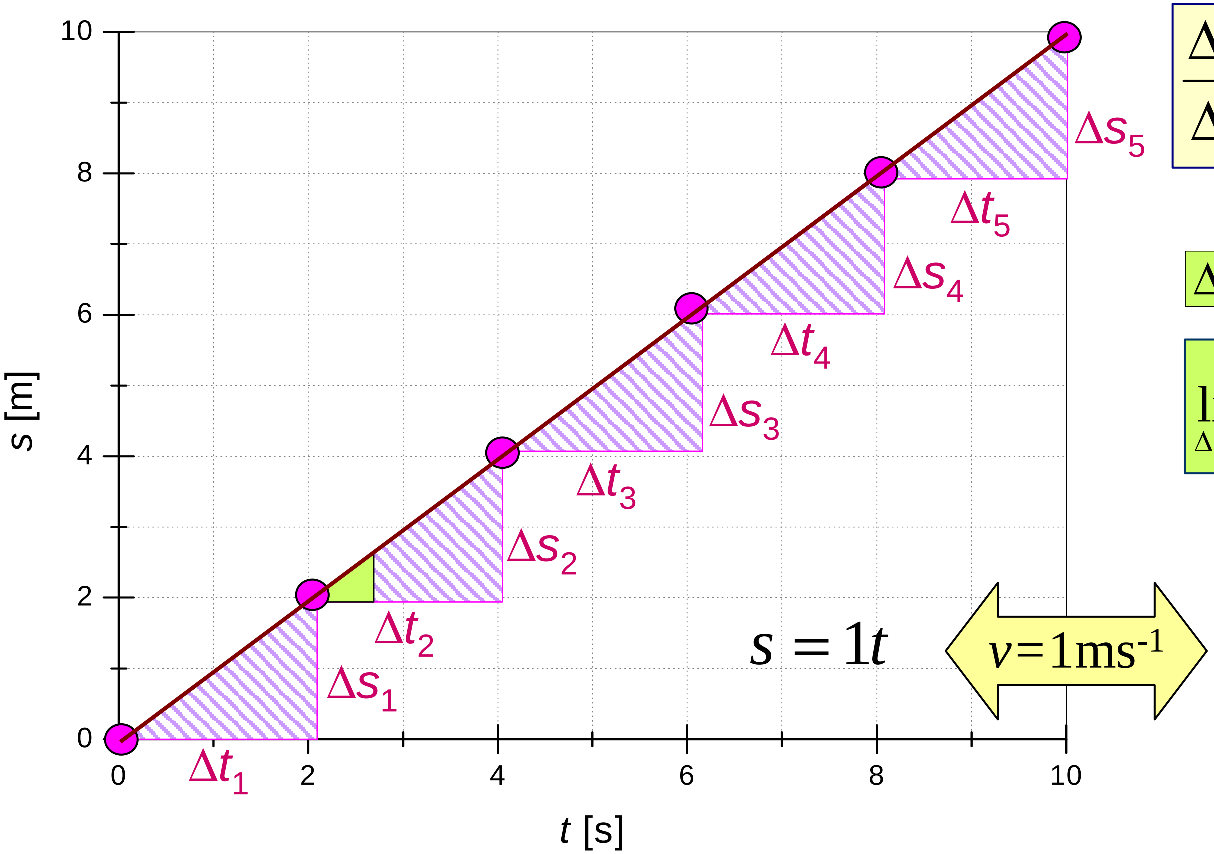
Kinematika hmotného bodu

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

Rýchlosť ako derivácia, dráha ako integrál, polohový vektor, zrýchlenie

Rovnomerný pohyb





$$\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \ldots = \frac{\Delta s_5}{\Delta t_5} = v$$

$$\Delta t \to 0$$

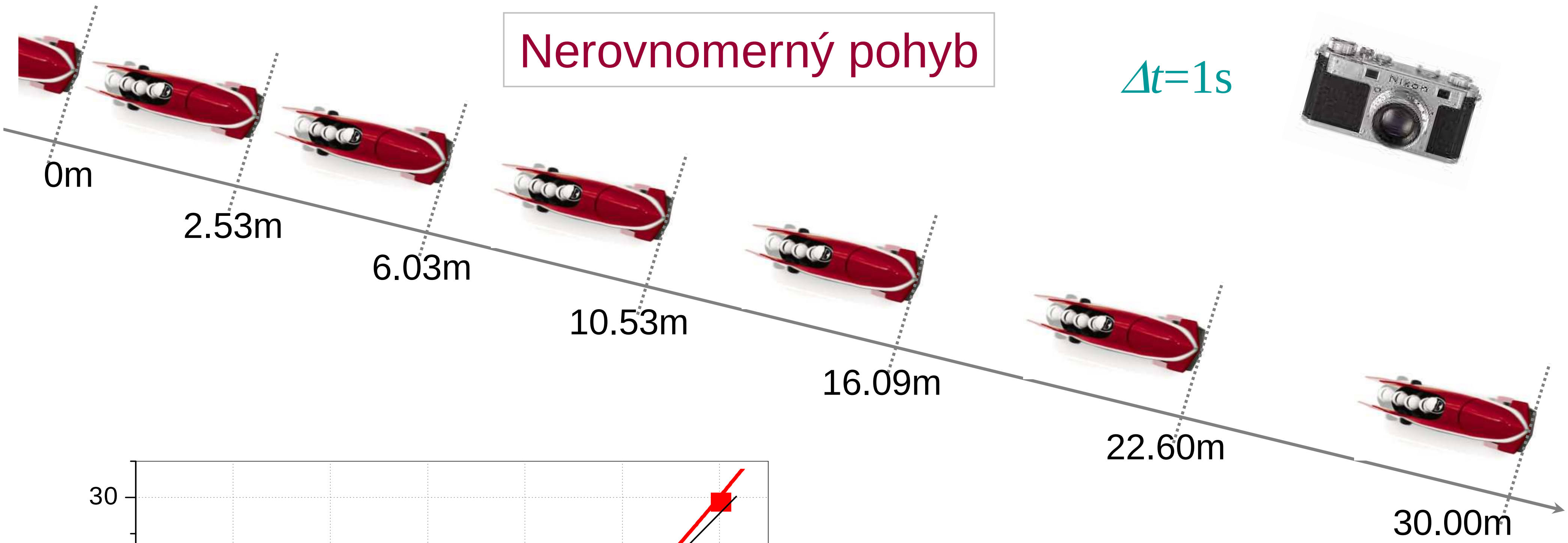
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

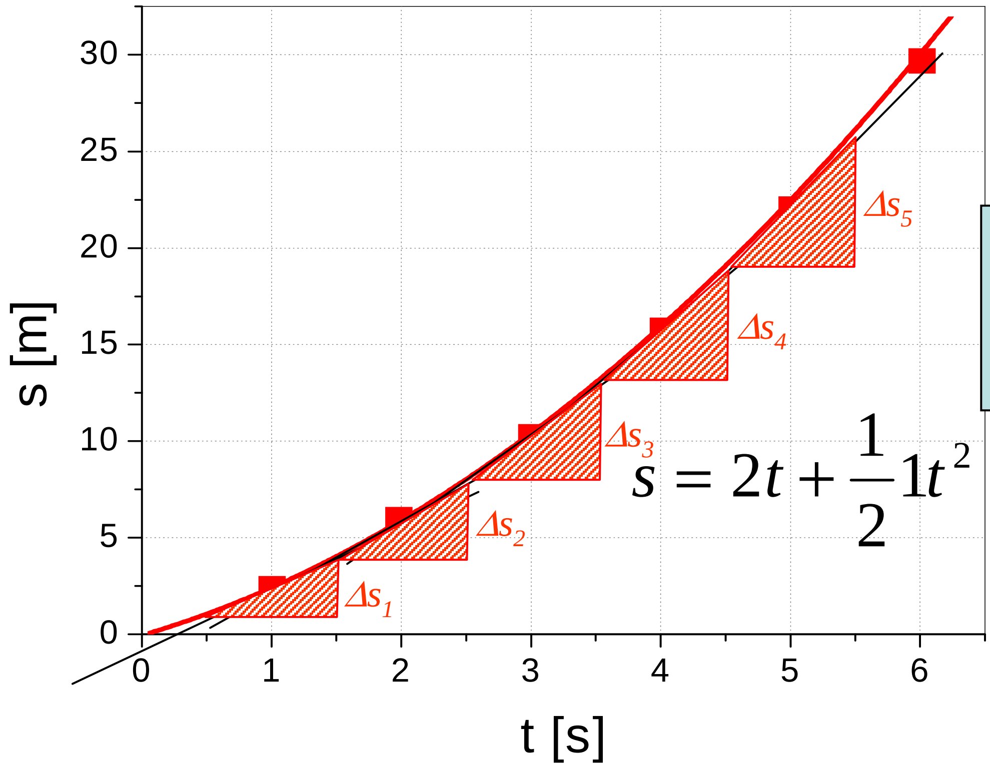
$$s = 1t \qquad v = 1\,\mathrm{ms}^{-1} \qquad s = vt$$

	t [s]	s [m]	
	0	0	
Δt_1			Δs_1
	2	2	
Δt_2			Δs_2
	4	4	
Δt_3			Δs_3
	6	6	
Δt_4			Δs_4
	8	8	
Δt_5			Δs_5
	10	10	

Nerovnomerný pohyb

$\Delta t = 1\,\mathrm{s}$





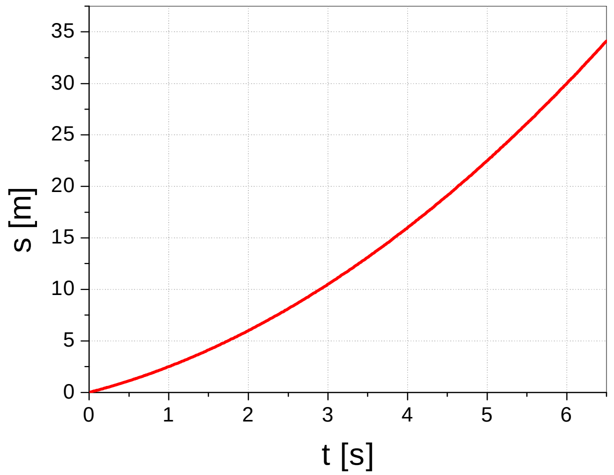
$$s = 2t + \frac{1}{2}1t^2$$

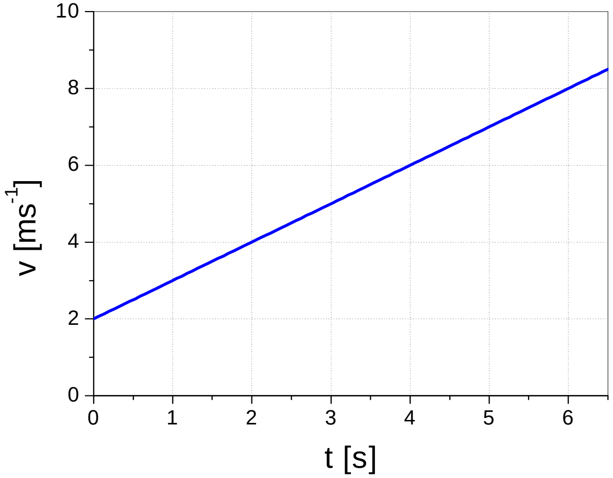
$v_0 = 2\,ms^{-1}$

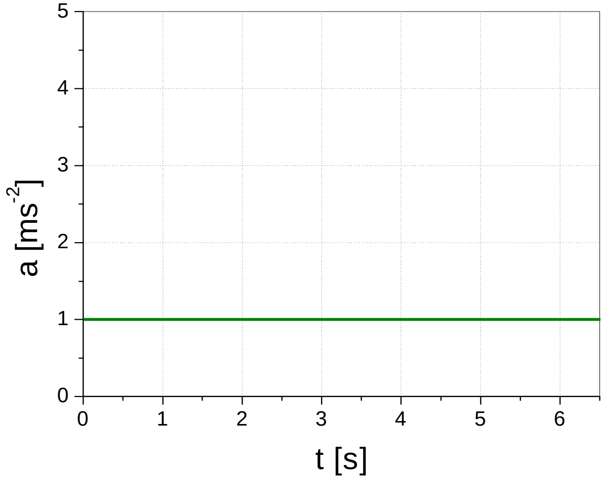
$a = 1\,ms^{-2}$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

t [s]	s [m]
1.0	2.53
2.0	6.03
3.0	10.53
4.0	16.09
5.0	22.60
6.0	30.00







$$s = 2t + \frac{1}{2}1t^2$$

$$v = 2 + t$$

$$a = 1$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

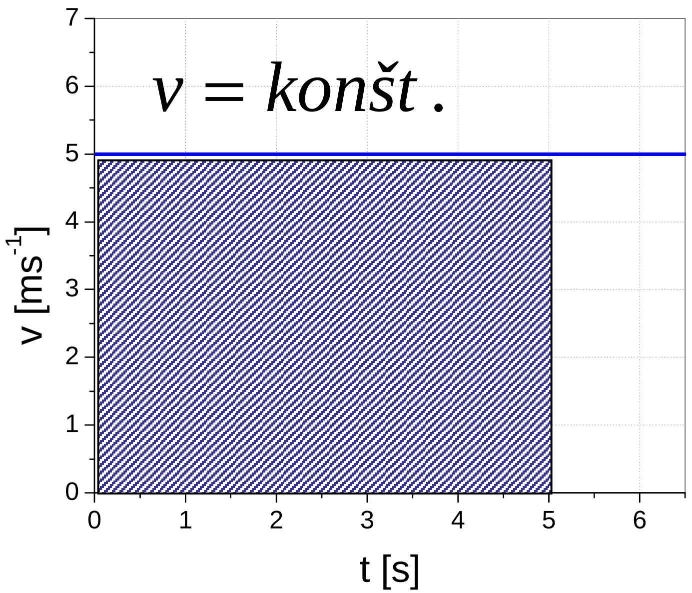
$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$

$v_0 = 2ms^{-1}$

$a = 1ms^{-2}$

Rovnomerný pohyb

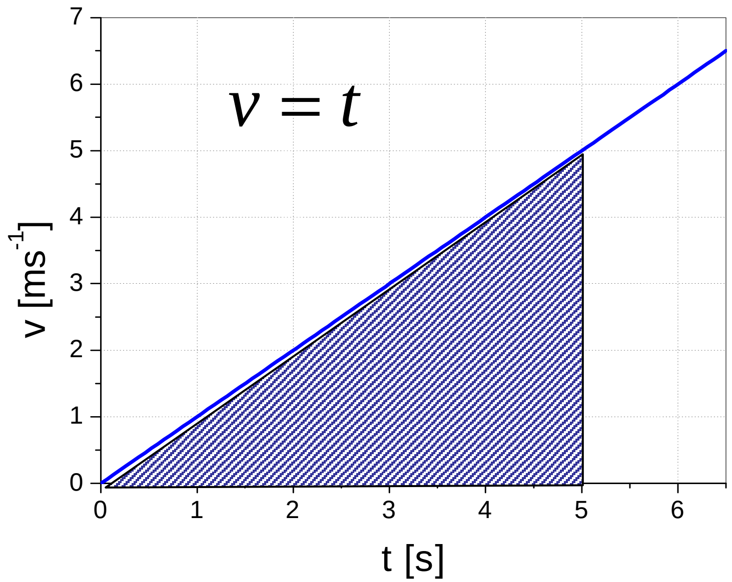


$$s = vt$$

Akú dráhu prejde za čas 5s?

$$s = 5ms^{-1}5s = 25m$$

Rovnomerne zrýchlený pohyb



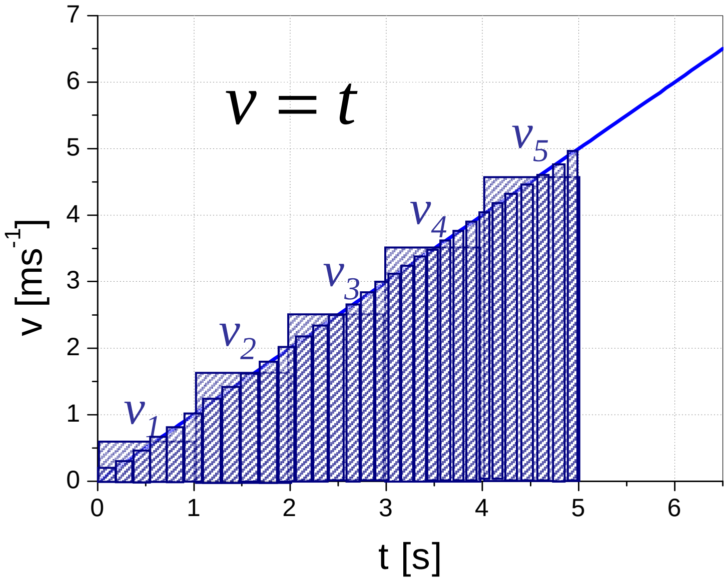
$$s = \frac{vt}{2}$$

Akú dráhu prejde za čas 5s?

$$s = \frac{5ms^{-1}5s}{2} = 12.5m$$

Dráha zodpovedá ploche pod krivkou ...

Rovnomerne zrýchlený pohyb



$$s = \sum_{i=1}^{5} v_i \Delta t$$

veľká nepresnosť, zmenšenie Δt

Ešte vylepšenie $\Delta t \to 0$

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v_i \Delta t$$

$$\int funkcia$$

Integrál z funkcie

Základné pravidlá derivovania a integrovania

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

Príklady derivovania a integrovania

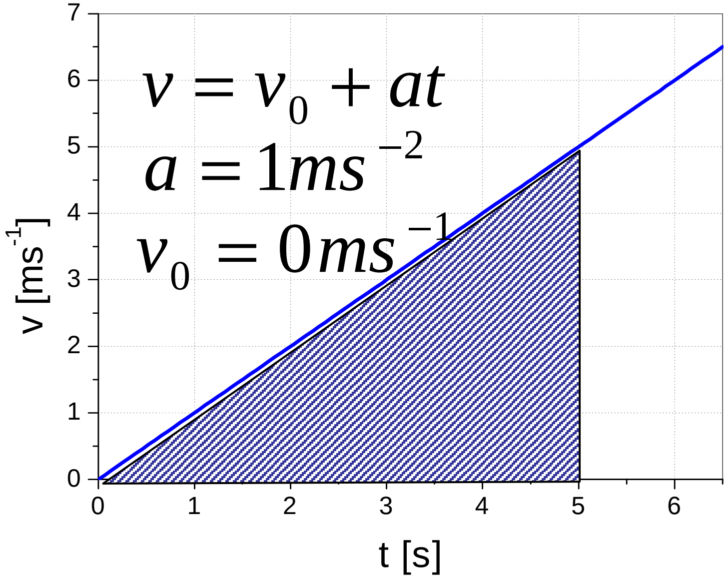
$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$$

$$\int 3x^2 dx = 3\frac{x^3}{3} = x^3$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{d\left(\frac{x^3}{3}\right)}{dx} = \frac{1}{3}3x^2 = x^2$$

Dôkaz výpočtu dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu pomocou integrálu



$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}} \Rightarrow vdt = ds \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_{s_0}^{s} ds$$

$$\int_0^t (v_0 + at)dt = \int_{s_0}^{s} ds$$

$$\int_0^t v_0 dt + a\int_0^t tdt = \int_{s_0}^{s} ds$$

$$v_0[t]_0^t + a\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t = [s]_{s_0}^{s}$$

$$v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = s - s_0$$

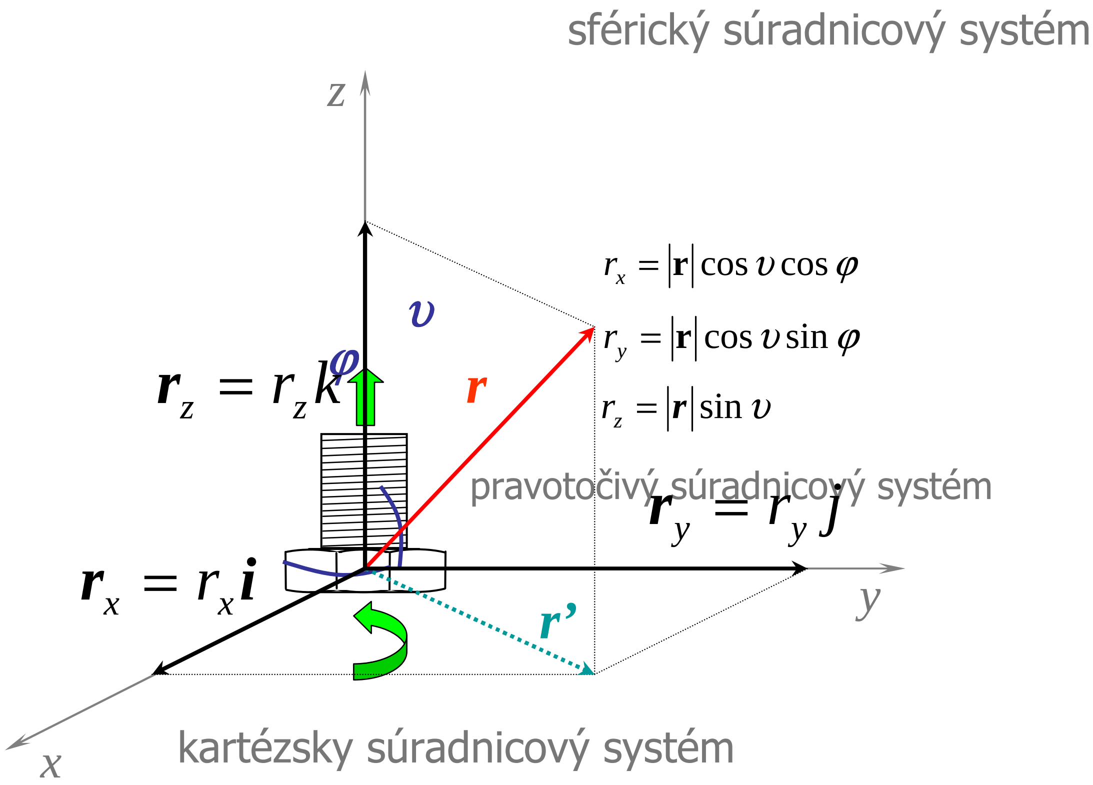
$$v = at \Rightarrow a = \frac{v}{t}$$

$$v_0 = 0$$

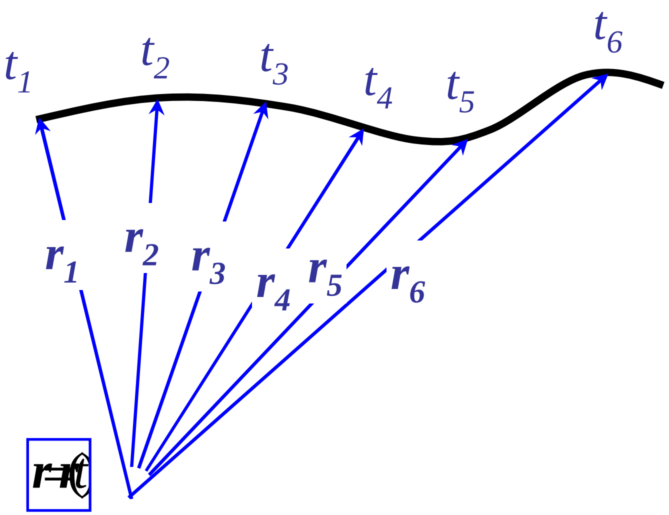
$$s_0 = 0$$

$$\boxed{s = \frac{1}{2}vt} \Leftarrow s = \frac{1}{2}\frac{v}{t}t^2 \Leftarrow s = \frac{1}{2}at^2 \Leftarrow s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

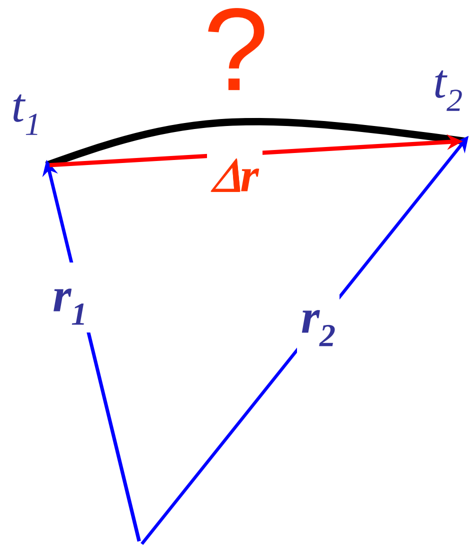
Súradnicový systém a polohový vektor



$$\boldsymbol{r} = r_x \boldsymbol{i} + r_y j + r_z k$$



Polohový vektor pohybujúceho sa bodu je funkciou času.

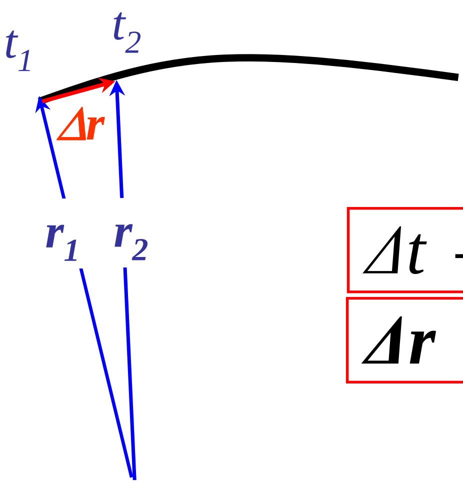


$$\boldsymbol{r}_1 + \Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2$$

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}$$

$$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1}$$

Zmenšovanie časového intervalu $\Rightarrow$ lepšie popísanie krivky



$$\boxed{\Delta t \to 0}$$

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{r} \to d\boldsymbol{r}}$$

Rýchlosť – vektor rýchlosti

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}}$$ okamžitá rýchlosť

[ms^{-1}] … jednotka rýchlosti

Priemerná (stredná) rýchlosť

$$\boldsymbol{v}_p = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \Rightarrow v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ (priamočiary pohyb)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{dt} = \boldsymbol{i}\frac{dx}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{dy}{dt} + \boldsymbol{k}\frac{dz}{dt} = \boldsymbol{i}v_x + \boldsymbol{j}v_y + \boldsymbol{k}v_z$$

$$\Downarrow$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$ pre tri zložky rýchlosti

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$ pre dve zložky rýchlosti

Zrýchlenie – vektor zrýchlenia

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}}$$

[ms^{-2}] … jednotka zrýchlenia

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\frac{dv_x}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{dv_y}{dt} + \boldsymbol{k}\frac{dv_z}{dt} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$ pre tri zložky zrýchlenia

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$ pre dve zložky zrýchlenia

Klasifikácia pohybov

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$$

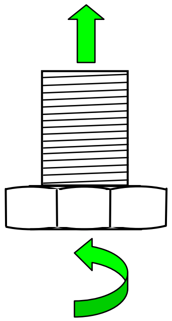
v	$\nearrow$	=konšt.	Rovnomerný pohyb
	$\searrow$	≠konšt	Nerovnomerný pohyb
τ	$\nearrow$	=konšt.	Priamočiary pohyb
	$\searrow$	≠konšt	Krivočiary pohyb

Kinematika hmotného bodu II

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

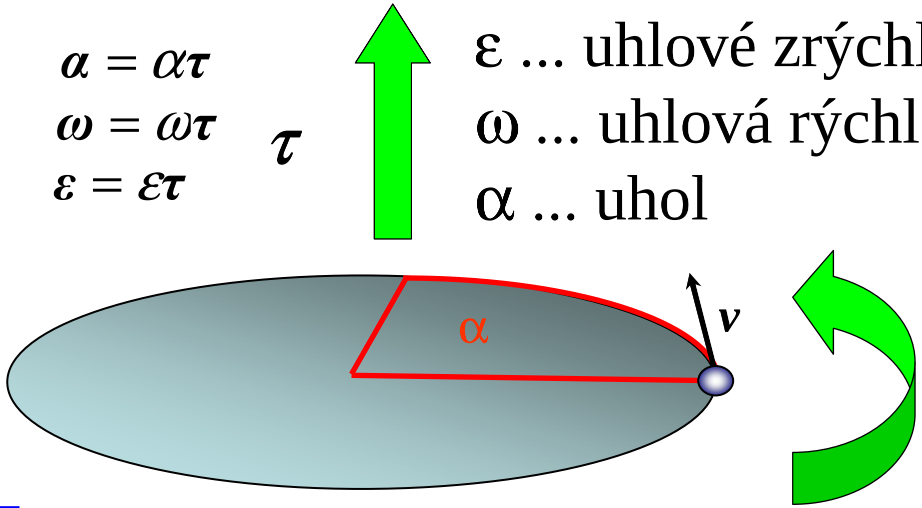
Pohyb po kružnici, tangenciálne a normálové zrýchlenie, pohyb za účinku vlastnej tiaže (vrhy)

Pohyb po kružnici



$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\boldsymbol{\tau}$$
$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{\tau}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\boldsymbol{\tau}$$

$\boldsymbol{\tau}$



ε ... uhlové zrýchlenie
ω ... uhlová rýchlosť
α ... uhol

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}} \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\alpha}}{dt^2}} \qquad \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

Rovnomerný pohyb po kružnici

$$\boxed{\omega = \omega_0 = konšt\,.}$$

$$\boxed{\omega = \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \omega dt = d\alpha}$$

$$\omega_0 dt = d\alpha$$

$$\int_0^t \omega_0 dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha$$

$$\omega_0 \int_0^t dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha$$

$$\omega_0 [t]_0^t = [\alpha]_{\alpha_0}^{\alpha}$$

$$\omega_0 t = \alpha - \alpha_0$$

$$\boxed{\omega_0 t = \alpha}$$

v čase t=0

$$\alpha_0 = 0$$

Rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici

$$\boxed{\omega \neq konšt\,.} \qquad \boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon t}$$

$$(\omega_0 + \varepsilon t)dt = d\alpha$$

$$\int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha$$

$$\omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha$$

$$\omega_0 [t]_0^t + \varepsilon \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t = [\alpha]_{\alpha_0}^{\alpha}$$

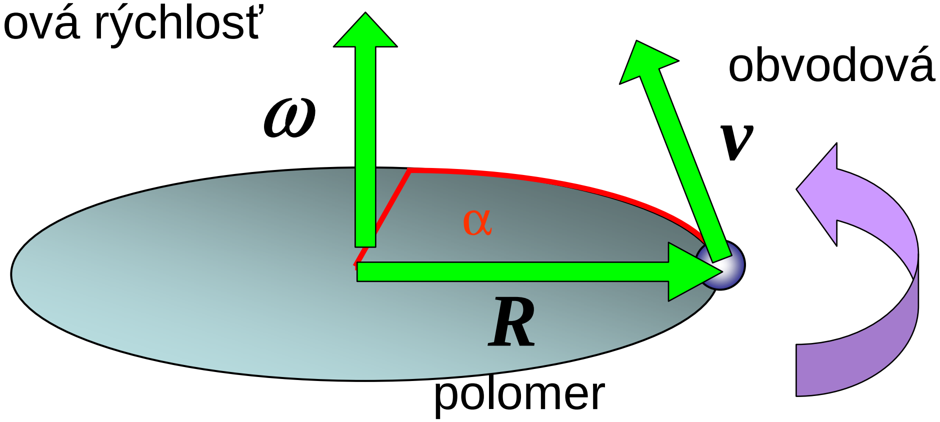
$$\omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \alpha - \alpha_0$$

$$\boxed{\omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \alpha}$$

Analógia veličín a vzťahov pre priamočiary pohyb a pohyb po kružnici

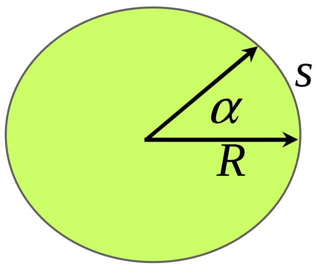
Pohyb po kružnici	Priamočiary pohyb
α	$s\ (\mathbf{r})$
ω	$\mathbf{v}$
ε	$\mathbf{a}$
$\boxed{\omega = \frac{d\alpha}{dt}}$	$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}}$
$\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}}$	$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}}$
$\boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon t}$	$\boxed{v = v_0 + at}$
$\boxed{\alpha = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2}$	$\boxed{s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$

Vzťah medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou



Vychádzame zo vzťahu:

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$



$s = R2\pi$ ... obvod celého kruhu

$s = R\alpha$ ... kruhový oblúk

$ds = Rd\alpha$ ... malý element

$$\Rightarrow \boxed{v = R\frac{d\alpha}{dt}} \Rightarrow \boxed{v = R\omega}$$

Ak uvážime smer vektorov tak platí:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}}$$

Perióda a frekvencia

len pre rovnomerný pohyb po kružnici!!!!!

Perióda kruhového pohybu (T)

(vyjadruje čas, za ktorý hm. b. vykonal rovnomerným pohybom jeden obeh po kružnici)

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cancel{R}}{\cancel{R}\omega} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

jednotka … [s]

Frekvencia kruhového pohybu (f)

(vyjadruje počet obehov za jednotku času)

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$$

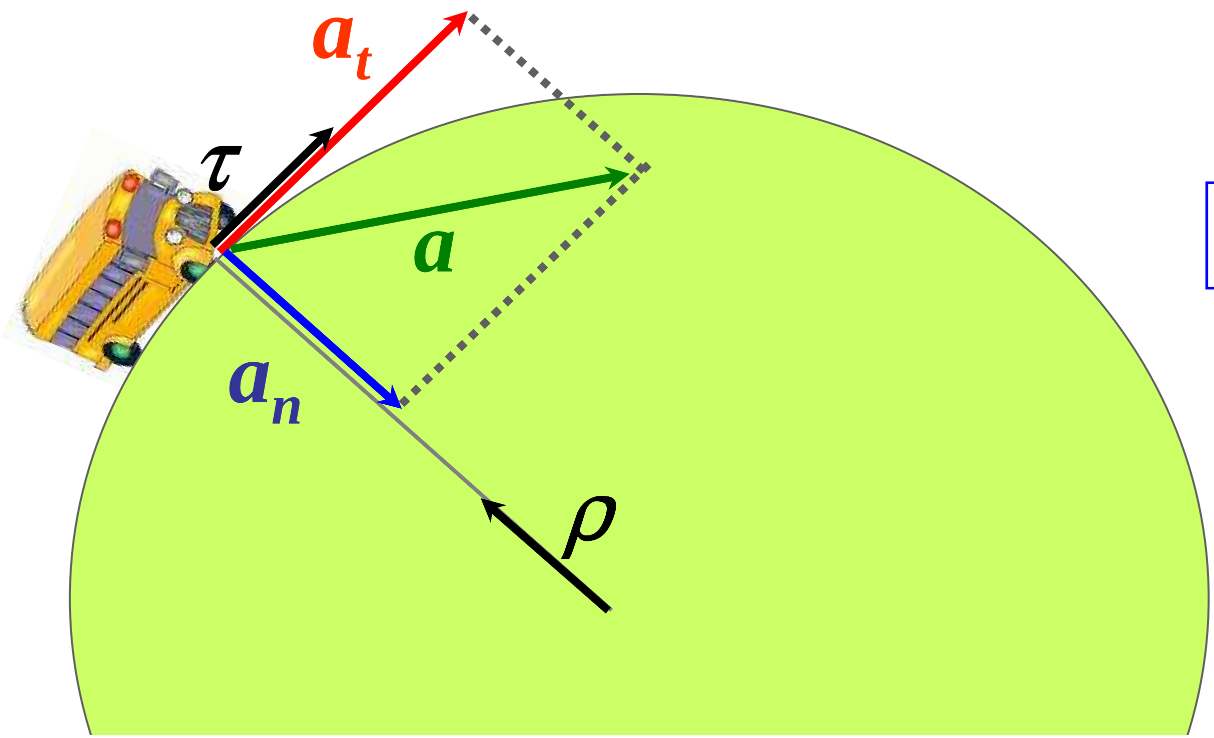
jednotka … [Hz] (Hertz)

Tangenciálne a normálové zrýchlenie

a_t ... tangenciálne zrýchlenie
(vyjadruje zmenu veľkosti rýchlosti)

a_n ... normálové zrýchlenie
(vyjadruje zmenu smeru rýchlosti)

Príklady z praxe:
autobus v zákrute
odletujúce iskry z brúsky
centrifúga, kolotoč



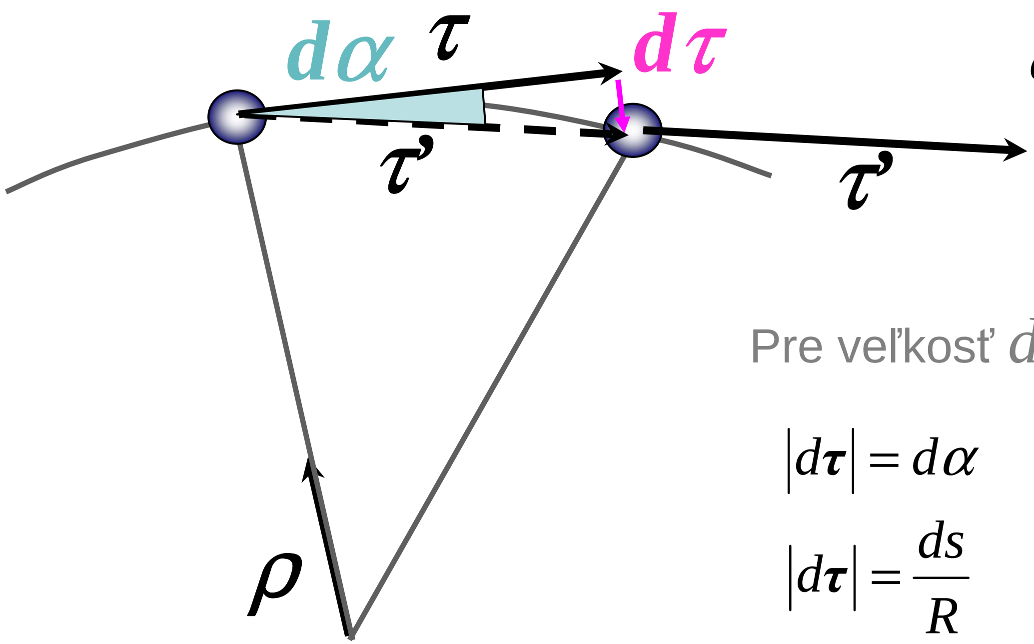
$$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_t} + \boldsymbol{a_n}}$$

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}}$$

$$\boldsymbol{a_t} = a_t \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{a_n} = -a_n \boldsymbol{\rho}$$

Tangenciálne a normálové zrýchlenie - pomocou obvodovej rýchlosti



$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v.\boldsymbol{\tau}) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{a}_t} + \underbrace{v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}}_{\boldsymbol{a}_n}$$

Pre veľkosť $d\tau$ platí:

$$|d\boldsymbol{\tau}| = d\alpha$$

$$|d\boldsymbol{\tau}| = \frac{ds}{R}$$

uvážime aj smer: $\boxed{d\boldsymbol{\tau} = -\frac{ds}{R}\boldsymbol{\rho}}$

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} - v\frac{1}{dt}\frac{ds}{R}\boldsymbol{\rho} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{a}_t} - \underbrace{\frac{v^2}{R}\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{a}_n}$$

$\boxed{|\boldsymbol{a}_t| = \frac{dv}{dt}}$ ... smer dotyčnice

$\boxed{|\boldsymbol{a}_n| = \frac{v^2}{R}}$ ... smer do stredu krivosti dráhy

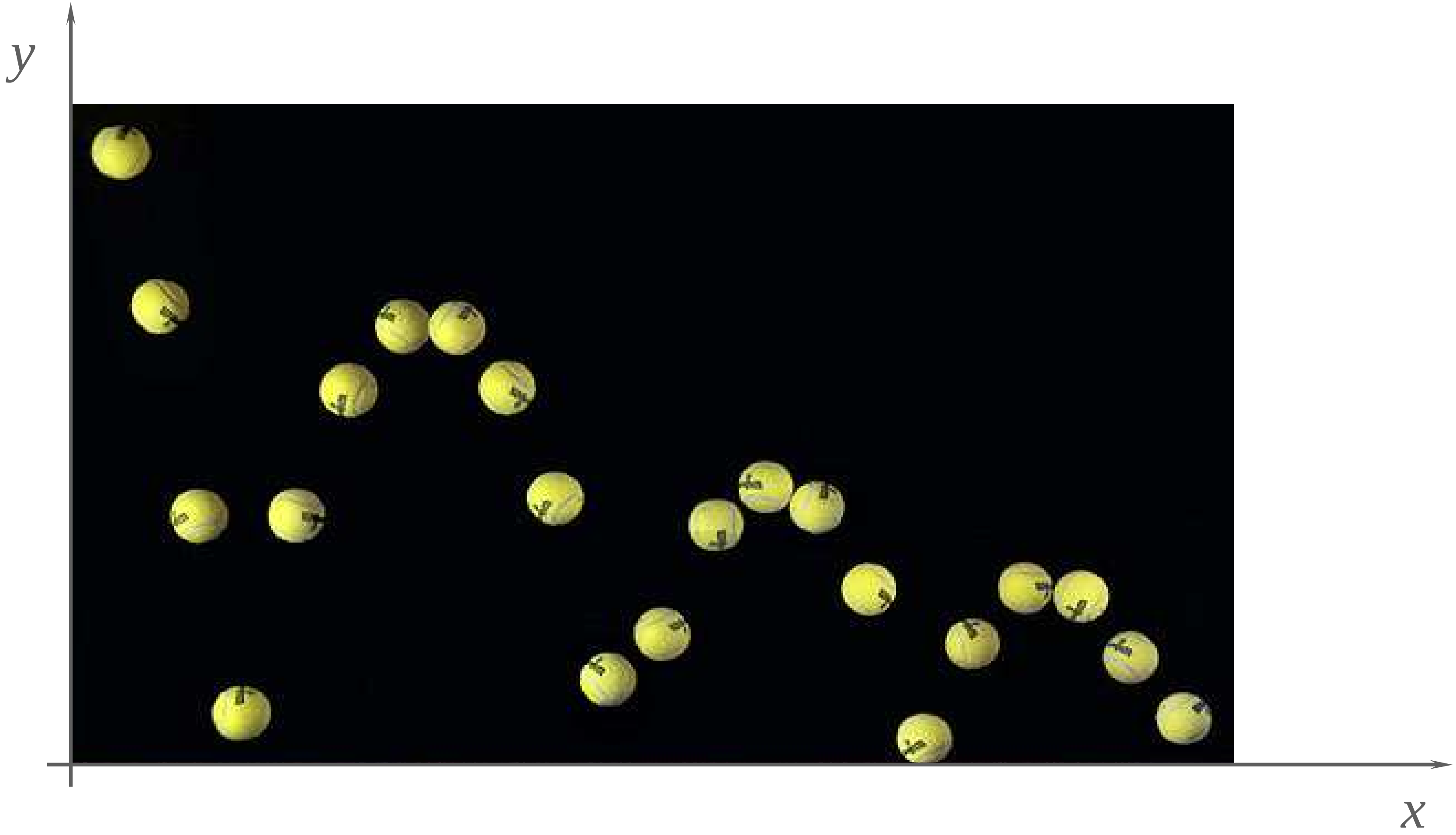
Pohyby za účinku tiaže

$\boxed{\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}}$ v gravitačnom poli sa prejavujú účinky tiaže

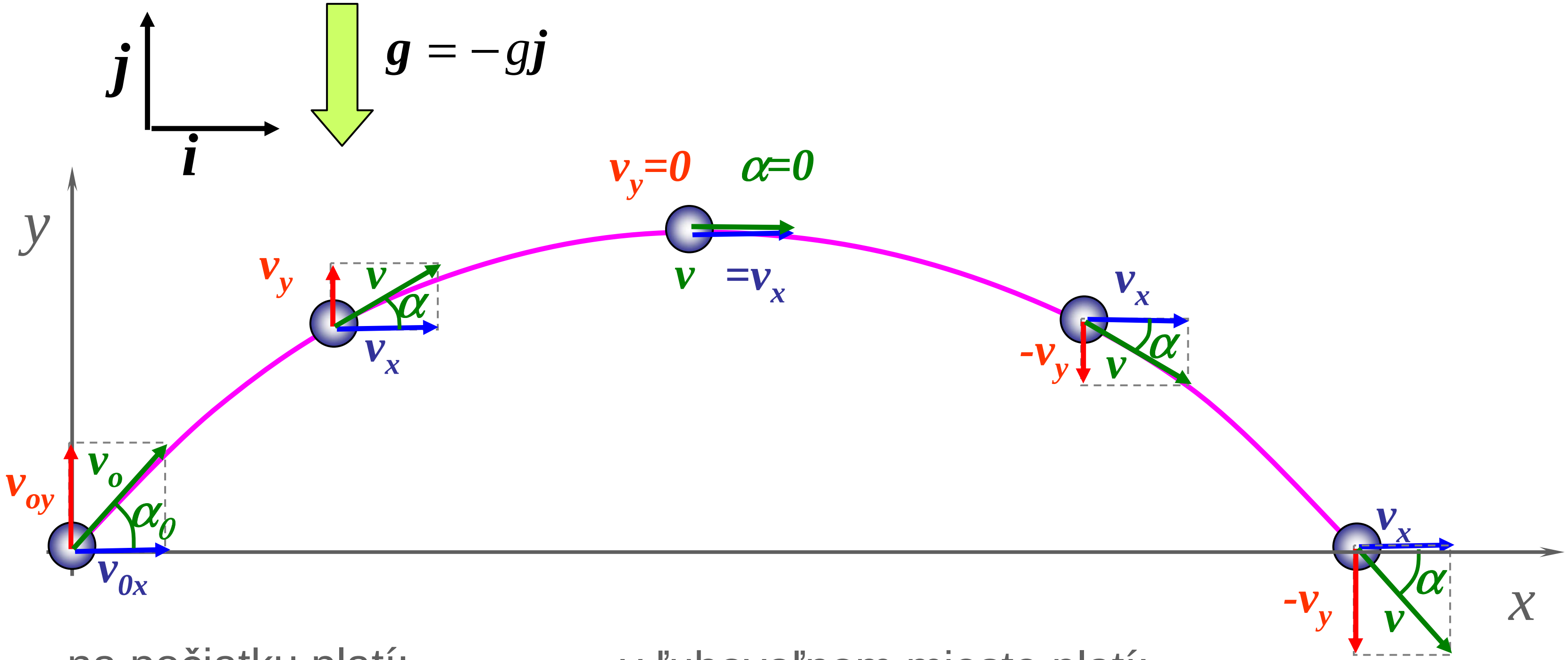
$\boxed{\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{g}}$ analógia so zrýchleným pohybom

$$v = v_0 + gt$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$



Šikmý vrh - počiatočné podmienky, rýchlosť



na počiatku platí:

$$\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j}$$

$$v_{ox} = v_0 \cos\alpha_0$$

$$v_{oy} = v_0 \sin\alpha_0$$

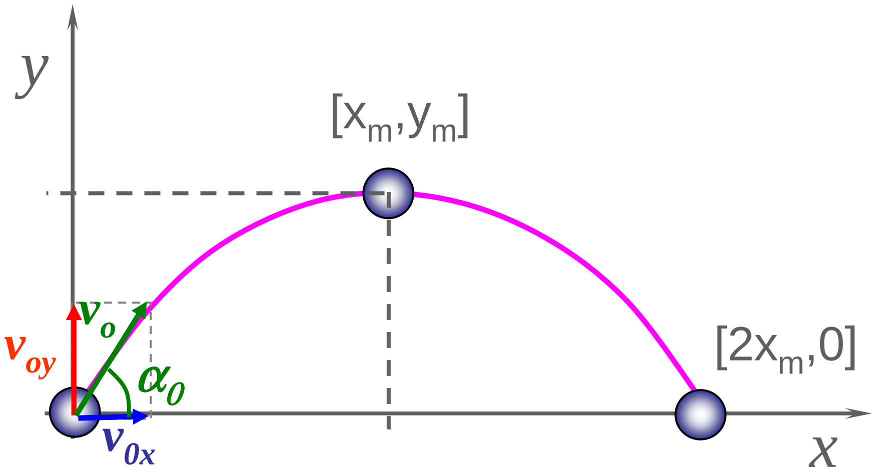
v ľubovoľnom mieste platí:

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha_0 - gt$$

Šikmý vrh - rovnice dráhy, vrchol, dĺžka



Pre polohu hm. b. platí:

$$dx = v_x dt$$

$$x = \int v_o \cos \alpha_0 dt = v_o \cos \alpha_0 \int dt$$

$$\boxed{x = v_0 \cos(\alpha_0) t}$$

Analogicky získame:

$$\boxed{y = v_0 \sin(\alpha_0) t - \frac{1}{2} g t^2}$$

rovnice dráhy pohybu

Určenie max. výšky:

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt$$

V maxime dráhy platí, že v_y=0:

$$0 = v_0 \sin \alpha_0 - gt \qquad t = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

Dosadíme do rovnice dráhy za y:

$$y_m = v_0 \sin(\alpha_0) \frac{v_0 \sin(\alpha_0)}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin(\alpha_0)}{g} \right)^2 \Rightarrow \boxed{y_m = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha_0)}{2g}}$$

Šikmý vrh - pokračovanie ...

$$x = v_0 \cos(\alpha_0) t$$

$$x_m = v_0 \cos \alpha_0 \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]$$

$$\boxed{x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g}}$$

Pre dĺžku platí:

$$\boxed{d = 2x_m = \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}}$$

Vrh vodorovný, zvislý nahor/nadol, voľný pád

Vychádzame zo vzťahov pre šikmý vrh:

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0 \qquad x = v_0 \cos(\alpha_0) t$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt \qquad y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Rozdelenie vrhov na základe: α_0 v_0

Vodorovný vrh: $\alpha_0 = 0$

$$v_x = v_0 \qquad x = v_0 t$$

$$v_y = -gt \qquad y = -\frac{1}{2} g t^2$$

Zvislý vrh nahor: $\alpha_0 = 90^o$

$$v_x = 0 \qquad x = 0$$

$$v_y = v_0 - gt \qquad y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Zvislý vrh nadol: $\alpha_0 = -90^o$

$$v_x = 0 \qquad x = 0$$

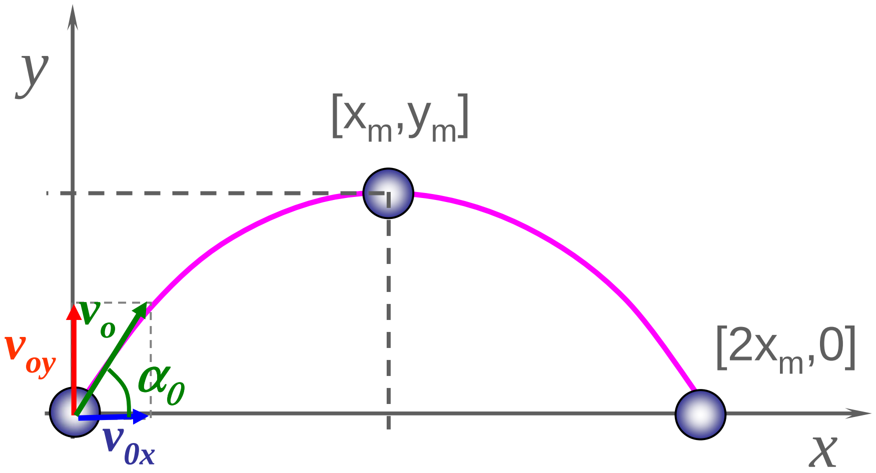
$$v_y = -v_0 - gt \qquad y = -v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Voľný pád: $\alpha_0 = -90^o$ $v_0 = 0$

$$v_x = 0 \qquad x = 0$$

$$v_y = -gt \qquad y = -\frac{1}{2} g t^2$$

Šikmý vrh - odvodenie cez hľadanie extrému



Pre polohu hm. b. platí:

$$dx = v_x dt$$

$$x = \int v_o \cos\alpha_0 dt = v_o \cos\alpha_0 \int dt$$

$$\boxed{x = v_0 \cos(\alpha_0) t}$$

Analogicky získame:

$$\boxed{y = v_0 \sin(\alpha_0) t - \frac{1}{2} g t^2}$$

rovnice dráhy pohybu

Určenie max. výšky:

Vyjadríme t z rovnice dráhy pohybu pre x a dosadíme za y:

$$y = v_0 \sin\alpha_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha_0} \Rightarrow y = x \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{x^2 g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha_0}$$

V maxime krivky platí:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha_0} x_m = 0 \Rightarrow x_m = \frac{v_0^2 \operatorname{tg}\alpha_0 \cos^2\alpha_0}{g}$$

Šikmý vrh - pokračovanie ...

$$x_m = \frac{v_0^2 tg\alpha_0 \cos^2\alpha_0}{g} \Rightarrow x_m = \frac{v_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g}$$

$$\boxed{x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g}}$$

Dosadením pre y_m dostávame:

$$y_m = tg\alpha_0 \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha_0}{4g^2}$$

$$\boxed{y_m = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g}}$$

súradnice vrcholu paraboly šikmého vrhu

Pre dĺžku platí:

$$\boxed{d = 2x_m = \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

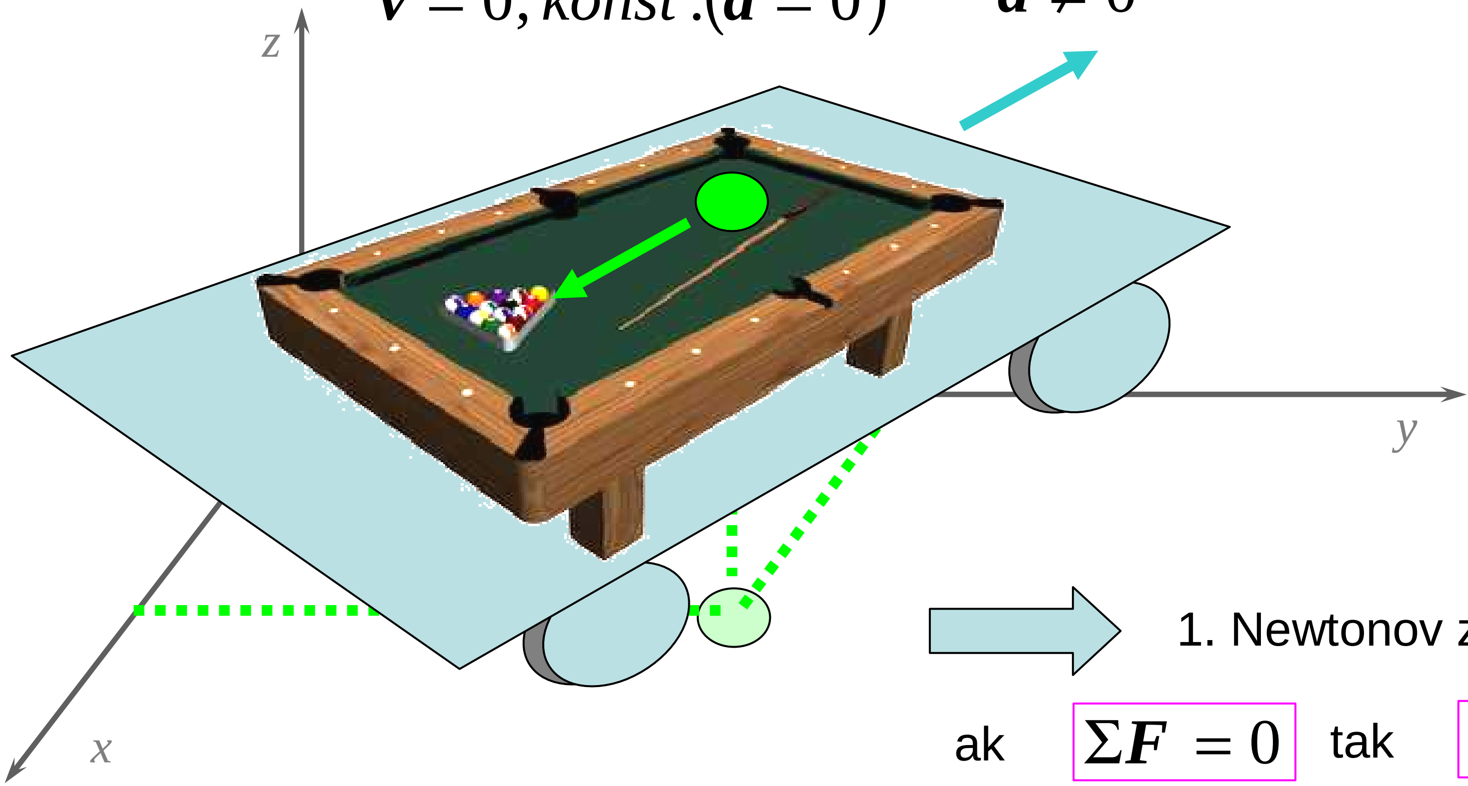
Dynamika hmotného bodu

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

Newtonove zákony dynamiky, hmotnosť, sila, hybnosť, práca, výkon

Inerciálna a neinerciálna sústava, 1. Newtonov zákon

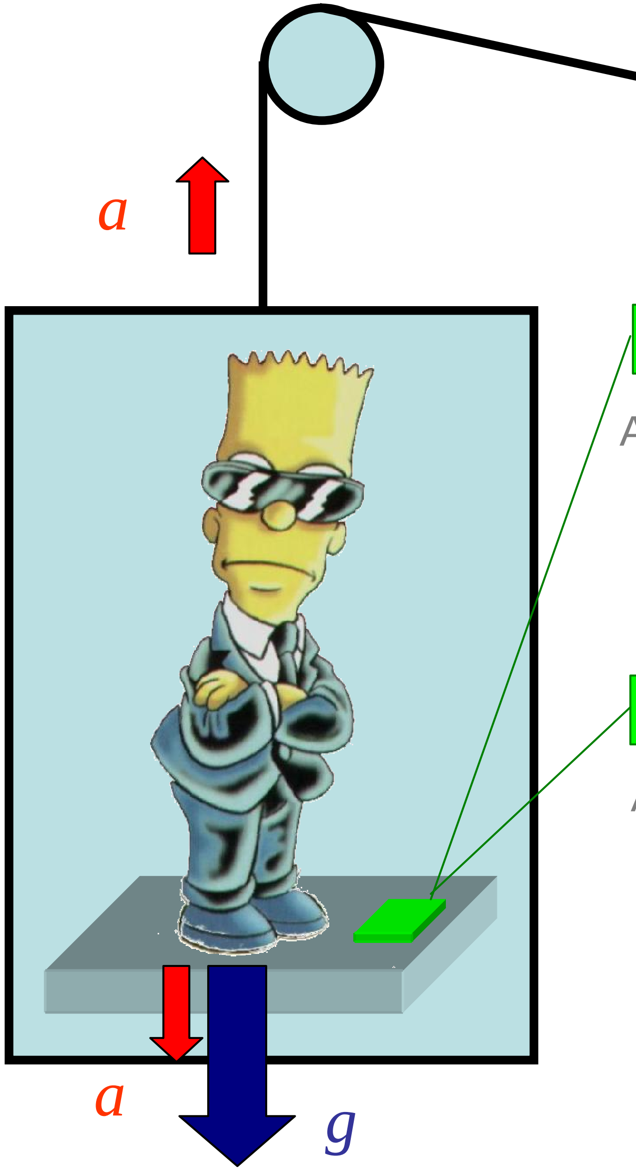
$$\boldsymbol{v} = 0, \mathit{konšt}.(\boldsymbol{a} = 0) \qquad \boldsymbol{a} \neq 0$$



1. Newtonov zákon

ak $\boxed{\Sigma \boldsymbol{F} = 0}$ tak $\boxed{\boldsymbol{a} = 0}$

Hmotnosť, sila, tiaž



bez pohybu výťahu, resp. pohyb s konšt. rýchlosťou

$\boldsymbol{G} = 490{,}5N$

Aká je hmotnosť?

$$m = \frac{G}{g} = \frac{490{,}5N}{9{,}81ms^{-2}} \Rightarrow \boxed{m = 50\,kg}$$

so zrýchlením nahor

$\boldsymbol{F} = 550{,}5N$

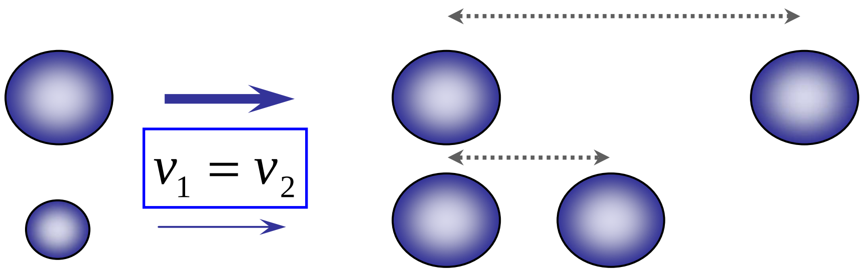
Aká je zrýchlenie?

$$\boldsymbol{F} = m(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{a}) \Rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} - \boldsymbol{g} \Rightarrow \boxed{a = 1{,}2ms^{-2}}$$

Tiaž človeka na Mesiaci je asi 6xmenšia ako na Zemi.

PREČO?

2. Newtonov zákon, hybnosť



Prečo? Nie je rozhodujúca len rýchlosť...

$$\boxed{\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}}$$

Hybnosť – vektor určený súčinom hmotnosti hm. b. a jeho rýchlosti..

2. Newtonov zákon (zákon sily)

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}}$$

tiež sa uvádza v tvare: $\boldsymbol{F} = \dfrac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ $\boxed{\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}}$

jednotka ... [N] Newton [kgms^{-2}]

3. Newtonov zákon

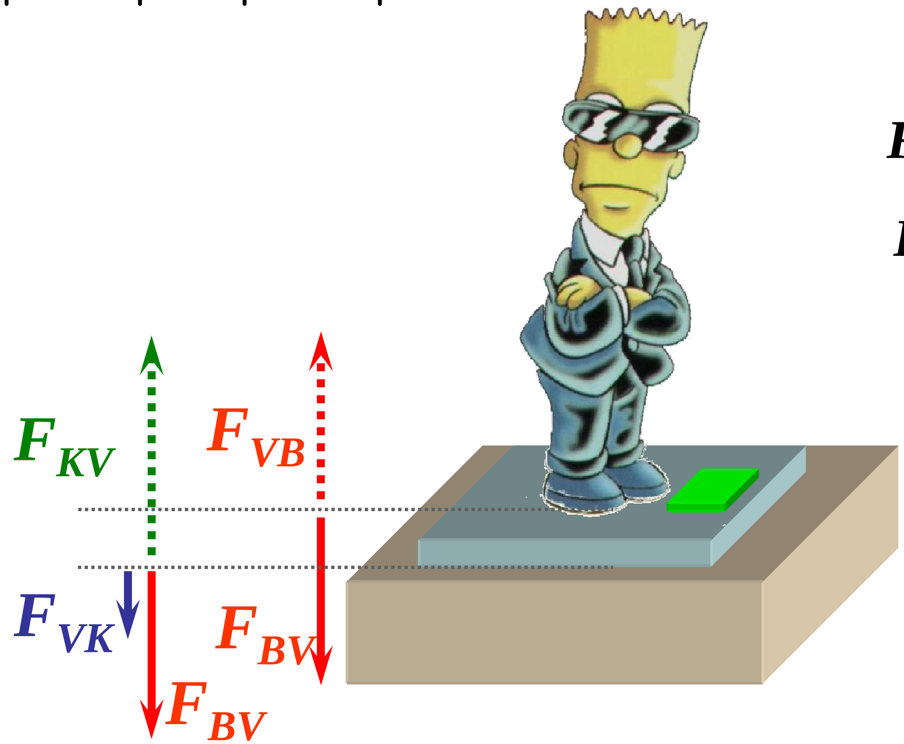
$$\boxed{\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}}$$

3. Newtonov zákon (zákon akcie a reakcie)

$$\left|\boldsymbol{F}_{12}\right| = \left|\boldsymbol{F}_{21}\right|$$

Jedna sila je ‘akčná’ a druhá ‘reakčná’.

3. N.z. odhaľuje základnú symetriu síl v prírode ...



$$\boldsymbol{F}_{BV} = -\boldsymbol{F}_{VB} = 490{,}5N$$

$$\boldsymbol{F}_{KV} = \boldsymbol{F}_{VK} + \boldsymbol{F}_{BV} = 490{,}5N + 60{,}5N = 551N$$

V pokoji (v rovnováhe) podľa 2.Nz platí:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = 0$$ vo všetkých pôsobiskách síl

Ak sa poruší táto rovnosť, poruší sa rovnovážny stav.

Prax: Nosnosť zariadení (žeriav+záťaž, výťahy), resp. človek na konári,

Impulz, moment sily, moment hybnosti

(veličiny rozvíjajúce Newtonove zákony)

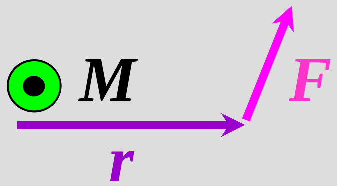
$$\boxed{\boldsymbol{I} = \int_0^t \boldsymbol{F}\,dt} \xrightarrow{\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}} \boldsymbol{I} = \int_0^t m\boldsymbol{a}\,dt \longrightarrow \boldsymbol{I} = \int_0^t m\,dt\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \longrightarrow \boldsymbol{I} = \int_{v_1}^{v_2} m\,d\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1$$

$$\boxed{\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1}$$

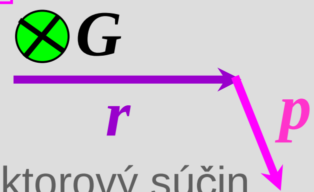
Impulz sily - časový účinok sily

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}}$$



Moment sily - vektorový súčin polohového vektora pôsobiska sily a vektora sily

$$\boxed{\boldsymbol{G} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}}$$



Moment hybnosti - vektorový súčin polohového vektora hm.b. a jeho hybnosti

Mechanická práca, výkon

$$\boxed{A = \int \boldsymbol{F} \circ d\boldsymbol{r}} \qquad A = \int F \cos(\alpha) dr$$

Mechanická práca - dráhový účinok sily

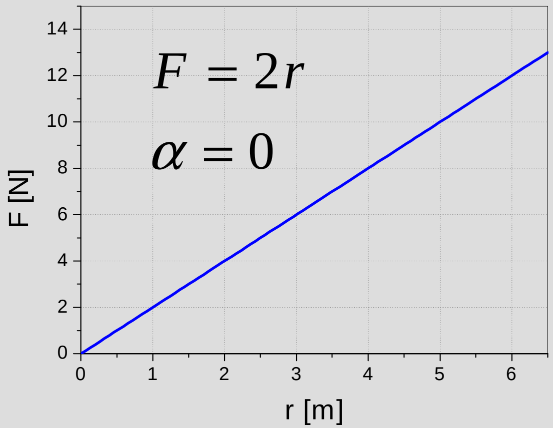
Pre $F = konšt.$

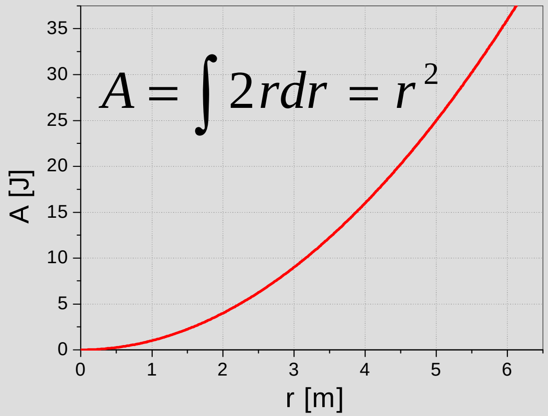
$$A = F \cos(\alpha) r$$

Pre $\alpha = 0$

$$A = Fr$$

Jednotka ... [J] Joule [kgm^{2}s^{-2}]

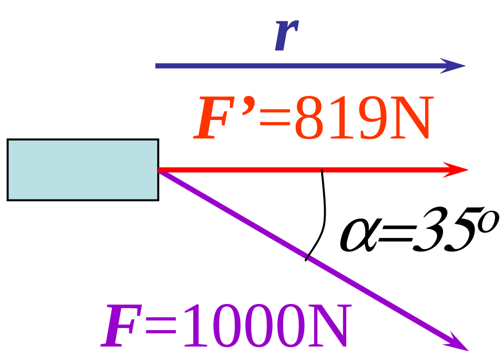




$$\boxed{P = \frac{dA}{dt}}$$

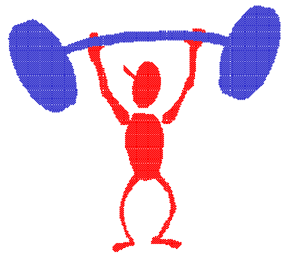
Výkon – práca vykonaná za jednotku času

[W] Watt [kgm^{2}s^{-3}]



$$F' = F \cos(\alpha)$$

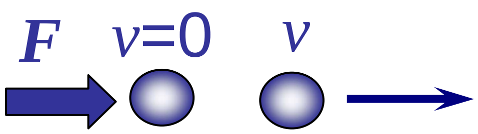
Kinetická a potenciálna energia

Mechanická energia (E) $=$  $+$ 

Jednotka ... [J] Joule [kgm^{2}s^{-2}]

Kinetická energia (E_k) Potenciálna energia (E_p)

$$A \rightarrow E_k$$



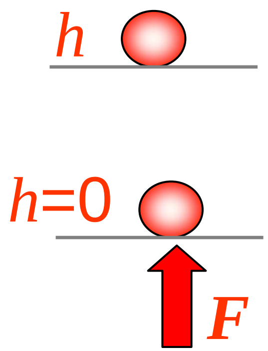
$$E_k = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\boldsymbol{a} d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m\boldsymbol{v} d\boldsymbol{v} = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} \qquad \boldsymbol{v} \circ d\boldsymbol{v} = v dv$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad v_1 = 0$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$$

$$A \rightarrow E_p$$

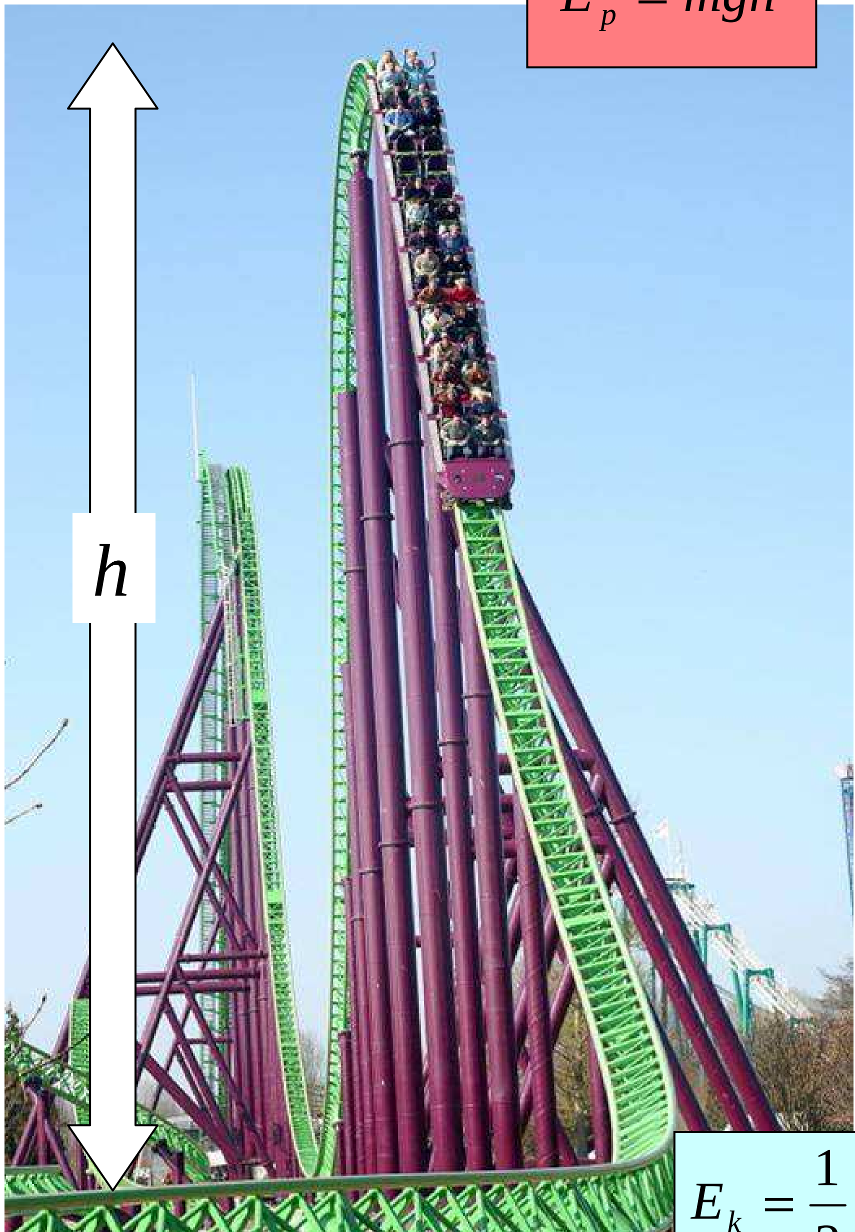


$$E_p = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int_{h_1}^{h_2} m\boldsymbol{g} d\boldsymbol{r}$$

$$E_k = mg(h_2 - h_1) \qquad h_1 = 0$$

$$\boxed{E_p = mgh}$$

Zákony zachovania



$$E_p = mgh$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Mechanická energia (E)

$$E = E_p + E_k = kon\check{s}t\,.$$

Hybnosť ($\boldsymbol{p}$)

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = kon\check{s}t\,.$$

Moment hybnosti ($\boldsymbol{G}$)

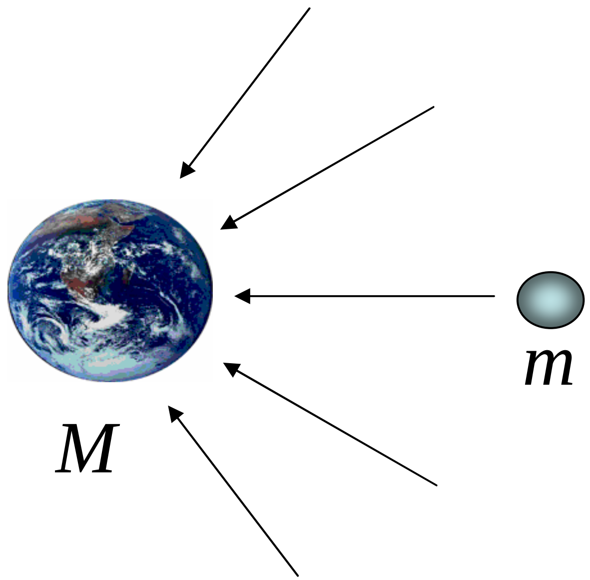
$$\boldsymbol{G} = \sum_i \boldsymbol{G}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = kon\check{s}t\,.$$

Gravitačné pole II

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

Intenzita a potenciál gravitačného poľa, kozmické lety

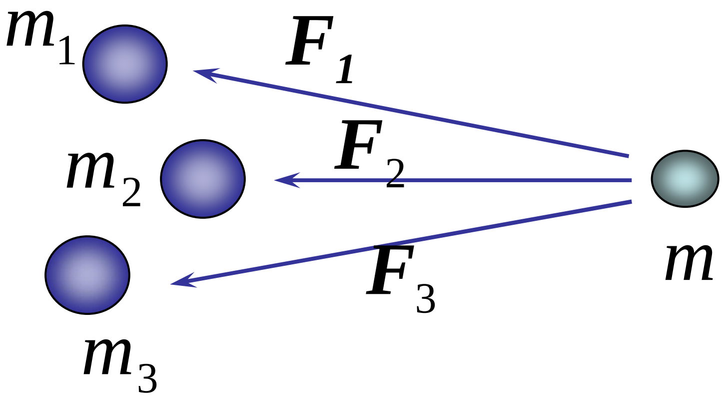
Intenzita gravitačného poľa



$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = -\kappa \frac{M}{r^3}\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{F} = -\kappa \frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Intenzita v okolí sústavy hm. b.



$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \frac{\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n}{m}$$

$$= \frac{\boldsymbol{F}_1}{m} + \frac{\boldsymbol{F}_2}{m} + \ldots + \frac{\boldsymbol{F}_n}{m} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \ldots + \boldsymbol{E}_n$$

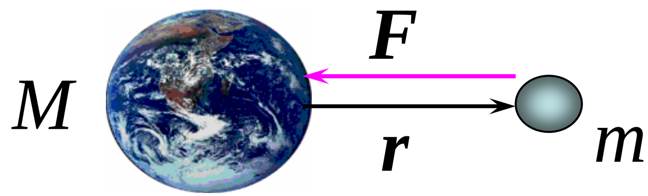
$$\boxed{\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i}$$

Potenciál gravitačného poľa

(Potenciálna energia)

$$E_p = ?$$

$$\boxed{V = \frac{E_p}{m}}$$



z Newtonovho gravitačného zákona

$$E_{p21} = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r} = \kappa m M \int_{r_1}^{r_2} \frac{\cancel{\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}^{\cancel{3}\,2}} = \kappa m M \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}^2}$$

$$r_1 \to \infty$$

$$E_{p21} = -\left[\frac{\kappa m M}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{\kappa m M}{r_2} + \frac{\kappa m M}{r_1} = -\frac{\kappa m M}{r} + 0$$

$$\boxed{V = -\kappa \frac{M}{r}}$$

pre sústavu hm. b. platí:

$$\boxed{V = -\kappa \sum_i \frac{m_i}{r_i}}$$

Gravitačné zrýchlenie

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{E} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$$

$$\cancel{m}\boldsymbol{E} = \cancel{m}\boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{g}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\kappa \frac{M}{r^3}\boldsymbol{r}} \quad = \boldsymbol{g}$$

$$\boxed{g_h = \kappa \frac{M}{(R+h)^2}}$$

vo výške h nad zemským povrchom

$$\boxed{g_0 = \kappa \frac{M}{R^2}}$$

na povrchu Zeme

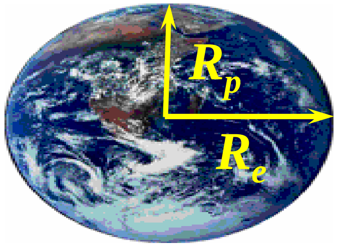
$$g_{Zem} = -6.671.10^{-11} Nkg^{-2}m^2 \frac{5.974.10^{24} kg}{(6.371.10^6 m)^2} = 9.818\, ms^{-2}$$

$$\frac{g_{Zem}}{g_{Mesiac}} = 6.05$$

$$g_{Mesiac} = 1.623\, ms^{-2}$$

Gravitačné zrýchlenie na rovníku a na póloch

$$M = 5{,}974.10^{24\,kg}$$
$$R_e = 6{,}38.10^{6}\,m$$
$$R_p = 6{,}36.10^{6}\,m$$



$$g_p = \kappa \frac{M}{R_p^2}$$

$$g_e = \kappa \frac{M}{R_e^2}$$

$$g_p = 6{,}671.10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}\,\frac{5{,}974.10^{24}\,kg}{\left(6{,}36.10^{6}\,m\right)^2}$$

$$g_e = 6{,}671.10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}\,\frac{5{,}974.10^{24}\,kg}{\left(6{,}38.10^{6}\,m\right)^2}$$

$$\boxed{g_p = 9{,}86\,ms^{-2}}$$

$$\boxed{g_e = 9{,}80\,ms^{-2}}$$

$$\boxed{a_{op} = 0}$$

?

Odstredivé zrýchlenie

$$\boxed{a_{oe} = \frac{4\pi^2 R_e}{T^2}}$$

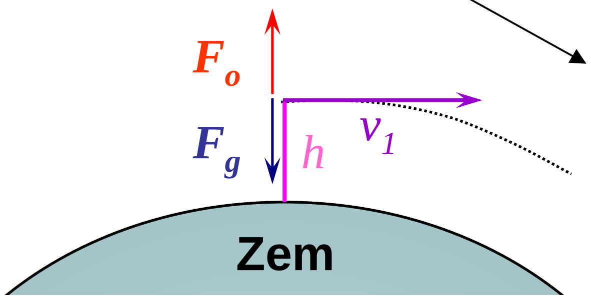
$$\boxed{g`_p = 9{,}86\,ms^{-2}}$$

$$\boxed{g'_e = g_e - \frac{4\pi^2 R_e}{T^2} = 9{,}80\,ms^{-2} - \frac{39{,}48.6{,}38.10^{6}\,m}{86400^2\,s^2} = 9{,}77\,ms^{-2}}$$

Kozmické lety - 1. kozmická rýchlosť

Kozmické rýchlosti

- 1. kozm. rýchlosť – obežnica Zeme
- 2. kozm. rýchlosť – opustenie gr. poľa Zeme
- 3. kozm. rýchlosť – opustenie Slnečnej sústavy



$$F_g = F_o$$

$$mg = m\frac{v_1^2}{R+h}$$

$$g = \kappa\frac{M}{(R+h)^2} \Longleftrightarrow g_0 = -\kappa\frac{M}{R^2}$$

$$\boxed{g = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}}$$

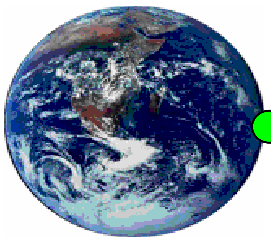
$$g_0\frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{v_1^2}{R+h}$$

$$v_1 = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$$

na povrchu Zeme $h = 0$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{Rg_0} = 7.912\,kms^{-1}$$

Kozmické lety - 2. kozmická rýchlosť



$$\boxed{E_k + E_p}$$

$h = 0$ $\quad$ $h = \infty$

$$v_{equator} = 0.5 kms^{-1}$$ rýchlosť rotácie Zeme na rovníku

$$v_{aroundSun} = 29.8 kms^{-1}$$ rýchlosť rotácie Zeme okolo Slnka

$$v_{Milkyway} = 250\, kms^{-1}$$ pohyb Slnečnej sústavy v galaxii Mliečna dráha

0 $\quad$ 0

$$\boxed{\cancel{E_{k\infty}} + E_{p\infty} = E_{k0} + \cancel{E_{p0}}}$$

$$E_{p\infty} = \kappa \frac{mM}{R}$$

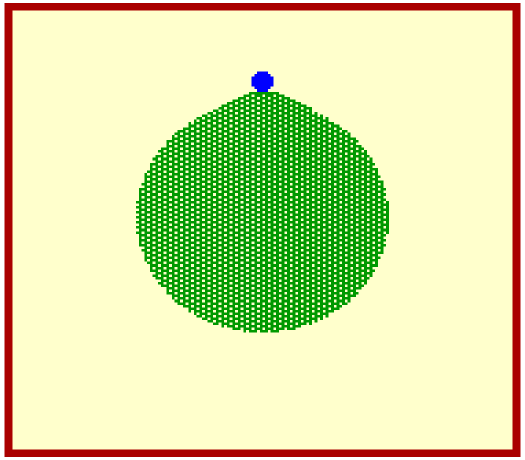
$$E_{k0} = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\kappa \frac{mM}{R} = \frac{1}{2} m v_2^2$$

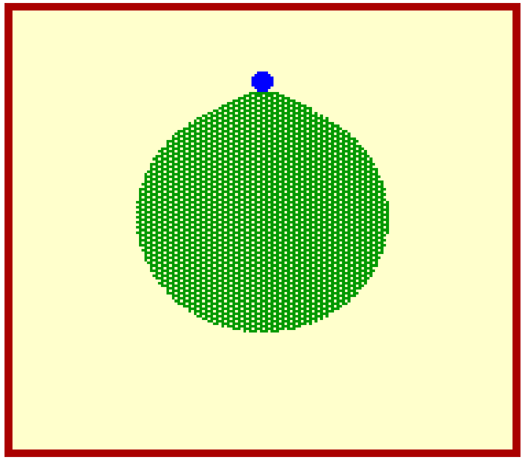
$$v_2 = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}}$$

$$= 11.2 kms^{-1}$$

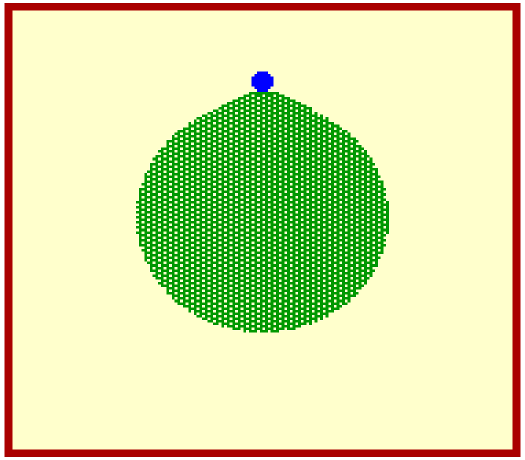
Porovnanie obežných dráh pre rôzne rýchlosti



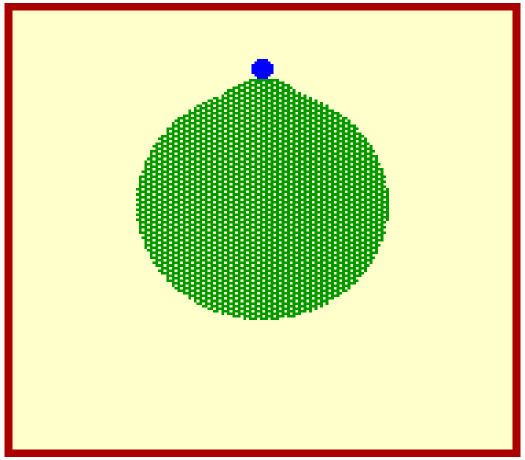
$v = 4kms^{-1}$



$v = 6kms^{-1}$



$v = 8kms^{-1}$



$v > 8kms^{-1}$

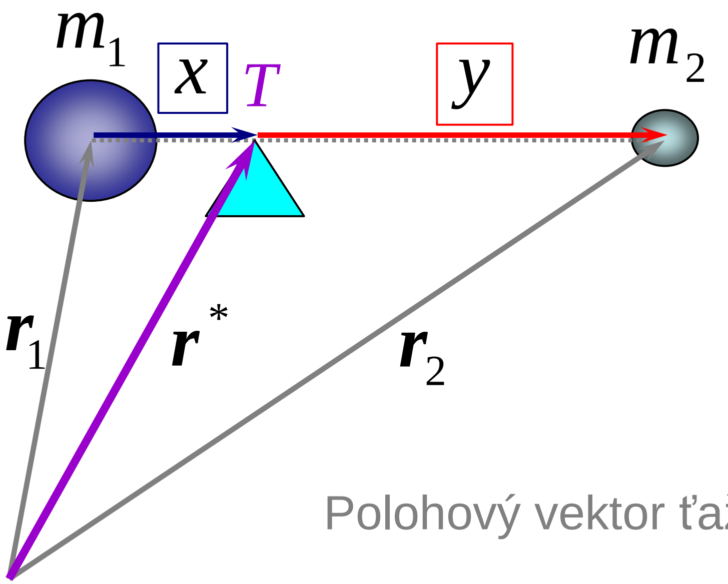
source: http://www.glenbrook.k12.il.us/gbssci/phys/mmedia/vectors/sat.html

Dynamika sústavy hmotných bodov a tuhého telesa I

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

Sústava hm. b., tuhé teleso, ťažisko, polohový vektor ťažiska

Ťažisko, polohový vektor ťažiska sústavy hm. b.



Ťažisko ?

$$\frac{x}{y} = \frac{m_2}{m_1}$$

Ťažisko dvoch hm. b. je taký bod na ich spojnici, ktorý ju delí v obrátenom pomere ich hmotností.

Polohový vektor ťažiska ?

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}^* + \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}^*$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{m_1}\left(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}^*\right)$$

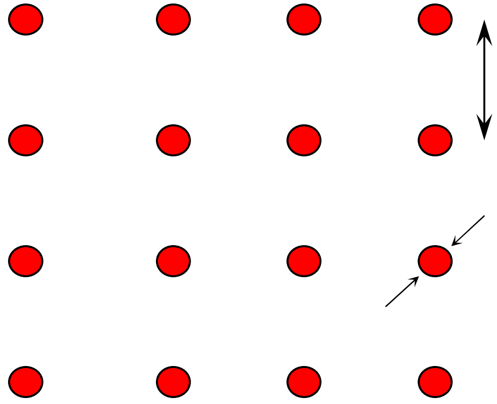
$$\boldsymbol{r}^* m_1 = \boldsymbol{r}_1 m_1 + \boldsymbol{r}_2 m_2 - \boldsymbol{r}^* m_2$$

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\boldsymbol{r}_1 m_1 + \boldsymbol{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

zovšeobecnením pre n – hmotných bodov

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\sum_i \boldsymbol{r}_i m_i}{\sum_i m_i}$$

Tuhé teleso



$$l = 10^{-10}\, m$$

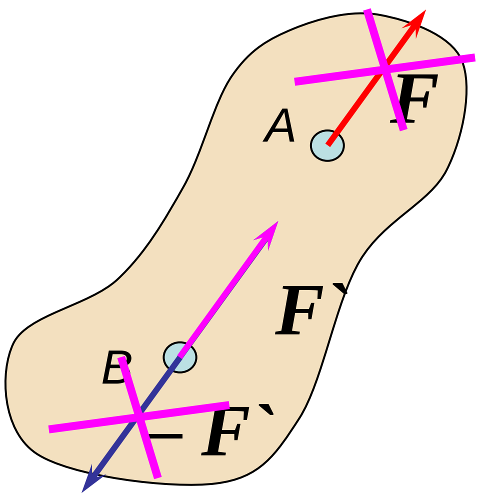
$$d = 10^{-15}\, m$$

$$\frac{l}{d} = 10^{5}$$

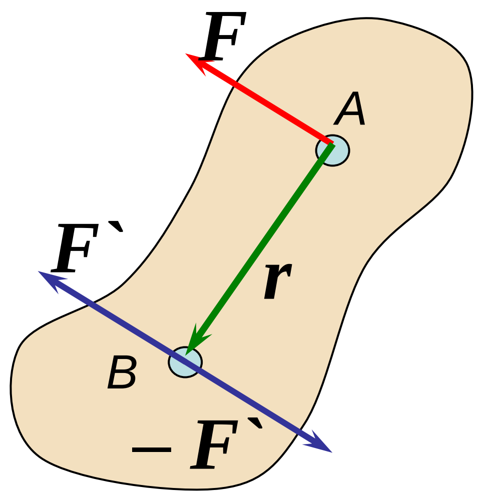
vyhovuje predstava hm. b.

Všetky zákony pre sústavu hm. b. budú platiť aj pre tuhé teleso.

Dokonale tuhé teleso nemení svoj tvar – je nedeformovateľné

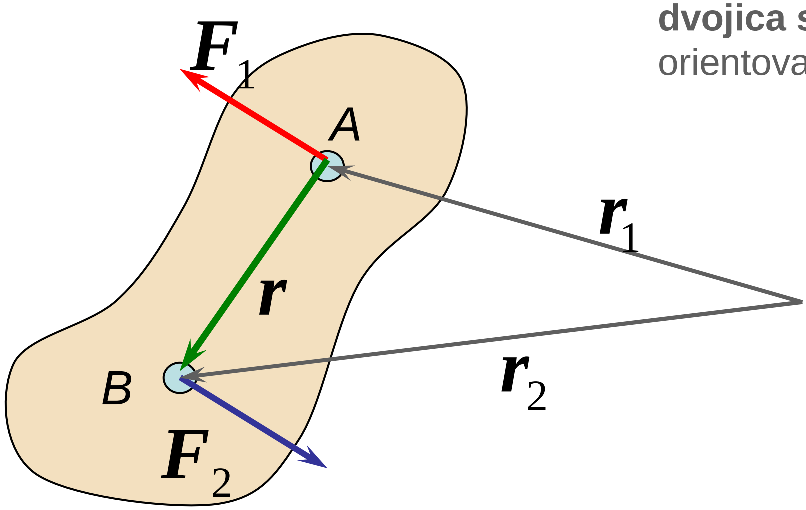


posunutie pôsobiska sily
v priamke sily



posunutie pôsobiska sily
mimo priamky sily

Moment dvojice síl



dvojica síl – 2 rovnako veľké a opačne orientované sily, ležiace mimo priamky sily

Odvodenie momentu dvojice síl:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$$

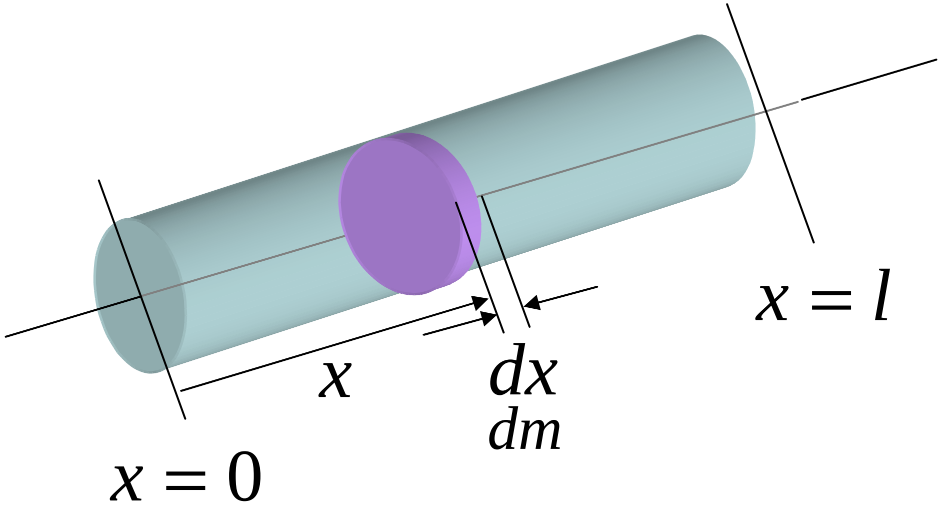
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \Rightarrow \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{F}_2$$

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1$$

$$\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_1 \times \underbrace{(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)}_{0} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2}$$

Ťažisko, polohový vektor ťažiska tuhého telesa



Ťažisko ?

$$x^* = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y^* = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

$$z^* = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

$$\mathbf{r}^* = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i m_i}{\sum_i m_i} \xrightarrow{\sum \to \int} \mathbf{r}^* = \frac{\int \mathbf{r}\,dm}{\int dm} \xrightarrow{\int dm = M} \boxed{\mathbf{r}^* = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm} \xrightarrow{dm = \rho dV} \boxed{\mathbf{r}^* = \frac{\rho}{M}\int \mathbf{r}\,dV}$$

Rýchlosť a zrýchlenie ťažiska

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{1}{M}\sum_i \boldsymbol{r}_i m_i$$

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{d\boldsymbol{r}^*}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{v}^* = \frac{1}{M}\sum_i \frac{m_i d\boldsymbol{r}_i}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{v}^* = \frac{1}{M}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i$$

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{1}{M}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i$$

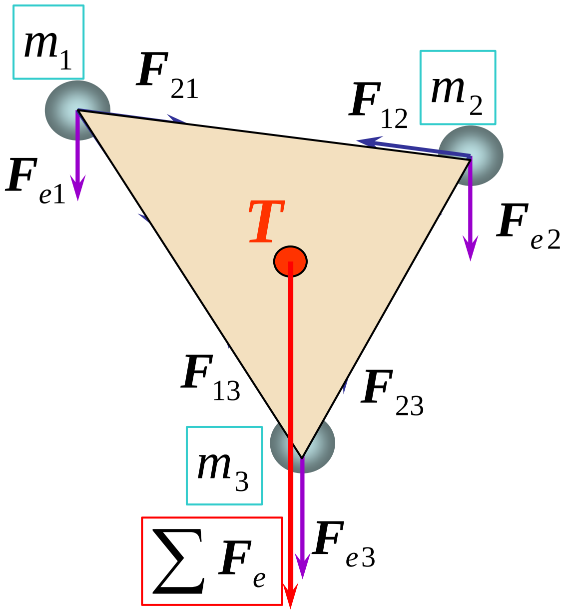
$$\boldsymbol{a}^* = \frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{a}^* = \frac{1}{M}\sum_i \frac{m_i d\boldsymbol{v}_i}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{a}^* = \frac{1}{M}\sum_i m_i \boldsymbol{a}_i$$

Dynamika sústavy hmotných bodov a tuhého telesa II

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

Veta o pohybe ťažiska, moment zotrvačnosti, Steinerova veta

I. veta impulzová (veta o pohybe ťažiska)



$$\boldsymbol{F}_{e1} + \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31} = m_1\boldsymbol{a}_1 \qquad \boldsymbol{F}_{13} = -\boldsymbol{F}_{31}$$
$$\boldsymbol{F}_{e2} + \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{32} = m_2\boldsymbol{a}_2 \qquad \boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$
$$\boldsymbol{F}_{e3} + \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{23} = m_3\boldsymbol{a}_3 \qquad \boldsymbol{F}_{23} = -\boldsymbol{F}_{32}$$

$$\boldsymbol{F}_{e1} + \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31} = m_1\boldsymbol{a}_1$$
$$+ \quad \boldsymbol{F}_{e2} - \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{32} = m_2\boldsymbol{a}_2$$
$$\boldsymbol{F}_{e3} - \boldsymbol{F}_{31} - \boldsymbol{F}_{32} = m_3\boldsymbol{a}_3$$

$$\boldsymbol{F}_{e1} + \boldsymbol{F}_{e2} + \boldsymbol{F}_{e3} = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3$$

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{1}{M}\sum_i m_i\boldsymbol{a}_i$$

zovšeobecnenie

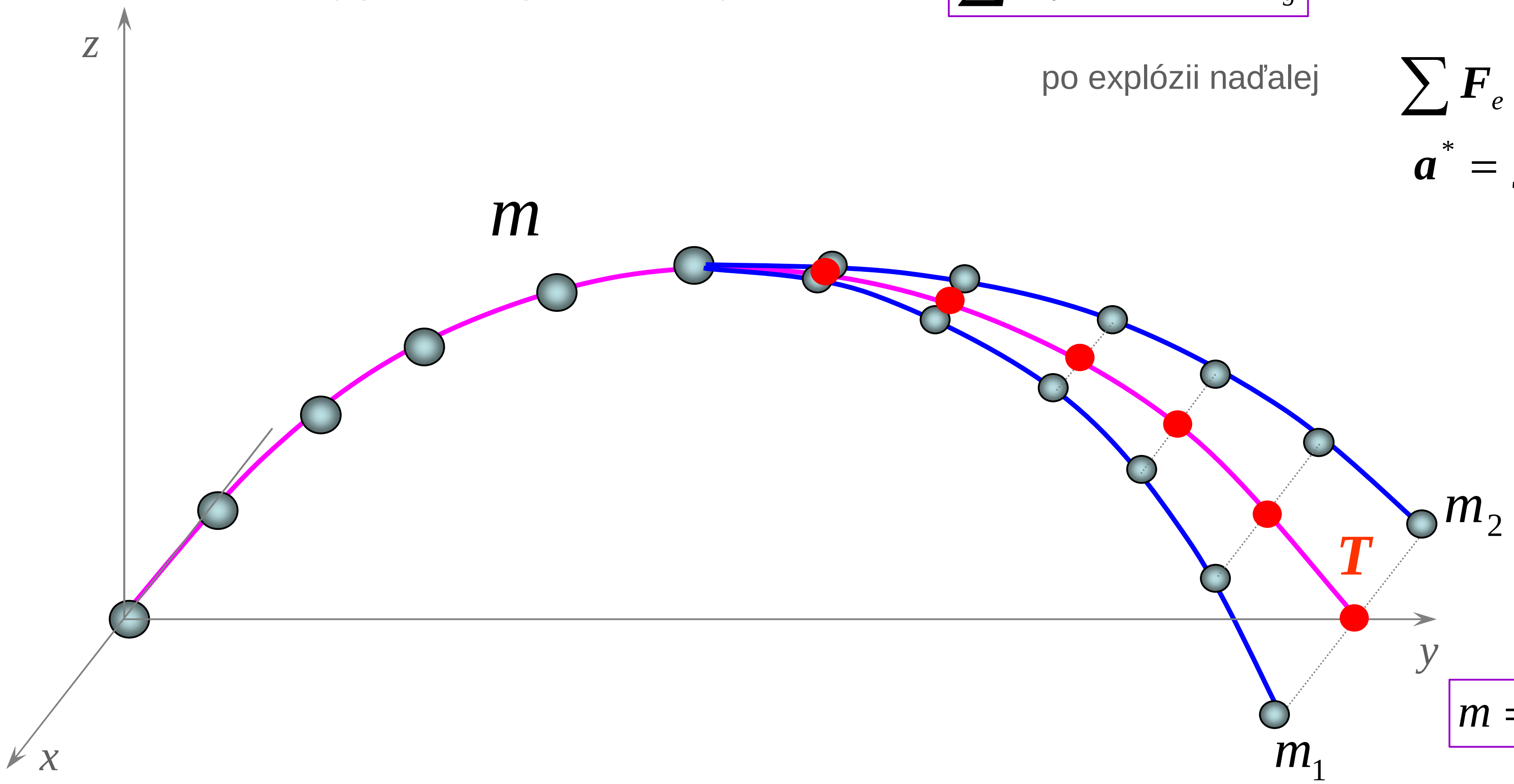
$$\sum \boldsymbol{F}_e = \sum_i m_i\boldsymbol{a}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum \boldsymbol{F}_e = M\boldsymbol{a}^*}$$

Príklad na pohyb ťažiska

Na ťažisko sústavy počas letu pôsobí vonkajšia sila: $\boxed{\sum \boldsymbol{F}_e = m\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{F}_g}$

po explózii naďalej $\sum \boldsymbol{F}_e = \boldsymbol{F}_g$

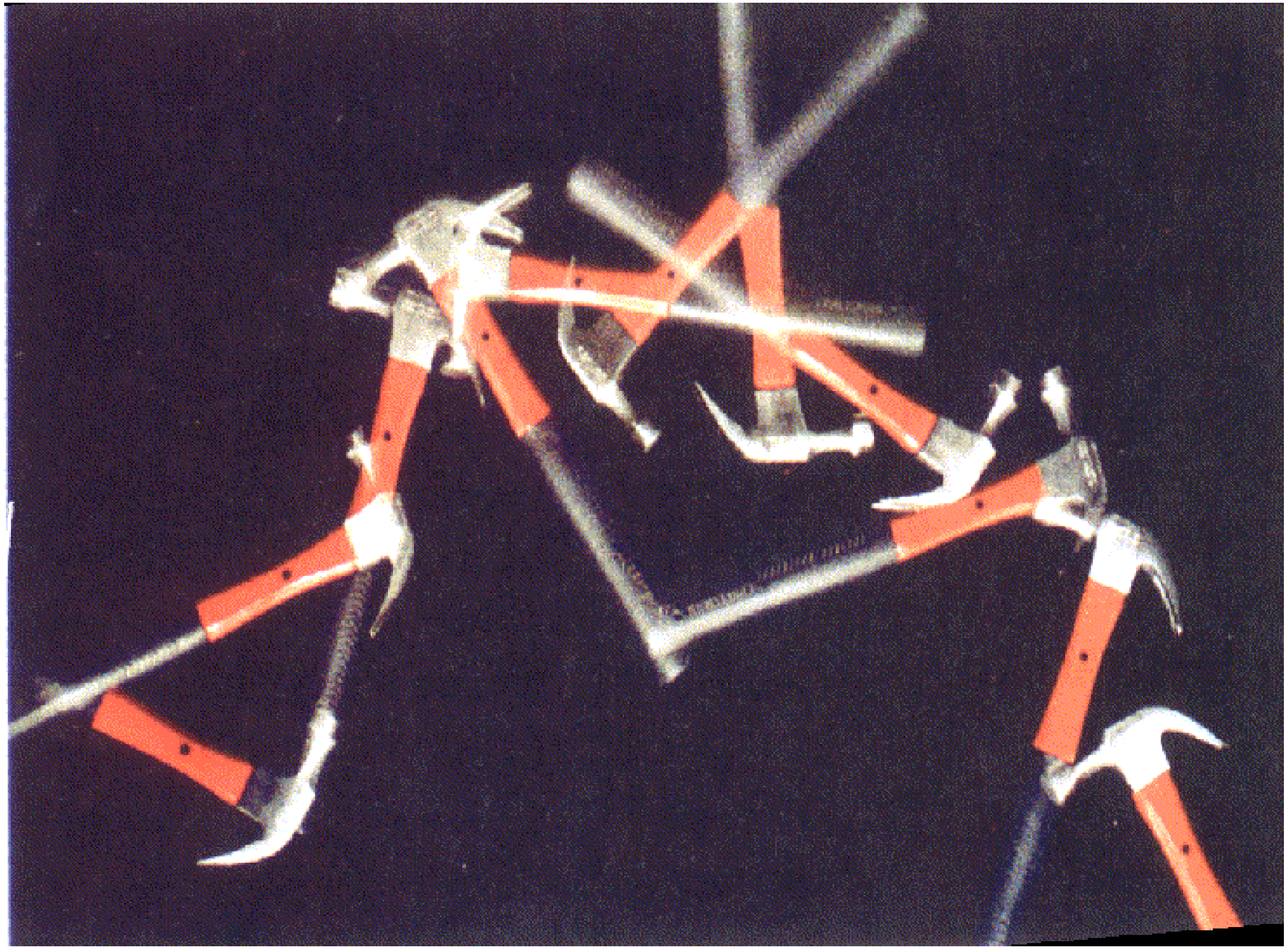
$\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{g}$



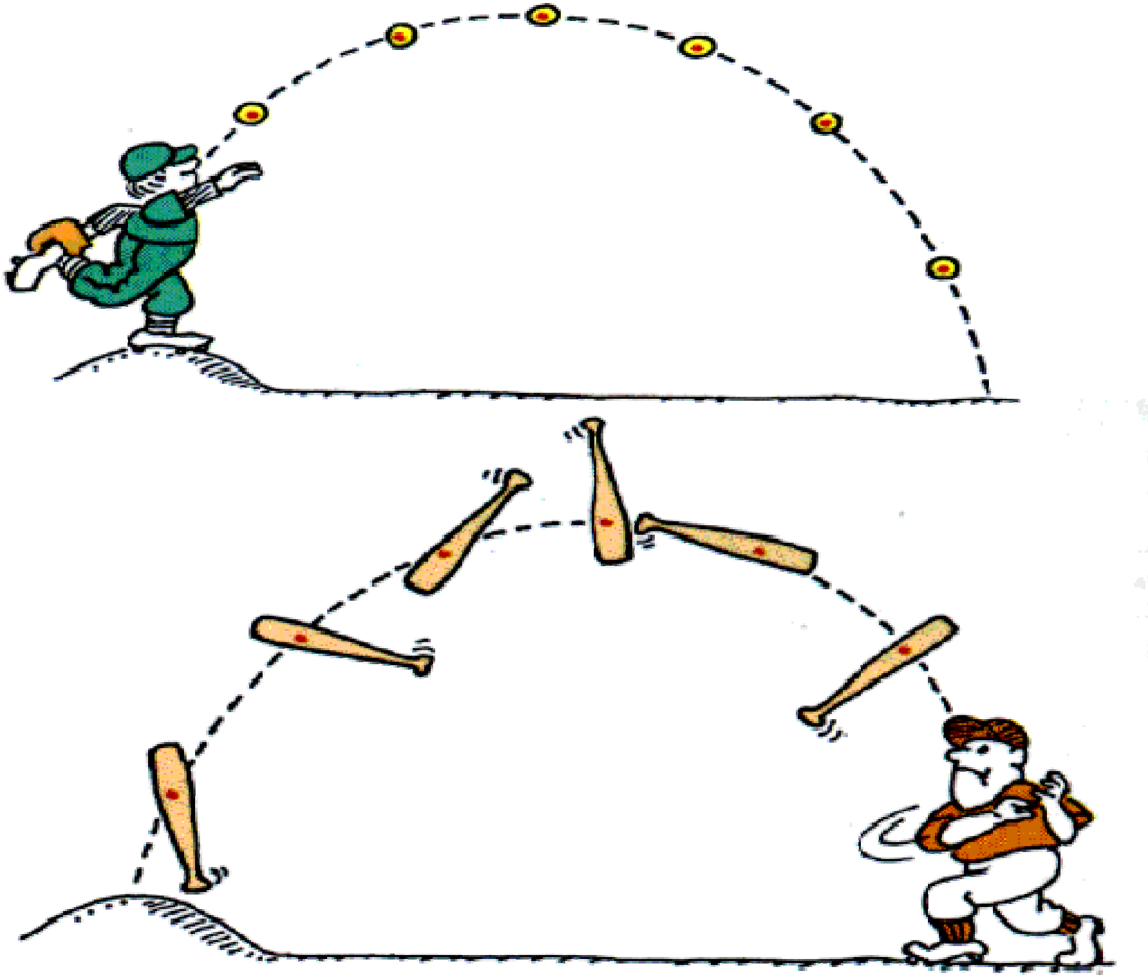
$\boxed{m = m_1 + m_2}$

Stlačené gumené guľôčky vrhnuté pod uhlom α s rýchlosťou v_0 (šikmý vrh), ktoré v čase dosiahnutia maxima explodujú. Ťažisko sústavy sa aj po explózii pohybuje po parabole. Explózia vnútri sústavy sa prejavila len pôsobením vnútorných síl a nemá vplyv na pohyb ťažiska sústavy. Explózia pre jednoduchosť bola uvažovaná len v smere osi x.

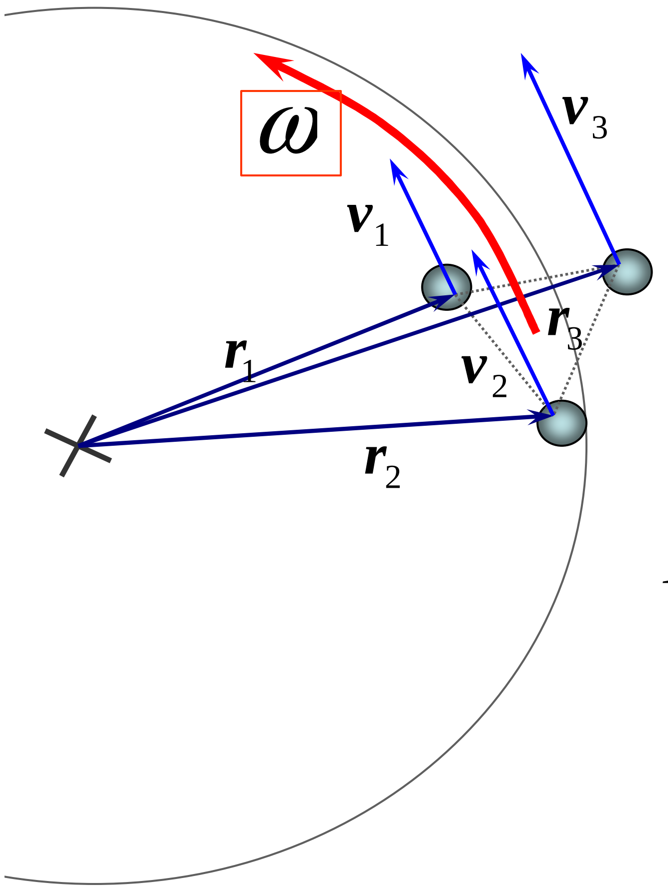
Príklady na vetu o ťažisku



Príklady na vetu o ťažisku



Kinetická energia rotujúcej sústavy hm. b.



všeobecne $$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Pre i-ty bod: $$\boxed{E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2}$$

$$v_i = \omega_i r_i \qquad \omega = \omega_i$$

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Rightarrow = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega_i r_i)^2 \Rightarrow = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}$$

$$\boxed{J = \sum_i m_i r_i^2}$$

J ... moment zotrvačnosti

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} \omega^2 J}$$

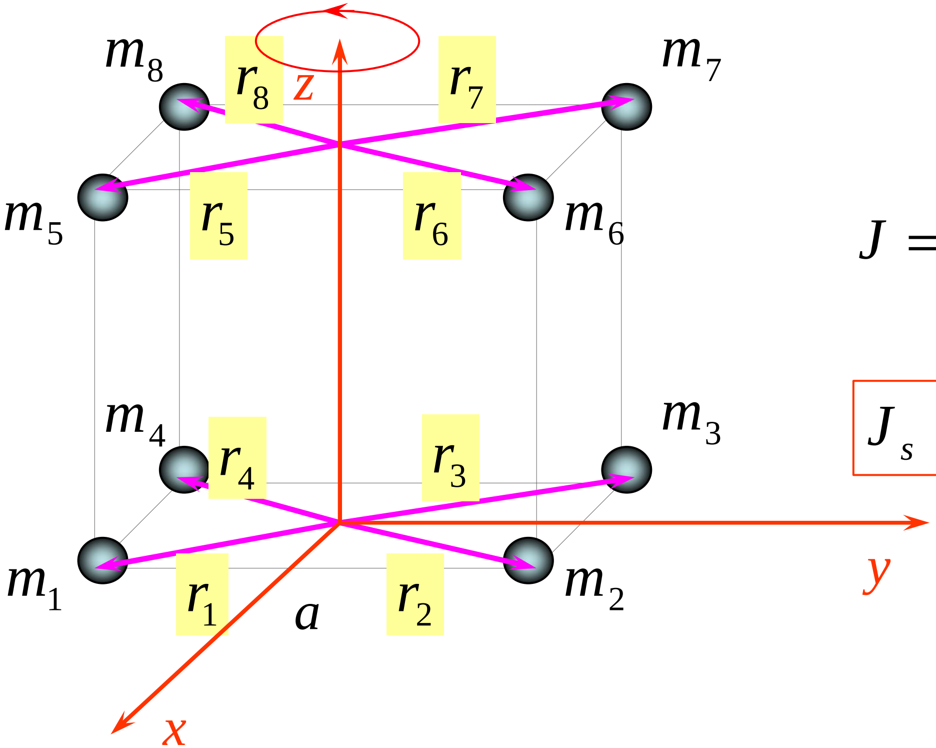
Moment zotrvačnosti

$$\boxed{J_s = \sum_i m_i r_i^2}$$

?

$$J = \sum_{i=1}^{8} m_i r_i^2 \quad = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_8 r_8^2$$

$$r_1, r_2, \ldots, r_8 = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} \quad = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



$$J = m_1 \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + m_2 \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \ldots + m_8 \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

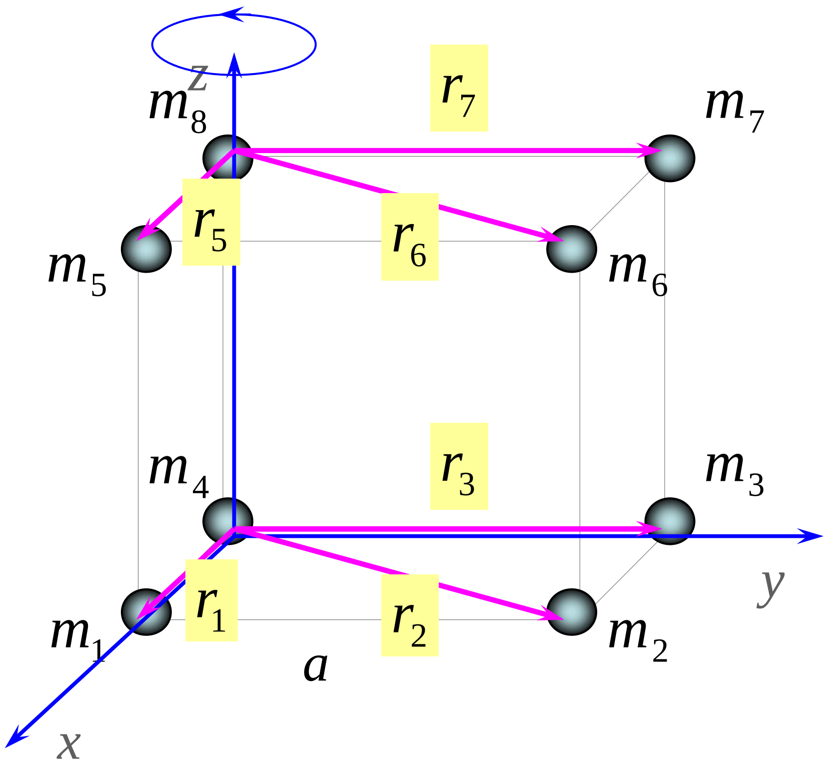
$$\boxed{J_s = 4ma^2}$$

Moment zotrvačnosti

$$\boxed{J_r = \sum_i m_i r_i^2}$$?

$$J = \sum_{i=1}^{8} m_i r_i^2 \quad = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_8 r_8^2$$

$$r_1, r_3, r_5, r_7 = a \quad r_4, r_8 = 0 \quad r_2, r_6 = a\sqrt{2}$$



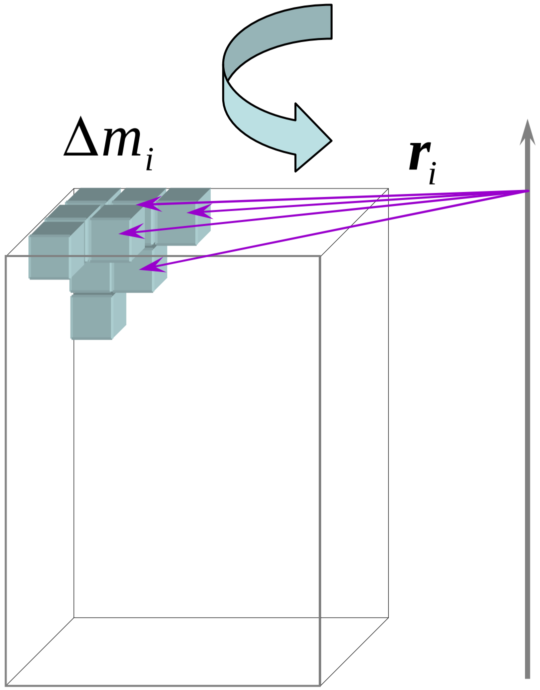
$$J = m\left[4a^2 + 2\left(a\sqrt{2}\right)^2\right]$$

$$\boxed{J_r = 8ma^2}$$

$$\boxed{J_s = 4ma^2} \longleftrightarrow \boxed{J_r = 8ma^2}$$

porovnanie: ak sú hmotné body viac vzdialené od osi rotácie, moment zotrvačnosti sústavy je väčší

Moment zotrvačnosti tuhého telesa



$$J = \sum_i m_i r_i^2$$ ... pre sústavu hm. b.

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$ ... tuhé teleso

$$m = \sum_i \Delta m_i \qquad \Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$$

$$J = \sum_i \rho_i \Delta V_i r_i^2$$

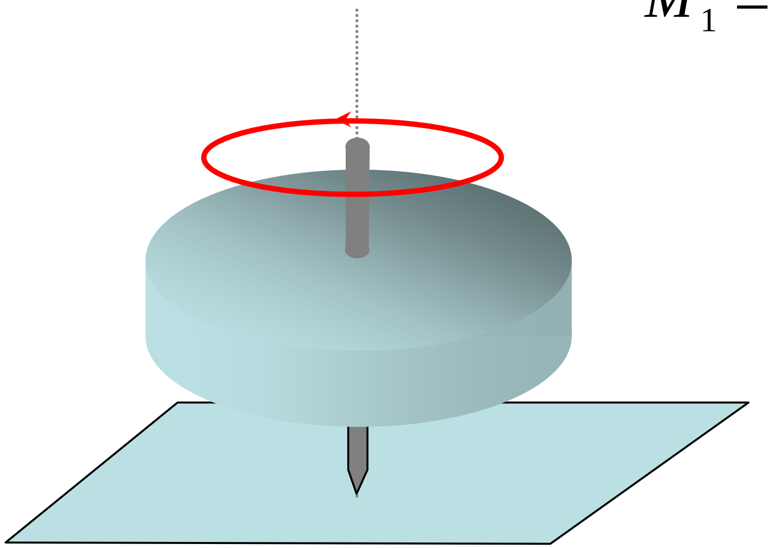
$$\rho = \rho_i$$ ... homogénne tuhé teleso

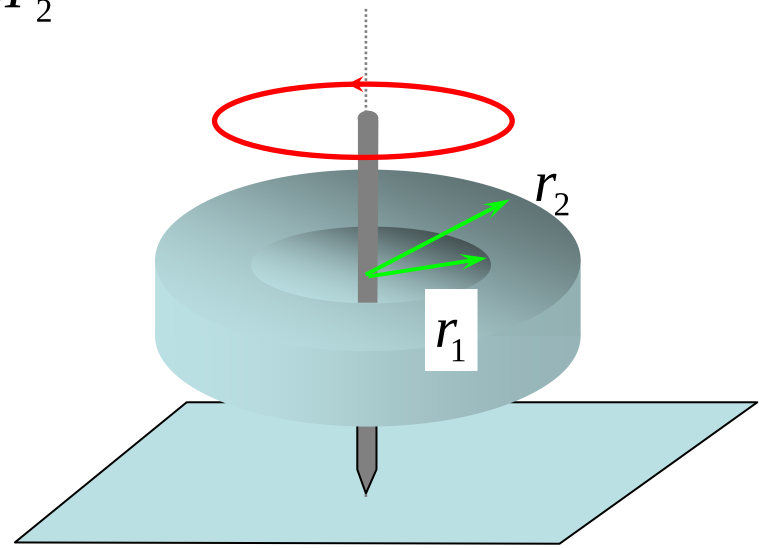
$$J = \rho \sum_i \Delta V_i r_i^2$$

$$\Delta V_i \to 0 \Rightarrow \sum \to \int \Rightarrow \boxed{J = \rho \int_V r^2 dV}$$

Príklad na moment zotrvačnosti

$$M_1 = M_2$$

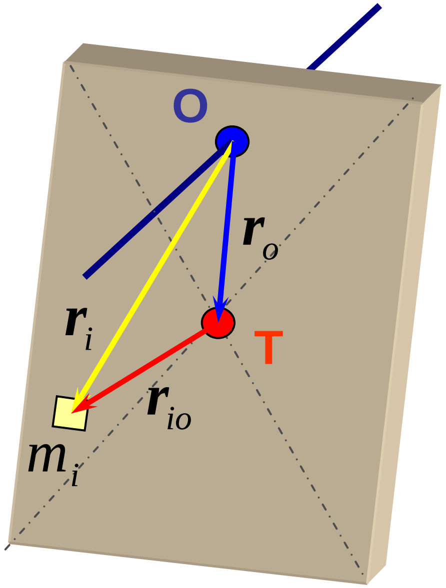




$\boxed{J_1}$? $\boxed{J_2}$

$$J = \frac{1}{2} M (r_2^2 + r_1^2)$$

Steinerova veta



$$J = \sum_i m_i r_i^2 \qquad \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{r}_{io}$$

$$r_i^2 = \boldsymbol{r}_i^2 = (\boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{r}_{io})^2 = r_o^2 + 2\boldsymbol{r}_o\boldsymbol{r}_{io} + r_{io}^2$$

$$J = \underbrace{\sum_i m_i r_o^2}_{J_1} + \underbrace{\sum_i m_i r_{io}^2}_{J_2} + \underbrace{2\boldsymbol{r}_o \sum_i m_i \boldsymbol{r}_{io}}_{J_3}$$

$$\boxed{J = J^* + r_o^2 m}$$

$$J_1 = \sum_i m_i r_o^2 = r_o^2 \sum_i m_i = r_o^2 m$$

$$J_2 = \sum_i m_i r_{io}^2 = J^*$$

moment zotrvačnosti vzhľadom na ťažisko

$$J_3 = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_{io} = 0$$

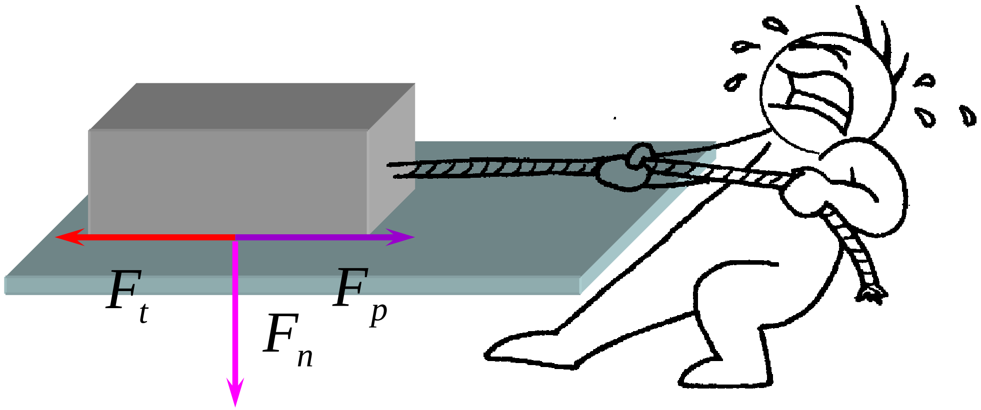
vzhľadom na ťažisko bude celkový súčet nulový

Trecie sily, trenie

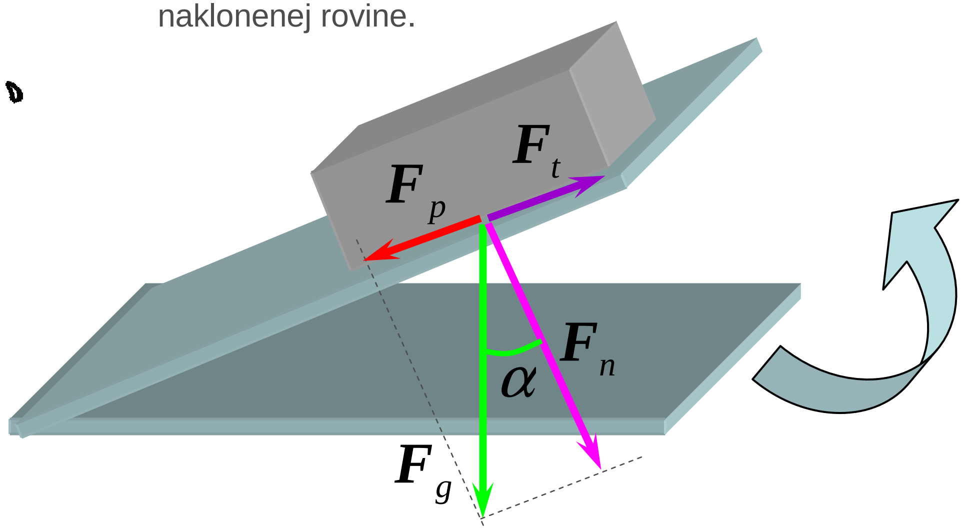
Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

kĺzavé (šmykové) trenie statické a kinetické, valivé trenie

Trecia sila kĺzavého pohybu



Určenie koeficientu kĺzavého trenia na naklonenej rovine.



$$|\boldsymbol{F}_n| = |\boldsymbol{F}_g|$$

$$|\boldsymbol{F}_t| = \mu |\boldsymbol{F}_n|$$

$$F_t = \mu m g$$

μ **… koeficient kĺzavého trenia**

pre zložky síl na naklonenej rovine platí:

$$|\boldsymbol{F}_p| = |\boldsymbol{F}_g| \sin \alpha$$

$$|\boldsymbol{F}_n| = |\boldsymbol{F}_g| \cos \alpha$$

začne sa šmýkať keď:

$$|\boldsymbol{F}_p| = |\boldsymbol{F}_t|$$

$$\cancel{mg} \sin \alpha = \mu \cancel{mg} \cos \alpha$$

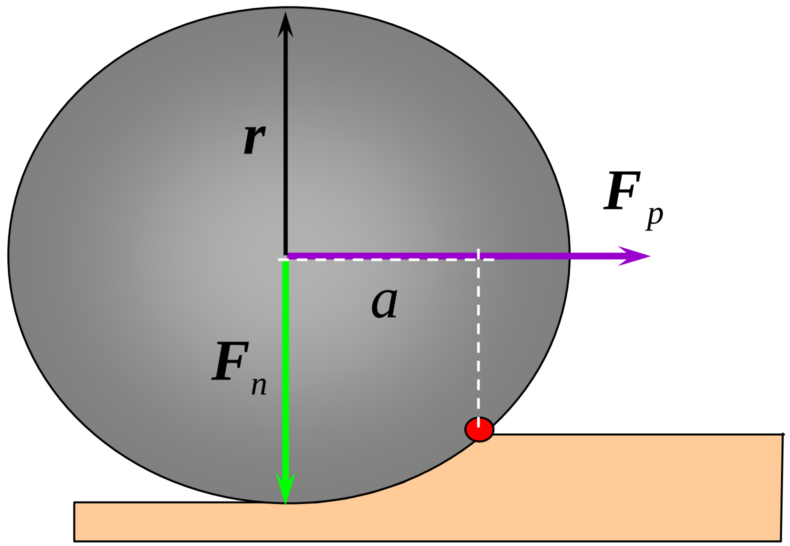
$$\boxed{\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = tg\, \alpha}$$

Valivé trenie

Tabuľka koeficientov kĺzavého trenia vybraných materiálov:

	μ_s	μ_k
oceľ-ľad	0,027	0,014
oceľ-oceľ	0,1-0,3	0,07-0,25

$$\boxed{\mu_s > \mu_k}$$



$$|\boldsymbol{M}_t| = |\boldsymbol{M}_p|$$

$$F_p r = F_n a$$

$$F_p = F_n \overbrace{\frac{a}{r}}^{\mu_{val}}$$

$$\boxed{\mu_{val} = \frac{a}{r}}$$

$$\boxed{F_p = F_n \mu_{val}}$$

Makroskopické systémy

- plazma
- plyn
- kvapalina
- tuhé látky

klesá teplota

Tuhé látky

Vlastnosti tuhých látok dané väzbovými silami

iónové (kryštál NaCl)
kovalentné (Si)
kovové (kovy)
van der Waalsove sily (organické materiály)
vodíkové

klesá energia väzby

Tuhé látky – mechanické vlastnosti

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

Deformácia, Hookov zákon, tepelná rozťažnosť

Deformácia

$$\sigma = \frac{F}{S}$$ ... mechanické napätie [Pa]

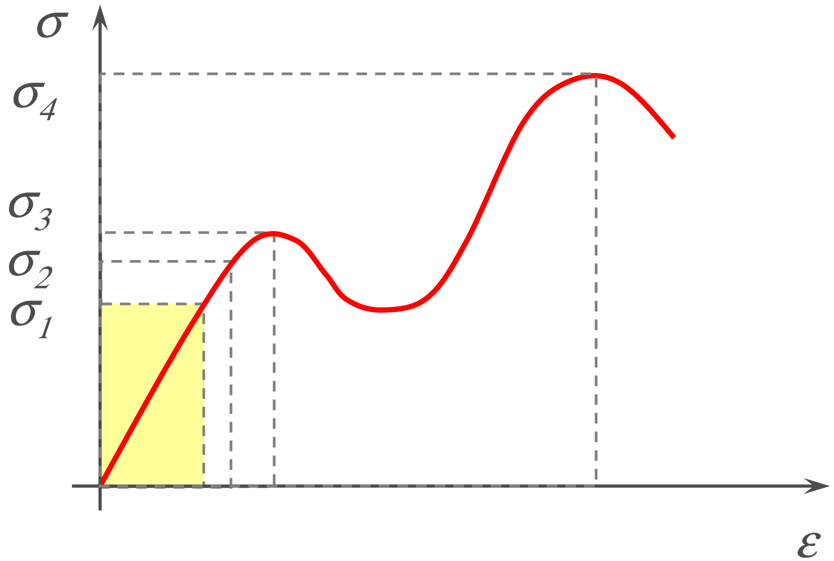
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$ ... relatívne predĺženie

tuhé teleso - **dokonalé**

F spôsobuje **pohyb**

tuhé teleso - **reálne**

F spôsobuje **pohyb + deformáciu**



σ_1 ... **medza úmernosti** - oblasť lineárnej deformácie

σ_2 ... **medza pružnosti** – nelineárna deformácia, pružná

σ_3 ... **medza prieťažnosti** – samovoľné tečenie

σ_4 ... **medza pevnosti** - dochádza k pretrhnutiu

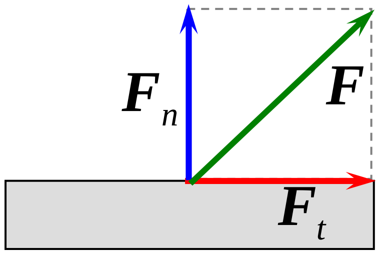
Prečo dochádza k deformácii???

Tuhá látka ... súbor viazaných atómov

väzba
(kovová, van der Waalsove sily, ...)
poruchy
(bodové, čiarové)

Hookov zákon

platnosť Hookovho zákona sa obmedzuje na oblasť **lineárnej deformácie** (len po medzu úmernosti – σ_1)



F_n ... normálová zložka sily

deformácia v **ťahu (tlaku)**

F_t ... tangenciálna zložka sily

deformácia v **šmyku (torzii)**

$$\sigma = \frac{F_n}{S}$$

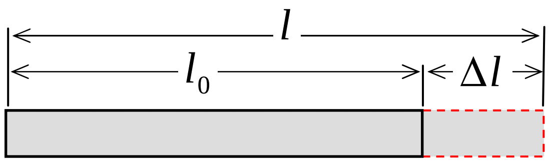
priečne napätie
mechanické napätie

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

relatívne predĺženie

$$\eta = \frac{a_0 - a}{a_0}$$

relatívne priečne skrátenie

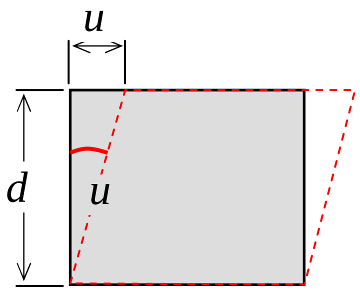


$$\tau = \frac{F_t}{S}$$

tangenciálne napätie

$$\gamma = \frac{u}{d}$$

relatívne posunutie



Hookov zákon - pokračovanie

$\uparrow \boxed{\sigma} \Rightarrow \uparrow \boxed{\varepsilon}$

konštanta úmernosti ... ***E***

modul pružnosti v ťahu

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

Hookov zákon

$$\sigma = \frac{l - l_0}{l_0} E$$

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{l}{l_0} - 1$$

$$l = l_0 \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right)$$

$\uparrow \boxed{\tau} \Rightarrow \uparrow \boxed{\gamma}$

konštanta úmernosti ... ***G***

modul pružnosti v šmyku

$$\boxed{\tau = G\gamma}$$

Kvapaliny – mechanika kvapalín

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

Rovnica hydrostatiky, Archimedov zákon, Pascalov zákon, Bernoulliho rovnica hydrostatika (ťažisko je v pokoji)

hydrodynamika (pohyb kvapalín)

... ideálna kvapalina je nestlačiteľná a pri pohyb nie je vnútorné trenie

Hydrostatika ideálnej kvapaliny

$$\boxed{\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{F}}{S}}$$

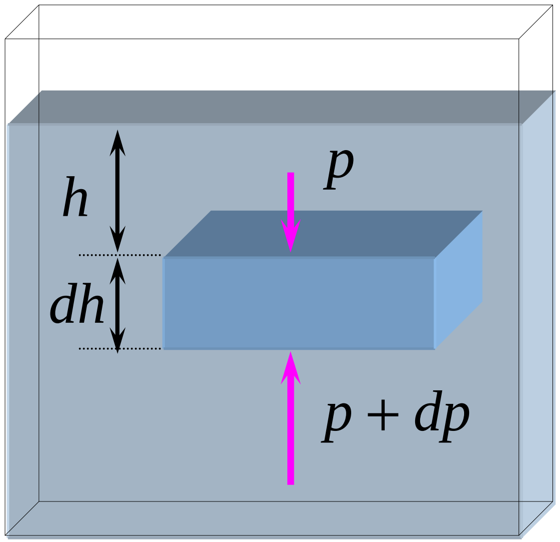
v kvapalinách

$$p \perp S \, , \; \boldsymbol{p} \| \boldsymbol{F}$$

$$\boxed{p = \frac{F}{S}} \qquad \boxed{p = \frac{dF}{dS}}$$

jednotka $\quad [Pa] = [Nm^{-2}]$

Rovnica hydrostatiky



tiažová sila:

$$dF_g = gdm$$

$$dF_g = g\rho dV$$

$$dF_g = g\rho Sdh$$

vztlaková sila:

$$dF_v = (p + dp)S - pS$$

$$dF_v = Sdp$$

$$F_g = F_v$$

$$g\rho \cancel{S}dh = \cancel{S}dp$$

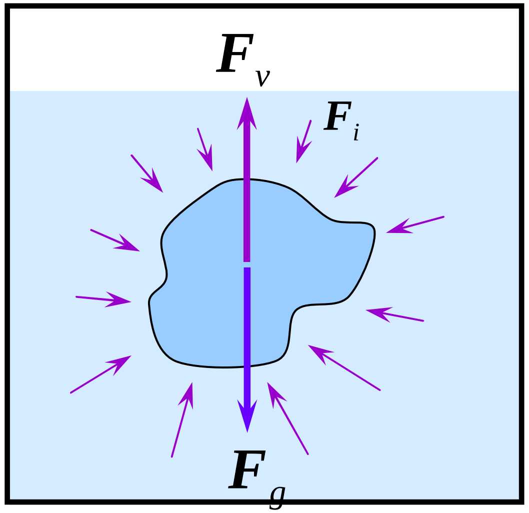
$$\int_0^h g\rho dh = \int_{p_0}^{p} dp$$

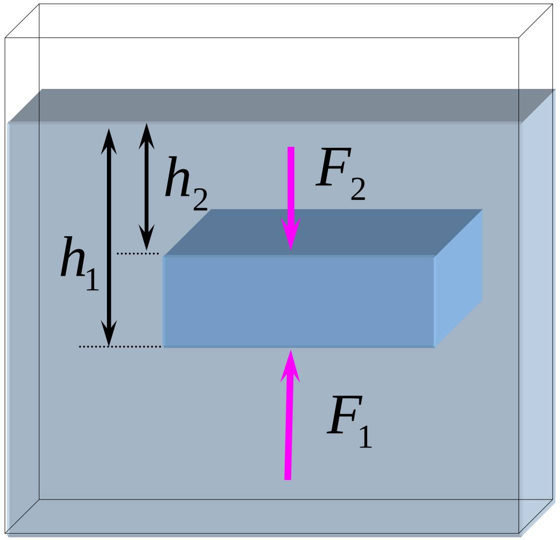
$$g\rho \int_0^h dh = \int_{p_0}^{p} dp$$

$$g\rho h = p - p_0$$

$$\boxed{p = p_0 + g\rho h}$$

Archimedov zákon





$$F_v = F_1 - F_2$$

$$F_v = p_1 S - p_2 S$$

$$F_v = \rho g h_1 S - \rho g h_2 S$$

$$F_v = \rho g S (h_1 - h_2)$$

$$F_v = \rho g V_k$$

$\rho_t > \rho_k$ teleso padá ku dnu

$\rho_t = \rho_k$ teleso sa vznáša

$\rho_t < \rho_k$ teleso sa čiastočne vynorí

Pascalov zákon

$$p = p_0 + g\rho h$$

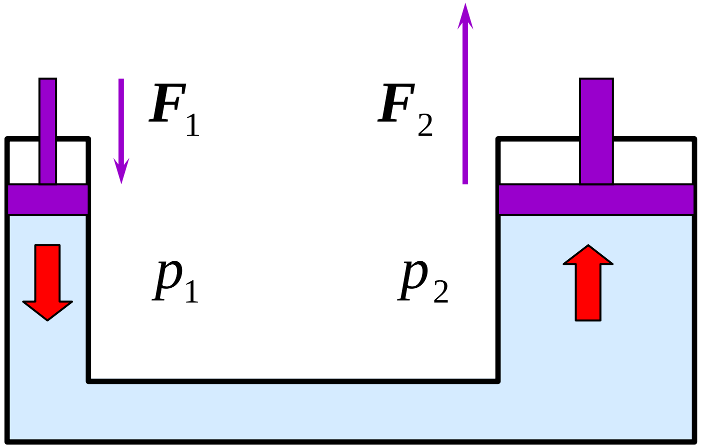
$$p_0 >> g\rho h$$

$$\boxed{p = p_0}$$

$$p_1 = p_2$$

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$



... výsledná sila je úmerná pomeru plôch

Výsledná sila je väčšia ako iniciačná, ako je to s prácou?

$$V_2 = V_1$$

$$S_2 h_2 = S_1 h_1$$

$$h_1 = \frac{S_2}{S_1} h_2$$

$$A_2 = F_2 h_2 \qquad ? \qquad A_1 = F_1 h_1$$

$$A_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} h_2$$

$$A_2 = F_1 h_1$$

Získali sme väčšiu silu ale na úkor dráhy!!!

Využitie v praxi: kvapalinové brzdy, hydraulický zdvihák, hydraulický lis

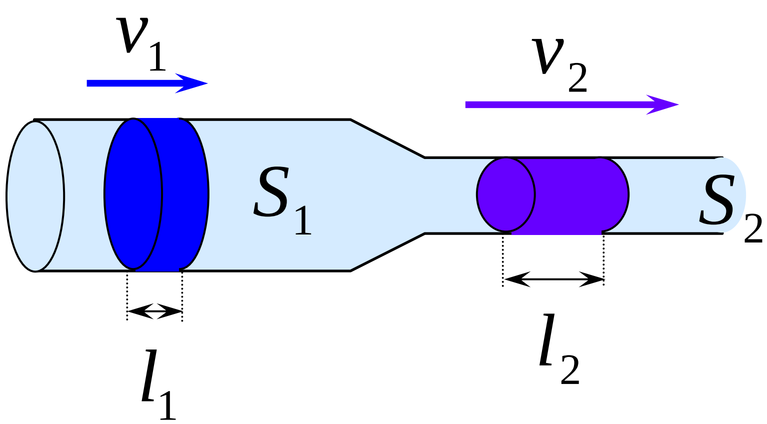
Hydrodynamika - rovnica kontinuity

$\boldsymbol{v}$ ... rýchlosť

$$\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{r}, t)$$

$\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{r})$ ... **ustálené prúdenie** (nie je funkciou času)

ideálna kvapalina = nestlačiteľná
za čas t pretečie rovnaký objem kvapaliny



$$V_1 = V_2$$

$$S_1 l_1 = S_2 l_2$$

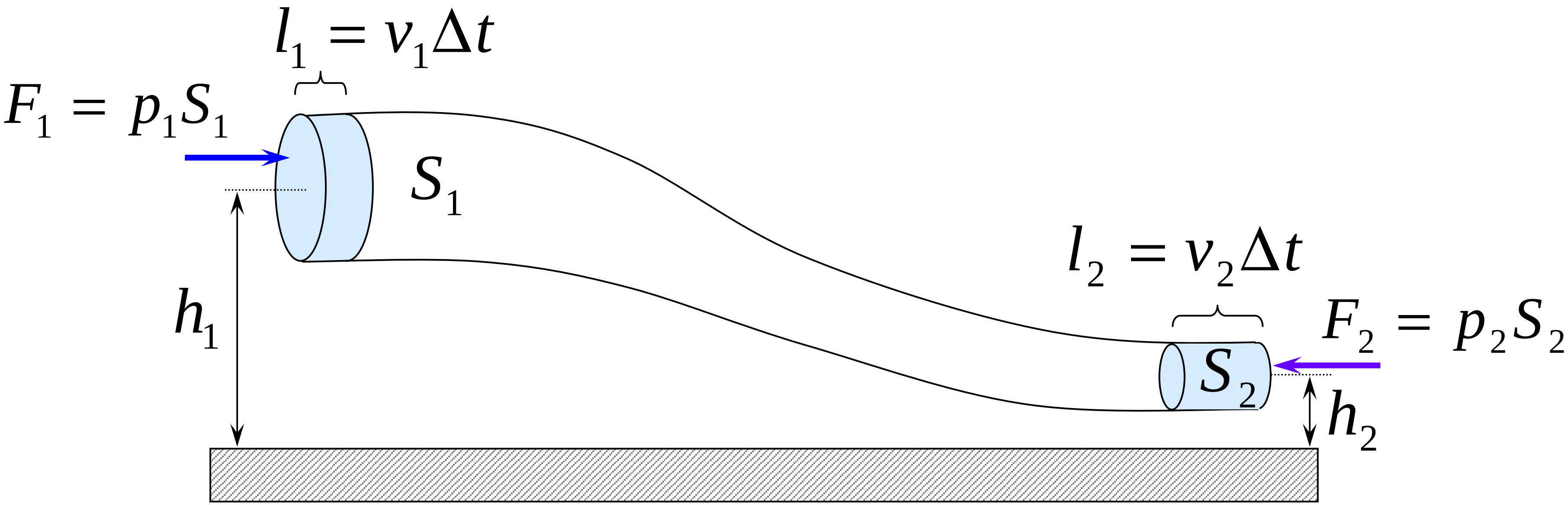
$$S_1 v_1 t = S_2 v_2 t$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

zovšeobecnenie:

$$Sv = konšt.$$

Bernoulliho rovnica



$$A = F_1 l_1 - F_2 l_2$$

$$A = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2$$

$$A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = V$$

$$\boxed{A = p_1 V - p_2 V}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2 - \frac{1}{2} m v_1^2 - mgh_1}$$

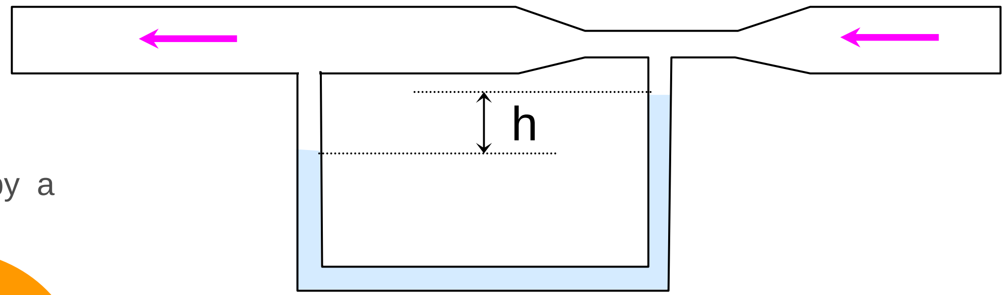
$$(p_1 - p_2) V = m \left(\frac{1}{2} v_2^2 + gh_2 - \frac{1}{2} v_1^2 - gh_1 \right)$$

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2$$

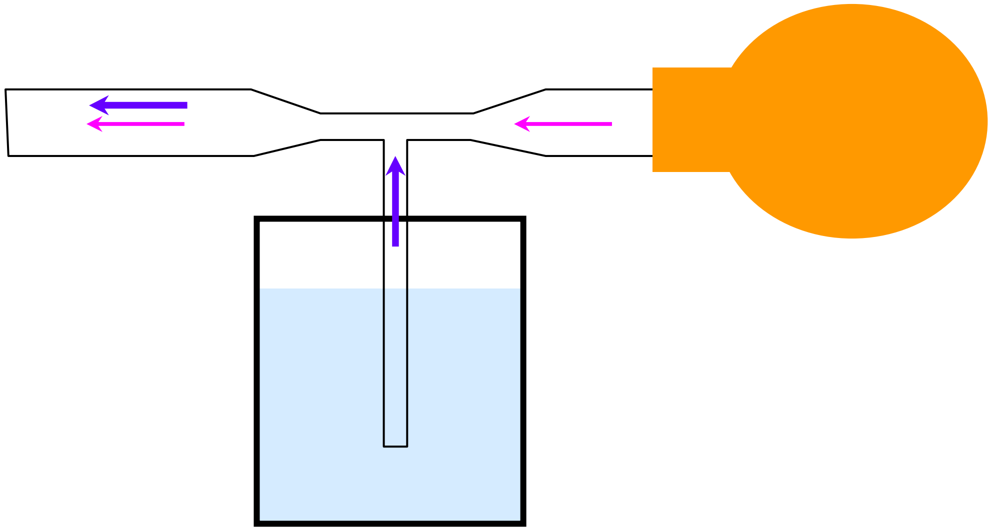
Bernoullího rovnica v praxi

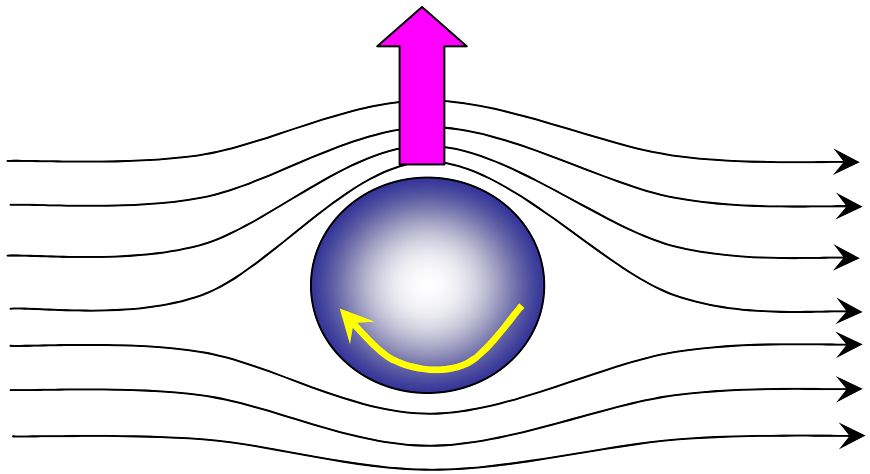
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = konšt\,.$$

Venturiho meter, Venturiho trubica
Z rozdielu výšok sa dá stanoviť rýchlosť prúdiaceho vzduchu, ak sú známe prierezy zúženého a nezúženého miesta. Podobný princíp sa využíval v automobiloch s karburátorom na nasávanie paliva.



Postrekovače na hmyz, flakóny, striekacie pištole.
Pokles tlaku v zúženom mieste vyťahuje kvapalinu z nádoby a spolu so vzduchom prúdi k ústiu.





Kvapaliny – mechanika kvapalín

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

Povrchové napätie, kapilárne javy, viskózna kvapalina

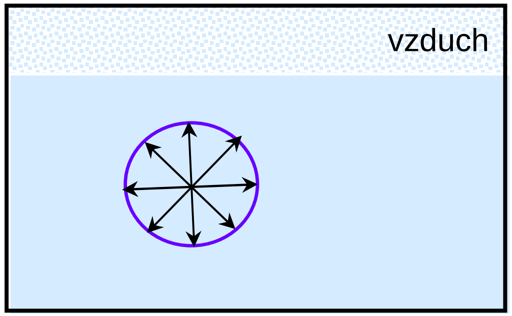
Povrchové napätie v kvapalinách

... povrch kvapaliny vykazuje také vlastnosti akoby bol pokrytý tenkou pružnou vrstvou. Budeme sa zaoberať otázkou čo je príčinou? a ako sa to dá fyzikálne popísať

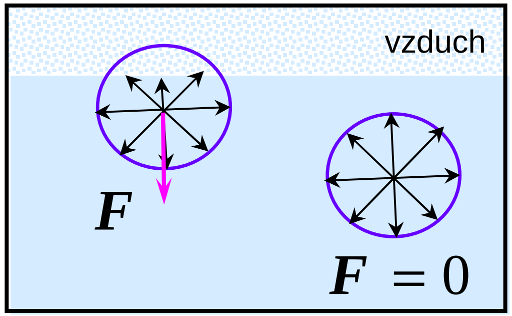
odpoveď treba hľadať v **mikroskopickej štruktúre**

príťažlivé sily molekúl

pozn.: Stačí sa obmedziť len na blízke molekuly, pretože účinok síl so vzdialenosťou rýchlo klesá.



sféra molekulového pôsobenia



Výslednica molekulového pôsobenia smeruje dovnútra kvapaliny. Molekuly povrchovej vrstvy pôsobia na vnútorné **molekulovým tlakom**.

Povrchové napätie v kvapalinách (pokračovanie)

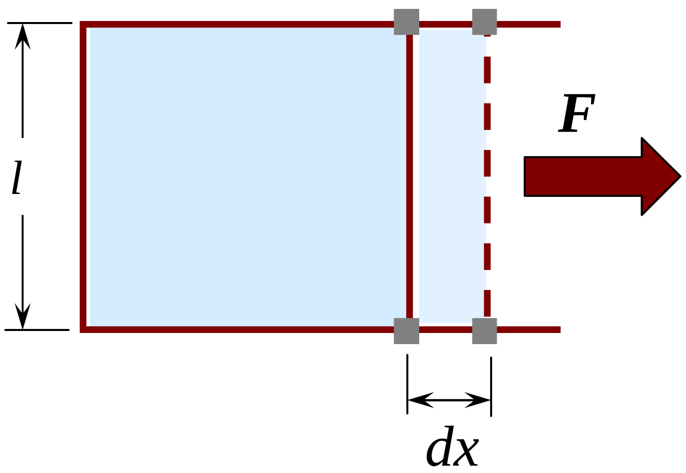
... ak chceme premiestniť molekulu zvnútra kvapaliny na povrch treba konať prácu proti silám molekúl v povrchovej vrstve.

povrch kvapaliny má istú energiu = **povrchová energia kvapalín**

$$\boxed{\frac{\Delta E}{\Delta S} = \sigma}$$

σ ... povrchové napätie

Určenie povrchového napätia pomocou sily:



$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S} = \frac{dE}{dS} \quad \Rightarrow \quad dE = \sigma dS$$

$$dA = 2Fdx$$

$$dA = dE$$

$$2Fdx = \sigma dS \qquad dS = 2ldx$$

$$2Fdx = 2\sigma ldx$$

$$F = \sigma l \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{F}{l}}$$

príklady z praxe: snaha o minimalizáciu energie – dve guľôčky kvapaliny sa zlúčia do jednej s menším povrchom, po pretavení vlákna žiarovky sa koniec zaoblí, hmyz na vode

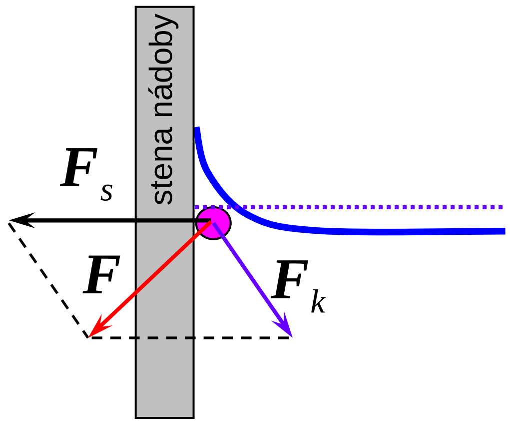
Kapilárne javy

kvapalina v úzkej nádobe resp. kapiláre môže mať rôzny tvar povrchu:

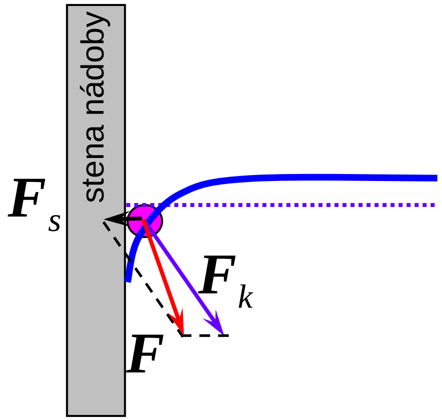
Pozn.:
•Tvar povrchu sa ustáli tak aby výslednica síl bola kolmá na povrch.
•V dostatočnej vzdialenosti od stien je povrch kvapaliny **rovinný**.

•**rovinný**
•**konkávny** (kvapalina zmáča steny nádoby)
•**konvexný** (kvapalina nezmáča steny nádoby)

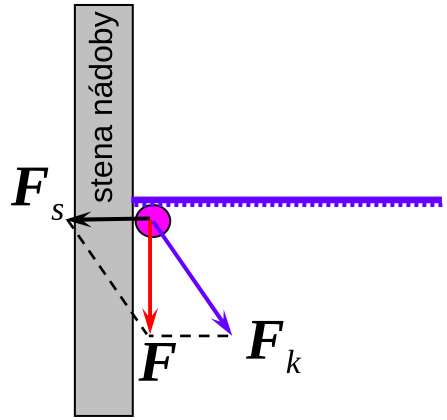
Pre vysvetlenie **zakrivenia povrchu** je potrebné vyšetriť sily



konkávny povrch – kvapalina zmáča steny nádoby, výslednica síl smeruje šikmo k stene nádoby (voda/sklo)



konvexný povrch – kvapalina nezmáča steny nádoby, výslednica síl smeruje šikmo do kvapaliny (ortuť/sklo)



rovinný povrch –výslednica síl smeruje kolmo do kvapaliny

výsledný tlak pod povrchom:

$$\boxed{p = p_0 \pm \frac{2\sigma}{R}}$$

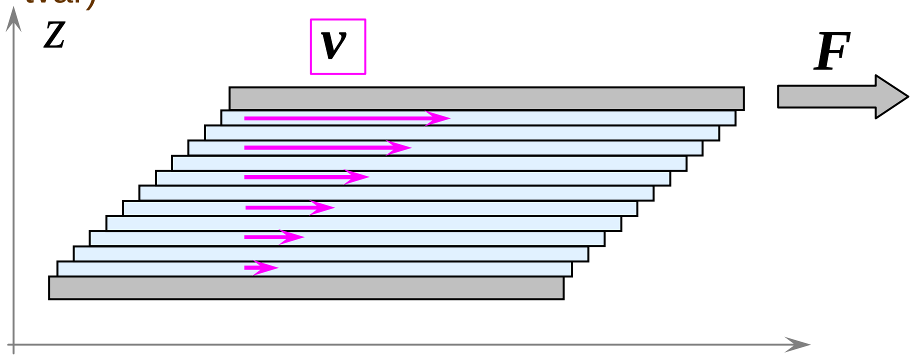
+ ... konvexný - nezmáča

- ... konkávny - zmáča

Viskózna kvapalina

reálna kvapalina - vnútorné trenie = **viskozita**
(Bez dodania energie kvapalné látky nemenia tvar)

Pozn.:
Uvažujeme laminárne prúdenie, to zn., že vrstvy sa len posúvajú a vzájomne nemiešajú.



$$\boldsymbol{F} = \eta S \frac{\boldsymbol{v}}{z}$$

V dôsledku nerovnomerného pohybu vrstiev kvapaliny vzniká medzi vrstvami tangenciálne napätie. Má smer rýchlosti.

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \frac{d\boldsymbol{v}}{dz}$$

η... je materiálová konštanta

η... je funkciou teploty

η... nezávisí od materiálu dosiek

Kvapalina	Teplota [ºC]	η [Pas]
Voda	0	18,0
Voda	20	10,1
Voda	100	2,8

η... **koeficient dynamickej viskozity**
... (koeficient vnútorného trenia)

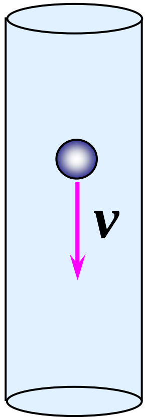
$$[\eta] = [Nsm^{-2}] = [Pas]$$

Koeficient kinematickej viskozity $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$

Pohyb tuhého telesa v kvapaline

Pozn.:
laminárne prúdenie, $\boldsymbol{v}$ je malé

reálna kvapalina - **viskozita**



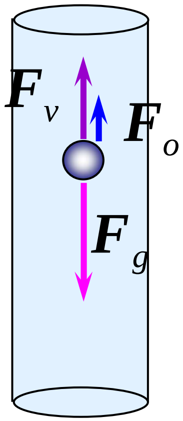
$$F \sim v$$

$$F \sim r$$

$$\boxed{F = 6\pi\eta r v}$$

Stokesov vzťah

Odvodenie rýchlosti pohybu tuhého telesa (guľôčky) v kvapaline:



$$F_g = mg \quad = V\rho_t g \; = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_t g$$

$$F_v = V\rho_k g \quad = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g$$

$$F_o = 6\pi\eta r v$$

pre v=konšt. platí:

$$F_g = F_v + F_o$$

$$\frac{4}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}\,2}\rho_t g = \frac{4}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}\,2}\rho_k g + 6\cancel{\pi}\eta\cancel{r}v$$

$$\boxed{v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho_k - \rho_t)}{\eta} g}$$

Tepelný pohyb

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

Tepelná rozťažnosť, termodynamická teplota

Teplota, tepelná rozťažnosť tuhých látok

Ako charakterizovať tepelný stav telies? → **teplota (t)**
termodynamická teplota (T)

stupnice
- Celziova [^{o}C] (0^{o}C ... v rovnováhe ľad a voda pri normálnom tlaku)
- Kelvinova [K] (absolútna)

$$T_0 = 273{,}16\,K$$ ... termodynamická teplota pri 0^{o}C

$$\boxed{T[K] = 273{,}16 + t[^oC]}$$

zmena **teploty** → zmena kmitavého pohybu atómov okolo rovnovážnych polôh → zmena **dĺžky**, plochy, resp. objemu

$$\alpha = \frac{1}{l_0}\frac{dl}{dT} \xrightarrow[dT \to \Delta T]{dl \to \Delta l} \alpha = \frac{1}{l_0}\frac{l - l_0}{T - T`} \rightarrow \boxed{l = l_0\left[1 + \alpha(T - T`)\right]}$$

Ideálny plyn

Doplnkové materiály k prednáškam základného kurzu z fyziky

Stavová rovnica, Boylov-Mariottov zákon, Gay-Lussacov zákon, Daltonov zákon, Vnútorná energia plynov

Stavová rovnica ideálneho plynu

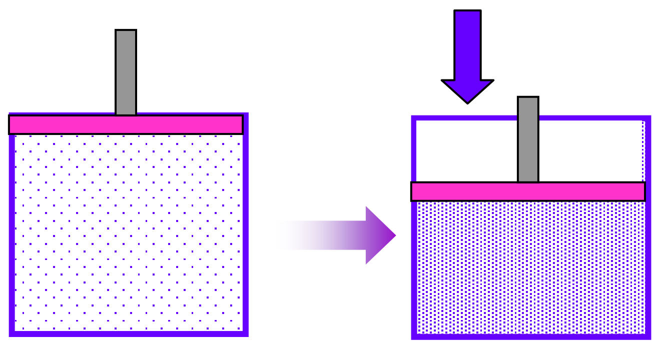
Ako charakterizovať plyn z hľadiska veličín p, V, T?

p, V, T ... **stavové veličiny**, lebo popisujú stav plynu

$\boxed{\frac{pV}{T} = nR}$ resp. $\boxed{\frac{pV}{T} = konšt.}$

$$R = 8{,}314\ JK^{-1}mol^{-1}$$

$$R = 8314\ JK^{-1}kmol^{-1}$$



stav **1** p_1, V_1, T_1

stav **2** p_2, V_2, T_2

n ... látkové množstvo [mol]
predstavuje množstvo látky s počtom molekúl určeným tzv. Avogadrovým číslom ($6{,}023.10^{23}mol^{-1}$)

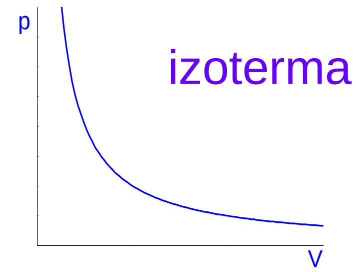
Boylov-Mariottov a Gay-Lussacov zákon

dej

- izotermický ...T=konšt.

$$\boxed{pV = konšt\,.}$$

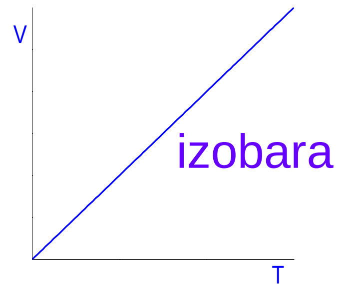
Boylov-Mariottov zákon ... pri stálej teplote je súčin tlaku a objemu ideálneho plynu konštantný



- izobarický ...p=konšt.

$$\boxed{\frac{V}{T} = konšt\,.}$$

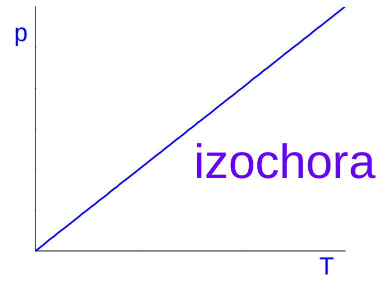
Gay-Lussacov zákon (1) ... pri stálom tlaku je podiel objemu a termodynamickej teploty ideálneho plynu konštantný



- izochorický ...V=konšt.

$$\boxed{\frac{p}{T} = konšt\,.}$$

Gay-Lussacov zákon (2) ... pri stálom objeme je podiel tlaku a termodynamickej teploty ideálneho plynu konštantný



Daltonov zákon ... Výsledný tlak zmesi plynov sa rovná súčtu parciálnych tlakov zložiek zmesi

$$\boxed{p = p_1 + p_2 + \ldots = \sum p_i}$$

Vnútorná energia plynu, teplo, tepelná kapacita

pohyb molekúl → kinetická energia molekúl

vzájomné pôsobenie molekúl → potenciálna energia molekúl

vnútorná energia (U)

$$\boxed{U = E_p + E_k}$$

Ohrev

→ bez zmeny skupenstva

teplo (Q) [J] Joule

$$\boxed{Q = mc_v(t_1 - t_2)}$$

izochorický proces

$$\boxed{Q = mc_p(t_1 - t_2)}$$

izobarický proces

$c_p, c_V \ldots [Jkg^{-1}K^{-1}]$

tepelná kapacita

$$\boxed{\kappa = \frac{c_p}{c_V}}$$

Poissonova konštanta

Pre tuhé látky platí:

$$\boxed{c_V = c_p}$$

→ len na zmenu skupenstva

skupenské teplo (L) [J] Joule

$$\boxed{L = lm}$$

merné skupenské teplo ... l

ľad -5°C $\xrightarrow{Q_1}$ ľad 0°C $\xrightarrow{L_t}$ voda 0°C $\xrightarrow{Q_2}$ voda 100°C $\xrightarrow{L_v}$ para 100°C