Žilinská univerzita v Žiline

Elektrotechnická fakulta

Quido Jackuliak a kolektív

Zbierka úloh z fyziky I

Vydala Žilinská univerzita
2002

Autorský kolektív:
Doc. RNDr. Quido Jackuliak, CSc, Prof. RNDr. Ivan Baják, DrSc.,
Doc. RNDr. Drahoslav Vajda, PaedDr. Peter Hockicko

Recenzovali:
Doc. RNDr. Stanislav Kolník, CSc.
plk. Doc. RNDr. Pavol Šutta, CSc.

Žilinská univerzita / EDIS – vydavateľstvo ŽU

Predslov

Predkladaná Zbierka úloh z fyziky I má slúžiť poslucháčom všetkých fakúlt a študijných odborov Žilinskej univerzity na prípravu k praktickej časti skúšky z predmetu Fyzika.

Autorský kolektív sa snažil zostaviť úlohy tak, aby ukazovali využitie základných fyzikálnych zákonov a vzťahov v technike.

Výberom jednotlivých príkladov a úloh sme sa snažili v dostatočnej miere pokryť teoretické poznatky získané v predmete Fyzika.

Každá kapitola začína krátkym teoretickým úvodom, v ktorom sú uvedené metodické pokyny pre riešenie úloh v danej kapitole, a prehľadom základných zákonov a vzťahov. Ďalej nasledujú riešené vzorové príklady, s aplikovaným algoritmom riešenia príkladov, ktorý je uvedený v Úvode. Neriešené príklady sú doplnené výsledkom, aby si študenti mohli overiť správnosť svojho riešenia. Náročnejšie úlohy sú zvlášť označené znakom ∗ za číslom úlohy.

Aby študenti získali návyk vyhľadávať údaje v literatúre, boli niektoré hodnoty fyzikálnych veličín prenesené z podmienok úlohy do tabuliek, ktoré sú uvedené na konci Zbierky.

Autorský kolektív zvlášť ďakuje RNDr. I. Turekovej za prečítanie textu, za overenie výsledkov jednotlivých príkladov a za pomoc vedúcemu autorského kolektívu pri redigovaní konečnej verzii textu.

Autorský kolektív ďakuje Ing. E. Pechancovej a p. A. Chasníkovej za prepísanie textov a Mgr. B. Kalinčiakovi a p. J. Remencovi za nakreslenie obrázkov.

Autorský kolektív ďakuje recenzentom Doc. RNDr. S. Kolníkovi, CSc. a plk. Doc. RND. P. Šuttovi, CSc. za cenné pripomienky a rady k textu predložených skrípt.

Doc. RNDr. Q. Jackuliak, CSC.
vedúci autorského kolektívu

Obsah

Úvod

Riešenie konkrétnych úloh z fyziky je nutnou podmienkou zvládnutia predmetu Fyzika. Samotné riešenie úloh z fyziky okrem toho pomáha vniknúť študentom do problematiky vlastnej tvorivej práce. Učí ich analyzovať skúmané javy, nachádzať podstatné vplyvy, ktoré vyvolávajú ten či onen jav a zanedbať nepodstatné, alebo náhodné detaily. Vďaka tomu sa riešenie úloh z fyziky približuje k modelu vedeckého výskumu.

Vlastný proces riešenia úloh z fyziky si vyžaduje používanie rôznych foriem a metód vedeckého poznania, ako sú pozorovanie, porovnávanie, pokusy, využitie analógie, analýzy a syntézy, indukcie a dedukcie a pod.

Pre rozvoj analytického myslenia študentov je podstatné naučiť ich hľadať väzby medzi príčinou a dôsledkom v javoch, ktoré sú opísané, alebo už modelované, vo fyzikálnych úlohách. Preto, skôr než sa pristúpi k riešeniu konkrétnej úlohy, je potrebné urobiť dôkladnú analýzu úlohy s cieľom zistenia príčin a dôsledkov, a tiež nájdenia podstaty fyzikálnej úlohy.

Napriek tomu je možný algoritmický prístup k riešeniu úloh z fyziky. Tento môžeme rozdeliť na všeobecný a na špecifický. Všeobecný algoritmický prístup nám dáva pokyny ako postupovať pri riešení úloh z fyziky všeobecne, t.j. nezávisle od práve riešeného problému.. Špecifický algoritmický prístup dáva podobné inštrukcie ako postupovať pri riešení úloh z fyziky konkrétneho typu.

Pretože takýto algoritmický prístup k riešeniu úloh z fyziky môže byť veľmi užitočný pre študentov, ktorí sa chcú naučiť riešiť úlohy z fyziky a nie len z fyziky, uvedieme oba algoritmické prístupy.

Príkazy všeobecného algoritmického prístupu sú nasledovné:

1. Pozorne si prečítať text, pochopiť otázku a urobiť si plán riešenia: (Treba si uvedomiť, že každé slovo textu zadania nesie informáciu).
   a) urobiť si dôkladnú analýzu vstupných údajov a požiadaviek úlohy;
   b) predstaviť si úlohu (buď statický obraz alebo prebiehajúci dej), ktorá je opísaná v zadaní.
2. Zvoliť si určitý spôsob riešenia:
   a) preskúmať metodiku použitia fyzikálnych zákonov (vždy postupujeme tak, že hľadáme väzby neznámej veličiny na zadané veličiny);
   b) nájsť a zapísať si chýbajúce rovnice.
3. Riešiť úlohu t.j. nájsť hodnoty hľadaných veličín:
   a) riešiť rovnice a nájsť riešenie pre jednotlivé neznáme v obecnom tvare;
   b) preveriť správnosť riešenia, fyzikálny rozmer na jednej strane rovnice musí byť rovný fyzikálnemu rozmeru na druhej strane rovnice;
   c) dosadiť zadané veličiny do obecného riešenia a vypočítať hodnoty hľadaných veličín berúc do úvahy pravidlá zaokrúhľovania čísel;
   d) urobiť analýzu výsledku, t.j. zhodnotiť či vypočítané hodnoty zodpovedajú skutočnosti.

Upozornenie: Ak všeobecné riešenie nesplňuje podmienku 3 b), znamená to, že riešenie nie je správne. Ak splňuje túto podmienku, neznamená to ešte, že riešenie je správne!

Aby sme mohli popísať špecifický algoritmus musíme si zvoliť konkrétnu tému. Zvolíme si napr. dynamiku hmotného bodu. Potom bude špecifický algoritmus mať nasledovný sled príkazov.

1. Urobíme si analýzu vstupných údajov a požiadaviek, t.j. upravíme si všetky údaje do jednej sústavy jednotiek, vypíšeme si zadané veličiny, hľadané veličiny a podmienky riešenia (obyčajne zadané slovne). Uprednostňujeme jednotky sústavy SI.
2. Ak je potrebné, nakreslíme si obrázok, kde budú zakreslené sily pôsobiace na hmotné body (telesá, ktoré môžeme uvažovať ako hmotný bod).
3. Napíšeme si pohybové rovnice vo vektorovej forme. Vhodne si zvolíme súradnicovú sústavu, urobíme si projekcie síl do osí súradnicovej sústavy.
4. Prepíšeme si pohybové rovnice do skalárneho tvaru, chýbajúcu rovnicu nájdeme matematickým vyjadrením geometrických väzieb.
5. Riešime sústavu rovníc. V prípade lineárnych rovníc si pamätajte, že počet lineárnych rovníc sa musí rovnať počtu neznámych veličín !
6. Preveríme správnosť riešenia, fyzikálny rozmer na jednej strane rovnice musí byť rovný fyzikálnemu rozmeru na druhej strane rovnice.
7. Vypočítame hodnoty hľadaných veličín dosadením známych veličín do riešenia v obecnom tvare.
8. Overíme si, či vypočítané hodnoty sú v zhode s skutočnosťou.

Pre úspešné riešenie úloh z fyziky nestačí len znalosť fyzikálnych zákonov. Je potrebný aj vhodný metodologický prístup. Vyššie uvedené príkazy algoritmického prístupu uľahčujú hľadať správny metodologický prístup pri riešení konkrétnej úlohy, ale treba si uvedomiť, že neexistuje jednotná metodika riešenia príkladov z fyziky. Preto sa autori snažili na príklade veľkého počtu riešených úloh ukázať ako pristupovať ku konkrétnej úlohe a zvoliť si optimálny spôsob riešenia.

Na záver upozorňujeme, že kto sa chce naučiť riešiť problémy, musí získať aj určitú rutinu (praktickú skúsenosť), ktorá je nenahraditeľná. Znamená to, že ku každej oblasti fyziky je potrebné, aby študent vyriešil dostatočné množstvo príkladov, čo mu umožní získať túto praktickú skúsenosť, ktorú potom môže aplikovať v ľubovoľnom odvetví vedy. Preto po riešených úlohách z jednotlivých oblastí fyziky sme uviedli aj neriešené úlohy rôzneho stupňa obtiažnosti, na ktorých si študenti môžu osvojovať metodiku riešenia príkladov.

Časť I.

Základy mechaniky

1 Kinematika hmotného bodu

Pohybové rovnice nám umožňujú určiť polohu pohybujúceho sa telesa v ľubovoľnom okamihu vo vopred zvolenej súradnicovej sústave.

Súradnicovú sústavu je potrebné zvoliť tak, aby matematické riešenie pohybových rovníc bolo čo najjednoduchšie. Treba si uvedomiť, že ak vyjadríme zmenu polohy pomocou zmeny súradníc, nebudú naše pohybové rovnice vyjadrovať dráhu, ktorú prejde teleso za odpovedajúci čas.

Ak je známa rovnica dráhy pohybu, potom je možné zostrojiť trajektóriu a vypočítať rýchlosť a zrýchlenie. Z druhej strany, ak poznáme časovú závislosť rýchlosti a zrýchlenia, môžeme stanoviť rovnicu dráhy pohybu.

Predpokladáme, že pohyb hmotného bodu budeme skúmať v inerciálnych súradnicových sústavách a preto je potrebné vedieť ako sa zmenia súradnice a rýchlosť pri prechode od jednej inerciálnej súradnicovej sústavy k druhej.

1. Priemerná rýchlosť hmotného bodu

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \qquad v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

kde $\Delta \boldsymbol{r}$ je zmena polohového vektora za časový interval Δt a Δs zmena dráhy za časový interval Δt.

2. Priemerné zrýchlenie hmotného bodu

$$\boldsymbol{a}_s = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t},$$

kde $\Delta \boldsymbol{v}$ je zmena rýchlosti za časový interval Δt.

3. Okamžitá rýchlosť hmotného bodu

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor a s - dráha.

4. Zrýchlenie hmotného bodu

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}; \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad ,$$

kde a_t je tangenciálne zrýchlenie $a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$;

a_n - normálové zrýchlenie $a_n = \frac{v^2}{R}$;

R - polomer krivosti dráhy v danom bode;

$\boldsymbol{\tau}$ - jednotkový vektor v smere dotyčnice k dráhe;

$\boldsymbol{n}$ - jednotkový vektor v smere normály k dráhe.

5. Pre priamočiary pohyb hmotného bodu platia vzťahy

$$v = v_0 + \int a\,\mathrm{d}t\,; \qquad s = s_0 + \int v\,\mathrm{d}t\,.$$

V prípade, ak a je konštantné, potom

$$v = v_0 + at \qquad \text{a} \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,,$$

kde v_0 je rýchlosť v čase $t = 0$ a s_0 – dráha v čase $t = 0$.

6. Uhlová rýchlosť hmotného bodu

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\,\boldsymbol{\varphi}}{d\,t}\,,$$

kde $d\,\boldsymbol{\varphi}$ je uhol pootočenia.

V prípade rovnomerného pohybu $\omega = \dfrac{\varphi}{t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$,

kde T je perióda otáčania f - kmitočet.

7. Uhlové zrýchlenie

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

8. Vzťah medzi postupnou a uhlovou rýchlosťou

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}]\,,$$

pri pohybe po kružnici $v = \omega R$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor a R - polomer kružnice.

9. Rotačný pohyb hmotného bodu

$$\omega = \omega_0 + \int \varepsilon\,\mathrm{d}t\,, \quad \varphi = \varphi_0 + \int \omega\,\mathrm{d}t\,.$$

V prípade, že ε je konštanta, potom

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad \text{a} \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2\,,$$

kde ω_0 je uhlová rýchlosť v čase $t = 0$ a φ_0 je uhol, charakterizujúci polohu hmotného bodu v čase $t = 0$.

10. Galileiho transformácie súradníc

$$x = x' + ut, \quad y = y', \quad z = z',$$

kde x – poloha bodu v laboratórnej sústave, x' - poloha bodu v inerciálnej sústave pohybujúcej sa voči laboratórnej rýchlosťou u v kladnom smere osi x.

11. Galileiho vzorec pre skladanie rýchlosti

$$v_x = v'_x + u\,.$$

12. Lorentzove transformácie súradníc

$$x = \frac{x' + u\,t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{u\,x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu a x – poloha bodu v laboratórnej sústave, x' - poloha bodu v inerciálnej sústave pohybujúcej sa voči laboratórnej s rýchlosťou u v kladnom smere osi x

13. Einsteinove vzorce pre skladanie rýchlosti

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{u\,v_x'}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,v_y'}{1 + \frac{u\,v_x'}{c^2}}, \quad v_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,v_z'}{1 + \frac{u\,v_x'}{c^2}}.$$

Riešené príklady

1.1. Elektrický vlak sa pohybuje medzi dvoma zástavkami vzdialenými od seba 2,5 km nasledovne. Začína sa pohybovať s konštantným zrýchlením 1 m.s^{-2}, až dosiahne maximálne povolenú rýchlosť, ktorá je 90 km/h. Ďalej sa pohybuje rovnomerne až kým začne brzdiť do zastavenia s tým istým zrýchlením čo do veľkosti, ale opačného smeru. Vypočítajte priemernú rýchlosť elektrického vlaku medzi zastávkami.

Úvaha:

Známe veličiny	Hľadané veličiny
a = 1 m.s^{-2}	v_p = ?
s = 2500 m	
v_{max} = 25 m.s^{-1}	
$v_0 = v_k = 0$	

Urobíme si skrátený zápis známych a hľadaných veličín, ako aj podmienok riešenia. Budeme vychádzať z definície priemernej rýchlosti ako podielu celkovej dráhy a celkového času, za ktorý vlak túto dráhu prešiel.

$$v_p = \frac{s}{t} \tag{1}$$

Zo zadania je zrejmé, že pohyb vlaku medzi zástavkami môžeme rozdeliť na tri úseky. Potom celková dráha bude rovná súčtu dráh jednotlivých úsekov a celkový čas súčtu časov potrebných na prekonanie jednotlivých úsekov. Na prvom úseku prejde vlak dráhu s_1 so zrýchlením a z počiatočnej rýchlosti v_0, pokiaľ nedosiahne rýchlosť v_{max}. Preto musí platiť

$$v_{max} = a t_1 \tag{2}$$

a

$$s_1 = a t_1^2 / 2, \tag{3}$$

pretože $v_0 = 0$ a a je konštantné. Úpravou dostaneme

$$t_1 = \frac{v_{max}}{a}, \qquad s_1 = \frac{v_{max}^2}{2a} \tag{4}$$

Druhý úsek ide vlak konštantnou rýchlosťou v_{max} a prejde dráhu

$$s_2 = v_{max} t_2 \, . \tag{5}$$

Tretí úsek vlak brzdí so zrýchlením $-a$ z počiatočnej rýchlosti v_{max} do zastavenia. Preto platia vzťahy

$$0 = v_{max} - a t_3 \, , \tag{6}$$

$$s_3 = \mathrm{v}_{\max} t_3 - \frac{1}{2} a t_3^2 \, . \tag{7}$$

Riešením rovníc (6) a (7) dostaneme

$$t_3 = \frac{v_{\max}}{a} = t_1 \, , \quad s_3 = \frac{v_{\max}^2}{2a} = s_1 \, . \tag{8}$$

Aby sme mohli úlohu riešiť je potrebné vyjadriť si dráhu s_2 pomocou známych veličín. Vieme, že celková dráha je rovná súčtu dráh na jednotlivých úsekoch a je zadaná. Preto dráha s_3 bude rovná rozdielu celkovej dráhy a dráh na prvom a treťom úseku

$$s_2 = s - 2s_1 \, . \tag{9}$$

Potom čas t_2 bude rovný

$$t_2 = \frac{s - 2s_1}{v_{max}} \, . \tag{10}$$

Riešenie:

Vypočítame si najprv celkový čas berúc do úvahy, že

$$s_1 = \frac{v_{\max}^2}{2a}$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{v_{\max}}{a} + \frac{s}{v_{\max}} - \frac{v_{\max}}{a} + \frac{v_{\max}}{a} = \frac{s}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a} = \frac{2500\mathrm{m}}{25\mathrm{m.s}^{-1}} + \frac{25\mathrm{m.s}^{-1}}{1\mathrm{m.s}^{-2}} =$$

$$= 125 \text{ s.}$$

Pre priemernú rýchlosť dostaneme

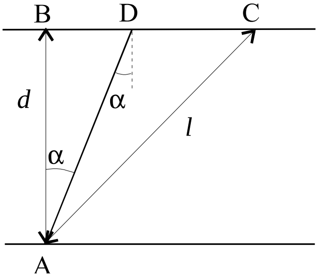
$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{2500\mathrm{m}}{125 \text{ s}} = 20 \text{ m.s}^{-1}.$$

1.2. Chodec stojí na okraji pásu zoraného poľa širokého 200 m a chce sa dostať na druhý okraj, ktorý susedí s trávnatou plochou, do miesta vzdialeného od východzieho bodu 300 m. V ornici kráča rýchlosťou 3 km/hod., po trávnatej ploche 5 km/hod. Pod akým uhlom vzhľadom na kolmicu k rozhraniu ornice a trávy musí chodec vyraziť zoraným pásom, aby do cieľového miesta došiel za najkratší čas a aký tento čas bude?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$d = 200$ m	$\alpha_m = ?$
$l = 300$ m	$t_{min} = ?$
$v_1 = 3$ km/hod	
$v_2 = 5$ km/hod	

Nakreslíme si schému pohybu chodca, pozri obr.1. Označíme si východziu polohu ako bod *A* a konečnú polohu ako bod *C*. Bod, ktorý sa nachádza oproti chodcovi na druhej strane poľa, si označíme ako *B*. Pretože rýchlosti pohybu chodca po zoranom poli a po tráve sú rôzne, je zrejmé, že pre do-



Obr.1

siahnutie minimálneho času musí chodec prejsť zorané pole pod istým uhlom voči kolmici k rozhraniu zoraného poľa a trávy, označíme si ho α. Aby celkový čas t_c bol minimálny, musí byť splnená podmienka extrému funkcie t_c (α);

$$\frac{\partial t_c(\alpha)}{\partial \alpha} = 0\,. \tag{1}$$

Aby sme úlohu vyriešili treba nájsť funkciu, ktorá bude vyjadrovať závislosť času t_c od uhlu α. Zo zadania je zrejmé, že ide o rovnomerný pohyb a preto bude platiť vzťah medzi dráhou a časom

$$s = v\,t\,. \tag{2}$$

Z obrázku je zrejmé, že celkový čas potrebný na to, aby chodec prešiel z bodu *A* do bodu *C*, sa bude skladať z času t_1, potrebného na prekonanie dráhy z bodu *A* do bodu *D* a času t_2, potrebného na prekonanie dráhy z bodu *D* do bodu *C*. Vyjadríme si tieto časy pomocou rovnice (2).

$$t_1 = \frac{\overline{AD}}{v_1} = \frac{d}{v_1 \cos\alpha} \tag{3}$$

$$t_2 = \frac{\overline{DC}}{v_2} = \frac{\sqrt{l^2 - d^2} - d\,\mathrm{tg}\alpha}{v_2} \tag{4}$$

Súčtom vzťahov (3) a (4) dostanem rovnicu vyjadrujúcu závislosť celkového času od uhlu α:

$$t_c = \frac{d}{v_1 \cos\alpha} + \frac{1}{v_2}\left(\sqrt{l^2 - d^2} - d\,\mathrm{tg}\alpha\right) \tag{5}$$

Riešenie:

Aby sme vypočítali minimálny čas musíme derivovať rovnicu (5) podľa uhlu α a deriváciu položiť rovnú nule. Dostaneme

$$\frac{d \sin\alpha_{\mathrm{m}}}{v_1 \cos^2\alpha_{\mathrm{m}}} - \frac{1}{v_2}\frac{d}{\cos^2\alpha_{\mathrm{m}}} = 0\,. \tag{6}$$

Pretože riešenie s uhlom $\alpha_{\mathrm{m}} = 90^0$ neprichádza do úvahy a *d* je nenulové, môžeme vzťah (6) vydeliť pomerom $d/\cos^2\alpha_{\mathrm{m}}$ a úpravou dostaneme výraz pre uhol α_{m}

$$\alpha_{\mathrm{m}} = \arcsin\frac{v_1}{v_2}\,.$$

Dosadením hodnôt rýchlosti vypočítame hodnotu uhlu α_{m}

$$a_{\mathrm{m}} = \arcsin\frac{3\mathrm{km/h}}{5\mathrm{km/h}} = 0.64\ \mathrm{rad.}$$

Túto hodnotu uhlu dosadíme do rovnice (5) a dostaneme minimálny čas

$$t_{\mathrm{min}} = 0{,}098\ \mathrm{h} = 5{,}9\ \mathrm{min} \cong 6\ \mathrm{minút}$$

1.3. V triediacom zariadení padajú oceľové guľôčky z výšky h = 30 cm na oceľovú platňu naklonenú o uhol α = 15° voči vodorovnej rovine a skáču (ak sú vyhotovené podľa predpisu) cez otvor v stene, ktorá je vo vzdialenosti d = 20 cm od bodu odrazu. V akej výške h_1 sa otvor nachádza?

Úvaha:

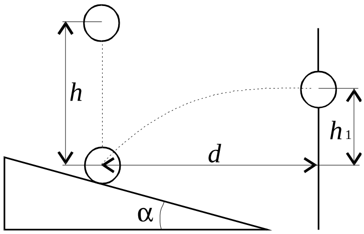
Zadané veličiny	Hľadané veličiny
h = 30 cm	h_1 = ?
α = 15°	
d = 20 cm	
Podmienka: Absolútne pružný ráz	

Znázorníme si dráhu guličky v triediacom zariadení, viď obr. 2. Guľôčka padajúca z výšky h voľným pádom po dopade na naklonenú rovinu sa odrazí a preletí otvorom v stene. Zo vzťahov pre voľný pád

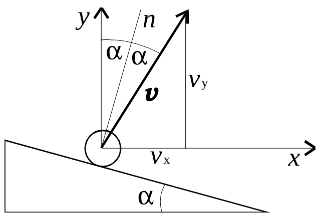
$$v = gt, \quad h = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

dostaneme pre rýchlosť v, ktorou guľôčka dopadla na podložku, vzťah

$$v = \sqrt{2gh} \ . \tag{2}$$



Obr.2



Obr.3

Ráz guľôčky o podložku je absolútne pružný, preto rýchlosť odrazu je rovná rýchlosti dopadu a uhol odrazu je rovný uhlu dopadu. Pre lepšiu predstavu si nakreslíme obrázok, ktorý znázorňuje rýchlosť guličky a jej zložky vzhľadom na naklonenú rovinu (obr. 3). Priamka n je normálou k naklonenej rovine. Gulička dopadá na rovinu pod uhlom α, pod tým istým uhlom odskakuje od roviny a ďalej sa pohybuje po dráhe šikmého vrhu. Zavedieme si súradnicovú sústavu x,y tak, že os x je vodorovná a os y je na ňu kolmá. Potom môžeme napísať zložky v_x a v_y po odraze

$$\begin{aligned} v_x &= v\cos(90° - 2\alpha); \\ v_y &= v\sin(90° - 2\alpha). \end{aligned} \tag{3}$$

Aby gulička preletela cez otvor musí v čase preletu t_p byť jej poloha nasledovná:

$$x_p = v_x t_p = d \ ; \tag{4}$$

$$y_p = v_y t_p - \frac{1}{2}gt_p^2 = h_1 \ . \tag{5}$$

Riešenie:

Pomocou vzťahov (2) a (4) vypočítame čas t_p .

$$t_p = \frac{d}{v_x} = \frac{d}{\sqrt{2gh}\ \cos 60°}$$

Dosadením času t_p do rovnice (5) vypočítame

$$h_1 = \frac{\sqrt{2gh}\ \sin 60°}{\sqrt{2gh}\ \cos 60°} d - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{2gh \cos^2(60°)} = d\left(\mathrm{tg}60° - \frac{1}{4}\frac{d}{h}\frac{1}{\cos^2(60°)} \right)$$

$$h_1 = 0{,}2\,\mathrm{m}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{4}\frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{0{,}3\,\mathrm{m}\ 0{,}25} \right) = 0{,}213\,\mathrm{m}$$

1.4. Hmotný bod sa začína pohybovať po kružnici o polomere r = 10 cm s konštantným uhlovým zrýchlením ε = 0,4 rad.s^{-2}. Vypočítajte:

a) jeho celkové zrýchlenie v čase t_1 = 2 s po začatí pohybu;
b) dobu, za ktorú bude vektor zrýchlenia zvierať s vektorom rýchlosti uhol 80°;
c) dráhu, ktorú prejde za čas t_1 hmotný bod;
d) uhol, o ktorý sa pootočí polohový vektor hmotného bodu za čas t_1 !

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
r = 0,1 m	a_1 = ?
$\varepsilon =$ 0,4 rad.s^{-2}	t_2 = ?
$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}) = 80°$	$s(t_1) = ?$
t_1=2 s	$\varphi(t_1) = ?$
$v(0) = 0$	
$\varphi(0) = 0$	
$s(0) = 0$	

Celkové zrýchlenie pri pohybe hmotného bodu po kružnici je rovné vektorovému súčtu tangenciálneho a normálového zrýchlení. Ale jednotlivé zložky celkového zrýchlenia sú na seba kolmé a preto môžeme napísať

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\ . \tag{1}$$

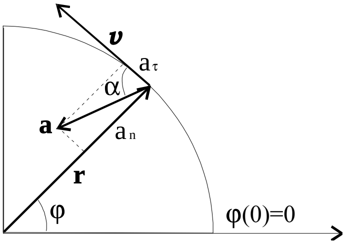
Zo zadania je zrejmé, že tangenciálna zložka zrýchlenia je konštantná a rovná

$$a_\mathrm{t} = \varepsilon r\ . \tag{2}$$

Normálové zrýchlenie bude rovné :

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} \tag{3}$$

a bude sa meniť v závislosti od času, preto treba vypočítať rýchlosť v čase t_1. Rýchlosť v vypočítame zo vzorca pre výpočet rýchlosti zo zrýchlenia:



Obr.4

$$v = v_0 + \int_0^t a_\mathrm{t}\,\mathrm{d}t = v_0 + \int_0^t \varepsilon r\,\mathrm{d}t\ .$$

Ak vezmeme do úvahy počiatočnú podmienku $v(0) = 0$ dostaneme

$$v(t) = a_\mathrm{t}\,t = \varepsilon r\,t\ . \tag{4}$$

Z obrázku 4 je zrejmé, že uhol medzi celkovým zrýchlením a vektorom rýchlosti, označíme si ho α, bude aj uhlom medzi celkovým zrýchlením a tangenciálnym zrýchlením. Preto môžeme napísať

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_\mathrm{n}}{a_\mathrm{t}} . \qquad (5)$$

Dosadením vzťahov (3 a 4) do rovnice (5) dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_\mathrm{t}^2 t^2}{a_\mathrm{t} r} = \frac{a_\mathrm{t}}{r} t^2$$

a odtiaľto

$$t = \sqrt{\frac{r\ \mathrm{tg}\,\alpha}{a_\mathrm{t}}} . \qquad (6)$$

Dráhu s(t) si vypočítame zo vzorca pre výpočet dráhy

$$s(\mathrm{t}) = s_0 + \int_0^t v(\mathrm{t})\mathrm{d}t \qquad . \qquad (7)$$

Pri pohybe po kružnici platí nasledovný vzťah medzi dráhou a uhlovou dráhou

$$s = \varphi r . \qquad (8)$$

Riešenie:

a) Pri použití rovníc (2, 3 a 4) môžeme rovnicu (1) upraviť do tvaru

$$a_1 = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \left(\frac{(\varepsilon r t_1)^2}{r}\right)^2} = \varepsilon r\sqrt{1+\varepsilon^2 t_1^4} = 0{,}4\mathrm{s}^{-2}\cdot 0{,}1\,\mathrm{m}\cdot\sqrt{1+\left(0{,}4\mathrm{s}^{-2}\right)\cdot 2^4\,\mathrm{s}^4} \cong 0{,}075\,\mathrm{m.s}^{-2}$$

b) Dosadením hodnôt polomeru, uhlového zrýchlenia a tangensu α do rovnice (6) dostaneme:

$$t_2 = \sqrt{\frac{r\ \mathrm{tg}\,\alpha}{\varepsilon r}} == \sqrt{\frac{\mathrm{tg}\ \alpha}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{5{,}67128}{0{,}4\,\mathrm{s}^{-2}}} \cong 3{,}76\,\mathrm{s} .$$

c) Ak vezmeme do úvahy, že $s(0) = 0$ a $v(0) = 0$ vypočítame dráhu v čase t_1, úpravou vzorca (7):

$$s_1 = \int_0^{t_1} v\ \mathrm{d}t = \int_0^{t_1} a_t t\ \mathrm{d}t = \frac{a_t t_1^2}{2} = \frac{\varepsilon r\, t_1^2}{2} = \frac{0{,}4\,\mathrm{s}^{-2}\cdot 0{,}1\,\mathrm{m}\cdot(2\mathrm{s})^2}{2} = 0{,}08\,\mathrm{m}$$

d) Dosadením do upraveného vzorca (8) dostaneme uhlovú dráhu

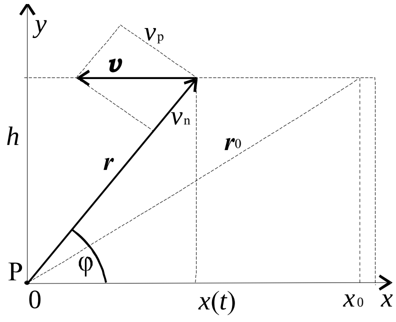
$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{0{,}08\ \mathrm{m}}{0{,}1\ \mathrm{m}} = 0{,}8\ \mathrm{rad} .$$

1.5. Lietadlo letí vodorovne rovnomerne priamočiaro nad rovinným zemským povrchom vo výške h rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. V smere letu lietadla je v mieste P pozorovateľňa. Pozorovateľ má echolot (zariadenie na meranie absolútnej hodnoty vzdialenosti lietadla od bodu P). a) Akú priečnu rýchlosť má lietadlo? b) Vypočítajte hodnotu rýchlosti lietadla, ktorú určí pozorovateľ v bode P!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$\boldsymbol{r}_0$	$v_\mathrm{r} = ?$
$\boldsymbol{r}$	$v = ?$

Pre riešenie príkladu je vhodné nakresliť obrázok (pozri obr.5) . Zvolíme si súradnicovú sústavu tak, že os x je v rovine zemského povrchu v smere lietadla a os y je na ňu kolmá. Počiatok súradnicovej sústavy umiestnime do bodu P. Budeme predpokladať, že v čase $t_0 = 0$ bol polohový vektor lietadla $\boldsymbol{r}_0$, ktorému na osi x zodpovedá súradnica x_0.



Obr.5

a) V ľubovoľnom nasledujúcom čase bude platiť:

$$x = x_0 - v\,t\,, \quad r = \sqrt{x^2 + h^2}$$

Z nameraných hodnôt polohových vektorov r_0 a r za veľmi krátky časový interval pozorovateľ priamo vypočíta radiálnu rýchlosť lietadla

$$v_r = \frac{r - r_0}{\Delta t}\,.$$

b) Radiálnu rýchlosť lietadla si môžeme vyjadriť aj v diferenciálnom tvare

$$v_\mathrm{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}v\,.$$

Úpravou tejto rovnice dostaneme

$$v_r = -\frac{x}{r}v = -\frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r}v,$$

odkiaľ hľadaná rýchlosť lietadla

$$v = -v_r\,\frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}}.$$

Poznámka: Príklad názorne dokazuje zložitosť problematiky merania rýchlosti pohybujúcich sa objektov. Ak má pozorovateľ prístroj len na určovanie vzdialenosti a z toho vyplývajúcej radiálnej rýchlosti, môže presne určiť rýchlosť iba vtedy, keď je umiestnený v niektorom bode na vektorovej priamke rýchlosti objektu (t. j. $h = 0$). Aby mohol pozorovateľ jednoznačne určiť zložky rýchlosti a smer lietadla musí mať k dispozícií údaj o vzdialenosti určitého bodu na osi x, nad ktorým lietadlo preletelo v čase, keď zamerali jeho vzdialenosť v bode P.

Keďže polícia má na meranie rýchlosti vozidiel iba prístroje vyššie spomínaného typu, musia ich umiestňovať na okraji vozovky tak, aby $h \cong 0$.

1.6. Na stožiari vo výške h=5,8 m je zavesená lampa. Bežec vysoký h_1=180 cm sa od lampy vzďaľuje rýchlosťou v = 4 m.s^{-1}.
Vypočítajte:
a) rýchlosť v_1, ktorou sa vrchol tieňa bežca vzďaľuje od lampy,
b) rýchlosť v_2, ktorou sa vrchol tieňa bežca vzďaľuje od bežca.

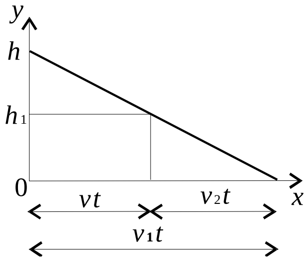
Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
h = 5,8 m	v_1 = ?
h_1 = 1,8 m	v_2 = ?
v = 4 m.s^{-1}	

Zvolíme si súradnicovú sústavu tak, že os x je rovnobežná so smerom rýchlosti bežca a os y je na ňu kolmá. Nakreslíme si obrázok pohybu bežca a tieňa (obr. 6). Nech vt je poloha bežca na osi x, keď tento v čase t_0 = 0 bol v polohe x = 0. Potom $v_1 t$

je poloha vrcholu tieňa bežca na osi x a $v_2 t$ je vzdialenosť vrcholu tieňa bežca od bežca.

Z podobnosti trojuholníkov dostávame vzťahy:



Obr.6

$$\frac{h}{v_1 t} = \frac{h - h_1}{vt} \Rightarrow \frac{h}{h - h_1} = \frac{v_1}{v} . \qquad (1)$$

Podobne

$$\frac{h_1}{h - h_1} = \frac{v_2}{v} . \qquad (2)$$

Riešenie:

Úpravou a dosadením do vzorca (1) dostaneme

$$v_1 = \frac{h}{h - h_1} v = \frac{5{,}8\,\mathrm{m}}{5{,}8\,\mathrm{m} - 1{,}8\,\mathrm{m}} 4\,\mathrm{m.s^{-1}} = 5{,}8\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

Úpravou a dosadením do vzorca (2) dostaneme

$$v_2 = \frac{h_1}{h - h_1} v = \frac{1{,}8\,\mathrm{m}}{5{,}8\,\mathrm{m} - 1{,}8\,\mathrm{m}} 4\,\mathrm{m.s^{-1}} = 1{,}8\,\mathrm{m.s^{-1}} .$$

1.7. Pozorovateľ, ktorý je v pokoji vzhľadom na laboratórnu sústavu súradníc, potrebuje zistiť dĺžku tyče, ktorá sa nachádza v rakete a je s ňou pevne spojená. Tyč je rovnobežná s osou rakety. Rýchlosť rakety je 0,7 c. Ako je možné urobiť takéto meranie? Vypočítajte dĺžku tyče, ktorú zistí pozorovateľ, ak dĺžka tyče v rakete je 1 m!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$l_0 = 1$ m	$l' = ?$
$v = 0{,}7$ c	

Dĺžku telesa môžeme merať len vo vzťažnej sústave, voči ktorej sa teleso, ktorého dĺžku meriame, nepohybuje. Preto pod dĺžkou pohybujúceho sa telesa rozumieme vzdialenosť medzi dvoma bodmi v laboratórnej sústave (nepohybujúcej sa), v ktorých sa v rovnakom čase, podľa hodín v laboratórnej sústave, nachádzali začiatok a koniec pohybujúceho sa voči laboratórnej sústave telesa. Zvolíme si laboratórnu sústavu súradníc tak, aby rýchlosť rakety bola rovnobežná s osou x a pohybovala sa v zápornom smere. Aby sme mohli zistiť dĺžku pohybujúceho telesa, potrebujeme dvoje hodiny, pomocou ktorých zistíme polohy začiatku x_1 a konca tyče x_2 v rovnakom čase t_0. Je zrejmé, že dĺžka pohybujúcej sa tyče bude rovná

$$l' = x_2 - x_1 . \qquad (1)$$

Dĺžka tyče v rakete, voči ktorej je tyč v kľude bude

$$l = x_2' - x_1' . \qquad (2)$$

Pomocou Lorentzovych transformácií môžeme vyjadriť súradnice v pohybujúcej sa sústave pomocou súradníc v laboratórnej sústave a tým zistiť závislosť medzi dĺžkou pohybujúcej sa tyče a jej dĺžkou v stave pokoja.

Riešenie:

Nech hodnota rýchlosti rakety v laboratórnej sústave je v. Potom bude platiť

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

Dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$l = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4}$$

Úpravou rovnice (4) dostaneme

$$l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1\,\mathrm{m}\sqrt{1 - \frac{(0{,}7)^2 c^2}{c^2}} \approx 0{,}71\,\mathrm{m}$$

Neriešené príklady.

1.8. Automobil prešiel prvú tretinu dráhy rýchlosťou v_1 a zvyšujúcu časť dráhy rýchlosťou 50 km/hod. Vypočítajte rýchlosť v_1, ak priemerná rýchlosť na celej dráhe bola 37,5 km/hod. [25 km/hod.]

1.9. Akú priemernú rýchlosť v_p má piest motora automobilu pri n = 3600 ot/min a pri zdvihu h = 69 mm? [8,28 m.s^{-1}]

1.10. Dve autá vyrazili súčasne z mesta M do mesta N vzdialeného 50,4 km. Auto A_1 prešlo polovicu vzdialenosti rýchlosťou 54 km/hod. a druhú polovicu rýchlosťou 72 km/hod. Auto A_2 išlo polovicu času, ktorý potrebovalo na prejdene celej vzdialenosti, rýchlosťou 54 km/hod. a druhú polovicu času rýchlosťou 72 km/hod. Ktoré auto dorazilo do mesta N skôr a o koľko sekúnd? Ako vzdialené bolo od mesta N druhé auto v okamihu príchodu prvého auta do mesta N? Aká bola priemerná rýchlosť každého z aut? [A_2; 60 s; 1200 m; $\bar{v}_{A1}$ = 61,7 km/hod; $\bar{v}_{A2}$ = 63 km/hod.]

1.11. Hmotný bod sa pohyboval nasledovne: Prvú sekundu so zrýchlením 1 m.s^{-2}, ďalšie dve sekundy so zrýchlením –1 m.s^{-2}, a posledné dve sekundy bez zrýchlenia. Vypočítajte priemernú rýchlosť hmotného bodu na dráhe, ktorú prešiel za uvedených 5 s. [0,7 m.s^{-1}]

1.12. Cyklista sa pohybuje smerom do kopca konštantnou rýchlosťou v_1 = 10 km.h^{-1}. Keď dosiahne vrchol kopca, obráti sa a absolvuje tú istú trať z kopca dolu rýchlosťou v_2 = 40 km.h^{-1}. Aká je priemerná rýchlosť pohybu cyklistu? [v_p = 16 km.h^{-1}]

1.13.* Po priamej ceste ide autobus rýchlosťou 16 m.s^{-1}. Človek sa nachádza vo vzdialenosti 60 m od cesty a 400 m od autobusu. V akom smere musí začať bežať človek, aby dobehol k niektorému bodu na ceste súčasne s autobusom, alebo skôr ako autobus. Človek môže bežať rýchlosťou 4 m.s^{-1}. [Ak chce človek dobehnúť súčasne alebo skôr ako autobus, musí bežať smerom, ktorý zviera uhol voči počiatočnej polohe autobusu od 36° 45 minút až 143° 15 minút.]

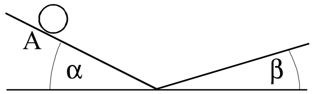
1.14. Dvaja vodiči štartujú súčasne z jedného miesta. Jeden vodič ide so zrýchlením a_1 = 1,8 m/s^2 a po 16-ich sekundách má pred druhým vodičom predstih s = 50 m. Aké zrýchlenie má druhý vodič? [1,41 m.s^{-2}]

1.15. Aká je začiatočná rýchlosť a zrýchlenie telesa, keď v 6. sekunde ubehne 6 m a v 11. sekunde 8 m? [3,8 m.s^{-1}; 0,4 m.s^{-2}]

1.16. Pozorovateľ stojaci v okamihu rozbehu vlaku pri jeho začiatku zaznamenal, že prvý vagón prešiel popri ňom za čas $t_1 = 4$ s. Ako dlho bude popri ňom prechádzať *n*-tý vagón (napr. $n = 7$), keď sú všetky vagóny rovnako dlhé? Považujte pohyb vlaku za priamočiary, rovnomerne zrýchlený. [$t^* = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = t_1(\sqrt{7} - \sqrt{6}) = 0{,}8$ s]
1.17. Teleso prešlo dva za sebou nasledujúce úseky dráhy s rovnakým zrýchlením za rovnaký čas. Aká je dĺžka druhého úseku, keď dĺžka prvého je 200 m a začiatočná rýchlosť telesa na prvom úseku bola nulová. [600 m]
1.18. Dve vozidlá štartujú v pravom uhle a idú rovnomerne zrýchlene tak, že po 15-ich sekundách sú od seba vzdialené 200m; jedno vozidlo má od križovatky dvojnásobnú vzdialenosť ako druhé. Aké rýchlosti majú v tom okamihu?
[$v_1 = 11{,}9$ m.s^{-1}; $v_2 = 23{,}8$ m.s^{-1}]
1.19. Vozidlo sa začalo pohybovať zo stavu pokoja so zrýchlením $a_1 = 2{,}5$ ms^{-2} . Po 5 s prešlo do rovnomerného pohybu a nakoniec brzdilo so spomalením $a_2 = 3{,}5$ ms^{-2} až do zastavenia. Celkove prešlo dráhu 100 m. Aký čas bol na túto jazdu potrebný? [12,06 s]
1.20.∗ Vlak išiel rýchlosťou 72 km/h, avšak mal meškanie $t_m = 3$ min, pretože prechodne na prestavovanej trati smel ísť iba rýchlosťou 18 km/h. Spomalenie pri brzdení bolo 0,3 m/s^2 a rozbehové zrýchlenie 0,15 m/s^2. Akú dráhu prešiel vlak rýchlosťou 18 km/hod.? [825 m]
1.21. Podľa záznamu akcelerografu sa vozidlo zo stavu pokoja rozbiehalo so zrýchlením, ktoré z počiatočnej hodnoty 1,5 m.s^{-2} rovnomerne klesalo až na nulovú hodnotu za čas 30 s. Akú dráhu vozidlo prešlo počas rozbehu a akú rýchlosť pohybu dosiahlo? [450 m; 81 km/hod.]
1.22. Analýzou záznamu tachografu vozidla bolo zistené, že vozidlo z pôvodnej rýchlosti 90 km/hod. brzdilo podľa časovej závislosti $v = v_0 - bt^2$ a zastavilo za čas 16 s. Na akej dráhe vozidlo zastavilo a akú maximálnu hodnotu dosiahla veľkosť zrýchlenia počas pohybu? [266,7 m; 3,125 m.s^{-2}]
1.23. Ak na hladine vody voľne pustíme guličku, bude klesať nerovnomerne zrýchleným pohybom s časovou závislosťou rýchlosti $v=v_0[\,1 - \exp(-t/\Theta)]$, kde $v_0 = 0{,}2$ m.s^{-1} a $\Theta = 0{,}1$ s. V akej hĺbke bude mať gulička rýchlosť rovnú 99 % rýchlosti ustáleného rovnomerného pohybu a aké bude v tejto hĺbke zrýchlenie? Zistite zo zadaných hodnôt hustotu guličky. [7,2 cm; 0,02 m.s^{-2};$1{,}3\cdot10^3$ kg.m^{-3}]
1.24. Častica sa začala pohybovať z počiatku súradnicovej sústavy v kladnom smere osi *x*. Veľkosť jej rýchlosti sa s časom mení podľa vzťahu $v = v_0\,(1 - kt)$, kde $v_0 = 0{,}1$ m/s je počiatočná rýchlosť častice a $k = 0{,}2$ s^{-1} je konštanta. Určite *x* – ovú súradnicu častice v čase $t = 6{,}0$ s od začiatku pohybu. [0,24 m]
1.25. Častica sa pohybuje tak, že jej poloha v ľubovoľnom okamihu je určená polohovým vektorom $\boldsymbol{r} = 3\ \mathrm{m.s^{-1}}t\boldsymbol{i} + (1\ \mathrm{m.s^{-1}}t + 1/2\ \mathrm{m.s^{-2}}t^2)\boldsymbol{j} - 4\ \mathrm{m}/\pi^2 \sin(\pi \mathrm{s^{-1}}t/2)\boldsymbol{k}$. Určite veľkosť rýchlosti a zrýchlenia častice v čase $t = 5$ s. [6,7 m/s ; 1,4 m/s^2]
1.26. Auto sa rozbieha priamočiaro z pokoja, pričom jeho zrýchlenie rovnomerne rastie tak, že v čase $t_1 = 150$ s má veľkosť $a_1 = 0{,}25$ m/s^2. Aká bola okamžitá rýchlosť auta v čase $t_2 = 200$ s ? Akú dráhu prešlo auto za tento čas [33,3 m/s ; 2,2 km]
1.27. Nákladné auto ide stálou rýchlosťou $v_2 = 60$ km/h za iným autom, ktoré má rýchlosť $v_1 = 42$ km/h. Za aký čas *t* a na akej dlhej dráhe *s* dobehne pomalšie auto, keď autá mali začiatočný odstup 400 m? [80 s; 1333,3 m]
1.28.∗Auto idúce rýchlosťou $v_2 = 70$ km/h predbieha iné auto, ktoré má rýchlosť $v_1 = 60$ km/h. Ako dlho bude trvať manéver predbiehania a akú dráhu musí predbiehajúce auto vykonať, keď vzájomný odstup áut pred a po predbiehaní je 20 m a obidve autá majú dĺžku 4 m? [17,27 s; 335,8 m]

1.29. Určite periódu periodického pohybu telesa, ktoré sa kĺže dolu a hore po dvoch naklonených rovinách zvierajúcich s vodorovnou rvinou uhly α a β (obr. 7), keď v čase $t = 0$ je voľne pustené z polohy A, a keď zanedbávame trenie ako aj straty kinetickej energie telesa pri jeho prechode z jednej roviny na druhú.

$$\left[T = T_1 + T_2 = \frac{2v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)\right]$$



Obr.7

1.30. Teleso preletelo za posledné 2 sekundy voľného pádu tretinu svojej celkovej dráhy. Ako dlho a z akej výšky padalo ? [10,9 s ; 582,7 m]

1.31. Voľne padajúce teleso minie dva 12 m od seba vzdialené meracie body za časový interval jednej sekundy. Z akej výšky h nad prvým meracím bodom padá teleso a akú rýchlosť má v oboch bodoch? [2,56 m; 7,09 m.s^{-1}; 16,9 m.s^{-1}]

1.32. Lopta hodená zvisle na zem z výšky 1 m vyskočí do výšky 6 m. Aká bola jej začiatočná rýchlosť, keď so stratami rýchlosti v dôsledku odporu vzduchu nerátame? [9,9 ms^{-1}]

1.33. ∗Teleso bolo vrhnuté zo zemského povrchu zvisle nahor rýchlosťou $v_0 = 4{,}9$ m.s^{-1}. Súčasne z maximálnej výšky, ktorú toto teleso dosiahne, je vrhnuté zvisle nadol druhé teleso tou istou začiatočnou rýchlosťou v_0. Treba určiť čas t^*, v ktorom sa obidve telesá stretnú, vzdialenosť h od zemského povrchu, v ktorej sa stretnú a rýchlosti obidvoch telies v_1^* a v_2^* v okamihu stretnutia. Odpor vzduchu zanedbajte!

[$t^* = 0{,}125$ s; $h = 0{,}53$ m; $v_1^* = 3{,}67$ m.s^{-1}; $v_2^* = 6{,}12$ m.s^{-1}]

1.34. V určitej výške nad povrchom Zeme sú z jedného bodu súčasne všetkými smermi vyhodené guľôčky so začiatočnou rýchlosťou v_0. Dokážte, že v ľubovoľnom nasledujúcom čase sa guľôčky nachádzajú na guľovej ploche polomeru $R = v_0\, t$, ktorej stred klesá rýchlosťou gt.

1.35. Na vodorovnej ploche ihriska bola vystrelená šikmo hore pod uhlom 0,6 rad rýchlosťou 25 m.s^{-1} oceľová gulička. V akej vzdialenosti by dopadla, akú maximálnu výšku by dosiahla a aký by bol pomer polomerov zakrivenia trajektórie v najvyššom a počiatočnom bode, ak by na ňu nepôsobil odpor vzduchu? [59 m; 10 m; 0,56]

1.36. Z vodorovného dopravného pása vo výške 2,5 m má uhlie dopadať do vzdialenosti 1,80 m. Akú obehovú rýchlosť musí mať dopravný pás? [2,52 m.s^{-1}]

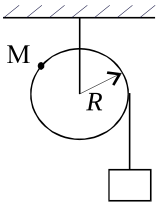
1.37. Pod akým uhlom musí striekať voda z hadice na úrovni zeme, aby dosiahla maximálnu výšku rovnú vzdialenosti dopadu vody na zem? Odpor vzduchu zanedbajte. [75,96°]

1.38. Pod akým uhlom voči horizontu musíme vrhnúť oceľovú guličku, aby pri zadanej rýchlosti dosiahla maximálnu vzdialenosť miesta dopadu? Odpor vzduchu zanedbajte. Riešte najprv obecne, potom vypočítajte vzdialenosť dopadu pre počiatočnú rýchlosť 25 m.s^{-1}. [45°; 63,71 m]

1.39. Dopravníkom, ktorý je naklonený nahor o 20°, vrhá sa sutina začiatočnou rýchlosťou 2,2 m/s do preklápacieho vozíka, ktorý stojí 4 m hlbšie ako horný koniec dopravníka. Vypočítajte vodorovnú vzdialenosť stredu preklápacieho vozíka od horného konca dopravníka, ak sutina dopadá do stredu vozíka.[2,032 m]

1.40.∗ Gulička bola vrhnutá z vrcholu hory, svah ktorej zviera s horizontálnou rovinou uhol 60°, v horizontálnom smere rýchlosťou 10 m.s^{-1}. Vypočítajte vzdialenosť medzi prvým a druhým miestom dopadu guličky na svah, za predpokladu, že ráz medzi guličkou a svahom je absolútne pružný. Odpor vzduchu zanedbajte. [176,56 m]

1.41. Pri meraní rýchlosti náboja sa náboj vystrelí cez dva lepenkové kotúče, ktoré sa otáčajú na spoločnej osi vo vzdialenosti 80 cm s frekvenciou = 1 500 ot/min. Aká bola rýchlosť náboja, keď obidva priestrely na kotúčoch sú navzájom posunuté o 12°? [600 m.s^{-1}]
1.42. Po obvode upevnenej 10-halierovej mince sa kotúľa druhá 10-halierová minca a vykoná tak celú kruhovú dráhu. Koľko otáčok pritom vykoná? [2]
1.43. Pri rýchlosti letu 420 km/h vykoná hlava (náboj) vrtule počas každej otáčky dráhu 3,6 m. Aký počet otáčok má vrtuľa? [32,4 s^{-1}]
1.44. Pri nehode sa remenica motora rozbije. Jeden kúsok z obvodu remenice (d=12 cm) uletí zvisle do výšky 65 cm. Aký počet otáčok mal motor? [$\cong$ 9,47 s^{-1}]



Obr.8

1.45. Na obvode kladky s polomerom R, otáčajúcej sa okolo vodorovnej osi, je položené lanko, na ktorom je zavesené závažie (obr.8). Pohyb závažia je určený rovnicou $s = \frac{1}{2}at^2$. Nájdite časovú závislosť zrýchlenia bodu M, ležiaceho na obvode kladky! [$a_{\mathrm{M}} = \frac{a}{R}\sqrt{R^2 + a^2t^4}$]
1.46. Koleso sa otáča s frekvenciou f = 25 s^{-1}. Brzdením možno dosiahnuť, že jeho otáčanie bude rovnomerne spomalené a koleso sa zastaví po čase t_0 = 30 s od začiatku brzdenia. Vypočítajte uhlové zrýchlenie ε a počet otáčok, ktoré koleso vykoná od začiatku brzdenia až do zastavenia! [ε = - 5,24 s^{-2}; 375]
1.47. ∗Pohyb bodu je daný v polárnych súradniciach rovnicami $r = nt, \varphi = bt$, kde n a b sú konštanty. Nájdite rovnicu dráhy pohybu a vyjadrite závislosť rýchlosti a zrýchlenia od času. [Dráha je Archimedova špirála s rovnicou

$r = \frac{n}{b}\varphi;\ v = n\sqrt{1+b^2t^2};\ a = nb\sqrt{4+b^2t^2}$]

1.48.∗ Hmotný bod sa pohybuje po kružnici o polomere 4 m tak, že jeho normálové zrýchlenie sa mení podľa vzťahu a_n= A+ Bt + Ct^2. Vypočítajte tangenciálne zrýchlenie hmotného bodu a celkové zrýchlenie v čase t_1=2/3 s, ak A = 1 m.s^{-2}, B = 3 m.s^{-3}, C = 2,25 m.s^{-4}. [a_τ=3 m.s^{-2}; a=5 m.s^{-2}]
1.49. Pozorovateľ sedí 2 m od 50 cm širokého okna. Pred oknom vo vzdialenosti 500 m prebieha cesta kolmo na smer pohľadu. Akú rýchlosť má bicyklista, ktorého vidno 15 sekúnd v zornom poli okna? [8,37 m.s^{-1}]
1.50. Akou rýchlosťou opustí delostrelecký náboj 80 cm dlhú hlaveň, keď pomocou vyrytých drážok získa n = 4500 ot/s a keď na dĺžku hlavne pripadajú 4 dĺžky závitu? [900 m.s^{-1}]
1.51. Na voze, ktorý sa pohybuje vodorovne a rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v je rúra. Ako musí byť os rúry naklonená, aby kvapky dažďa ňou preleteli bez dopadu na stenu. Kvapky padajú rovnomerne priamočiaro zvislým smerom rýchlosťou v_{d}.

[$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{v}{v_d}$]

1.52. Lietadlo má v smere zemského poludníka preletieť 1 500 km za dve hodiny. Akou priemernou rýchlosťou a akým smerom musí pilot viesť lietadlo, keď vie, že západný vietor má rýchlosť 100 km/hod. [$v_1 \doteq$ 756,6 km/hod; $\alpha \doteq$ 7,6°]
1.53. Lietadlo letí rýchlosťou 250 km/h po skrutkovitej dráhe s polomerom zakrivenia r = 300m a za 3 minúty dosiahne takto výšku 1 500 m. Treba vypočítať: a) vykonanú

dráhu ; b) čas potrebný na preletenie jednej slučky; c) počet vykonaných slučiek a d) krok skrutkovnice. [12,5 km; 27,34 s; 6,58; 228 m]

1.54. Furman s fúrou naloženého dlhého dreva ide konštantnou rýchlosťou. Pri nezmenenom pohybe voza zostúpi zo svojho sedadla a ide na koniec fúry niečo skontrolovať. Urobí pritom desať krokov. Potom ide naspäť na svoje sedadlo a musí pritom urobiť 15 krokov. Koľko krokov je dlhá jeho fúra? [12 krokov]

1.55. Dva vlaky, z ktorých jeden je dlhý 150 m a druhý 200 m, stretnú sa na voľnej trati. Akú rýchlosť majú oba protiidúce vlaky, keď ich jazda vedľa seba trvá 10 sekúnd a keď prvý vlak ubehne za tento čas dráhu 160 m? [16 $m.s^{-1}$; 19 $m.s^{-1}$]

1.56. V istej laboratórnej sústave sa gulička pohybovala priamočiaro proti stene rýchlosťou 20 $m.s^{-1}$. Stena sa pohybovala oproti guličke rýchlosťou 18 km/hod vzhľadom na laboratórnu sústavu.. Vypočítajte rýchlosť guličky po absolútne pružnom ráze so stenou. Hmotnosť steny uvažujte ako nekonečnú. [30 $m.s^{-1}$]

1.57. V istej inerciálnej sústave súradníc sa v bodoch x_A a $x_B=x_A+l_0$ súčasne stali dve udalosti A a B. Vypočítajte v akej vzájomnej vzdialenosti sa udalosti stali a aký časový interval medzi nimi uplynul z hľadiska pozorovateľa nachádzajúceho sa v rakete, ktorej rýchlosť bola 0,4 c vzhľadom k danej inerciálnej sústave! Vzdialenosť l_0 = 1 km. [1,1 km; -1,45 μs pri $x_B-x_A=l_0$; 1,45μs pri $x_A-x_B = l_0$]

1.58. Sklenená tyč dlhá 0,5 m sa pohybuje rýchlosťou 30 $m.s^{-1}$. Svetlo sa šíri tyčou tak v smere pohybu ako aj oproti pohybu tyče. Vypočítajte rozdiel časov v laboratórnej sústave, za ktoré prejde svetlo tyčou. Rýchlosť svetla v tyči uvažujte rovnú 2/5 c . [$17{,}5 \cdot 10^{-16}$s]

1.59. Vypočítajte dobu života častice vyjadrenú vlastným časom, ak jej rýchlosť sa líši o 0,2% od rýchlosti svetla vo vákuu a vzdialenosť, ktorú častica preletí v laboratórnej sústave do rozpadu je 300 km. (Rýchlosť svetla vo vákuu uvažujte $3 \cdot 10^8$ $m.s^{-1}$). [$\cong$ 63,34 μs]

1.60. Dĺžka kozmickej lode na zemi je 100 m. Akou rýchlosťou letí loď v kozme, ak pozorovateľ na zemi vidí loď dlhú 99 m? [$4{,}2 \cdot 10^7$ $m.s^{-1}$]

1.61. Kozmická loď opúšťa zem rýchlosťou 0,98 c. Ako dlho bude trvať podľa pozorovateľa na Zemi 1 obeh minútovej ručičky na hodinách v kozmickej lodi. [5 hodín]

1.62. Kozmická loď sa vzďaľuje od zeme rýchlosťou 300 $m.s^{-1}$. Koľko rokov prejde, kým rozdiel času hodín na zemi a na kozmickej lodi a podľa pozorovateľa na Zemi bude 1 s. [$6{,}3 \cdot 10^4$ rokov]

1.63. Doba života častice v kľude je 10^{-7} s. Akú vzdialenosť môže preletieť od vzniku, keď pri vzniku mala rýchlosť 0,99 c. [213 m]

2 Dynamika hmotného bodu

Druhý Newtonov zákon nám nehovorí nič o bodoch, v ktorých pôsobia sily, ani o rozmeroch a tvaroch telies. Znamená to, že platí len pre hmotné body, alebo pre telesá, ktoré sa pohybujú priamočiaro. Preto v tejto časti budeme predpokladať, že ak priamočiary pohyb nie je uvedený priamo v zadaní, výsledná sila pôsobiaca na teleso prechádza cez jeho ťažisko.

Pri riešení príkladov z dynamiky hmotného bodu musíme veľkú pozornosť venovať analýze síl. Pohybové rovnice je potrebné vždy zapisovať vo vektorovom tvare. Potom treba zvoliť vhodnú súradnicovú sústavu a do nej prepísať rovnice v skalárnom tvare pomocou projekcií síl a zrýchlení na jednotlivé osi.

Musíme mať na zreteli, že Newtonove zákony platia len v inerciálnych vzťažných sústavách . Znamená to, že zvolené súradnicové sústavy nesmú mať zrýchlenie voči Zemi.

1. Sila je mierou vzájomného pôsobenia dvoch telies na seba. Z druhej strany je sila aj mierou zmeny pohybu. Mierou pohybu je hybnosť, ktorá má označenie $\boldsymbol{p}$. Preto medzi silou a hybnosťou platí vzťah

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}.$$

V prípade klasickej mechaniky $(v \ll c)$ je hmotnosť konštantná, a preto môžeme napísať

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} .$$

2.. Sila je vektor, preto ju môžeme rozložiť na niekoľko jej vektorových zložiek, pre ktoré ale musí platiť

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i ,$$

kde N je počet zložiek, na ktoré silu rozložíme. Toto vektorové pravidlo platí aj opačne, výsledná sila sa rovná vektorovému súčtu všetkých pôsobiacich síl na hmotný bod.

3. Pre impulz sily za časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$, platí vzťah

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 .$$

4. V prípade prítomnosti trenia platia nasledovné vzťahy pre sily trenia

a) Maximálna sila statického trenia

$$\boldsymbol{F}_t = -\mu_s N \frac{\boldsymbol{F}_v}{|\boldsymbol{F}_v|} ,$$

kde μ_s je faktor adhézie,

N - hodnota normálovej sily,

$\boldsymbol{F}_v$ - vonkajšia sila pôsobiaca na teleso.

b) Sila šmykového trenia

$$\boldsymbol{F}_t = -\mu N \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|},$$

kde μ je faktor šmykového trenia,

$\boldsymbol{v}$ - je rýchlosť telesa.

c) Sila viskózneho trenia

$$\boldsymbol{F}_t = -k\,\boldsymbol{v}\;,$$

kde k je súčiniteľ úmernosti.

V prípade, že ide o pohyb telieska sférického tvaru v tekutine, je

$$k = 6\pi\eta r\;,$$

kde η je súčiniteľ dynamickej viskozity kvapaliny a r - polomer guľôčky.

d) Sila odporového trenia

$$\boldsymbol{F}_x = -kv^2 \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|},$$

kde k je súčiniteľ úmernosti.

Obyčajne predpokladáme, že k má nasledovný tvar

$$k = \frac{1}{2}\rho C_x S_p\;,$$

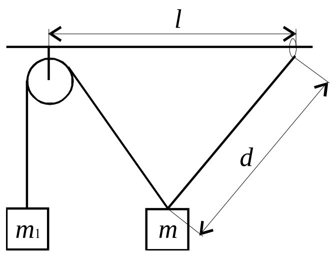
kde ρ je hustota tekutiny,

C_x - súčiniteľ odporu,

S_p - charakteristická plocha napr. priečny prierez telesa.

Riešené príklady

2.1. Závažie o hmotnosti m = 1 kg je zavesené na dvoch nehmotných nitiach. Prvá niť je dlhá 1,5 m a je priviazaná ku krúžku, ktorý môže kĺzať po vodorovnej tyči, viď obrázok 9. Faktor adhézie medzi tyčou a krúžkom je 0,75. Druhá niť je vedená cez nehmotnú kladku, upevnenú vo vzdialenosti 2,5 m od krúžku a na jej konci visí závažie hmotnosti m_1. Vypočítajte minimálnu hmotnosť m_1, pri ktorej začne krúžok kĺzať. Ďalej vypočítajte silu napínajúcu prvú niť a uhol medzi niťami Θ.



Obr. 9

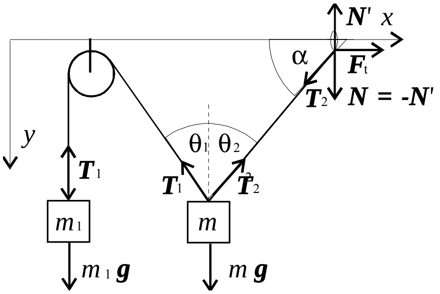
Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m = 1 kg	m_1 = ?
l = 2,5 m	T_2 = ?
d = 1,5 m	Θ = ?
μ_s = 0,75	

Minimálna hmotnosť závažia m_1 pri ktorej začne krúžok kĺzať, môžeme stanoviť z podmienky, že je to maximálna hmotnosť závažia m_1, pri ktorej je ešte sústava v pokoji. Je zrejmé, že potom sila trenia, ktorá bráni krúžku v pohybe, je maximálnou silou trenia, a preto môžeme napísať

$$F_t = \mu_s N \ , \tag{1}$$

kde N je sila, ktorou pôsobí krúžok v kolmom smere na tyč; μ_s je faktor adhézie. Na obrázku 10 sú znázornené sily, ktoré pôsobia na závažia a krúžok. Pretože nite a kladka sa uvažujú ako nehmotné, sily, ktoré napínajú nite T_1 a T_2, sú v celej dĺžke nití konštantné. Z tretieho Newtonovho zákona $N' = -N$ Napíšeme si podmienky rovnováhy pre závažia m, m_1 a krúžok



Obr.10

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 = 0$$
$$m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1 = 0$$
$$\boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{N}' + \boldsymbol{F}_t = 0$$

Aby sme mohli riešiť tieto vektorové rovnice, zavedieme si dvojrozmernú súradnicovú sústavu s osami x a y, pozri obrázok 10. Uhol medzi tyčou a silou T_2 si označíme α.

Potom môžeme prepísať vektorové rovnice vyjadrujúce podmienky rovnováhy pri maximálnej sile trenia do skalárnych rovníc. V smere osi x majú tvar

$$T_1 \sin\theta_1 - T_2 \sin\theta_2 = 0 \ . \tag{2}$$

$$T_2 \cos\alpha - F_t = 0 \ . \tag{3}$$

V smere osi y budú mať tvar

$$T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 - m\, g = 0 \ . \tag{4}$$

$$T_1 - m_1 g = 0 \ . \tag{5}$$

$$T_2 \sin\alpha - N' = 0 \ . \tag{6}$$

Rovnicu (3) môžeme upraviť pomocou rovníc (1) a (6) a dostaneme

$$T_2 \cos\alpha = \mu_s T_2 \sin\alpha \ . \tag{7}$$

Odtiaľ cotg α=μ_s. Keďže $\alpha = 90^\circ - \theta_2$ dostávame $\operatorname{tg}\theta_2 = \mu_s$

Zostali nám tri rovnice (2), (4), (5) a štyri neznáme m_1, T_1, T_2 a θ_1. Štvrtú chýbajúcu rovnicu dostaneme z geometrie zariadenia. Pomocou sínusovej vety vypočítame uhol $\theta = \theta_1 + \theta_2$, a tým aj neznámy uhol θ_1. Platí

$$\frac{l}{\sin\theta} = \frac{d}{\sin(180^\circ - \alpha - \theta)} \tag{8}$$

Riešením (8) dostaneme uhol θ a odtiaľto aj uhly θ_1 a θ_2. Dosadením do rovnice (3) dostaneme pomer síl napínajúcich nite a pomocou rovnice (4) aj ich veľkosť. Dosadením za T_1 do rovnice (2) vypočítame hodnotu hmotnosti závažia m_1.

Riešenie:

Úpravou rovnice (8) dostaneme:

$$\frac{l}{\sin\theta} = \frac{d}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{d}{(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)}$$
$$\frac{l}{d} = \frac{1}{(\sin\alpha \operatorname{cotg}\theta + \cos\alpha)} \tag{9}$$

Zo vzťahu (7) vyplýva, že $sin\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\mu_s^2}} = \frac{4}{5}$ a $\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mu_s^2}{1+\mu_s^2}} = \frac{3}{5}$.

Potom môžeme rovnicu (9) upraviť do tvaru

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}\mathrm{cot}g\ \theta + \frac{3}{5}$$

Rovnica platí len vtedy, ak $cotg\ \theta = 0$, čo znamená, že θ je rovné 90°, a ďalej

$\sin\theta_2 = \frac{3}{5}$ a $\cos\theta_2 = \frac{4}{5}$, a pretože $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, $|\sin\theta_1| = |\cos\theta_2|$ a opačne

$\cos\theta_1 = \sin\theta_2$.

Dosadením do rovnice (4) dostaneme

$$T_1\cos\theta_2 = T_2\sin\theta_2$$

$$T_1\mu_s = T_2$$

Dosadením do rovnice (4) a úpravou dostaneme

$$T_1\sin\theta_2 + T_1\mu_s\cos\theta_2 = mg$$

$$T_1 = \frac{mg}{\sin\theta_2 + \mu_s\cos\theta_2}$$

a nakoniec dosadením do rovnice (5)

$$m_1 = \frac{m}{\sin\theta_2 + \mu_s\cos\theta_2}$$

$$m_1 = \frac{1{,}2\,\mathrm{kg}}{\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\frac{4}{5}} = \frac{1{,}2\,\mathrm{kg}}{\frac{6}{5}} = 1\ \mathrm{kg}$$

2.2. Lokomotíva ťahá súpravu 20 vozňov, každý hmotnosti $m = 2\cdot 10^4\ \mathrm{kg}$, silou $F = 10^5$ N. Vypočítajte: a) Silu, ktorou pôsobí 6. vozeň na 7. vozeň; b) Výslednú silu pôsobiacu na 8. vozeň. Trenie zanedbajte!

Úvaha:

Známe veličiny	Hľadané veličiny
Počet vozňov $n = 20$	$F_{6,7} = ?$
$m = 2{,}0\cdot 10^4$ kg	$F_8 = ?$
$F = 10^5$ N	

Budeme predpokladať, že vagóny sú pevne spojené, a teda celá súprava sa pohybuje s rovnakým zrýchlením. Pretože na opísanie pohybu vystačíme s jednou súradnicou rovnobežnou so silou $\boldsymbol{F}$ môžeme druhý Newtonov zákon napísať v skalárnom tvare

$$M\,a = F\ , \tag{1}$$

kde M=nm.

Každý vozeň sa pohybuje s tým istým zrýchlením a, a preto pre ľubovoľný l-tý vozeň musí platiť

$$m\,a = F_l\ . \tag{2}$$

Tak isto k-tý vozeň musí pôsobiť na zostávajúce vozne počtom $(n-k)$ takou silou, aby im udelila zrýchlenie a, a to znamená, že

$$(n-k)m\,a = F_{k,k+1}\,. \tag{3}$$

Riešenie:

Dosadením zrýchlenia a z rovnice (1) do rovnice (3) dostaneme

$$\frac{(n-k)F}{n} = F_{k,k+1}$$

a po dosadení

$$F_{6,7} = \frac{20-6}{20}10^5\,\mathrm{N} = 7\cdot 10^4\,\mathrm{N}\,.$$

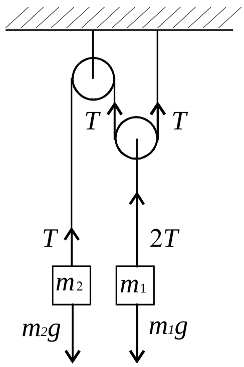
Dosadením zrýchlenia z rovnice (1) do rovnice (2) dostaneme

$$F_l = \frac{1}{n}F = \frac{10^5\,\mathrm{N}}{20} = 5\cdot 10^3\,\mathrm{N}.$$

2.3. Na obrázku 11 je znázornená sústava kladiek. Vypočítajte zrýchlenie závaží $m_1 = m_2 = 2$ kg a silu, ktorou je napínaná niť. Hmotnosť kladiek a silu trenia zanedbajte.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m_1 = 2$ kg	$a_1 = ?$
$m_2 = 2$ kg	$a_2 = ?$
	$T = ?$



Obr.11

Urobíme si analýzu síl pôsobiacich na jednotlivé telesá sústavy nakreslenej na obrázku. Pretože závažia sa môžu pohybovať len vo smere jednej osi, môžeme všetky rovnice písať skalárne. Na závažie m_2 pôsobí tiažová sila m_2g smerom dole. Smerom hore na toto závažie pôsobí sila, ktorou je napínaná niť, označíme si ju T. Táto sila v dôsledku toho, že kladky sú nehmotné, pôsobí rovnako v každom bode nite. Sila napínajúca niť, na ktorej je zavesené závažie m_1 rovná $2T$. Podobne aj niť, na ktorej je upevnená pevná kladka, bude napísaná silou $T_1 = 2T$. Na závažie m_1 bude pôsobiť sila tiaže m_1g smerom dole a sila T_1, ktorou je napínaná niť. Preto môžeme napísať

$$m_1a_1 = m_1g - 2T \tag{1}$$

$$m_2a_2 = m_2g - T\,, \tag{2}$$

kde sme za kladný smer vzali smer súhlasný s tiažovou silou. Máme iba dve rovnice a tri neznáme. Tretiu rovnicu dostaneme z podmienky, že niť je nehmotná.

Nech závažie m_2 sa posunie smerom dole o vzdialenosť x_2. Potom ale závažie m_1 sa zdvihne smerom hore o vzdialenosť $x_1 = x_2/2$. Derivovaním tejto rovnice dvakrát podľa času dostaneme vzťah medzi zrýchleniami závaží

$$-2a_1 = a_2\,. \tag{3}$$

Riešením troch rovníc o troch neznámych dostaneme hľadané veličiny zrýchlenia a silu ktorou je napínaná niť.

Riešenie:

Dosadíme za a_2 do rovnice (2) a dostaneme:

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2T$$
$$-2m_2 a_1 = m_2 g - T$$

Prenásobíme prvú rovnicu číslom -2 a po sčítaní rovníc a úprave dostaneme

$$a_1 = \frac{m_1 - 2m_2}{4m_2 + m_1} g$$

a z rovnice (3)

$$a_2 = \frac{4m_2 - 2m_1}{4m_2 + m_1} g$$

Dosadením a_2 do rovnice (2) a úpravou dostaneme

$$T = \frac{3m_1 m_2}{4m_2 + m_1} g$$

Po dosadení zadaných hodnôt veličín m_1 a m_2 budeme mať

$$a_1 = \frac{2\,\mathrm{kg} - 2\cdot 2\,\mathrm{kg}}{4\cdot 2\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}} = -1{,}962\,\mathrm{m.s^{-2}}$$

$$a_2 = \frac{4\cdot 2\,\mathrm{kg} - 2\cdot 2\,\mathrm{kg}}{4\cdot 2\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}} = 3{,}924\,\mathrm{m.s^{-2}}$$

$$T = \frac{3\cdot 2\,\mathrm{kg}\cdot 2\,\mathrm{kg}}{4\cdot 2\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}}\cdot 9{,}81\, m.s^{-1} = 11{,}772\,\mathrm{N}$$

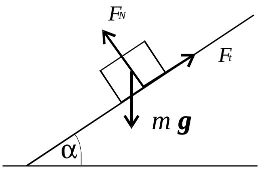
2.4. Teleso hmotnosti m sa šmýka dolu po naklonenej rovine s uhlom sklonu 45^0. Keď sa posunulo po dráhe 1 m, jeho rýchlosť sa zväčšila zo začiatočnej hodnoty 1,8 km.h^{-1} na hodnotu 12,6 km.h^{-1}. Vypočítajte faktor šmykového trenia.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$v_1 = 0{,}5$ m.s^{-1}	$\mu = ?$
$v_2 = 3{,}5$ m.s^{-1}	
$s = 1$ m	
$\alpha = 45°$	

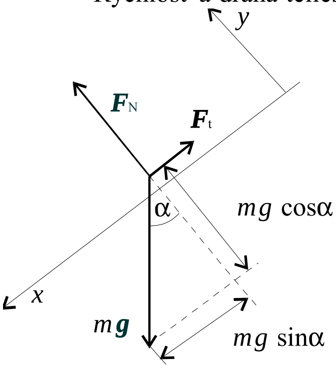
Urobíme si analýzu síl pôsobiacich na teliesko, pozri obr.12. Vidíme, že na teliesko pôsobí tiažová sila a sila šmykového trenia. Sila šmykového trenia je úmerná sile vzájomného pôsobenia telieska a roviny. Súčiniteľ úmernosti bude hľadaný faktor šmykového trenia μ. Z obrázku 12 je zrejmé, že pohyb telieska môžeme skúmať ako pohyb v rovine. Zvolíme si vhodnú súradnicovú sústavu a to tak, že os x bude paralelná naklonenej rovine a os y bude kolmá na túto rovinu, pozri obr.13. Tiažovú silu si rozložíme na zložky v smere x a y. Vidíme, že teliesko pôsobí na rovinu silou $mg\cos\alpha$ a rovina bude pôsobiť na teliesko silou F_N rovnakou čo do veľkosti, ale opačného smeru.. Potom sila šmykového trenia bude rovná

$$F_t = \mu m g \cos\alpha \qquad (1)$$



Obr.12

Rýchlosť a dráha telieska budú závisieť od sily šmykového trenia. Preto, aby sme zistili faktor šmykového trenia, budeme hľadať vzťah medzi uvedenými veličinami. Napíšeme si pohybovú rovnicu telieska v smere osi x, pričom berieme do úvahy, že sila trenia pôsobí vždy proti smeru pohybu



Obr.13

$$ma = mg\sin\alpha - F_t \qquad (2)$$

a po dosadení rovnice (1) do rovnice (2) dostaneme

$$ma = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \qquad (3)$$

Úpravou rovnice (3) dostaneme výraz pre faktor šmykového trenia ako funkciu zrýchlenia a uhlu naklonenia.

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha} \qquad (4)$$

Z rovnice (3) vyplýva, že zrýchlenie a je konštantné, a preto budú platiť nasledovné vzťahy pre rýchlosť a dráhu.

$$v_2 = v_1 + at\,, \qquad s = v_1 t + \frac{at^2}{2}\,, \qquad (5)$$

kde dráhu a čas meriame od bodu, v ktorom malo teliesko rýchlosť v_1. Pomocou rovníc (5) vyjadríme zrýchlenie ako funkciu rýchlosti a dráhy a dosadením výrazu pre zrýchlenie do rovnice (4) vypočítame faktor šmykového trenia.

Riešenie:

Z rovníc (5) vylúčime čas t

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a}$$

$$s = \frac{v_1(v_2 - v_1)}{a} + \frac{(v_2 - v_1)^2}{2a} = \frac{1}{a}\left(v_1 v_2 - v_1^2 + \frac{v_1^2 - 2v_1v_2 + v_2^2}{2}\right)$$

$$s = \frac{1}{2a}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

a odtiaľ

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

Dosadením do rovnice (4) dostaneme

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2sg\cos\alpha}$$

$$\mu = 1 - \frac{\left((3{,}5)^2 - (0{,}5)^2\right)\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}}{2\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s}^{-2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}135$$

2.5. Na hladine transformátorového oleja uvoľníme oceľovú guličku o priemere 3 mm. Po určitom čase sa rýchlosť klesajúcej guličky ustáli. Aká bude táto rýchlosť?

Predpokladáme, že odpor prostredia je daný Stokesovym vzťahom. V akej hĺbke pod hladinou môžeme pohyb považovať za rovnomerný s presnosťou 1% ?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
r = 1,5 mm	v_u = ?
ρ_g = 8010 kg.m^{-3}	s_1 = ?
ρ_k = 866 kg.m^{-3}	
η = 0.032 kg.m^{-1}.s^{-1}	
v_0 =0	
v_1 =0.99 v_u	

Pri pohybe v kvapaline, budú na guličku pôsobiť nasledovné sily: sila tiaže, vztlaková sila a sila viskózneho trenia. Pretože pohyb je priamočiary, môžeme sily aj rýchlosti vyjadrovať v skalárnom tvare. Nech kladný smer je smer tiažovej sily. Vztlakovú silu ako aj silu viskózneho trenia budeme brať so záporným znamienkom, pretože pôsobia v opačnom smere ako tiažová sila. Pohybovú rovnicu si zapíšeme v nasledovnom tvare:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - F_v - F_t\ . \tag{1}$$

Hmotnosť m si vyjadríme pomocou objemu a hustoty. Vztlaková sila bude rovná tiažovej sile kvapaliny guličkou vytlačenej vzatej so záporným znamienkom. Hmotnosť kvapaliny si taktiež vyjadríme pomocou hustoty kvapaliny a jej objemu.
Pre sférické telieska pri viskóznom pohybe v kvapalinách môžeme použiť Stokesov vzorec

$$F_t = 6\pi\eta r v$$

Takto si upravíme rovnicu (1) do tvaru

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_g\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho_g - \rho_k\right)g - 6\pi\eta r v\ . \tag{2}$$

Vidíme, že sme dostali diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením dostaneme výraz pre rýchlosť ako funkciu času. Pretože sila viskózneho trenia rastie s rýchlosťou, v určitý okamih pravá strana rovnice (2) bude rovná nule a pohyb ďalej bude prebiehať s konštantnou rýchlosťou v_u, ktorú zistíme z vypočítaného výrazu pre rýchlosť pohybu guličky.

Dráhu guľôčky s_1 vypočítame integrovaním výrazu pre rýchlosť guľôčky podľa času

$$s = \int_0^{t_1} v\ \mathrm{d}t\ ,$$

kde čas t_1 vypočítame z podmienky $v_1 = 0{,}99\ v_u$

Riešenie:

Upravíme si rovnicu (2) nasledovne

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_g}\right)g - \frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\rho_g}v \tag{3}$$

Pre zjednodušenie výpočtu si označíme výrazy $\left(1-\frac{\rho_k}{\rho_g}\right)g$ ako k_0 a $\frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\rho_g}$ ako k_1.

Prepíšeme si rovnicu (3) do tvaru vhodného pre integrovanie $\frac{\mathrm{d}v}{\left(1-\frac{k_1}{k_0}v\right)} = k_0\, dt$

a integrujeme

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\left(1-\frac{k_1}{k_0}v\right)} = k_0 \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$-\frac{k_0}{k_1}\ln\left(1-\frac{k_1}{k_0}v\right) = k_0\, t\ .$$

Tento výraz upravíme nasledovne:

$$1-\frac{k_1}{k_0}v = e^{-k_1 t}$$

a odtiaľ

$$v = \frac{k_0}{k_1}\left(1-e^{k_1 t}\right)\ . \qquad (4)$$

Vidíme, že rýchlosť sa ustáli v čase $t=\infty$, a bude rovná

$$v_u = \frac{k_0}{k_1}$$

a po dosadení

$$v_u = \frac{2}{9}\frac{\rho_g-\rho_k}{\eta}r^2 g \qquad (5)$$

$$v_u = \frac{2}{9}\left(\frac{8\cdot 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}} - 866\ \mathrm{kg.m^{-3}}}{0{,}032\,\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}}\right)\cdot(1{,}5)^2\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}} = 1{,}09\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Integrovaním rovnice (4) podľa času v intervale $t=0$ a $t=t_1$ dostaneme

$$s_1 = v_u\int_0^{t_1}\left(1-e^{-k_1 t}\right)\mathrm{d}t = v_u\left[t+\frac{1}{k_1}e^{-k_1 t}\right]_0^{t_1}$$

$$s_1 = v_u\left(t_1+\frac{1}{k_1}e^{-k_1 t_1}-\frac{1}{k_1}\right). \qquad (6)$$

Vypočítame si čas t_1, pre ktorý platí podľa zadania

$$v_1 = 0{,}99 v_u$$

$$0{,}99 v_u = v_u\left(1-e^{-k_1 t_1}\right).$$

Úpravou dostaneme $t_1 = \frac{\ln 100}{k_1}$.

Dosadením času t_1 do rovnice (6) dostaneme

$$s_1 = \frac{k_0}{k_1}\left(\frac{\ln 100}{k_1} + \frac{1}{k_1}e^{-\ln 100} - \frac{1}{k_1}\right)$$

$$s_1 = \frac{k_0}{k_1^2}\left(\ln 100 + e^{-\ln 100} - 1\right)$$

$$s_1 = \frac{4}{81}\left(\frac{\rho_g - \rho_k}{\eta^2}\,\rho_g\, r^4\, g\right)\left(\ln 100 + e^{-\ln 100} - 1\right)$$

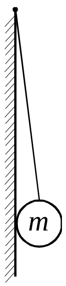
$$s_1 = \frac{4}{81}\,\frac{\left(8\cdot 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}} - 866\,\mathrm{kg.m^{-3}}\right)}{(0{,}032)^2\,\mathrm{kg^2.m^{-2}.s^{-2}}}\,8\cdot 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}(1{,}5)^4\cdot 10^{-12}\mathrm{m^4}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\ln 100 + e^{-\ln 100} - 1\right) = 0{,}477\,\mathrm{m}$$

Neriešené príklady

2.6. Aký je uhol medzi dvomi rovnakými silami, ak výsledná sila má veľkosť rovnú polovičnej veľkosti jednej sily? [151°]

2.7. Medzi dve skoby upevnené v rovnakej výške proti sebe v rovnobežných stenách vzdialených 3,5 m od seba je priviazané tenké vlákno. Po zavesení záťaže hmotnosti 5 kg do stredu vlákna poklesne stred vlákna o 5 cm pod úroveň spojnice bodov upevnenia. Aká sila kolmá na steny sa snaží skoby vytrhnúť? [860 N]



Obr.14

2.8. Guľa hmotnosťou 1 kg visí na niti dlhej 0,8 m. Niť je pripevnená k hladkej stene (pozri obrázok 13). Vypočítajte silu, ktorou guľa pôsobí na stenu, ak polomer gule je 22,5 cm! [2,2 N]

2.9.* Tri rovnaké gule ležia na dne valcovej nádoby o priemere 0,5 m tak že sa dotýkajú medzi sebou a steny. Vypočítajte silu, ktorou pôsobí jedna guľa na stenu nádoby, ak na ne položíme takú istú guľu! Hmotnosť každej gule je 10 kg. [23 N]

2.10. Cestná zákruta s polomerom 200 m má uhol klopenia 0,2 rad. Aká je optimálna rýchlosť jazdy zákrutou, pri ktorej je nulové šmykové trenie medzi kolesami s vozovkou? [72 km/hod.]

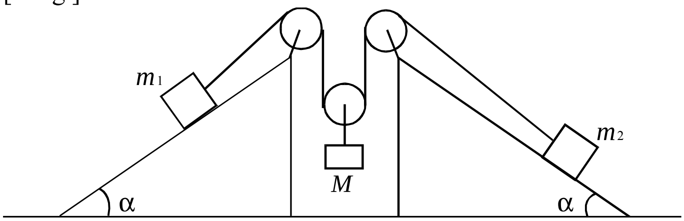
2.11. Po naklonenej rovine výšky *h* sa šmýka bez trenia teleso. Dokážte, že veľkosť rýchlosti telesa na konci roviny sa rovná veľkosti rýchlosti voľného pádu telesa z výšky *h*!

2.12. Nedeformovaná pružina s tuhosťou 16 $\mathrm{kN.m^{-1}}$ má dĺžku 0,4 m. Pružina je nasunutá na tyč a jeden jej koniec je pevne uchytený. Na druhom konci pružiny je upevnené závažie hmotnosti 2 kg, ktoré môže bez trenia kĺzať pozdĺž tyče. Vypočítajte dĺžku pružiny, ak sústava sa otáča s uhlovou rýchlosťou 40 $\mathrm{rad.s^{-1}}$ okolo osi, ktorá prechádza cez bod uchytenia pružiny! [0,5 m]

2.13. Na vodorovnej doske je položená a upevnená dokonale hladká guľa o polomere 15 cm. V najvyššom bode je položené teliesko, ktoré uvedieme nepatrným pohybom do kĺzavého pohybu po povrchu gule. V akej vzdialenosti od bodu dotyku gule s podložkou teliesko na podložku dopadne? [22 cm]

2.14. Pri rozbehu pôsobila na lokomotívu hmotnosti 40 t sila, ktorá vzrastala od nulovej hodnoty v počiatočnom stave pokoja priamo úmerne s časom. Rýchlosť pohybu 90 km/hod. dosiahla lokomotíva za čas 40s. Akú maximálnu hodnotu dosiahla počas pohybu trakčná sila? [50 kN]

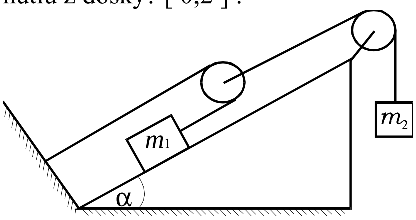
2.15. Na hmotné teleso pôsobí stále v tom istom smere sila, ktorej hodnota závisí od času podľa vzťahu $F = F_0 - kt$, kde $F_0 = 36$ N a $k = 6$ N.s^{-1}. Na začiatku bolo teleso v pokoji. Počas prvých 10 sekúnd urazilo dráhu 100 m. Vypočítajte jeho hmotnosť!
[8 kg].



Obr.15

2.16.* Na obrázku 15 je znázornená sústava závaží a kladiek. Kliny sú nepohyblivé. Hmotnosť závaží je m_1 = 3 kg a m_2 = 2 kg. Hmotnosť kladiek môžeme zanedbať. Uhol α = 30°. Vypočítajte zrýchlenie závažia hmotnosti M = 5 kg v prípade, že:
a) sily trenia môžeme zanedbať;
b) faktor šmykového trenia medzi závažiami a klinmi je rovný 0,1!
[a) 2,60 m.s^{-2} ; b) 2,19 m.s^{-2}]

2.17. Kruhová doska sa otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou $60\pi\,\mathrm{min}^{-1}$. Vo vzdialenosti 20 cm od osi otáčania sa nachádza kocka malých rozmerov. Aký musí byť koeficient šmykového trenia medzi doskou a kockou, aby nedošlo k jej zošmyknutiu z dosky? [0,2] .



Obr. 16

2.18*. V zariadení zobrazenom na obrázku 16 sa závažie hmotnosti m_1 šmýka po naklonenej rovine s uhlom sklonu 30°. Hmotnosť závažia m_1= 400g a hmotnosť závažia m_2 = 0,2kg. Vypočítajte zrýchlenie závažia hmotnosti m_2 a sily, ktorými sú namáhané nite!
[1,09 m.s^{-2}; 2,18 N; 1,09 N]

2.19. Po dvoch naklonených rovinách zvierajúcich s horizontálnou rovinou uhly 30°, 60° sa pohybujú dve telesá o hmotnostiach 5 kg a 2 kg spojené pevným vláknom vedeným cez kladku. Faktor šmykového trenia medzi telesami a rovinami je $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}1$. Vypočítajte zrýchlenie telies a ťahovú silu vlákna! [0,3 m.s^{-2} ; 18,6 N]

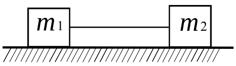
2.20. Teleso sa šmýka dolu po naklonenej rovine zvierajúcej s vodorovnou rovinou uhol 45° za účinku síl trenia so zrýchlením a = 2,4 m.s^{-2}. Pod akým uhlom β musí byť naklonená rovina, aby sa teleso po nej šmýkalo po malom postrčení konštantnou rýchlosťou? [β=33,2°]

2.21. Na naklonenej rovine rovnomerne priamočiaro sa šmýka teleso rýchlosťou v. Vypočítajte faktor šmykového trenia medzi telesom a povrchom roviny, keď uhol sklonu roviny vzhľadom na vodorovný smer je 30°. [μ = 0,6]

2.22. Za lokomotívou nákladného vlaku je pripojených 20 vagónov. Priemerná hmotnosť každého je 50 t. Akú hmotnosť musí mať lokomotíva, aby bol vlak schopný zrýchliť z rýchlosti 20 km/hod. na rýchlosť 60 km/hod. za čas 2 minúty? Faktor adhézie medzi kolesami a koľajnicou je 0,2. Predpokladáme rovnomerné rozloženie tiaže lokomotívy na kolesá (všetky poháňané). Šmykové trenie a odpor prostredia proti pohybu sústavy neuvažujeme. [49 t]

2.23. Na naklonenej rovine sa nachádza závažie hmotnosti m_1=5 kg, ktoré je spojené nehmotnou niťou pomocou nehmotnej kladky s druhým závažím m_2=2 kg, ktoré voľne visí. Faktor šmykového trenia medzi prvým závažím a naklonenou rovinou je μ=0,1; uhol sklonu roviny voči horizontu α=37°. Vypočítajte zrýchlenie závaží. Pri akých hodnotách m_2 bude sústava v rovnováhe? Faktor adhézie uvažujte rovný μ_s=0,1. [0,84m.s^{-2}, 2,6kg < m_2 < 3,4 kg]

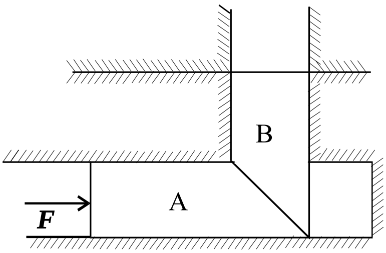
2.24.* Na dlážke leží debna hmotnosti 100 kg. Akou minimálnou silou je možné pohnúť touto debnou, ak súčiniteľ statického trenia je rovný 0,2? [≈192,3 N]



Obr. 17

2.25. Dve telesá ležiace na stole sú spojené nehmotnou niťou (pozri obr.17). Hmotnosť telies je m_1=0,5kg a m_2=0,2kg. Sila 2 N pôsobí raz na teleso s hmotnosti m_1 (ťah), druhýkrát na teleso hmotnosti m_2. Vypočítajte silu napínania nite v prvom a druhom prípade, ak uvažujeme silu trenia aj medzi telesami a stolom. Koeficient šmykového trenia 0,2. [≈ 0,57 N; 1,43 N]

2.26. Trezor hmotnosti 10 t má byť naložený na korbu automobilu vo výške 1,5 m nad zemou pomocou dosiek dlhých 6 m. Vypočítajte potrebnú minimálnu silu, ak k faktor šmykového trenia je 0,35! [≈ 6 ·10^4 N]



Obr. 18

2.27. Na obr. 18 je znázornená zámka. Dolná časť sa môže pohybovať vo vodorovnom žľabe. Steny žľabu sú absolútne hladké, ale roviny hranolov A a B, ktoré sú sklonené voči vodorovnej rovine o 45°, sú drsné. Faktor adhézie medzi nimi je 0,2. Aká musí byť minimálna sila, ktorou treba pôsobiť na časť zámky A, aby sme obe časti zámky dali do pohybu? Hmotnosť hranola B je rovná 100 g. [1,47 N]

2.28. Guľôčka stúpa v kvapaline smerom kolmo k povrchu s konštantnou rýchlosťou. Hustota materiálu guličky je rovná štvrtine hustoty kvapaliny. Koľko krát je sila viskózneho trenia, ktorá pôsobí na guličku väčšia, ako sila tiaže guličky? [3 krát]

2.29. Oceľová guľôčka o priemere 1 mm klesá vo veľkej nádobe naplnenej ricínovým olejom s konštantnou rýchlosťou 0,185 cm.s^{-1}. Vypočítajte hodnotu dynamickej viskozity oleja! [2 kg.m^{-1}.s^{-1}]

2.30. Akú najvyššiu rýchlosť môže dosiahnuť kvapka vody o priemere 0,3 mm, ak dynamická viskozita vzduchu je rovná 1,2 10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}? [4,1 m.s^{-1}]

2.31. Zmes olovených guličiek o priemere 3mm a 1 mm uvolnili na povrchu glycerínu hlbokého 1 m Vypočítajte rozdiel časov dopadu guľôčok rôzneho rozmeru! Dynamická viskozita glycerínu je 1,47 kg.m^{-1}.s^{-1}. [4 minúty]

2.32. Sklená guľôčka (ρ=2530 kg.m^{-3}) s priemerom 4 mm padá z výšky 0,05m do glycerínu (ρ=1230 kg.m^{-3}). Vypočítajte počiatočné zrýchlenie a rýchlosť po ustálení pohybu v glyceríne. Tiažové zrýchlenie uvažujte rovné 10 m.s^{-2}.

[-648,5 m.s^{-2}; 7,86$\cdot$10^{-3} m.s^{-1}]

2.33. Teliesko hmotnosti 5 g vnikne rýchlosťou 2 m.s^{-1} do viskózneho prostredia a pohybuje sa v ňom vo vodorovnom smere pod účinkom brzdiacej sily priamoúmernej rýchlosti s konštantou úmernosti $1\cdot10^{-2}$ N.s.m^{-1}. Nakreslite graf závislosti pôsobiacej sily od času a zistite, na akej dráhe teliesko zastane. [1 m]

2.34. Vypočítajte impulz sily, ktorý dostane stena, ak na ňu narazí gulička hmotnosti 7 g pod uhlom 30^0 vzhľadom na stenu rýchlosťou 400 $m.s^{-1}$. [2,8 $kg.m.s^{-1}$]
2.35. Pohybujúci sa vagón napĺňajú uhlím, ktoré padá zo zásobníka zvisle nadol. Akou silou treba pôsobiť na vagón, aby sa pohyboval rovnomerne $v = 5 m.s^{-1}$, pri rýchlosti naplnenia 10 ton za 2 s. Trenie zanedbajte. [25 kN]
2.36. Auto sa pohybuje v daždi, v ktorom kvapky majú hmotnosť 0,1 gramu a padajú zvisle rýchlosťou 12 $m.s^{-1}$. Za jednu sekundu dopadne na 1 m^2 $3 \cdot 10^4$ kvapiek. Vypočítajte doplňujúcu silu potrebnú pre výpočet trenia medzi kolesami a cestou ak budeme predpokladať, že povrch auta zasahovaný v kolmom smere kvapkami je 8 m^2.
[288 N]
2.37. Spolucestujúci v automobile vysunul ruku z okna dlaňou proti smeru pohybu automobilu. Potom vodič zvýšil rýchlosť automobilu. Koľkokrát sa táto zvýšila, keď spolucestujúci odhadol vzrast odporovej sily na dvojnásobok? [$\sqrt{2}$]
2.38. Ľadoborec naráža na ľadovú kryhu hmotnosti 200 t a odráža ju od seba rýchlosťou 4$m.s^{-1}$. Vypočítajte maximálnu silu, ktorou ľadoborec pôsobil na kryhu, za predpokladu, že tlak ľadoborca na kryhu narastal rovnomerne počas zbližovania sa s kryhou a tak isto rovnomerne klesal pri ich rozchádzaní. Doba pôsobenia ľadoborca na kryhu bola 8s. Hmotnosť ľadoborca uvažujte oveľa vyššiu ako hmotnosť ľadovej kryhy. [200 kN]
2.39.* Basketbalista vrhá loptu o hmotnosti 400 g pod uhlom 45° voči horizontu tak, že pôsobí na loptu počas 0,2 s silou, ktorá sa mení z maximálnej po nulovú podľa vzťahu $F = F_0(1-kt^2)$, kde F_0 = 30,3 N. Vypočítajte akú maximálnu výšku vzhľadom na bod vrhnutia dosiahne lopta! Odpor vzduchu zanedbajte. [2,6 m]

3 Zákony zachovania

V mnohých prípadoch sú možné dve rovnocenné metódy riešenia fyzikálnych problémov a to použitie Newtonových zákonov, alebo zákonov zachovania. Ale v niektorých prípadoch, keď nepoznáme charakteristiku síl vzájomného pôsobenia, len zákony zachovania nám umožňujú na základe známych parametrov (súradníc, rýchlostí) sústavy v jednom stave vypočítať jej parametre v inom stave.

Voľba metódy a spôsobu riešenia každej konkrétnej úlohy je možná len po detailnom kvalitatívnom rozbore úlohy. Vždy treba začať s analýzou síl, ktoré pôsobia na každé teleso. Toto nám pomôže riešiť, či je účelné skúmať každé teleso zvlášť, alebo celú sústavu a aké zákony zachovania je možné použiť.

Je treba si uvedomiť, že rýchlosti telies musíme udávať vzhľadom na jednu a tú istú inerciálnu sústavu, čo platí aj pre potenciálnu energiu, pričom je nutná dohoda odkiaľ ju začneme odpočítávať, t.j. kde si zvolíme $E_P = 0$.

1. Pre izolovanú sústavu platí zákon zachovania hybnosti

$$\sum \boldsymbol{p}_i = konšt.$$

2. V prípade klasickej mechaniky hmotnosť nezávisí od rýchlosti a je konštantná. Preto si môžeme zaviesť pojem hmotného stredu telesa alebo sústavy hmotných bodov. Jeho poloha je daná nasledovne.

Pre diskrétne rozdelenie hmotnosti

$$\boldsymbol{r}_t = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i},$$

a pre spojité rozdelenie hmotnosti

$$\boldsymbol{r}_t = \frac{\int_V \rho \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}V}{\int_V \rho\, \mathrm{d}V},$$

kde ρ je hustota telesa, $\boldsymbol{r}$ - polohový vektor a V objem telesa.

3. Práca sily $\boldsymbol{F}$ na dráhe s je rovná

$$A = \int_s (\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}),$$

kde $|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|$ je prírastok dráhy a $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ je vektor posunutia pôsobiska sily.

V prípade konštantnej sily bude práca rovná

$$A = Fs \cos\alpha,$$

kde α je uhol medzi silou a smerom pohybu.

4. Výkon je definovaný ako prvá derivácia práce podľa času

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

a pre konštantnú silu ho môžeme vyjadriť vzorcom

$$P = F\, v \cos\alpha .$$

5. Kinetická energia pohybujúceho sa telesa v klasickej mechanike sa rovná

$$E_K = \frac{mv^2}{2}.$$

6. Potenciálna energia telesa, ktoré bolo zdvihnuté o výšku h, sa rovná

$$E_p = mgh.$$

7. Zákon zachovania mechanickej energie v klasickej mechanike môžeme vyjadriť nasledovne

$$E = E_K + E_p = konšt.$$

8. Relativistickej mechanike pre zákon zachovania energie platí vzťah

$$\sum m_i c^2 + \sum E_{ip} = konšt.,$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu.

9. Kinetická energia telesa v relativistickej mechanike sa dá vyjadriť vzorcom

$$E_k = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

kde m_0 je hmotnosť telesa v stave pokoja.

Riešené príklady

3.1. Guľôčka hmotnosti m_1 sa pohybovala rýchlosťou $\boldsymbol{v}_1$, a pružne narazila do guľôčky hmotnosti m_2, ktorá bola v pokoji. Po zrážke mala guľôčka m_1 rýchlosť $\boldsymbol{v}_1'$ a guľôčka m_2 rýchlosť $\boldsymbol{v}_2'$.

a) V prípade, že $m_1 = m_2$, určte uhol, ktorý zvierajú vektorové priamky $\boldsymbol{v}_1'$ a $\boldsymbol{v}_2'$.

b) Guľôčka m_1 sa po zrážke pohybuje pod uhlom 30° vzhľadom k vektorovej priamke $\boldsymbol{v}_1$ rýchlosťou $0{,}5v_1$. Určite smer a veľkosť rýchlosti $\boldsymbol{v}_2'$ pre prípad, keď $m_1 = 2$g a $m_2 = 1$g a rýchlosť v_1 je 200 m.s^{-1}!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m_1 = 2$ g	$v_2' = ?$
$m_2 = 1$ g	$\beta = ?$
$v_1 = 200$ m.s^{-1}	
$v_1' = 100$ m.s^{-1}	
$\alpha = 30°$	

a) Zo zadania príkladu vyplýva $m_1 = m_2$ a $v_2 = 0$.

Potom platí:

$$m_1\boldsymbol{v}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' \qquad (1)$$

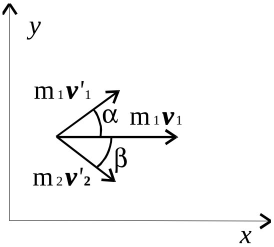
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \qquad (2)$$

V prípade, keď $m_1 = m_2$, zo vzťahov (1) a (2) vyplýva, že

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2' \quad \text{a} \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

a to znamená, že vektory $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$, tvoria pravouhlý trojuholník, ktorého preponou je vektor $\boldsymbol{v}_1$. Vzťahy (1) a (2) sú splnené aj vtedy, keď dôjde k tzv. stredovej zrážke a

$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{0}$. Potom $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_1$. Po zrážke prvá guľôčka zostane v pokoji a druhá sa bude pohybovať rýchlosťou $\boldsymbol{v}_1$.



Obr. 19

b) Zvolíme si os x vo smere rýchlosti $\boldsymbol{v}_1$ a os y nech je kolmá na os x, pozri obr.19. Nech α je kladný uhol. Potom uhol β musí byť záporný, lebo počiatočná hybnosť v smere osi y bola rovná nule.

Z obr.19 vyplýva nasledovná vektorová rovnica

$$m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' = m_1\boldsymbol{v}_1 .$$

Pre zložky tejto rovnice v smere osí x a y platí

$$m_1 v_1' \cos\alpha + m_2 v_2' \cos\beta = m_1 v_1 \qquad (3)$$

$$m_1 v_1' \sin\alpha - m_2 v_2' \sin\beta = 0 \qquad (4)$$

Riešením rovníc (3) a (4) dostaneme neznáme veličiny v_2' a uhol β.

Riešenie:

Úpravou rovníc (3) a (4) dostaneme

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{m_1 v_1' \sin\alpha}{m_1\left(v_1 - v_1'\cos\alpha\right)}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_1'\sin\alpha}{v_1 - v_1'\cos\alpha} = \frac{0{,}5\cdot 200\,\mathrm{m.s^{-1}}\cdot 0{,}5}{200\,\mathrm{m.s^{-1}} - 86{,}6\,\mathrm{m.s^{-1}}} = 0{,}441$$

$$\beta = 23{,}8^\circ$$

Úpravou rovnice (4) dostaneme

$$v_2' = \frac{m_1 \sin\alpha}{m_2 \sin\beta} v_1'$$

$$v_2' = \frac{2\cdot 10^{-3}\mathrm{kg}\cdot 0{,}5}{1\cdot 10^{-3}\mathrm{kg}\cdot 0{,}4} 100\,\mathrm{m.s^{-1}} = 250\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

3.2. Baranidlo dopadá z výšky 8 m na stĺp vysoký 4 m a zatláča ho do zeme. Hmotnosť baranidla je 400 kg, hmotnosť stĺpu 100 kg. Sila odporu zeminy závisí od hĺbky zatlačenia do zeme podľa vzťahu $F = F_0\left(1 + kx\right)$, kde $F_0 = 70$ kN a k =0,1m^{-1}. Vypočítajte, ako hlboko zatlačí baranidlo stĺp do zeme po prvom údere. Odpor vzduchu zanedbajte.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m_b=400 kg	s = ?
m_s=100 kg	
h = 4 m	
F_0 = 70 kN	
k = 0,1 m^{-1}	

Na začiatku sa baranidlo nachádza vo výške 8 m nad zemou. Samotný stĺp je vysoký 4 m, to znamená, že na stĺp dopadá z výšky 4 m. Ak neuvažujeme odpor vzduchu, bude pri páde baranidla platiť zákon zachovania energie

$$\frac{1}{2} m_b v_b^2 = m_b g h \ , \qquad (1)$$

odkiaľ vypočítame rýchlosť dopadu baranidla na stĺp. Po náraze na stĺp baranidlo spolu so stĺpom budú spoločne vnikať do zeme. Znamená to, že ráz je absolútne nepružný, a preto použijeme na výpočet počiatočnej rýchlosti sústavy baranidlo-stĺp zákon zachovania hybnosti,

$$m_\mathrm{b}v_\mathrm{b} = (m_\mathrm{b} + m_s)v \; . \tag{2}$$

Sústava má počiatočnú kinetickú energiu

$$\frac{1}{2}(m_\mathrm{b} + m_s)v^2 \tag{3}$$

Po zatlačení stĺpa do zeme do hĺbky s bude kinetická energia sústavy nulová. Celá kinetická energia baranidla a stĺpu vyjadrená vzorcom (3) spolu s potenciálnou energiou $(m_\mathrm{b} + m_s)gs$ bude rovná práci sily odporu zeminy, ktorú vypočítame zo vzťahu

$$A = F_0 \int_0^s (1 + kx)\,\mathrm{d}x \; . \tag{4}$$

Riešenie:

Z rovnice (1) dostaneme pre rýchlosť baranidla $v_\mathrm{b} = \sqrt{2gh}$.

Dosadením do rovnice (2) a úpravou dostaneme pre počiatočnú rýchlosť sústavy

$$v = \frac{m_b}{m_b + m_s}\sqrt{2gh} \; .$$

Prácu A vypočítame podľa vzťahu (4)

$$A = F_0 \int_0^s (1 + kx)\mathrm{d}x = F_0\left(s + \frac{1}{2}ks^2\right)$$

Ako bolo povedané, kinetická energia sústavy a úbytok potenciálnej energie sústavy budú rovné práci odporovej sily zeme. Znamená to, že môžeme napísať

$$\frac{1}{2}(m_\mathrm{b} + m_s)v^2 + (m_\mathrm{b} + m_s)gs = F_0\left(s + \frac{1}{2}ks^2\right).$$

Dosadením za počiatočnú rýchlosť sústavy a úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu pre hĺbku zatlačenia do zeme.

$$\frac{F_0 k}{2}s^2 + [F_0 - (m_b + m_s)g]s - \frac{m_b^2}{m_b + m_s}gh = 0$$

Pretože všeobecné riešenie je veľmi zložité, zjednodušíme si výpočet tak, že zavedieme nasledovné označenie.

$$a = \frac{F_0 k}{2}; \quad b = F_0 - (m_b + m_s)g \quad ; \quad \mathrm{c} = \frac{\mathrm{m_b^2}}{m_b + m_s}gh$$

a vypočítame si ich hodnoty.

$$a = \frac{7\cdot 10^4\ \mathrm{kg.m.s^{-2}} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m^{-1}}}{2} = 3{,}5\cdot 10^3 \mathrm{kg.s^{-2}}$$

$$b = \left[7\cdot 10^4 \mathrm{kg.m.s^{-2}} - (400\,\mathrm{kg} + 100\,\mathrm{kg})\cdot 9{,}81\mathrm{m.s^{-2}}\right] = 65095\,\mathrm{kg.m.s^{-2}}$$

$$c = \frac{(400)^2\,\mathrm{kg^2}}{400\,\mathrm{kg} + 100\,\mathrm{kg}} 9{,}81\mathrm{m.s^{-2}} \cdot 4\,\mathrm{m} = 12556{,}8\,\mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$$

Pre kvadratickú rovnicu platí riešenie

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Po dosadení a výpočte odmocniny dostaneme

$$s = \frac{-65095 \pm 66431{,}6}{7000}\,\mathrm{m}$$

Z hľadiska skutočnosti má zmysel len kladné riešenie

$$s = \frac{66431{,}6 - 65095}{7000}\,\mathrm{m} = 0{,}191\,\mathrm{m}\,.$$

3.3. Častica hmotnosti m_0, ktorá letela s rýchlosťou v = 0,8 c, narazila do identickej častice, ktorá sa nachádzala v stave pokoja. Zrážka bola absolútne nepružná. Vypočítajte hmotnosť, rýchlosť a kinetickú energiu častice, ktorá vznikla pri tomto ráze!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m_0	$m'_0 = ?$
$v = 0{,}8$c	$v' = ?$
	$E'_k = ?$

Je zrejmé, že vzhľadom na rýchlosť častice je potrebné riešiť úlohu pomocou zákonov relativistickej mechaniky. Aby sme mohli úlohu riešiť, musíme predpokladať, že sústava je izolovaná. Potom bude platiť, že hybnosť sústavy a tiež celková energia sústavy sa zachováva, t.j.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' \quad \text{a} \quad E = E' \qquad (1)$$

Vyjadríme si hybnosť a celkovú energiu pred rázom a po ráze. Dostaneme

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{m'_0 \boldsymbol{v}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad E' = \frac{m'_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

Pomocou rovníc (2) a (3) s použitím zákonov zachovania (1) môžeme vypočítať hmotnosť a rýchlosť vzniknutej častice. Kinetickú energiu vzniknutej častice stanovíme zo vzťahu

$$E'_k = E' - E_0 = m'_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} - 1 \right) \qquad (4)$$

Riešenie:

Porovnaním rovníc (3) dostaneme

$$v' = p' c^2 / E'\,. \qquad (5)$$

Pomocou zákonov zachovania (1) a rovníc (2) dostaneme

$$p' = p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad a \quad E' = E = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + 1 \right).$$

Dosadíme za rýchlosť v jej hodnotu 0,8 c a vypočítame hybnosť a celkovú energiu

$$p' = p = \frac{4}{3} m_0 c \quad a \quad E' = E = \frac{8}{3} m_0 c^2 . \tag{6}$$

Tieto hodnoty dosadíme do rovnice (5) a dostaneme $v' =$ 0,5 c. Smer vektora rýchlosti v' je totožný so smerom rýchlosti v. Z rovnice (3) vyplýva

$$E'^2 - p'^2 c^2 = \left(m'_0 c^2 \right)^2 . \tag{7}$$

Dosadením hodnôt p' a E' do rovnice (7) dostaneme

$$\frac{48}{9} m_0^2 c^4 - \frac{16}{9} m_0^2 c^4 = \left(m'_0 c^2 \right)^2$$

$$2{,}31 m_0 = m'_0$$

Vidíme, že pokojová hmotnosť vzniknutej častice je väčšia ako súčet pokojových hmotností častíc pred rázom, preto sa musí zmenšiť kinetická energia sústavy.

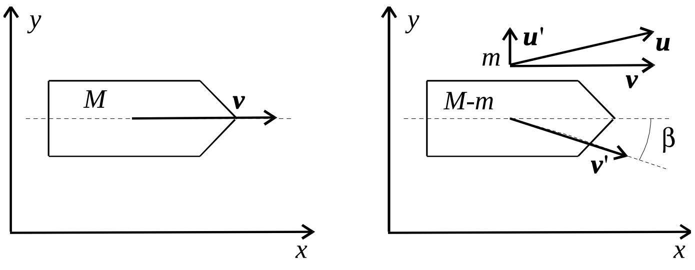
$$E_K = E - m'_0 c^2 = \frac{8}{3} m_0 c^2 - 2{,}31 m_0 c^2 = 0{,}36 m_0 c^2 .$$

3.4. Z kozmickej rakety hmotnosti 2000 kg, ktorá sa pohybuje rovnomerne priamočiaro rýchlosťou 8 km.s^{-1} bol kolmo na smer jej pohybu vystrelený predmet hmotnosti 200 kg, rýchlosťou 500 m.s^{-1} vzhľadom na raketu. Vypočítajte smer a veľkosť rýchlosti rakety po uskutočnení tohoto výstrelu.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
M = 2000 kg	β = ?
v = 8000 m.s^{-1}	v' = ?
m = 200 kg	
u' = 500 m.s^{-1}	
α = 90°	

V súlade so zákonom zachovania hybnosti sa celková hybnosť sústavy s časom nemení. Znázorníme si úlohu na obrázku 20. Os x si zvolíme v smere pôvodného pohybu rakety a predmet nech sa pohybuje v smere osi y. Potom platí vektorová rovnica



Obr.20

$$M\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{u} + (M - m)\boldsymbol{v}', \qquad (1)$$

kde $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}$.

Riešenie:

Prepíšeme si vektorovú rovnicu na skalárne zložky

$$Mv = mv + (M - m)v' \cos\beta,$$

$$0 = mu' - (M - m)v' \sin\beta.$$

Tieto rovnice upravíme nasledovne

$$\begin{aligned}(M - m)v &= (M - m)v' \cos\beta,\\ mu' &= (M - m)v' \sin\beta,\end{aligned} \qquad (2)$$

a odtiaľto

$$tg\,\beta = \frac{mu'}{(M - m)v} \quad ; \quad \beta = \mathrm{arctg}\frac{mu'}{(M - m)v}.$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{200\ \mathrm{kg} \cdot 500\,\mathrm{m.s}^{-1}}{(2000 - 200)\mathrm{kg} \cdot 8000\ \mathrm{m.s}^{-1}} = 0{,}3979^{\circ}.$$

Po umocnení rovníc (2) a ich sčítaní dostaneme

$$(M - m)^2 v^2 + m^2 u'^2 = (M - m)^2 v'^2,$$

odkiaľ

$$v' = \sqrt{v^2 + \left(\frac{m}{M - m}\right)^2 u'^2}.$$

$$v' = \sqrt{(8000)^2\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^2 + \left(\frac{200\,\mathrm{kg}}{2000\,\mathrm{kg} - 200\,\mathrm{kg}}\right)^2 \cdot (500)^2\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^2} = 8000{,}2\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

Neriešené príklady

3.5. Loďka stojí na vode v pokoji. Os loďky je kolmá na breh. Vzdialenosť špice loďky od brehu je 1,6 m a kormy od brehu 5,2 m. Človek, ktorý stál na špici loďky, prešiel na kormu. Vypočítajte, v akej vzdialenosti od brehu bude špica loďky po premiestení človeka, ak jeho hmotnosť je 80 kg a hmotnosť loďky 100 kg. Odpor prostredia zanedbajte. [0 m]

3.6. Tri loďky rovnakej hmotnosti 200 kg idú za sebou rovnakou rýchlosťou 2 m.s^{-1}. Zo strednej loďky bolo rýchlosťou 10 m.s^{-1} vzhľadom k brehu vhodené v rovnaký okamih závažie 10 kg do prednej a rovnako veľké závažie tou istou rýchlosťou do zadnej loďky. Aké sú rýchlosti lodiek po prehodení závaží?
[1,43 m.s^{-1}; 2,22 m.s^{-1}; 2,38 m.s^{-1}]

3.7. Akou rýchlosťou sa musí pohybovať strela hmotnosti 100 kg, aby pri náraze na stojacu loď hmotnosti 100 t sa začala loď pohybovať rýchlosťou 0,1 m/s? Náraz pokladajte za absolútne nepružný. [100,1 m.s^{-1}]

3.8.* Náboj, ktorý letel vodorovne vo výške 40 m rýchlosťou 100m.s^{-1}, sa roztrhol na dva kusy. Jeden kus dopadol po 1s po rozpade na zem priamo pod miestom rozpadu. Vypočítajte smer a veľkosť rýchlosti druhého kusu tesne po rozpade!
[10^0 voči horizontu, 203 m.s^{-1}]

3.9.* Žaba o hmotnosti 0,1 kg sedí na konci dosky dlhej 2 m , ktorej hmotnosť je 10 kg. Doska pláva na povrchu rybníka bez trenia, Žaba skáče pod uhlom 45° voči horizontu na druhý koniec dosky. Aká musí byť počiatočná rýchlosť žaby, aby sa žaba po doskoku nachádzala na druhom konci dosky? [4,4 $m.s^{-1}$]
3.10. Drevená kocka hmotnosti 3 kg leží na podlahe. Vo vodorovnom smere vnikne do kocky kamienok hmotnosti 10g a uviazne v nej, v dôsledku čoho sa kocka posunie o 0,2 m. Aká bola rýchlosť kamienka, ak faktor šmykového trenia pri pohybe kocky bol 0,01? [60 $m.s^{-1}$]
3.11. Guľka hmotnosti 10 g, ktorá letela vodorovne rýchlosťou 400 $m.s^{-1}$, narazila do vrecka naplneného pieskom hmotnosti 4 kg, ktoré viselo na dlhej niti. Vypočítajte výšku, do ktorej sa vrecko vychýli a tú časť kinetickej energie guľky, ktorá sa spotrebovala na prerážanie piesku. [5 cm, 99,75 %]
3.12. Chlapec posúva sánky po zasneženej vodorovnej ceste rovnobežnou silou. Po prejdení dráhy 3 m vykoná prácu 75 J. a) Akou silou pôsobí? b) Akou silou bude musieť pôsobiť pod uhlom 45^0 smerom nahor, aby vykonal po tej istej dráhe rovnako veľkú prácu? c) Čo sa zmení pri pôsobení sily po tým istým uhlom smerom nadol? Trenie zanedbajte.
[a) 25 N; b) a c) v oboch prípadoch je sila rovnaká: 35 N]
3.13. Dieťa ťahalo vozík na povraze silou 80 N tak, že prvý meter dráhy bol povraz rovnobežný s podlahou a druhý meter zvieral povraz s podlahou uhol 30°. Akú celkovú prácu dieťa vykonalo? [149,3 J]
3.14. Akú prácu treba vykonať pri stlačení nárazníkovej pružiny vagóna o x_0 = 5 cm, keď na jej stlačenie o x_1 = 1 cm treba silu 30 000 N a keď platí, že sila je priamo úmerná skráteniu pružiny? [3750 J]
3.15. Drevený valec je ponorený vo vode do 2/3 svojej výšky. Akú prácu treba vykonať na vytiahnutie valca z vody, keď polomer valca r = 10 cm a jeho výška h = 60 cm? [24,1 J]
3.16. Indián poháňa kanoe silou 200 N. S akým výkonom pracuje, ak sa plaví rýchlosťou 5 $m.s^{-1}$? [1000 W]
3.17. Akú hmotnosť má kováčske kladivo, ktoré pri dopade rýchlosťou 4,5 m/s odovzdá energiu E_k = 240 J? [23,7 kg]
3.18. Vozidlo s hmotnosťou $1{,}2 \cdot 10^3$ kg rozbiehajúce sa rovnomerne zrýchlene má po prejdení prvých 50 m pohybovú energiu E_k= $1{,}5 \cdot 10^4$ J. Aký veľké je zrýchlenie a konečná rýchlosť pri zanedbaní trenia? [0,25 $m.s^{-2}$; 5 $m.s^{-1}$]
3.19. Voľne padajúce teleso preletí za čas Δt = 2 sekundy dvoma bodmi P_1 a P_2, ktorých vzdialenosti od východiskového bodu sú h_1 a h_2. V bode P_2 je kinetická (pohybová) energia telesa 2-krát väčšia ako v bode P_1. Aké veľké sú dráhy pádu h_1 a h_2? [114,3 m; 228,67 m]
3.20. Akou silou treba pôsobiť na baranidlo hmotnosti 400 kg, aby pri dopade z výšky 50 cm vydalo takú istú energiu ako pri voľnom páde z výšky 75 cm?
[1962 N]
3.21. Teleso hmotnosti m treba zdvihnúť zvisle do výšky h. Za tým účelom teleso rovnomerne zrýchlime pozdĺž prvej časti dráhy h_1 tak, aby vystúpilo druhú časť dráhy h_2 len svojou zotrvačnosťou. Aký vzťah nám z toho vyplynie pre potrebné zrýchlenie a? [a=g (h_2/h_1]
3.22. Oceľová gulička hmotnosti 20 g je zavesená na vlákne dĺžky 0,3 m. Aký impulz sily treba udeliť guličke vo vodorovnom smere, aby sa pohybovala v zvislej rovine po kružnici? [$7{,}7 \cdot 10^{-2}$ N.s]

3.23. Na vláknach sú zavesené dve pružné gule s hmotnosťami 0,5 kg a 25 kg tak, že sa práve dotýkajú a spojnica ich stredov je vodorovná. O aký uhol musíme vychýliť ťažšiu guľu, aby druhá po náraze prešla po kruhovej dráhe hornou polohou nad bodom závesu? Zrážku považujte za dokonale pružnú a stredovú [1,2 rad]

3.24. Teleso hmotnosti 2 kg sa pohybuje rýchlosťou 3 m.s^{-1} a dobieha druhé teleso o hmotnosti 3 kg, ktoré sa pohybuje rýchlosťou 1 m.s^{-1}. Nájdite rýchlosť telies po zrážke, ak:

a) zrážka bola absolútne nepružná,
b) zrážka bola absolútne pružná.

Telesá sa pohybujú v jednej priamke. Zrážka je centrálna.
[a) $v_1 = v_2 = 1{,}8$ m.s^{-1}; b) $v_1 = 0{,}6$ m.s^{-1}, $v_2 = 2{,}6$ m.s^{-1}]

3.25. Aký musí byť pomer medzi hmotnosťami telies v predchádzajúcej úlohe, aby prvé teleso po absolútne pružnej zrážke ostalo stáť? [m_1:m_2 = 1:3]

3.26. Teleso o hmotnosti 3 kg sa pohybuje rýchlosťou 4 m.s^{-1} a naráža na nepohybujúce sa teleso tej istej hmotnosti. Nájdite množstvo uvoľneného tepla pri zrážke, ak zrážka je centrálna a absolútne nepružná! [12 J].

3.27. Teleso hmotnosti 5 kg naráža do nepohybujúceho sa telesa o hmotnosti 2,5 kg, ktoré sa po zrážke začne pohybovať s kinetickou energiou 5 J. Nájdite kinetickú energiu prvého telesa pred a po zrážke, ak zrážka bola centrálna a absolútne pružná.
[5,62 J; 0,62 J]

3.28. Dve telesá, pohybujúce sa oproti sebe, sa nepružne zrazia. Rýchlosť prvého telesa pred zrážkou je v_1 = 2 m.s^{-1} a rýchlosť druhého je v_2 = 4 m.s^{-1}. Výsledná rýchlosť oboch telies po zrážke je v smere rýchlosti v_1 a jej veľkosť je rovná 1 m.s^{-1}. Aký bol pomer kinetických energií pred zrážkou? [Kinetická energia prvého telesa bola 1,25 krát väčšia než energia druhého telesa].

3.29. Oceľová guľôčka hmotnosti 20 g dopadla z výšky 1 m na oceľovú podložku a odskočila od nej do výšky 0,81 m. Nájdite impulz sily pôsobiacej počas zrážky a množstvo tepla uvoľneného pri zrážke. [0,17 N.s; $37{,}2 \cdot 10^{-3}$ J]

3.30. Do telesa tvaru gule, zaveseného zvisle na vlákne, narazí vodorovne letiaci náboj, ktorého hmotnosť je 1000-krát menšia ako hmotnosť telesa, a uviazne v tomto telese. Aká bola rýchlosť náboja pri náraze, keď sa teleso po náraze vychýlilo zo svojej rovnovážnej polohy tak, že záves zvieral so zvislým smerom uhol 10°? Dĺžka závesu od miesta upevnenia do stredu gule je 1 m. [$v \doteq 550$ m.s^{-1}]

3.31. Teleso začalo padať z výšky 100 m a preniklo snehovým závejom do hĺbky 5 m. Vypočítajte priemernú silu odporu snehu proti pohybu telesa, keď hmotnosť telesa bola 10 kg! Odpor vzduchu zanedbajte. [2060 N]

3.32. Do zvislej dosky, ktorá má hrúbku 5 cm, narazila vo vodorovnom smere guľôčka hmotnosti 10 g rýchlosťou 1206 km/hod a vyletela z nej rýchlosťou 300 m.s^{-1}. Vypočítajte priemernú silu odporu dosky proti pohybu guľôčky! [2222,5 N]

3.33*. Oceľová guľôčka padá z výšky 2 m na rovinnú vodorovnú plochu. Pri každom odraze stratí 10% svojej mechanickej energie. Určite všeobecnú závislosť výšky odrazu od ich počtu. Vypočítajte jej výšku po 5-tom odraze! Určte časový interval medzi (n+1)-ým a n-tým dopadom guľôčky!

[$h_n = h_0 q^n$; kde q = 0,9; 1,18 m; $\left[t_{n+1} - t_n = 2\sqrt{\dfrac{2 \cdot q^n \cdot h_0}{g}}, \text{ pre } n \geq 1 \right]$].

3.34. Lodné delo vymrští z hlavne granát s hmotnosťou 620 kg za 1/40 sekundy, pričom granát dosiahne rýchlosť 935 m/s. Akému priemernému výkonu to zodpovedá? [10,84 GW]

3.35. Loď pláva rýchlosťou v = 20 km/hod rovnomerne priamočiaro. Výkon hnacích síl je 25 MW. Vypočítajte silu odporu proti pohybu lode! (4,5 MN)

3.36. Automobil hmotnosti 900 kg dosiahne pri jazde s vypnutým motorom na ceste so sklonom 5% ustálenú rýchlosť pohybu 75 km/hod. Aký výkon musí vyvinúť motor automobilu na vodorovnej ceste, aby sa vozidlo pohybovalo rovnomerným pohybom s tou istou rýchlosťou 75 km/hod.? [9,2 kW]

3.37. Častica s pokojovou hmotnosťou M_0 sa rozpadla na dve častice, rýchlosť ktorých v laboratórnej sústave bola 0,9 c. Vypočítajte pokojovú hmotnosť častíc. [0,218 M_0]

3.38.* Častica s pokojovou hmotnosťou $3{,}2 \cdot 10^{-27}$ kg mala v laboratórnej sústave rýchlosť 0,8 c. Táto častica sa zrazila s identickou časticou, ktorá v laboratórnej sústave bola v pokoji a ráz bol absolútne nepružný. Vypočítajte hybnosť, rýchlosť a kinetickú energiu častice, ktorá vznikla v dôsledku rázu. [$1{,}28 \cdot 10^{-18}$ kg.m.s^{-1}, $1{,}5 \cdot 10^{8}$ m.s^{-1}, $1{,}38 \cdot 10^{-19}$ J]

3.39. Vypočítajte relatívnu chybu vo výpočte kinetickej energie podľa klasickej mechaniky vzhľadom na relativistickú mechaniku pri rýchlostiach u_1=0,1 c, u_2 = 0,9 c, u_3 = 0,99 c! [0,8%; 69%; 92%]

3.40. Hmotnosť pohybujúceho sa protónu je 1,5 krát väčšia ako jeho hmotnosť v pokoji. Vypočítajte jeho kinetickú a celkovú energiu! [$7{,}5 \cdot 10^{-11}$ J ; $22{,}5 \cdot 10^{-11}$ J]

3.41. Vypočítajte rýchlosť častice, ak jej kinetická energia je rovná polovici pokojovej energie. [$\sqrt{5}/3$ c]

3.42.* Hmotnosť dvojstupňovej rakety na štarte je 150 t. Plyny vyletujú z rakety rýchlosťou 4 km/s. Po spálení 90 t paliva odhadzuje sa prvý stupeň hmotnosti 30 t. Potom sa ešte spáli 28 t paliva. Aká je výsledná rýchlosť druhého stupňa rakety? Odpor vzduchu zanedbajte. Akú rýchlosť by mala jednostupňová raketa pri rovnakej počiatočnej hmotnosti a spálení rovnakého množstva paliva?
[14,5 km.s^{-1}; 6,18 km.s^{-1}]

4 Silové pole a pohyb hmotných telies v silovom poli.

V tomto paragrafe sa rozoberá problém zisťovania charakteristických funkcií silového poľa, t.j. potenciálu a intenzity poľa z rozloženia zdrojov poľa (elektrické náboje, hmotné telesá), ako aj pohyb elektricky nabitých častíc v elektromagnetickom poli a hmotných častíc v gravitačnom poli. Pri výpočte silových polí sa ohraničíme poliami síl, ktorých intenzita klesá nepriamo úmerne so štvorcom vzdialenosti od zdroja poľa.

Pri výpočte silových polí sa používa princíp superpozície a Gaussova veta. Princíp superpozície dovoľuje vypočítať potenciál ako funkciu súradníc. Potom pomocou diferenciálnych vzťahov medzi intenzitou a potenciálom sa vypočítava intenzita poľa.
Niekedy je vhodné počítať potenciál a intenzitu oddelene pomocou integrálnych vzťahov medzi funkciou rozloženia náboja (elektrické pole) alebo hmotnosti (gravitačné pole) a potenciálom a intenzitou poľa.

V prípade, že rozloženie náboja alebo hmotnosti je dostatočne symetrické, pri riešení príkladov sa používa Gaussova veta a integrálne vzťahy medzi intenzitou a potenciálom poľa.

1. Ako bolo uvedené sily v skúmaných poliach ubúdajú so štvorcom vzdialenosti podľa nasledovných zákonov

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r} \quad \text{(Newtonov)}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^3}\boldsymbol{r} \quad \text{(Coulombov),}$$

kde G je univerzálna gravitačná konštanta,
ε_0 - permitivita vákua,
Q - elektrický náboj,
$\boldsymbol{r}$ - polohový vektor.

2. Medzi silou a potenciálnou energiou platí vzťah

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, E_p ,$$

kde E_p je potenciálna energia.

3. Medzi hustotou elektrického náboja ρ_e, hustotou hmotnosti ρ_m, potenciálom φ a intenzitou poľa $\boldsymbol{E}$ alebo $\boldsymbol{g}$ platia nasledovné diferenciálne a integrálne vzťahy:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi ; \qquad \boldsymbol{g} = -\nabla\varphi ;$$

$$\nabla\boldsymbol{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}; \qquad \nabla\boldsymbol{g} = 4\pi G\rho_m ;$$

$$(\nabla\cdot\nabla)\varphi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}; \quad (\nabla\cdot\nabla)\varphi = -4\pi G\,\rho_m ,$$

kde $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ a $(\nabla\cdot\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

$$\varphi_{21} = -\int_1^2 (\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}); \qquad \varphi_{21} = -\int_1^2 (\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}).$$

4. Gaussova veta pre elektrostatické pole sa dá vyjadriť vzťahom

$$\oint (\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) = \int_V \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \mathrm{d}V .$$

Gaussova veta pre gravitačné pole sa dá vyjadriť vzťahom

$$\oint (\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) = -4\pi \mathrm{G} \int_V \rho_m \mathrm{d}V .$$

5. Pre objemovú energiu elektrického poľa vo vákuu platí vzťah

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} .$$

6. Gravitačné sily sú stredové sily, a preto ich moment sily je rovný nule, v dôsledku čoho pri pohybe hmotných telies v gravitačnom poli sa zachováva ich moment hybnosti (2. Keplerov zákon).
Pri pohybe telesa v gravitačnom poli je dráha tohto telesa kužeľosečka. Ak je táto dráha elipsa, platí nasledovný vzťah medzi periódou obehu a veľkou poloosou.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{G}(M_1 + M_2)},$$

kde ťažšie teleso je v jednom ohnisku elipsy a ľahšie teleso obieha po eliptickej dráhe.

7. Pre pohyb elektricky nabitých častíc v elektromagnetickom poli platí vzťah (Lorentzova sila)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = Q\,(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]),$$

kde $\boldsymbol{B}$ je vektor magnetickej indukcie.

9. V prípade, že magnetické pole nie je prítomné a rýchlosť častíc je oveľa menšia ako rýchlosť svetla, platí zákon zachovania energie v tvare

$$\Delta E_k = Q\varphi$$

a pre relativistické častice platí

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + Q\,\varphi = konšt.$$

10. V prípade, že sa častice pohybujú len v magnetickom poli, budú sa pohybovať po skrutkovnici, ktorej krok bude

$$h = \frac{2\pi m}{|Q|B} v_1 .$$

Perióda obehu a polomer dráhy budú

$$T = \frac{2\pi m}{|Q|B} ; \qquad r = \frac{m v_2}{|Q|B},$$

kde v_1 je zložka rýchlosti rovnobežná s vektorom magnetickej indukcie,
v_2 – zložka rýchlosti kolmá na vektor magnetickej indukcie.

Riešené príklady

4.1. Homogénna guľa má hmotnosť M a polomer R. Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa gule:

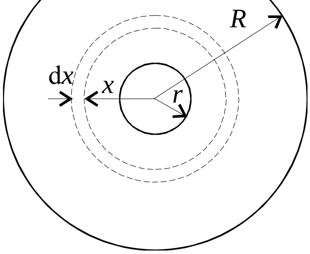
a) vo vzdialenosti od jej stredu väčšej ako je jej polomer;

b) vo vzdialenosti od jej stredu menšej ako je jej polomer;

c) Nájdite také vzdialenosti od stredu gule, v ktorých potenciál a intenzita budú nadobúdať polovičnú hodnotu odpovedajúcich veličín tesne nad povrchom gule!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m_g = M$	$\varphi(r) = ?$
$r_g = R$	$E\,(r) = ?$
	$r_1 = ?$
	$r_2 = ?$



Obr.21

a) Vyšetrujeme gravitačné pole gule v priestore mimo nej, t.j. vo vzdialenosti od stredu $r>R$. Z Gaussovej vety vyplýva, že guľové teleso vytvára svoje vonkajšie pole tak, akoby celá jeho hmotnosť bola sústredená v jeho strede.

Potom potenciál bude rovný

$$\varphi = -G\frac{M}{r} \qquad (1)$$

a intenzita

$$\mathbf{E} = -G\frac{M}{r^3}\mathbf{r}\,. \qquad (2)$$

b) Skúmajme teraz gravitačné pole vo vnútri gule, t.j. vo vzdialenosti $r<R$. Použijeme princíp superpozície, ktorý v našom prípade hovorí, že gravitačné pole v mieste kde $r<R$ je súčtom poľa vnútornej gule polomeru r a poľa zvyšku, tvoreného guľovou vrstvou hrúbky $R - r$. Potom potenciál výsledného poľa je

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2\,,$$

kde φ_1 je potenciál vytvorený vnútornou guľou na jej povrchu:

$$\varphi_1 = -G\frac{m_1}{r}\,,$$

kde
$$m_1 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = M\frac{r^3}{R^3}\,.$$

Po dosadení
$$\varphi_1 = -G\frac{M}{R^3}r^2\,.$$

Potenciál φ_2 je vytvorený guľovou vrstvou hrúbky R-r, čiže počítame potenciál v dutine tejto vrstvy. Z Gaussovej vety vyplýva, že intenzita gravitačného poľa v dutine telesa je nulová a keďže $\boldsymbol{E}= -\,\mathrm{grad}\,\varphi$, musí byť potenciál v celej dutine konštantný. Preto namiesto počítania φ_2 vo vzdialenosti r môžeme počítať potenciál priamo v strede dutiny. Guľovú vrstvu si rozdelíme na elementárne sústredné vrstvičky polomeru x a hrúbky dx (pozri obr.21). Potenciál, ktorý takáto vrstvička vytvára v strede, je

$$\mathrm{d}\varphi_2 = -\mathrm{G}\frac{\mathrm{d}m}{x},$$

kde $\mathrm{d}m = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot 4\pi x^2 \mathrm{d}x = \dfrac{3M}{R^3}\cdot x^2 \mathrm{d}x$.

Po dosadení $$\mathrm{d}\varphi_2 = -\mathrm{G}\frac{3M}{R^3}\cdot x\,\mathrm{d}x$$

a $$\varphi_2 = -\mathrm{G}\frac{3M}{R^3}\int_r^R x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{G}\frac{3M}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right).$$

Výsledný potenciál vo vzdialenosti r<R je:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\mathrm{G}\frac{M}{R^3}\cdot r^2 - \mathrm{G}\frac{3M}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right).$$

Po úprave $$\varphi = -\mathrm{G}\frac{M}{2R^3}\left(3R^2 - r^2\right).$$

Pri výpočte intenzity v mieste $r<R$ si opäť uvedomíme, že príspevok od guľovej vrstvy hrúbky R-r je nulový a intenzita poľa je tvorená len vnútornou guľou polomeru r:

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{G}\frac{M\frac{r^3}{R^3}}{r^3}\boldsymbol{r} = -\mathrm{G}\frac{M}{R^3}\boldsymbol{r}.$$

c) Na povrchu (tesne nad ním) má potenciál hodnotu

$$\varphi_0 = -\mathrm{G}\frac{M}{R}.$$

Hľadáme vzdialenosť r_1, v ktorej $\varphi_1 = \frac{1}{2}\varphi_0$. Predpokladajme, že $r_1>R$. Potom by malo platiť: $$G\frac{M}{r_1} = \frac{1}{2}G\frac{M}{R}$$

odkiaľ $r_1 = 2R$.

Ak hľadáme $r_2 < R$, malo by platiť:

$$\frac{\mathrm{G}M}{2R^3}\left(3R^2 - r_2^2\right) = \frac{1}{2}\mathrm{G}\frac{M}{R},$$

odkiaľ $r_2 = R\sqrt{2}$, čo je spor s predpokladom, že $r_2 < R$, preto vnútri gule neexistuje bod, kde potenciál má polovičnú hodnotu povrchového potenciálu.

Zostáva ešte nájsť vzdialenosti, v ktorých má intenzita polovičnú hodnotu intenzity na povrchu gule. Uvažujme najprv $r_1>R$. Potom má platiť:

$$\mathrm{G}\frac{M}{r_1^2} = \frac{1}{2}\mathrm{G}\frac{M}{R^2},$$

odkiaľ $r_1 = R\sqrt{2}$.

Ak hľadáme $r_2 < R$, musí platiť:

$$\mathrm{G}\frac{M}{R^3}r_2 = \frac{1}{2}\mathrm{G}\frac{M}{R^2},$$

odkiaľ $r_2 = \dfrac{R}{2}$.

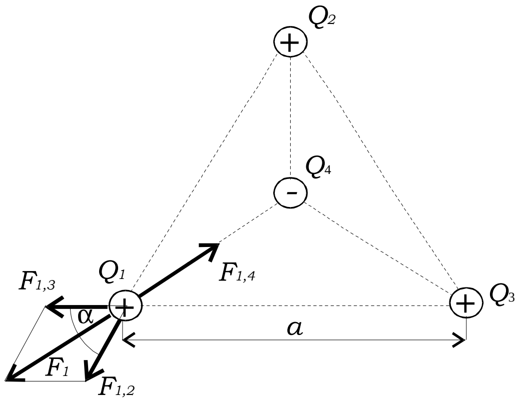
Vidíme, že existujú dve vzdialenosti od stredu gule, v ktorých má intenzita polovičnú hodnotu z povrchovej intenzity.

4.2. Tri rovnaké náboje veľkosti 5 nC sú umiestnené vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka. Aký náboj musíme umiestniť uprostred trojuholníka, aby výsledná sila pôsobiaca na každý náboj bola nulová?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 5$ nC	$Q_4 = ?$
$a_1 = a_2 = a_3 = a$	

Podľa zadania sú náboje umiestnené vo vrcholoch trojuholníka kladné, a to znamená, že sa budú odpudzovať. Náboj, ktorý treba umiestniť uprostred trojuholníka bude záporný a jeho veľkosť musí byť taká, aby sila, ktorou pôsobí na náboj vo vrchole trojuholníka kompenzovala výslednú odpudivú silu zostávajúcich dvoch nábojoch vo vrchole.



0br.22

V dôsledku symetrie sú všetky tri polohy kladných nábojov rovnaké a ľahko dokázať, že výsledná sila, ktorou budú pôsobiť náboje vo vrcholoch trojuholníka na náboj v strede, v dôsledku symetrie bude rovná nule nezávisle od znamienka a veľkosti tohoto náboja.

Označíme si náboje v rohoch trojuholníka Q_1, Q_2, Q_3 a náboj v strede Q_4 a znázorníme si na obrázku polohy nábojov a sily ktorými na seba pôsobia (pozri obr. 22). (Je zrejmé, že v dôsledku symetrie stačí preskúmať stav len v jednom vrchole). Podmienka rovnováhy vyžaduje, aby súčet všetkých síl pôsobiacich na náboj bol rovný 0. Pre náboj Q_1 platí

$$\boldsymbol{F}_{1,2} + \boldsymbol{F}_{1,3} + \boldsymbol{F}_{1,4} = 0 \tag{1}$$

Silu vzájomného pôsobenia dvoch nábojov stanovíme z Coulombovho zákona

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i Q_k}{r_{ik}^2} \tag{2}$$

kde r_{ik} je vzdialenosť nábojov Q_i a Q_k.

Riešenie:

Zložíme vektorovo sily $\boldsymbol{F}_{1,2}$ a $\boldsymbol{F}_{1,3}$ do výslednej sily $\boldsymbol{F}_1$. Potom rovnicu (1) môžeme prepísať do skalárneho tvaru

$$F_{1,2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}+F_{1,4}=0, \tag{3}$$

kde $\alpha = 60°$. Pritom sme vzali do úvahy, že zo zadania vyplýva $F_{1,2} = F_{1,3}$.

Dosadíme výrazy pre sily (rovnica 2) zadaním príslušných parametrov do rovnice (3) a dostaneme

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_4}{r_1^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1^2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}{a^2} \tag{4}$$

Z geometrie rovnostranného trojuholníka vyplýva, že $r_1=\dfrac{a}{2\cos 30°}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Dosadením do rovnice (4) a úpravou tejto rovnice dostaneme

$$Q_4=Q_1\frac{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}{3}$$

Ale $\cos\alpha = 0{,}5$ a po dosadení

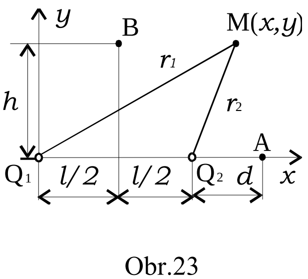
$$Q_4=\frac{Q_1}{\sqrt{3}}=\frac{5nC}{\sqrt{3}}=\frac{5nC}{\sqrt{3}}=2{,}886\,nC\,.$$

4.3. Dva rovnaké náboje $Q = Q_1 = Q_2 = 8\cdot10^{-12}$ C sú vzdialené 10 cm od seba. Vypočítajte potenciál a vektor intenzity v bodoch A a B (pozri obr. 22, kde h = 10 cm, d = 5 cm). Zostrojte grafy závislosti potenciálu a vektora intenzity el. poľa od vzdialenosti pre body ležiace na priamke, ktorá spája náboje a na priamke kolmej na ňu a nachádzajúcej sa symetricky voči nábojom.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$Q = Q_1 = Q_2 = 8\cdot10^{-12}$ C	$\varphi_A = ?$
l = 10 cm	$\varphi_B = ?$
h = 10 cm	$\boldsymbol{E}_A = ?$
d = 5 cm	$\boldsymbol{E}_B = ?$

Zdrojom elektrostatického poľa sú dva bodové náboje. V ľubovoľnom bode priestoru môžeme nájsť potenciál výsledného poľa pomocou princípu superpozície: $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, kde φ_1 a φ_2 sú potenciály polí vyvolané nábojmi Q_1 a Q_2. Zavedieme si súradnicovú sústavu tak, ako je to znázornené na obr. 23.



Obr.23

Nech M (x, y) je určitý ľubovoľný bod a preskúmame potenciál v tomto bode. Pri zvolenej súradnicovej sústave vzdialenosť r_1 a r_2 každého náboja od bodu M (x, y) môžeme vyjadriť nasledovne

$$r_1=\sqrt{x^2+y^2}\quad;\quad r_2=\sqrt{(x-l)^2+y^2}$$

Potom potenciál v bode M bude rovný

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}\right).$$

(1)

Pretože $\boldsymbol{E} = -\text{grad}\ \varphi$ dostaneme pre zložky intenzity nasledovné vzťahy

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{x-l}{\left[(x-l)^2+y^2\right]^{3/2}}\right\},$$
$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}y\left\{\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left[(x-l)^2+y^2\right]^{3/2}}\right\} \qquad (2)$$

Zo vzorcov (2) môžeme nájsť hodnotu a smer vektora intenzity elektrického poľa. Pomocou rovníc (1) a (2) môžeme zostrojiť grafy závislosti potenciálu a zložiek vektora intenzity poľa od súradníc.

Riešenie:

Súradnice bodu A sú: $x = l + d$, $y = 0$. Súradnice bodu B sú: $x = l/2$, $y = h$. Dosadením týchto súradníc do rovníc (1) a (2) nájdeme potenciály a zložky vektorov intenzity v uvedených bodoch.

V bode A bude potenciál rovný

$$\varphi_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l+d}+\frac{1}{d}\right) = \frac{8\cdot10^{-12}\,\text{A.s}}{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\,\text{kg}^{-1}.\text{m}^{-3}.\text{s}^4.\text{A}^2}\left(\frac{1}{0{,}1+0{,}05}+\frac{1}{0{,}05}\right)\text{m}^{-1}$$

$$\varphi_A = 1{,}92\ \text{V}$$

Podobne dosadením do rovníc (2), úpravou, dosadením a výpočtom dostaneme

$$E_{xA} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(l+d)^2}+\frac{1}{d^2}\right] = 2{,}88\ \text{V/m}$$

$$\text{E}_{yA} = 0$$

V bode A vektor intenzity elektrického poľa bude smerovať napravo v kladnom smere osi *ox*, a jeho hodnota bude 2,88 V/m.

Pri výpočte φ a E_x v bodoch, v ktorých je $x \rangle l, \quad y = 0$ budú platiť vzťahy

$$(x-l)\rangle 0 \quad a \quad \left[(x-l)^2+y^2\right]^{3/2} = (x-l)^3 .$$

Pre potenciál a vektor intenzity elektrického poľa sa rovnice (1) a (2) zjednodušia

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-l}\right) \quad a \quad E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-l)^2}\right).$$

Potenciál a vektor intenzity elektrického poľa, ktorý bude smerovať napravo, budú kladné.

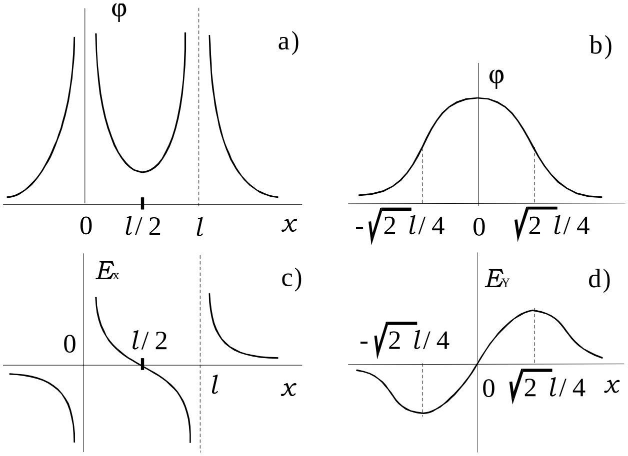
V bodoch, ktoré ležia na priamke spájajúcej náboje, $y = 0$ a potenciál

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|l-x|}\right).$$

V týchto bodoch bude $\varphi\rangle 0$ pre ľubovoľné *x*. Keď $x \to 0$ a $x \to l$, potom $\varphi \to \infty$. Z toho je zrejmé, že potenciál v bodoch medzi $x = 0$ a $x = l$ bude mať minimum. Z výrazu pre E_x, pre body, v ktorých platí $y = 0$, je zrejmé, že $\varphi = \varphi_{min}\left(E_x = 0\right)$ v bode $x = l/2$. Graf závislosti potenciálu φ je znázornený na obrázku 24 a.

V bodoch, pre ktoré platí $y = 0$, viď rovnica (2)

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{|x|^3} + \frac{x-l}{|x-l|^3}\right);\ E_y = 0\ .$$



Obr.24

Preto pre interval $0 \langle\ x \langle\ l$ prepíšeme vyššie uvedený výraz do tvaru

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(l-x)^2}\right).$$

V prípade $x \langle l/2$ bude $E_x \rangle 0$ a v prípade, že $x \rangle l/2$ bude $E_x \langle\ 0$.
Pre $x \langle 0$ bude platiť

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(l+|x|)^2}\right)\langle 0.$$

Vektor intenzity elektrického poľa bude mať v bodoch $x = 0$ a $x = l$ nespojitosť. Hodnoty $E_x \to^{+}_{-} \infty$ ak $x \to 0$ a $E_x \to^{-}_{+} \infty$ ak $x \to l.$
Graf závislosti $E_x(x)$ na priamke $y = 0$ je znázornený na obrázku 24 c.
V bode B

$$\varphi_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{l^2}{4}+h^2}} = \frac{8\cdot 10^{-12}\,\text{A.s}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\text{kg}^{-1}.\text{m}^{-3}.\text{s}^4.\text{A}^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\frac{(0{,}1)^2\,\text{m}^2}{4}+(0{,}1)^2\,\text{m}^2}}$$

$$= 1{,}29\ \text{V}$$

Tak isto ako pri výpočte intenzity el. poľa v bode B budeme postupovať pri výpočte intenzity el. poľa v bode A.

$$E_{xB} = 0 \quad E_{yB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} h \frac{2}{\left(\frac{l^2}{4} + h^2\right)^{3/2}} = 20{,}59 \text{ V/m}.$$

V bode B bude mať smer vektora intenzity elektrického poľa smer paralelný osi *oy* a jeho hodnota bude 20,59 V/m.

Pre potenciál a vektor intenzity elektrického poľa v bodoch na priamke $x = l/2$ rovnice (1) a (2) budú mať tvar

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + y^2}}$$

$$E_x = 0; \quad E_y = \frac{Q\,y}{2\pi\varepsilon_0 \left(\frac{l^2}{4} + y^2\right)^{3/2}}.$$

Z rovníc je zrejmé, že $\varphi \rangle 0$ pre všetky hodnoty y a znamienko E_y bude totožné so znamienkom y.

Pre hodnoty $y = \pm\sqrt{2}\,\frac{l}{4}$ bude derivácia $\frac{dE_y}{dy} = 0$, a to znamená, že funkcia $E_y(y)$ nadobúda v týchto bodoch extrémne hodnoty. Súhlasne tomuto, v týchto bodoch bude mať funkcia potenciálu $\varphi(y)$ inflexné body. Približné grafy $\varphi(y)$ a $E_y(y)$ sú znázornené na obr. 24 b a obr.24 d.

4.4. Určte hmotnosť Jupitera zo známeho stredného polomeru obežnej dráhy jeho mesiaca Io $4{,}22 \cdot 10^8$ m, doby obehu tohto mesiaca 42,5 h a univerzálnej gravitačnej konštanty *G*.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$r = 4{,}22 \cdot 10^8$ m	$M_j = ?$
$T = 42{,}5$ hod	

Vezmeme najjednoduchší model pohybu mesiaca Io okolo planéty Jupiter. Budeme predpokladať, že vplyv ostatných telies našej planetárnej sústavy je zanedbateľný a mesiac Io sa pohybuje po kružnici.

Zvolíme si vzťažnú sústavu pevne spojenú s planétou Jupiter, do ktorej umiestnime počiatok polárnej súradnicovej sústavy. Potom bude obiehať mesiac lo okolo materskej planéty s uhlovou rýchlosťou

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{1}$$

Jeho postupná rýchlosť bude rovná

$$\upsilon = \omega r = \frac{2\pi r}{T}. \tag{2}$$

Pri pohybe po kružnici má obiehajúce teleso normálové zrýchlenie $\dfrac{v^2}{r}$, ktoré je spôsobené gravitačným poľom Jupitera. Preto môžeme napísať rovnicu pohybu mesiaca v tvare

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{M_j m}{r^2}, \tag{3}$$

kde m je hmotnosť mesiaca Io.

Riešenie:

Dosadíme rovnicu (2) do rovnice (3) a po úprave dostaneme

$$\frac{(2\pi)^2 r}{T^2} = G\frac{M_j}{r^2}$$

a odtiaľto

$$M_j = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{r^3}{G}.$$

$$M_j = \frac{4\pi^2}{(42{,}5\cdot 3600\,\mathrm{s})^2}\cdot\frac{(4{,}22\cdot 10^8\,\mathrm{m})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}} = 1{,}9\cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$$

4.5. Akú rýchlosť dosahujú elektróny v obrazovke, ak sú z katódy emitované rýchlosťou $2\cdot 10^6$ ms^{-1} a urýchľovacie napätie medzi anódou a katódou je 15 kV? Aké napätie musí byť medzi katódou a mriežkou obrazovky, aby sa obrazovka zatemnila (žiadne elektróny nedopadnú na tienidlo obrazovky).

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$v_1 = 2\cdot 10^6$ m/s	v_2 = ?
U = 15 kV	U_b = ?
e = $1{,}602\cdot 10^{-19}$ As	
m_e = $9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg	

Pretože nás zaujímajú len počiatočné a konečné stavy, môžeme použiť zákon zachovania energie

$$E_{K2} = E_{K1} + A, \tag{1}$$

kde E_{K1} je počiatočná kinetická energia elektrónu, E_{K2} je výsledná kinetická energia elektrónu, A je práca elektrostatického poľa. Dosadením výrazov pre kinetickú energiu a prácu $A = eU$ do rovnice (1) dostaneme

$$\frac{m_e v_2^2}{2} = \frac{m_e v_1^2}{2} + eU$$

a odtiaľto

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m_e}} \tag{2}$$

Dosadením do vzorca (2) sa musíme presvedčiť, že rýchlosť $v_2 \ll c$. Ak tomu tak nie je, budeme musieť vziať do úvahy zákon zachovania energie v relativistickom tvare

$$\frac{m_{e0}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{m_{e0}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + eU \tag{3}$$

Po dosadení zodpovedajúcich hodnôt zo zadania do rovnice (2) dostaneme

$$v_2 = \sqrt{4 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2} + \frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{A.s} \cdot 15 \cdot 10^3\ \mathrm{kg.m}^2.\mathrm{s}^{-3}.\mathrm{A}^{-1}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 7{,}27 \cdot 10^7\ \mathrm{m.s}^{-1}$$

Vidíme, že vypočítaná rýchlosť je približne 0,2 c a teda nemôžeme predpokladať, že platia zákony nerelativistickej mechaniky. (Pre výpočet brzdiaceho napätia na mriežke môžeme použiť rovnicu (2), pretože $v_1 \langle\langle$ c a $v_2 = 0$.)

Rýchlosť elektrónu musíme preto počítať podľa vzťahu (3). Preskúmame výraz

$$\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}\ .$$

Zistíme, že veličinou $\frac{v_1^2}{c^2}$ môžeme voči 1 zanedbať, a preto môžeme rovnicu (3) prepísať do tvaru

$$\frac{m_{e0}c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_{e0}c^2 + eU \tag{4}$$

Riešenie:

Rovnicu (4) upravíme nasledovne

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = 1 + \frac{eU}{m_{e0}c^2}$$

a odtiaľto

$$v_2 = c\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{eU}{m_{e0}c^2}\right)^2}}\ .$$

Po dosadení dostaneme

$$v_2 = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{ms}^{-1}\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{A.s} \cdot 15 \cdot 10^3\ \mathrm{kg.m}^2.\mathrm{s}^{-3}.\mathrm{A}^{-1}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}}\right)^2}} = 5{,}06 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}.$$

Brzdiace napätie U_B vypočítame z klasického zákona zachovania energie, pretože v_1 je asi 0,007 c. Pretože $E_{K2} = 0$ dostaneme

$$U_B = \frac{m_e v_1^2}{2e}$$

a po dosadení

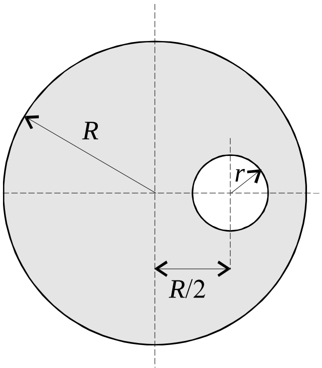
$$U_{\mathrm{B}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg} \cdot 4 \cdot 10^{12}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{2\left(-1{,}602 \cdot 10^{-19}\mathrm{A.s}\right)} = -11{,}4\ \mathrm{V}.$$

Neriešené príklady

4.6. Aký priemer musia mať dve dotýkajúce sa rovnaké olovené gule, keď sa majú navzájom priťahovať silou 10^{-2}N? [1,43 m]

4.7. Aký je pomer gravitačného zrýchlenia na povrchu Mesiaca a na povrchu Zeme? Polomer Mesiaca je 0,273-násobok polomeru Zeme a hmotnosť Mesiaca je 0,0123-násobok hmotnosti Zeme. [0,165]

4.8. Saturn má hmotnosť 95-krát väčšiu ako Zem a polomer 9-krát väčší ako polomer Zeme. Vypočítajte gravitačné zrýchlenie na povrchu Saturnu. [11,5 m.s^{-2}]

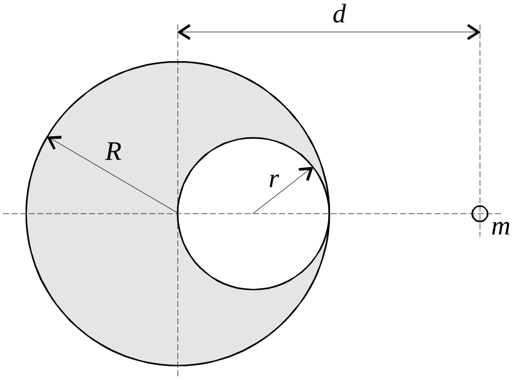


Obr.25

4.9. Jablko s hmotnosťou 0,2 kg sa nachádza na povrchu Zeme. a) Stanovte ich vzájomné silové pôsobenie, b) intenzitu gravitačného poľa Zeme v strede jablka, c) intenzitu gravitačného poľa jablka v strede Zeme! [a) 1,962 kg.m.s^{-2}; b) 9,81 m.s^{-2}; c) $3{,}28 \cdot 10^{-25}$ m.s^{-2}]

4.10. Aké zrýchlenie udeľuje Slnko telesám na Zemi? [Rovnaké ako Zemi (ak zanedbáme rozmery Zeme v porovnaní so vzdialenosťou od Slnka), $6 \cdot 10^{-3}$ m.s^{-2}]

4.11.* Vo vnútri gule o polomere R = 1 m a hustote $11{,}2 \cdot 10^3$ kg.m^{-3} je sférická dutina polomeru r = R/4. Stred dutiny sa nachádza vo vzdialenosti R/2 od stredu gule, pozri obr.25 Vypočítajte intenzitu gravitačného poľa na povrchu gule v bodoch, v ktorých sa pretínajú povrch gule a spojnica stredov gule a dutiny!
[a) dutina je ďalej od povrchu $3{,}1 \cdot 10^{-6}$ kg.m.s^{-2} ; b) dutina je bližšie k povrchu $2{,}9 \cdot 10^{-6}$ kg.m.s^{-2}]



Obr.26

4.12.* V kovovej guli s polomerom R je vytvorená dutina guľového tvaru s polomerom r=R/2 spôsobom znázorneným na obr.26. Treba zistiť, akou silou bude pôsobiť takto vzniknutý hmotný útvar na guľôčku hmotnosti m nachádzajúcu sa vo vzdialenosti d od stredu pôvodnej kovovej gule, keď hmotnosť pôvodnej kovovej gule bola M.

$$\left[\ \mathrm{G}mM\left[\frac{1}{d^2}-\frac{1}{8\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}\right]\ \right]$$

4.13. Akou veľkou silou pôsobí Mesiac na $1\ \mathrm{m}^3$ morskej vody s hustotou 1030 $\mathrm{kg.m^{-3}}$ na povrchu Zeme? Hmotnosť Mesiaca je $7{,}34\cdot 10^{22}$ kg, vzdialenosť stredov Mesiaca a Zeme je 384000 km a polomer Zeme je 6378 km .
[0,0353 N]

4.14. V akej vzdialenosti r_1 od stredu Zeme bude predmet, ktorý sa nachádza medzi Zemou a Mesiacom, v beztiažovom stave? (vzdialenosť stredu Mesiaca od stredu Zeme r= 384400 km, hmotnosť mesiaca = 1/81 hmotnosti Zeme) [r_1=0,9 r=346000 km]

4.15. Z veľmi veľkej vzdialenosti začína padať meteorit hmotnosti 1000 kg. Vypočítajte kinetickú energiu meteoritu vo vzdialenosti 200 km od povrchu Zeme! Počiatočnú rýchlosť meteoritu pokladajte rovnú 0. [60,7 GJ]

4.16. Vypočítajte minimálnu rýchlosť, ktorú treba udeliť telesu na povrchu Zeme, aby dopadlo na Mesiac! Aká bude rýchlosť dopadu telesa na Mesiac? M_Z = 81 M_M, vzdialenosť stredov Zeme a Mesiaca 60 R_Z a R_M =0,273 R_Z.
[11073 $\mathrm{m.s^{-2}}$; 2324 $\mathrm{m.s^{-1}}$]

4.17. Akú vzdialenosť od stredu Zeme musí mať umelá družica, ktorá obieha tak, že sa zdá, že stojí nad určitým bodom rovníka? (polomer Zeme je 6378 km) [42300 km]

4.18. Určte hmotnosť Slnka z polomeru obežnej dráhy Zeme $1{,}49\cdot 10^{11}$ m , periódy obehu Zeme a gravitačnej konštanty G! Vypočítajte strednú hustotu Slnka, ak jeho polomer je $6{,}96\cdot 10^{8}$ m! [$2\cdot 10^{30}$ kg ; $1{,}4\cdot 10^{3}$ $\mathrm{kg.m^{-3}}$]

4.19. Aká je perióda obiehania umelej družice Zeme na dráhe, ktorej polomer sa rovná polovici polomeru geostacionárnej dráhy umelej družice? [8 hod 29 min]

4.20. Aký je pomer gravitačného zrýchlenia v meste A a v meste B, ak kyvadlo vykoná v meste A za hodinu 3600,0 kmitov a v meste B za rovnakú dobu a pri rovnakej teplote 3601,4 kmitov? [$g_B = g_A \cdot 1{,}0008$]

4.21. Ako by sa zmenil chod kyvadlových hodín, keby boli prenesené zo Zeme na Mesiac? [Hodiny by išli 2,5 krát pomalšie.]

4.22. Určte hmotnosť Marsu, ak intenzita gravitačného poľa na jeho povrchu je 3,63 $\mathrm{N.kg^{-1}}$ a jeho polomer je $3{,}32\cdot 10^{6}$ m ! [$6\cdot 10^{23}$ kg]

4.23.* Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa drôtu hmotnosti m, ohnutého do tvaru kružnice s polomerom R v bode P na osi kružnice vo vzdialenosti a od jej stredu! [$\varphi = -\mathrm{G}\dfrac{m}{\sqrt{a^2+R^2}}$; $K = \mathrm{G}\dfrac{ma}{(a^2+R^2)^{3/2}}$]

4.24. Aby ste si urobili predstavu o veľkosti náboja 1 coulomb, vypočítajte akou silou sa odpudzujú dva súhlasné náboje, obidva veľkosti 1 coulomb, vzdialené od seba 1 km. [8996 N]

4.25. Akou silou priťahuje jadro vodíkového atómu elektrón, ak priemer vodíkového atómu je $2\cdot 10^{-8}$ cm? [$2{,}3\cdot 10^{-8}$ N]

4.26. Dve rovnaké guličky polomeru 1 cm a hmotnosti 9,81 g visia z jedného bodu na dvoch nitkách dĺžky 19 cm. Guličky nabijeme súhlasnými nábojmi rovnakej veľkosti.

Aký veľký je náboj každej guličky, ak sa rozostúpia tak, že nitky zvierajú uhol 90^0? [0,88 μC]

4.27. Rozhodnite, či je stabilná rovnovážna poloha bodového náboja, ležiaceho uprostred medzi dvoma inými rovnakými bodovými nábojmi, ktorých znamienka sú buď rovnaké, alebo opačné ako znamienko prvého náboja.[nestabilná]

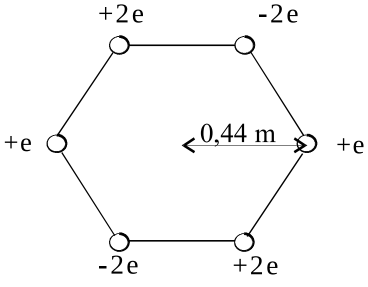
Obr.27

4.28. Na obr. 27 je znázornená časť nekonečného jednorozmerného reťazca kladných a záporných iónov. Vypočítajte silu pôsobiacu na ľubovoľný vybraný ión zo strany polovice reťazca! Akou silou by na ión pôsobil len susedný ión? Vzdialenosť medzi iónmi je 0,15 nm, a ióny sú jednovalentné. [$8{,}4\cdot 10^{-9}$ kg.m.s^{-2} ; $1{,}02\cdot 10^{-8}$ kg.m.s^{-2}]

4.29. Dva veľmi dlhé priame medené drôty sú rovnobežné a elektricky nabité. Hustota naboja pripadajúca na jednotku dĺžky v jednom z nich je λ_1 a v druhom λ_2. Vypočítajte akou silou pôsobí prvý vodič na jednotku dĺžky druhého vodiča, keď vzdialenosť medzi nimi je d a sú umiestené vo vákuu! (Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=$ 0,1 μC.cm^{-1}, d = 0,5 cm!) [$F=\dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 d}$ =360 N.m^{-1}]

4.30.* Nekonečne dlhá niť, na ktorej je rovnomerne rozložený elektrický náboj lineárnej hustoty $2\cdot 10^{-6}$ C.m^{-1}, sa nachádza v jednej rovine s tenkou tyčkou dlhou 12 cm, na ktorej je rovnomerne rozdelený náboj $3\cdot 10^{-9}$ C . Uhol medzi niťou a osou tyčky je 30^0. Stred tyčky je vzdialený 8 cm od nite. Vypočítajte akou silou pôsobí niť na tyčku ako aj hraničné hodnoty sily pre $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi/2$!
[$1{,}42\cdot 10^{-3}$ N, $1{,}35\cdot 10^{-3}$ N, $1{,}75\cdot 10^{-3}$ N]

4.31. Nech potenciál poľa v určitom priestore závisí len od súradnice x vzťahom $\varphi=\dfrac{-ax^2}{2}+c$. Aká bude veľkosť intenzity poľa? [$E = ax$]



Obr.28

4.32. Vypočítajte potenciál a veľkosť intenzity elektrického poľa sústavy nábojov (pozri obr.28) vo vzdialenosti a) 1 m a b) 1000 m od stredu sústavy na kolmici k rovine sústavy.
[φ_a= $26{,}37\cdot 10^{-10}$ V; φ_b= $28{,}81\cdot 10^{-13}$ V;
E_a= $22{,}09\cdot 10^{-10}$ kg.m.s^{-3}.A^{-1};
E_b= $28{,}81\cdot 10^{-16}$ kg.m.s^{-3}.A^{-1}]

4.33. Z mydlovej bubliny polomerom 2cm a nabitej na potenciál 10000 V vznikne po prasknutí kvapka s polomerom r_1=0,05 cm. Aký veľký je potenciál tejto kvapky? [$4\cdot 10^5$ V]

4.34. Guľôčka o polomere r_1 je nabitá nábojom Q. Potom sa táto guľôčka dotkla druhej guľôčky o polomere r_2. Dokážte, že podmienka rovnosti potenciálov oboch guľôčiek sa rovná podmienke minima energie elektrického poľa sústavy.

4.35. Dve rovinné kovové platne, navzájom rovnobežné, veľkej plochy S v malej vzdialenosti d od seba sú elektricky nabité. Platňa 1 nesie kladný náboj $2Q$, platňa 2 kladný náboj Q. Vypočítajte rozdiel potenciálov $\varphi_1 - \varphi_2$ medzi platňou 1 a platňou 2, keď medzi nimi je vákuum! $\left[\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\int_1^2 \mathrm{d}r = \frac{Q\,\mathrm{d}}{2\varepsilon_0 S}\right]$

4.36. Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa v okolí nabitého, veľmi dlhého priameho drôtu, keď je v jeho okolí vákuum! Dĺžková hustota náboja je λ. $\left[E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right]$

4.37. Elektrické pole tvoria dve rovnomerne nabité rovnobežné nekonečné dosky, ktorých vzdialenosť je d. Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa v priestore medzi doskami a mimo nich ako aj napätie medzi doskami, keď
a) plošná hustota náboja na jednej z nich je σ_1 a na druhej $\sigma_2 = 2\sigma_1$,
b) plošné hustoty náboja na oboch doskách sú rovnako veľké, ale náboje sú opačného znamienka. Obklopujúce prostredie dosiek je vákuum.
Riešte pre hodnoty $\sigma_1 = 10\ \mu\mathrm{C.m^{-2}}$, $d = 10$ cm!

$$\left[\begin{array}{l} \text{a)}\quad \text{Medzi doskami}\quad E = 5{,}6\cdot10^5\,\mathrm{N.C^{-1}}\ ,\quad U = 56\,\mathrm{kV}. \\ \qquad \text{Mimo medzery medzi doskami}\quad E = 16{,}8\cdot10^5\,\mathrm{N.C^{-1}}. \\ \text{b)}\quad \text{Medzi doskami}\, E = 11{,}2\cdot10^5\,\mathrm{N.C^{-1}}\ ,\quad U = 112\,\mathrm{kV}. \\ \qquad \text{Mimo medzery medzi doskami}\quad E = 0. \end{array}\right]$$

4.38. Aká je intenzita elektrostatického poľa vo vnútri a v okolí gule polomeru R, ktorá je rovnomerne nabitá nábojom objemovej hustoty ρ? Predpokladajte, že guľa je vo vákuu.

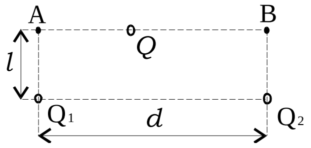
$$\left[\text{Pre } r \langle R : E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0},\ \textit{pre } r \rangle R : E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\right].$$

4.39. Tenká niť dlhá 10 cm je rovnomerne nabitá celkovým nábojom $3\cdot10^{-9}$ C . Vypočítajte veľkosť intenzity elektrického poľa v bode, ktorý leží na tej istej priamke ako niť a je vzdialený 20 cm od stredu nite. [720 $\mathrm{Vm^{-1}}$]

4.40.* Kladný náboj $4\cdot10^{-9}$ C je rovnomerne rozdelený na tenkom kovovom krúžku o polomere 0,2 m. Vypočítajte hodnotu potenciálu v bode, v ktorom veľkosť intenzity elektrického poľa dosahuje maximálnu hodnotu! [147 V]

4.41. Vo vákuu sa nachádza veľmi tenký disk polomeru r = 120 mm, na ktorom je rovnomerne rozložený náboj $q = 1{,}8\,\mu C$. Vypočítajte potenciál a veľkosť intenzity poľa vo vzdialenosti 80 mm na osi kolmej na rovinu disku.
[144,37 kV; $1\cdot10^6$ $\mathrm{kg.m.s^{-3}.A^{-1}}$]

4.42. Intenzita elektrického poľa na osi nabitého kruhového závitu má maximálnu hodnotu v istej vzdialenosti od stredu tohto závitu. Koľkonásobne je intenzita elektrického poľa menšia v bode, ktorý leží v polovičnej vzdialenosti od stredu závitu, ako maximálna hodnota intenzity? [1,3 krát]



Obr.29

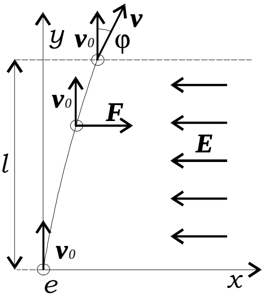
4.43. Na aký potenciál možno nabiť guľovú elektródu o priemere 5 cm obklopenú vzduchom, ak pri elektrickej intenzite 30 kV/cm nastáva výboj sršaním? [75 kV]

4.44. Vypočítajte prácu síl elektrostatického poľa pri premiestnení náboja Q v elektrickom poli nábojov Q_1 a Q_2 z bodu A do bodu B. (pozri obr. 29)

(Vypočítajte pre hodnoty Q=3C, Q_1=+10 C, Q_2=-10 C, d = 8m, l = 6m,) $\left[36\cdot10^9\,\mathrm{J}\right]$

4.45. Dve duté tenkostenné gule so spoločným stredom sa nachádzajú vo vákuu. Každá guľa je nabitá elektrickým nábojom $Q = 5.10^{-6}$ C. Polomery gulí sú r_1 = 1 m a r_2 = 2 m. Vypočítajte energiu elektrostatického poľa v priestore medzi guľami. Zmení sa energia elektrostatického poľa ak na vonkajšej guli odstránime náboj? [$5{,}625\cdot10^{-2}$ J; nezmení]

4.46. Vo vrcholoch trojuholníka ABC sa nachádzajú tri bodové náboje $Q_A = 3\cdot10^{-6}$ C, $Q_B = 5\cdot10^{-6}$ C a $Q_C = -8\cdot10^{-6}$ C. Rozmery strán trojuholníka sú AB = 0,3 m, AC = 0,4 m a BC = 0,5 m. Vypočítajte prácu potrebnú na vytvorenie tejto sústavy elektrických nábojov! Aké budú rozmery strán trojuholníka, a k sústava bude vytvorená dvojnásobnou prácou, ale symetria trojuholníka bude zachovaná? Sústavu nábojov uvažujte vo vákuu. [-8,09 J; polovičné rozmery strán]



Obr.30

4.47. Do homogénneho elektrostatického poľa intenzity ***E***, ktorého siločiary sú rovnobežné so súradnou osou x, vletí elektrón kolmo k siločiaram v smere osi y rýchlosťou v_0. Počiatok súradníc je v mieste vstupu elektrónu do poľa. Odvoďte rovnicu dráhy elektrónu a vypočítajte uhol φ, o ktorý sa odchýli smer pohybu elektrónu od pôvodného smeru pri prechode poľom šírky l! (Pole je ohraničené rovinami y = 0 a y = l). Pozri obr.30.

$$\left[x = \frac{eEy^2}{2mv_0^2},\ \text{parabola},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{eEl}{mv_0^2}\right]$$

4.48. Elektrón vlieta do homogénneho magnetického poľa. V tomto okamžiku sa nachádza v bode P. Smer jeho rýchlosti zviera uhol α s vektorom magnetickej indukcie. Po opísaní dráhy jedného závitu elektrón bude v bode Q. Vypočítajte vzdialenosť $\overline{PQ}$ ak α=60°, v =10^3 m.s^{-1} a B=1 T! [$1{,}786\cdot10^{-8}$ m]

4.49. Aký rozdiel potenciálov musí prejsť elektrón, aby jeho vlastný čas bol 10 krát väčší ako laboratórny čas. [4,6 MV]

4.50. Akú rýchlosť dosiahne α - častica, ak bude urýchlená rozdielom potenciálov 112 kV? [$3{,}28\cdot10^6$ m].

5 Dynamika tuhého telesa

V tomto paragrafe budeme skúmať pohyb tuhého telesa pod vplyvom vonkajších síl. Ohraničíme sa buď len na otáčanie sa okolo nepohyblivej osi, alebo zložitejší pohyb v rovine, ktorý pozostáva z postupného pohybu a z rotácie okolo osi prechádzajúcej cez ťažisko a kolmej na rovinu, v ktorej ležia dráhy všetkých bodov telesa. Je preto nutné najprv zoznámiť sa s hľadaním ťažiska tuhého telesa a až potom pristúpiť k problému zaoberajúcemu sa pohybom tuhého telesa.

Riešenie pohybu tuhých telies môžeme hľadať dvoma spôsobmi: Riešením prvej a druhej pohybovej rovnice alebo pomocou zákonov zachovania. V druhom prípade treba venovať pozornosť tomu, ktorý zo zákonov zachovania možno použiť, pretože na rozdiel od dynamiky hmotného bodu budú zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania momentu hybnosti dva od seba nezávislé zákony.

Voľbu spôsobu riešenia, ako aj postup riešenia každej konkrétnej úlohy možno urobiť až po podrobnom preskúmaní podmienok úlohy, t.j. detailného rozboru síl, ktoré pôsobia na jednotlivé telesá. Pritom musíme brať do úvahy miesta pôsobenia týchto síl.

1. Moment zotrvačnosti hmotného bodu je daný vzťahom

$$J = mr^2 ,$$

kde r je vzdialenosť hmotného bodu od osi otáčania.

2. Moment zotrvačnosti tuhého telesa, ktorý charakterizuje mieru zotrvačnosti tuhého telesa pri otáčavom pohybe, je daný vzťahom

$$J = \int_V \rho r^2 \mathrm{d}V ,$$

kde ρ je hustota tuhého telesa a r – vzdialenosť elementu objemu dV od osi otáčania

3. Steinerova veta hovorí, že ak poznáme moment zotrvačnosti tuhého telesa voči osi prechádzajúcej cez jeho hmotný stred J_0, potom moment voči paralelnej osi vo vzdialenosti a od osi prechádzajúcej cez hmotný stred vypočítame zo vzťahu

$$J = J_0 + ma^2 ,$$

kde m je hmotnosť tuhého telesa.

4. Moment sily vzhľadom na počiatok súradníc je rovný vektorovému súčinu polohového vektora bodu $\boldsymbol{r}$, v ktorom pôsobí sila $\boldsymbol{F}$, s touto silou,

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r} \ x \ \boldsymbol{F}]$$

5. Druhá pohybová rovnica, ktorá popisuje otáčavý pohyb tuhého telesa okolo osi, má tvar

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t} ,$$

kde $\boldsymbol{L}$ je moment hybnosti tuhého telesa.

6. Keď na tuhé teleso, ktoré sa otáča okolo nehybnej osi, pôsobí súčasne viac síl, výsledný moment síl je daný vektorovým súčtom jednotlivých momentov

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_3 + ...$$

7. Tuhé teleso otáčavé okolo osi je v rovnovážnej polohe, ak vektorové súčty všetkých síl a všetkých momentov síl, ktoré na teleso pôsobia, sú rovné nule:

$$\sum \boldsymbol{F}_i = 0; \quad \sum \boldsymbol{M}_i = 0$$

8. V izolovanej sústave je celkový moment hybnosti konštantný

$$\sum \boldsymbol{L}_i = konšt.$$

9.Kinetická energia tuhého telesa je rovná súčtu kinetickej energie jeho postupného pohybu a kinetickej energie jeho otáčavého pohybu

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{p}^2 + \frac{1}{2} J\,\omega^2,$$

kde v_p je postupná rýchlosť hmotného stredu tuhého telesa.

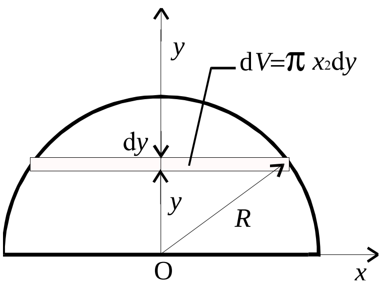
Riešené príklady

5.1. Nájdite polohu hmotného stredu homogénnej mosadznej pologule o polomere krivosti R! Vypočítajte pre R=4 cm!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
ρ = konšt.	x_t = ?
R = 4 cm	y_t = ?

Zo zadania je zrejmé, že hustota pologule ρ bude konštantná po celom objeme. Zvolíme si vhodne súradnicovú sústavu tak, aby sme využili symetriu telesa. Ak si zvolíme osi ako je to znázornené na obrázku 31, v dôsledku symetrie bude x-ová súradnica hmotného stredu rovná 0. Znamená to, že je potrebné vypočítať len y-ovú súradnicu hmotného stredu. Použijeme vzťah



Obr.31

$$y_t = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \tag{1}$$

kde dm je element hmotnosti a vzhľadom na ρ = konšt dostaneme

$$y_t = \frac{\int \rho y\,\mathrm{d}V}{\int \rho\,\mathrm{d}V} = \frac{\int y\,\mathrm{d}V}{V}, \tag{2}$$

kde dV je element objemu.

Riešenie:

Zvolíme si vhodne element objemu tak, ako je to znázornené na obrázku 31, potom

$$\mathrm{d}V = \pi x^2 \mathrm{d}y \quad \text{a} \quad x^2 = R^2 - y^2 .$$

Dosadením do vzorca (2) dostaneme

$$y_t = \frac{1}{V}\int_0^R \pi y\left(R^2 - y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}\pi\left[\frac{R^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^R = \frac{3}{8}R.$$

Ťažisko sa bude nachádzať vo výške 3/8 polomeru pologule nad jej základňou. Po dosadení číselnej hodnoty bude táto výška 1,5 cm.

5.2. Plný oceľový valec (ρ = 7,6 g/cm^3) dlhý 80 cm a hrubý 20 cm má mať na sústruhu 180 ot/min. Aká hnacia sila F sa musí prenášať na stupňový prevodový kotúč, ktorého priemer je: a) rovnaký ako priemer valca t.j. 20 cm; b) 30 cm, keď rozbehový čas môže trvať najviac 5 sekúnd. Aký výkon musí vyvinúť motor sústruhu v prípade a) a v prípade b)?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
valec	$F = ?$
$r_v = 0{,}1$ m	$P_{max} = ?$
$l = 0{,}8$ m	
$\rho = 7{,}6\cdot 10^3$ kg.m^{-3}	
$f = 3$ s^{-1}	
$\Delta t = 5$ s	
$r_1 = 0{,}1$m	
$r_2 = 0{,}15$ m	
$\omega_0 = 0$	

Hnacia sila $\boldsymbol{F}$ potrebná na roztočenie valca musí na prevodovom kotúči pôsobiť momentom sily $\boldsymbol{M}$, ktorý vyvolá uhlové zrýchlenie valca $\boldsymbol{\varepsilon}$ také, že po uplynutí rozbehového času bude uhlová rýchlosť valca rovná požadovanej hodnote t.j. $\omega = 2\pi f$.

Moment sily je rovný

$$\boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{r}\ x\ \boldsymbol{F}\right], \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor miesta pôsobenia sily $\boldsymbol{F}$ vzhľadom na stred prevodového kotúča. Pohybová rovnica valca má tvar

$$J\varepsilon = \boldsymbol{M}\ , \tag{2}$$

kde J je moment zotrvačnosti valca. Pretože vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$ sú na seba kolmé, môžeme upraviť rovnice (1) a (2) na skalárnu rovnicu.

$$F = \frac{J\,\varepsilon}{r} \tag{3}$$

Pretože veľkosť sily F je konštantná, bude konštantné aj zrýchlenie ε. Potom, ak vezmeme do úvahy, že počiatočná uhlová rýchlosť bola nulová, bude platiť $\omega = \varepsilon\Delta t$ a odtiaľ

$$\varepsilon = \frac{\omega}{\Delta t} \tag{4}$$

Dosadením rovnice (4) do rovnice (3) dostaneme výraz pre požadovanú silu. Výkon sily P je definovaný ako prvá derivácia jej práce podľa času

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\left(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\right) \tag{5}$$

pretože hodnota sily je konštantná.

Vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ bude rovný

$$\boldsymbol{v} = \left[\boldsymbol{\omega}\ x\ \boldsymbol{r}\right] \tag{6}$$

t.j. bude mať ten istý smer ako sila $\boldsymbol{F}$.

Z rovnice (5) je zrejmé, že maximálny výkon vyvinie hnacia sila na konci časového úseku Δt. Pomocou rovníc (3), (4), (5), (6) dostaneme

$$P_{max} = F\,\omega r \tag{7}$$

Riešenie: Moment zotrvačnosti plného valca je rovný $mr_v^2/2$. Hmotnosť valca je rovná súčinu jeho objemu a hustoty materiálu, z ktorého je valec vyrobený, $m = \rho\pi r_v^2 l$. Dosadením do rovnice (3) a úpravou dostaneme

a) $r = r_1 = r_v$

$$F = \frac{\pi r_v^2 l\rho r_v^2}{2r_1}\frac{2\pi f}{\Delta t} = \frac{\pi^2 r_v^3 l\rho f}{\Delta t} = \frac{(3{,}14)^2\cdot(0{,}1\mathrm{m})^3\cdot 0.8\mathrm{m}\cdot 7{,}6\cdot 10^3\mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 3\mathrm{s^{-1}}}{5\mathrm{s}} = 36\,\mathrm{N}$$

b) $r = r_2$

$$F = \frac{\pi r_v^2 l\rho r_v^2}{2r_2}\frac{2\pi f}{\Delta t} = \frac{\pi^2 r_v^4 l\rho f}{r_2\Delta t} = \frac{(3{,}14)^2\cdot(0{,}1\mathrm{m})^4\cdot 0{,}8\mathrm{m}\cdot 7{,}6\cdot 10^3\mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 3\mathrm{s^{-1}}}{0{,}15\mathrm{m}\cdot 5\mathrm{s}} = 24\,\mathrm{N}$$

Dosadením do rovnice (7) dostaneme

a) $$P_{Max} = F\,2\pi f r_1 = 36\mathrm{kg.m.s^{-1}}\cdot 2\pi\cdot 3\mathrm{s^{-1}}\cdot 0{,}1\mathrm{m} = 67{,}9W$$

b) $$P_{Max} = F\,2\pi f r_2 = 24\mathrm{kg.m.s^{-1}}\cdot 2\pi\cdot 3\mathrm{s^{-1}}\cdot 0{,}15\mathrm{m} = 67{,}9W$$

V oboch prípadoch požadovaný výkon je rovnaký, lebo v oboch prípadoch je potrebné vykonať tú istú prácu ($J\omega^2/2$) v tom istom čase (3s).

5.3. Na koncoch nite prevesenej cez kladku, ktorej hmotnosť je m_2= 2 kg, visia rovnaké závažia každé hmotnosti m = 2 kg. K jednému závažiu pridáme prívažok hmotnosti m_1 = 0,5 kg. Akú dráhu prejdú závažia za čas 1 s po uvoľnení kladky, keď trenie a odpor vzduchu neuvažujeme?

Úvaha:

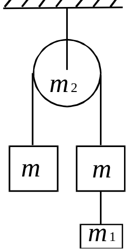
Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m = 2 kg	s = ?
m_1 = 0,5 kg	
m_2=2 kg	
t = 1 s	
v_0 = 0	

Po uvoľnení kladky bude tiažová sila $(m + m_1)g$, ktorá pôsobí na pravý koniec nite (pozri obr.32), väčšia ako tiažová sila mg, ktorá pôsobí na ľavý koniec nite a sústava sa začne pohybovať tak, že kladka sa otáča v smere hodinových ručičiek. Nech od okamžiku, kedy bola uvoľnená kladka, klesli závažia $m + m_1$ o vzdialenosť s a získali rýchlosť v. Potom, v dôsledku toho, že niť je nehmotná, závažie m získa tú istú rýchlosť a posunie sa nahor o vzdialenosť s. Okrem toho sa bude kladka, ktorej polomer je r, otáčať uhlovou rýchlosťou ω, pre ktorú platí vzťah

$$v = \omega r\ , \tag{1}$$

pretože medzi niťou a kladkou nie je žiadne šmykové trenie, t.j. pôsobí tu len sila statického trenia. Tiažové sily a tiež sila statického trenia medzi niťou a kladkou nezávisia od času, a preto zrýchlenie sústavy bude konštantné. Potom dráhu s môžeme vypočítať zo vzťahu

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\ .$$



Obr.32

V čase t=0 boli s_0 a v_0 rovné 0, a preto platí

$$s = \frac{1}{2} a t^2 . \tag{2}$$

Pretože na sústavu nepôsobia disipatívne sily (sily trenia), môžeme použiť zákon zachovania energie. Zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva, že úbytok potenciálnej energie sústavy bude rovný prírastku kinetickej energie sústavy

$$\Delta E_p = \Delta E_k . \tag{3}$$

Potenciálna energia bude funkciou dráhy a kinetická energia funkciou rýchlosti. Znamená to, že pomocou rovníc (2) a (3) môžeme vypočítať zrýchlenie a dráhu, ktorú prejdú závažia za čas t.

Riešenie:

Vyjadríme si zmeny potenciálnej a kinetickej energie sústavy závaží a kladky v čase t, keď závažia prejdú dráhu s.

$$\left(m + m_1\right) g s - m g s = \frac{1}{2}\left(m + m_1\right) v^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J\, \omega^2 . \tag{4}$$

Pretože kladka tvorí plný disk, bude jej moment zotrvačnosti $J = \frac{1}{2} m_2 r^2$ a použitím vzťahu (1) môžeme rovnicu (3) upraviť do nasledovného tvaru

$$m_1 g s = \frac{v^2}{2}\left(m_1 + 2m + \frac{m_2}{2} \right). \tag{5}$$

Dráha a rýchlosť sú funkciami času, a preto môžeme vypočítať zrýchlenie sústavy derivovaním rovnice (5) podľa času.

$m_1 g \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(m_1 + 2m + \dfrac{m_2}{2} \right)$, ale $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ je rýchlosť v a $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ je zrýchlenie a.

Po úprave dostaneme:

$$a = \frac{2m_1}{2m_1 + 4m + m_2} g .$$

Dosadením zrýchlenia do rovnice (2) dostaneme

$$s = \frac{m_1}{2m_1 + 4m + m_2} g t^2 = \frac{0{,}5\ \mathrm{kg}}{1\,\mathrm{kg} + 8\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}}\, 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}} \cdot 1^2 \mathrm{s}^2 \approx 0{,}446\ \mathrm{m}$$

5.4. Sústava pozostáva z voľnej a pevnej kladky. Tenké lanko je jedným koncom upevnené ku stropu, druhý koniec visí voľne z pevnej kladky. Medzi upevneným koncom lanka a pevnou kladkou sa nachádza voľná kladka. Pevnú kladku tvorí plný disk hmotnosti 2 kg o priemere 0,2 m. Voľná kladka má tú istú hmotnosť a polomer ako pevná kladka, len jej hmotnosť je prakticky celá rozdelená po obvode kladky, pozri obr.33. Akou konštantnou silou musíme pôsobiť na voľný koniec lanka, aby sme zdvihli závažie hmotnosti 10 kg, ktoré je upevnené na voľnej kladke, do výšky 2 m za 2s?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m = 2$ kg	$F = ?$
$r = 0{,}1$ m	
$M = 10$ kg	
$s = 2$ m	
$t = 2$ s	

Sila, ktorou budeme pôsobiť na lanko, uvedie do zrýchleného pohybu nie len závažie, ale aj kladky. Pretože sila pôsobiaca na lanko je konštantná, bude tento pohyb rovnomerne zrýchlený. Aby sme riešili pohyb celej sústavy, urobíme si analýzu síl a napíšeme si pohybové rovnice pre závažie a obe kladky. Na obrázku 33 sú znázornené sily, ktoré pôsobia v našej sústave. Je zrejmé, že voľná kladka a závažie na nej upevnené budú mať rovnaké postupné zrýchlenie, a preto môžeme napísať

$$(M + m)a = T_1 + T_2 - (M + m)g\ . \qquad (1)$$

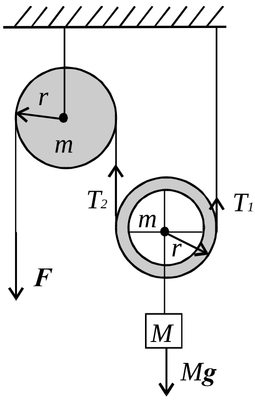
Voľná kladka sa bude otáčať so zrýchlením ε_1. Pohybová rovnica bude mať tvar

$$J_1\varepsilon_1 = (T_2 - T_1)r\ , \qquad (2)$$

kde $J_1 = mr^2$.

Podobne pre pevnú kladku bude platiť pohybová rovnica

$$J_2\varepsilon_2 = (F - T_2)r\ , \qquad (3)$$



Obr.33

kde $J_2 = \dfrac{1}{2}mr^2$.

Zrýchlenie závažia môžeme zistiť pomocou vzťahu pre dráhu pri rovnomerne zrýchlenom pohybe. Ak vezmeme do úvahy počiatočné podmienky bude platiť

$$a = \frac{2h}{t^2}\ . \qquad (4)$$

Máme štyri rovnice ale 5 neznámych Je zrejmé, že ak sa koniec lanka posunie o vzdialenosť $2x$, potom sa voľná kladka spolu so závažím zdvihnú o vzdialenosť x. Lanko je ideálne t.j. nepreklzuje, a preto sa pevná kladka pootočí o uhol $\varphi_2 = 2x/r$. Uhlové zrýchlenie pevnej kladky ε_2 sa rovná $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}t^2}$ a to sa rovná

$$\varepsilon_2 = 2a/r\ . \qquad (5)$$

Ostáva vyriešiť otázku o koľko sa pootočí voľná kladka ak sa lanko posunie o $2x$. Voľná kladka sa zdvihne o x a pootočí o uhol φ_1. Musí platiť rovnica

$$2x = \varphi_1 r + x\ . \qquad (6)$$

Uhlové zrýchlenie voľnej kladky ε_1 je druhou deriváciou rovnice (6)

$$\varepsilon_1 = a/r,\ \text{t.j.}\ \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1. \qquad (7)$$

Máme teraz 6 nezávislých lineárnych rovníc o 6 –tich neznámych a ich riešením zistíme hľadanú veličinu F.

Riešenie:

Pretože je potrebné vypočítať silu F je vhodné upraviť si rovnice (1) až (6) tak, aby sme dostali závislosť sily F od zrýchlenia, ktoré môžeme vypočítať z rovnice

(4). Použitím rovníc (5) a (7) a dosadením momentov zotrvačnosti upravíme rovnicu (1), (2) a (3) do nasledovného tvaru

$$(M+m)a = T_1 + T_2 - (M+m)g\,, \tag{8}$$

$$ma = T_2 - T_1\,, \tag{9}$$

$$ma = F - T_2\,. \tag{10}$$

Z rovnice (10) si vyjadríme T_2

$$T_2 = F - ma\,.$$

Dosadíme do rovnice (9) a po úprave dostaneme

$$T_1 = F - 2ma\,.$$

Po dosadení výrazov pre T_1 a T_2 do rovnice (8) dostaneme

$$F = \frac{1}{2}\left[(M+4m)a + (M+m)g\right].$$

a po dosadení z rovnice (4) za zrýchlenie bude sila F rovná

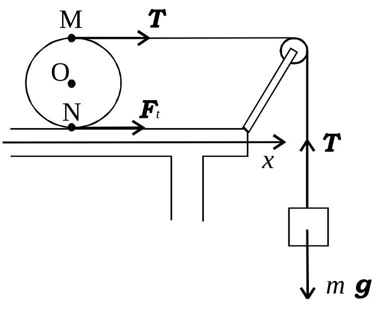
$$F = \frac{1}{2}\left[(M+4m)\frac{2h}{t^2} + (M+m)g\right].$$

$$F = \frac{1}{2}\left[(10\,\mathrm{kg} + 8\,\mathrm{kg})\frac{2\cdot 2\,\mathrm{m}}{4\mathrm{s}^2} + (10\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg})\cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s}^{-2}\right] = 67{,}86\,\mathrm{N}$$

5.5. Na stole leží valec hmotnosti 2,2 kg, ktorý sa môže odvaľovať po stole. Na valec je namotaná niť. Na voľnom konci nite, ktorá je vedená cez veľmi ľahkú kladku, je zavesené závažie tej istej hmotnosti ako má valec, pozri obrázok 34. Sústava je ponechaná sama na seba. Vypočítajte zrýchlenie závažia a silu šmykového trenia medzi valcom a stolom. Riešte pre prípady, že valec je a) dutý, b) plný.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m = 2{,}2$ kg	$a_a = ?$
a) dutý valec	$a_b = ?$
b) plný valec	$F_{ta} = ?$
	$F_{tb} = ?$



Obr.34

Sústava pozostáva z dvoch medzi sebou spojených telies, závažia a valca. (Vzhľadom na zadanie predpokladáme, že ľahká kladka ako aj vlákno sú nehmotné). Preto bude určitá väzba medzi zrýchlením valca a zrýchlením závažia. Na závažie pôsobí tiažová sila $m\boldsymbol{g}$ a ťahová sila vo vlákne, preto platí

$$m\boldsymbol{a}_1 = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}\,. \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{a}_1$ je zrýchlenie závažia. Z obrázku 34 je zrejmé, že závažie bude konať len postupný pohyb.

Na valec pôsobí tiažová sila, ktorú ale ruší sila reakcie stola a v horizontálnom smere ťahová sila vlákna $\boldsymbol{T}$ (v dôsledku toho, že vlákno a kladka sú nehmotné) a sila trenia medzi valcom a stolom. Obe tieto sily vyvolávajú otáčavé momenty voči osi valca (budeme predpokladať, že obe sily pôsobia v jednej a tej istej rovine, kolmej na os valca). Dôsledkom toho valec vykonáva v tejto rovine tak postupný, ako aj rotačný pohyb, pre ktoré platia nasledovné rovnice

$$m\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_t; \quad J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_T + \boldsymbol{M}_t, \tag{2}$$

kde a_0 je zrýchlenie ťažiska valca.

Aby sme zistili väzbu medzi a_1, a_0 a ε, preskúmame pohyb dvoch bodov M a N valca. Ako bolo uvedené, valec vykonáva súčasne dva pohyby, a preto rýchlosť jeho ľubovoľného bodu bude rovná $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}_i$, kde $\boldsymbol{v}_0$ je postupná rýchlosť ťažiska, $\boldsymbol{u}_i = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i]$ - rýchlosť, ktorá je spôsobená otáčaním sa valca okolo osi prechádzajúcej ťažiskom. Urobíme si projekciu rýchlostí bodov M a N na os *x*.

$$v_{M_x} = v_0 + \omega r; \quad v_{N_x} = v_0 - \omega r.$$

Deriváciou týchto rovníc dostaneme

$$a_{M_x} = a_0 + \varepsilon r; \quad a_{N_x} = a_0 - \varepsilon r,$$

kde a_{M_x} a a_{N_x} sú projekcie celkového zrýchlenia bodov M a N na os *x*. V prípade, že nedochádza ku šmyku valca, $v_{N_x} = 0$ a $v_0 = \omega r$. Preto platí

$$a_0 = \varepsilon r \tag{3}$$

a horizontálna zložka výsledného zrýchlenia bodu M a bude

$$a_{M_x} = a_0 + \varepsilon r = 2a_0.$$

V dôsledku toho, že vlákno a kladka sú nehmotné (t.j. vlákno sa nerozťahuje) bude horizontálna zložka zrýchlenia bodu M valca rovná zrýchleniu závažia

$$a_1 = 2a_0. \tag{4}$$

Hľadané veličiny môžeme nájsť riešením rovníc (1) a (2) s prihliadnutím na vzťahy (3) a (4). Ale rovnice (1) a (2) sú vo vektorovom tvare a je ich potrebné nahradiť skalárnymi, ale aby sme to mohli urobiť, potrebujeme zistiť smer sily trenia.

Sila trenia je sila statického trenia a smeruje proti vektoru rýchlosti bodu N, ktorú by tento bod mal, ak by nebolo šmykového trenia medzi valcom a stolom. V prípade, že počiatočná rýchlosť je rovná nule, $\boldsymbol{v}_N$ má totožný smer ako horizontálna zložka výsledného zrýchlenia $\boldsymbol{a}_N$, pre prípad, keď nie je šmykové trenie medzi valcom a stolom. Aj v tomto prípade valec vykonáva zložitý pohyb a platí

$$a_{N_x} = a_0 - \varepsilon r,$$

a_0 - je zrýchlenie ťažiska valca a ε - uhlové zrýchlenie valca v prípade, že nie je medzi nimi šmykové trenie medzi valcom a stolom. Teda smer sily šmykového trenia možno zistiť, ak najprv preskúmame túto úlohu bez prítomnosti tejto sily.

Riešenie:

Rovnice (2) v prípade, že nie je prítomné šmykové trenie, budú mať tvar

$$m\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{T}; \quad J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_T. \tag{5}$$

Prepíšeme si rovnice (5) do skalárneho tvaru

$$ma_0 = T; \quad J\varepsilon = Tr. \tag{6}$$

Napíšeme si moment zotrvačnosti valca v tvare $J = bmr^2$ (pre dutý valec bude $b = 1$ a pre plný $b = \frac{1}{2}$) a dosadíme do rovnice (6)

$$a_0 = T/m; \quad \varepsilon r = T/bm.$$

Pretože $b \le 1$, potom $a_0 \le \varepsilon r$ a $a_{N_x} = a_0 - \varepsilon r \le 0$. Ak $a_{N_x} = 0$, potom bod N valca sa nebude šmýkať po povrchu stola (pri ľubovoľnej hodnote *T*) a šmykové trenie nie je prítomné. Ak ale $a_{N_x} \langle 0$, potom sila šmykového trenia bude mať smer, ktorý je znázornený na obrázku 34.

Zvolíme si kladný smer nadol a potom platí

$$m\,a_1 = m\,g - T\ . \tag{7}$$

Rovniciam (2) zodpovedajú nasledovné skalárne rovnice

$$m a_0 = T + F_t\ ;\quad J\,\varepsilon = T\,r - F_t\,r\ . \tag{8}$$

Druhá rovnica vyjadruje, že tak ako aj v prípade, keď šmykové trenie nie je prítomné, valec sa bude otáčať v smere hodinových ručičiek.

Dosadením vzťahov (3) a (4) a výrazu pre moment zotrvačnosti do rovníc (7) a (8) dostaneme

$$m\,a_1 = m\,g - T\ ;\quad \frac{m\,a_1}{2} = T + F_t$$

$$\frac{b m r^2 a_1}{2r} = T\,r - F_t\,r$$

Vydelíme poslednú rovnicu polomerom *r* a riešením sústavy rovníc nájdeme

$$a_1 = 4g/(5+b),\quad F_t = mg(1-b)/(5+b)..$$

Pre plný valec $\left(b = \tfrac{1}{2}\right)$

$$a_1 = \tfrac{8}{11}g \approx 7{,}13\,\mathrm{m.s^{-2}};\quad F_t = \tfrac{1}{11}mg \approx 1{,}92\ \mathrm{N}$$

Pre dutý valec $(b = 1)$

$$a_1 = \tfrac{2}{3}g \approx 6{,}54\ \mathrm{m.s^{-2}};\quad F_t = 0$$

5.6. Horizontálna kruhová doska hmotnosti 100 kg a polomeru 1,5 m sa otáča okolo zvislej osi prechádzajúcej cez jej stred a robí za minútu 10 otáčok. Pritom na kraji dosky stojí človek s hmotnosťou 70 kg. Ako sa zmení frekvencia otáčania a akú prácu vykoná človek, keď prejde z kraja dosky do jej stredu?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m_1 = 100 kg	Δf = ?
m_2 = 70 kg	A = ?
R = 1,5 m	
f = 1/6 s^{-1}	

Práca, ktorú vykoná človek bude rovná rozdielu kinetickej energie sústavy po prejdení človeka do stredu platformy a kinetickej energie v počiatočnom stave. Pretože sústava vykonáva len rotačný pohyb bude kinetická energia vyjadrená vzťahom

$$E_k = \frac{J\,\omega^2}{2}, \tag{1}$$

kde *J* je moment zotrvačnosti sústavy a ω - uhlová rýchlosť sústavy.

Potom môžeme vyjadriť prácu, ktorú vykonal človek nasledovným vzťahom

$$A = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2\ . \tag{2}$$

Uhlovú rýchlosť ω_2 môžeme stanoviť zo zákona zachovania momentu hybnosti, pretože sústava doska s človekom je čiastočne izolovaná sústava. Vyplýva to z toho, že v horizontálnej rovine nepôsobia na sústavu žiadne vonkajšie sily a vo zvislom smere sa podľa zadania nepohybuje. Preto bude platiť

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \,. \tag{3}$$

Riešenie:

Pre momenty zotrvačnosti sústavy v počiatočnom a konečnom stave budú platiť vzťahy

$$J_1 = \frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2 \ , \tag{4}$$

$$J_2 = \frac{m_1R^2}{2} \ . \tag{5}$$

kde R je polomer dosky, m_1 – hmotnosť dosky a m_2 – hmotnosť človeka.
ω bude rovné $2\pi f$, kde f je počet otáčok za sekundu. Dosadením rovníc (4) a (5) do rovnice (3) dostaneme

$$\left(\frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2\right)\omega_1 = \omega_2\frac{m_1R^2}{2} \ . \tag{6}$$

A odtiaľ $\omega_2 = \omega_1\dfrac{m_1R^2 + 2m_2R^2}{m_1R^2} = \omega_1\dfrac{m_1 + 2m_2}{m_1}$.

Keďže $\omega=2\pi f$

$$f_2 = f_1\frac{m_1 + 2m_2}{m}$$

a

$$f_2 = \frac{1\text{s}^{-1}}{6}\,\frac{100\text{ kg} + 140\text{ kg}}{100\text{ kg}} = 0{,}4\text{ s}^{-1} \,.$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 0{,}4\text{s}^{-1} - \frac{1}{6}\text{s}^{-1} = \frac{7}{30}\text{s}^{-1} \,.$$

Dosadením do rovnice (2) výrazov pre momenty zotrvačnosti a keď ω_2 vyjadríme pomocou rovnice (3), dostaneme po úprave výraz pre hľadanú prácu

$$A = \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\left(\frac{m_1 + 2m_2}{m_1}\right)^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2\right)\omega_1^2$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_1 + 2m_2}{m_1}\right)^2\frac{m_1}{2} - \left(\frac{m_1 + 2m_2}{2}\right)\right](2\pi f_1R)^2$$

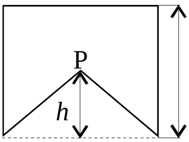
$$A = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{100\text{ kg} + 140\text{ kg}}{100\text{ kg}}\right)^2 50\text{ kg} - \left(\frac{100\text{ kg} + 140\text{ kg}}{2}\right)\right]\left(2\pi\frac{1}{6}1{,}5\right)^2\text{ m}^2.\text{s}^{-2}$$

$$A = 562{,}5\text{ N}$$

Neriešené príklady

5.7. Štvorcová platňa o strane 0,1 m leží na vodorovnej podložke. Z platne vyrežeme rovnoramenný trojuholník so základňou rovnou jednej strane dosky, pozri obr.35. Aká musí byť výška trojuholníka, aby doska zavesená v bode P, kde sa nachádza vrchol trojuholníka, zostala visieť vo vodorovnej polohe?
[0,063 m]

5.8. Vypočítajte polohu ťažiska rovnorodej kruhovej dosky o polomere $R = 0{,}5$ m, v ktorej bol urobený štvorcový otvor so stranou $a = R/2$ vo vzdialenosti $R/2$ od stredu dosky. [$\cong 0{,}02$ mm od stredu dosky]



Obr.35

5.9.* Tenký homogénny drôt je ohnutý do tvaru polkružnice polomeru R. Nájdite polohu ťažiska vzhľadom na stred krivosti ak R sa rovná 30 cm! [60/π cm]

5.10. Nájdite polohu ťažiska rovnorodého kužeľa výšky v ! [Ťažisko sa nachádza v 3/4 výšky od vrcholu kužeľa]

5.11. Dve častice P_1 a P_2 s hmotnosťami m_1 a m_2 sa nachádzajú vo vzdialenosti d od seba. V čase $t = 0$ sa častica P_2 začala pohybovať rýchlosťou v_2 v priamke preloženej ich spojnicou a vzďaľuje sa od častice P_1. Súčasne častica P_1 sa začala pohybovať rýchlosťou v_1 v smere kolmom na túto spojnicu. Vyšetrite, aký je pohyb ťažiska tejto sústavy:

a) zvoľte si vhodne ortonormálny vzťažný systém a vyjadrite polohu ťažiska tejto sústavy v čase $t = 0$;
b) vyjadrite, ako sa mení polohový vektor ťažiska s časom;
c) zistite rovnicu dráhy ťažiska;
d) vypočítajte rýchlosť ťažiska a jeho zrýchlenie;
e) Aký pohyb vykonáva ťažisko?

Riešte pre hodnoty m_1= 2g, m_2 = 3g, d = 5 cm, v_1= 1 cm.s^{-1}, v_2= 2 cm.s^{-1}!

[a) x_T = 3 cm; y_T = 0. b) $\boldsymbol{r} = (3\,\text{cm} + 1{,}2\,\text{cm.s}^{-1} \cdot t\,)\boldsymbol{i} +\ 0{,}4\text{cm.s}^{-1} \cdot t \cdot \boldsymbol{j}$.

c) $y = \dfrac{1}{3}x - 1\text{cm}$. d) 1,26 cm.s^{-1}; 0 . e) Priamočiary, rovnomerný.]

5.12. Sústava pozostávajúca z troch častí, hmotnosti ktorých sú m_1=5g, m_2=10g a m_3=15g, sa nachádza v ortonormálnom vzťažnom systéme. V čase $t = 0$ je ich poloha určená súradnicami, ktorých hodnoty v zátvorkách sú udané v cm: P_1 (3,4,5), P_2(-2,4,-6) a P_3 (0,0,0) .

a) Nájdite polohu ťažiska v čase $t = 0$;
b) nájdite zrýchlenie a polohu ťažiska v čase t=10s, ak na sústavu začala pôsobiť v čase t=0 v smere osi x konštantná sila $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ N .

[a) $x_t(0)$ = -0,17 cm; $y_t(0)$ = 2 cm; $z_t(0)$ = -1,17 cm; b) a = 0,333 m.s^{-2}; x_t(t) = 16,7 cm; y_t(t) = 2 cm; z_t(t) = -1,17 cm.]

5.13. Stanovte maximálnu hodnotu momentu zotrvačnosti obdĺžnikovej homogénnej dosky hmotnosti 0,6 kg s rozmermi strán 10 cm a 20 cm vzhľadom na os kolmú k rovine dosky a prechádzajúcu cez dosku. [$1 \cdot 10^{-2}$ kg.m^2]

5.14. Nájdite moment zotrvačnosti rovnorodej dosky tvaru rovnoramenného trojuholníka s ramenami b a základňou $2a$ vzhľadom na os kolmú na základňu a prechádzajúcu protiľahlým vrcholom, ak hmotnosť dosky je m ! [$(1/6)ma^2$]

5.15. Aký priemer má kruhový kotúč s hmotnosťou 8 kg, ktorého moment zotrvačnosti J = 1,69 kg.m^2? [d = 1,3m]

5.16. Kovový prstenec má nasledovné rozmery: vonkajší priemer 58 cm, vnútorný priemer 50 cm, šírka 6 cm. Moment zotrvačnosti J = 0,8058 kg.m^2. Z akého materiálu môže byť prstenec zhotovený? [ρ=2,7g/cm^3 , hliník]

5.17. O koľko treba predĺžiť homogénnu tyč dĺžky 75 cm, aby sa jej moment zotrvačnosti vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu ťažiskom tyče zdvojnásobil? [19,5cm].

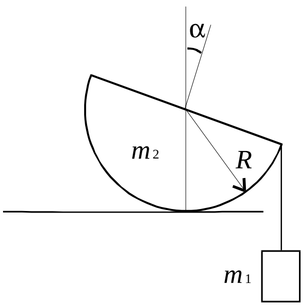
5.18. Moment zotrvačnosti vzhľadom na os masívneho dreveného valca s hmotnosťou 6 kg, s priemerom 12 cm a s dĺžkou 1 m treba strojnásobiť obalením do oloveného plášťa. Aký hrubý musí byť olovený plášť? [1,36 mm]

5.19.* Stanovte minimálnu hodnotu momentu zotrvačnosti polkruhovej homogénnej dosky hmotnosti 2 kg s polomerom obvodu 15 cm vzhľadom na os kolmú k rovine dosky. [$14{,}4 \cdot 10^{-3}$ kg.m^2]

5.20. Karoséria auta má hmotnosť 300 kg, 4 kolesá, ktoré možno považovať za masívne kotúče, majú hmotnosť 25 kg. Zotrvačnosť celkovej hmotnosti, ktorú treba prekonať pri uvedení auta do chodu, treba zväčšiť o určitú hodnotu, ktorá má zohľadniť moment zotrvačnosti kolies. Koľko % celkovej hmotnosti treba pripočítať? [12,5%]

5.21. Na jeden koniec vodorovnej tyče hmotnosti 3 kg dlhej 1,5 m zavesíme teleso hmotnosti 15 kg. V akej vzdialenosti od tohto konca musíme tyč podoprieť, aby bola v rovnováhe vo vodorovnej polohe? [0,125 m]

5.22. Drevená doska je ponorená vo vode tak, že je jedným koncom položená na kameň vyčnievajúci nad hladinu a druhým voľne spočíva vo vode. Ponorená časť predstavuje 35% jej dĺžky. Aká je hustota dreva dosky? [580 kgm^{-3}]



Obr.36

5.23. Závažie hmotnosti 1 kg je zavesené na okraji homogénnej polgule polomeru R, hmotnosti 10 kg, ktorá je uložená svojou vypuklou plochou na vodorovnej podložke, pozri obr. 36. Pri akom uhle odklonu α nastala rovnováha sústavy ? [α=15°]

5.24. Kruhový kotúč s hmotnosťou 5 kg a s priemerom 30 cm treba zo stavu pokoja za 0,5 sekundy jeden raz otočiť. Aká sila F musí tangenciálne zaúčinkovať na obvode kotúča? [19N]

5.25. Akú uhlovú rýchlosť dosiahne zotrvačník hmotnosti 20 kg a s priemerom 60 cm, keď počas 12 sekúnd poháňame krútiacim momentom 6 Nm? Na začiatku bol zotrvačník v pokoji. [80 s^{-1}].

5.26. Aký je moment zotrvačnosti kotvy elektromotora, ktorej otáčky v dôsledku trenia v ložiskách (trecí moment M = 0,819 N.m) počas 4,5 sekundy klesnú z n_1 = 1500 ot/min na n_2 = 400 ot/min? [0,032 kg.m^2].

5.27. Ležiaci hranol s hmotnosťou 20 kg a dĺžkou 6 m treba na jednom konci zdvihnúť za 1 sekundu do výšky 1 m. Aká sila je na to potrebná? [111 N].

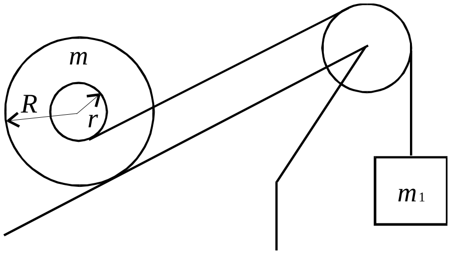
5.28. Vypočítajte zrýchlenie a maximálnu rýchlosť, ktorú dosiahne plný valec, ak ho spustíme po naklonenej rovine z výšky 5 m. Hmotnosť valca je 50 kg a jeho polomer 0,1 m. Naklonená rovina zviera s vodorovnou rovinou uhol 30°. Odpor vzduchu zanedbajte. Pohyb valca po naklonenej rovine uvažujte bez prekĺzania.
[3,27 m.s^{-2}; 8,08 m.s^{-1}]

5.29. Vrtuľka ventilátora sa otáča rýchlosťou 900 otáčok za minútu. Po vypnutí ventilátora sa vrtuľka otáčala rovnomerne spomalene a do zastavenia urobila 75 otáčok. Práca brzdiacich síl bola 44.4 J. Vypočítajte dobu za ktorú sa ventilátor zastavil, moment zotrvačnosti vrtuľky a brzdiaci moment síl. [10 s, 0,01 kg.m^2 , 0,094 kg.m^2.s^{-2}]

5.30.* Guľa bola vrhnutá na vodorovnej rovine tak, že v prvom okamihu mala len postupnú rýchlosť. V dôsledku trenia o rovinu sa začala otáčať. Vypočítajte, aká časť kinetickej energie sa spotrebovala na prácu síl trenia od začiatku pohybu do času, keď sa guľa začala odvaľovať po rovine bez preklzávania? [2/7]

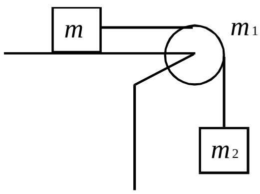
5.31. Zotrvačník sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou odpovedajúcej frekvencii 10 otáčok za sekundu. Jeho kinetická energia je 8000 J. Za akú dobu otáčavý moment síl rovný 50 Nm zväčší jeho uhlovú rýchlosť na dvojnásobnú.
[≅ 5 s]

5.32. Na naklonenej rovine leží cievka (pozri obr.37) o polomere R =0,1 m, ktorej hmotnosť m = 5 kg je prakticky rozložená len na jej plášti. Na osi cievky polomeru r = 0,05 m je navinutá niť, vedená cez nehmotnú kladku a pripevnená k voľne visiacemu telesu hmotnosti m_1 = 5 kg. Vypočítajte pri akom uhle sklonu α naklonenej roviny sa bude ťažisko cievky nachádzať v pokoji. Trenie medzi cievkou a stolom je zanedbateľné. [53,1°]



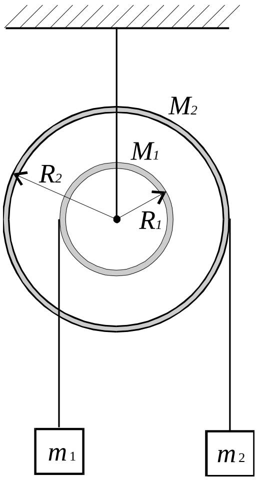
Obr.37

5.33. Hmotnosť telesa na stole je 5 kg a koeficient trenia medzi stolom a telieskom je k = 0,01. Hmotnosť kladky, ktorú tvorí plný disk, je 2 kg a jej polomer je 0,1 m. Hmotnosť visiaceho závažia je 1 kg, pozri obr. 38. Vypočítajte prácu síl trenia od počiatku pohybu počas 3s!
[2,9 J]



Obr.38

5.34. Dvojstupňová kladka (pozri obr.39) pozostáva z dvoch napevno spojených tenkých obručí, polomery, ktorých sú R_1=0,2 m a R_2=0,4 m a hmotnosti M_1 = 2 kg a M_2 = 6 kg. Na každý stupeň kladky sú namotané nite na konci ktorých sú upevnené závažia o hmotnosti m_1=10 kg a m_2 = 6 kg. Vypočítajte zrýchlenia závaží m_1 a m_2 a silu, ktorou sústava pôsobí na podves.
[0,327 m.s^{-2}; 0,654m.s^{-2} ; 234,8 N]



Obr.39

5.35. Rotor motora s momentom zotrvačnosti 500 g.cm^2 dostane v stave pokoja prúdový impulz, ktorý vyvolá hnací impulz momentu sily, vyznačujúci sa lineárnym poklesom z počiatočnej hodnoty 2 N.cm na nulovú hodnotu za čas 20 ms. Akú uhlovú rýchlosť rotor získa? [4 s^{-1}]

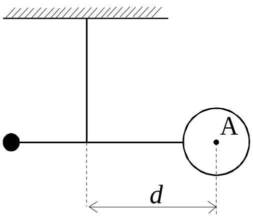
5.36. Trecia spojka je tvorená dvomi kotúčmi, ktoré pri vzájomnom pritláčaní prenášajú trením hnací moment motora na poháňanú sústavu. Zistite mechanickú účinnosť spojky za predpokladu, že otáčky motora i trecí moment spojky sú počas rozbehu konštantné a moment pôsobí až kým sa otáčky oboch kotúčov vyrovnajú. [50%]

5.37. Homogénna kruhová doska polomeru 0,1m sa nachádza vo vertikálnej rovine a môže sa otáčať okolo vodorovnej osi kolmej na dosku a vzdialenej od stredu dosky 0,03m. Dosku vychýlime z rovnovážnej polohy do polohy, v ktorej je stred dosky vo výške osi a potom ju voľne pustíme. Vypočítajte počiatočné uhlové zrýchlenie dosky a uhlovú rýchlosť pri prechode rovnovážnou polohou! Trenie na osi zanedbajte!
[$\varepsilon \cong 49{,}88$ s^{-2}; $\omega \cong 10$ s^{-1}]

5.38. Guľa a plný valec , ktoré majú rovnakú hmotnosť, polomer a postupnú rýchlosť, sa začínajú pohybovať nahor po naklonenej rovine. Ktoré z týchto dvoch telies dosiahne väčšiu výšku? Vypočítajte pomer výšok, ktoré dosiahnu tieto telesá. [valec vystúpi vyššie; 1,07]

5.39. Oceľová trubka dĺžky 1,2 m a hmotnosti 2 kg je zavesená za jeden koniec. V ktorom mieste (merané od bodu závesu) do nej musíme udrieť kladivom hmotnosti 2 kg vo vodorovnom smere, aby sa kladivo po náraze (dokonale pružnom) neodrazilo, ale ostalo stáť? Akú rýchlosť malo kladivo, ak sa tyč vychýlila o uhol 0,2 rad?
[0,7 m; 0,97 m.s^{-1}]

5.40.* Oceľová guľa je zavesená tak, že kýva ako fyzikálne kyvadlo s maximálnym kmitočtom. Pri svojom pohybe mala v rovnovážnom bode moment hybnosti 4 kg.m^2.s^{-1} a kinetickú energiu 1 J. Vypočítajte vzdialenosť bodu závesu od ťažiska. [0,05m]



Obr.39

5.41. Guľka hmotnosti $5 \cdot 10^{-3}$ kg, ktorá letí rýchlosťou v = 800 m/s, naráža do bodu A balistického kyvadla v tvare disku (pozri obr. 39) a zastaví sa. Vzdialenosť bodu A od osi otáčania je 0,5 m. Moment zotrvačnosti balistického kyvadla je 0,025 kg.m^2. Vypočítajte počiatočnú uhlovú a postupnú rýchlosť stredu disku! Ráz považujte za absolútne nepružný. [80 s^{-1}; 40 m.s^{-1}]

5.42. Horizontálna kruhová doska hmotnosti 80 kg o polomere 1 m sa otáča s uhlovou rýchlosťou 20 otáčok za minútu. V jej strede stojí človek a v roztiahnutých rukách drží činky. Vypočítajte, aký počet otáčok za minútu bude robiť doska, ak človek spustením rúk zmenší svoj moment zotrvačnosti z 2,94 kg.m^2 na 0,98 kg.m^2! Koľkokrát sa zväčší kinetická energia dosky s človekom? [21 ot/min, 1,05 krát]

5.43. Kruhová doska rotuje okolo dokonale hladkej osi uhlovou rýchlosťou 100 πs^{-1}. Moment zotrvačnosti dosky vzhľadom na rotačnú os je 0,03 kg.m^2. Doska sa približuje k druhej kruhovej doske, uloženej na tej istej osi. Moment zotrvačnosti druhej dosky vzhľadom na os, na ktorej je uložená, je 0,01 kg.m^2 a je v pokoji do tej doby, kým na ňu nenarazí prvá. Po náraze, pretože je povrch dosiek drsný, uvedie sa aj druhá do pohybu. Vypočítajte spoločnú uhlovú rýchlosť sústavy! Vypočítajte koľko tepla vzniklo pri náraze!
[75 πs^{-1}; $Q \cong$ 370 J]

6 Neinerciálne vzťažné sústavy

Ako bolo uvedené v § 2, Newtonove pohybové zákony platia len v inerciálných vzťažných sústavách. V neinerciálnych vzťažných sústavách môžeme používať zákony klasickej mechaniky za predpokladu, že okrem síl vzájomného pôsobenia medzi telesami budeme brať do úvahy zotrvačné sily, ktoré nie sú vyvolané vzájomným pôsobením telies. Musíme ale mať na zreteli, že práca inerciálnej sily je práca sily v inerciálnej vzťažnej sústave, ktorá udeľuje zrýchlenie neinerciálnej vzťažnej sústave. Zotrvačné sily závisia predovšetkým od druhu pohybu neinerciálnej sústavy. Znamená to, že ak chceme zistiť aké zotrvačné sily budú pôsobiť, musíme vedieť ako sa pohybuje neinerciálna sústava voči inerciálnej sústave, t.j. musíme vedieť kinematické parametre pohybu neinerciálnej sústavy.
Z praktického hľadiska majú význam dva druhy neinerciálnych sústav.
1. Neinerciálna sústava, ktorá sa pohybuje voči inerciálnej sústave priamočiaro so zrýchlením $\boldsymbol{a}_0$. V tejto sústave bude zotrvačná sila pôsobiaca na teleso hmotnosti m rovná

$$\boldsymbol{F}_z = -m\boldsymbol{a}_0 .$$

2. Neinerciálna sústava, ktorá sa otáča okolo nepohyblivej osi. V tejto sústave budeme rozlišovať dva prípady:
a) Teleso hmotnosti m je voči neinerciálnej sústave v pokoji. Potom naň budú pôsobiť zotrvačné sily rovné

$$\mathbf{F}_z = -m\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{r}\right] + m\,\omega^2\mathbf{r},$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je uhlová rýchlosť neinerciálnej sústavy v inerciálnej sústave, $\boldsymbol{r}$ – polohový vektor telesa voči osi otáčania.
b) Teleso sa pohybuje v neinerciálnej sústave rýchlosťou $\boldsymbol{v}'$. V tomto prípade budú na teleso pôsobiť tri zotrvačné sily

$$\mathbf{F}_z = m\,\omega^2\mathbf{r} - 2m\left[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'\right] - m\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{r}\right].$$

Prvá sa volá odstredivá, druhá Coriolisova sila.

Riešené príklady

6.1. Vo vozni je na poličke uložený kufrík. Uhol sklonu poličky vzhľadom k vodorovnej rovine je $\alpha = 5°$. Pri brzdení vozňa kufrík s poličky spadol. Vypočítajte minimálnu hodnotu spomalenia vozňa, keď faktor adhézie medzi poličkou a kufríkom je 0,3! Vozeň sa pohybuje po vodorovnej trati.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$\alpha = 5°$	$a = ?$
$\mu_0 = 0{,}3$	

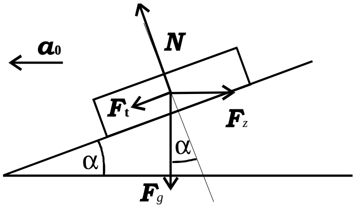
Úlohu budeme riešiť z hľadiska neinerciálnej sústavy spojenej s brzdeným vagónom. Potom na kufrík pôsobí okrem jeho sily tiaže $\boldsymbol{F}_g$, reakcie od podložky $\boldsymbol{N}$ a sily trenia $\boldsymbol{F}_t$ aj zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_z = -m\boldsymbol{a}_0$, kde $\boldsymbol{a}_0$ je zrýchlenie vagóna, pozri obr. 41. Podmienkou rovnováhy kufríka je, aby výsledná sila na neho pôsobiaca bola rovná 0.

$$\boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_z = 0 . \qquad (1)$$

Zvolíme si súradnicové osi: x –ovú vo smere poličky a y –ovú vo smere na ňu kolmom. Rovnicu (1) rozpíšeme pre priemety síl do osí x a y

$$-mg\sin\alpha - F_t + m a_0 \cos\alpha = 0\,, \qquad (2)$$

$$-mg\cos\alpha + N - m a_0 \sin\alpha = 0\,. \qquad (3)$$



Obr.41

Riešenie:

Sila F_t je silou statického trenia a jej maximálna veľkosť je

$$F_{t\max} = \mu_0 N \qquad (4)$$

Keďže budeme počítať s touto maximálnou hodnotou trenia, z rovníc (2) a (3) vypočítame hraničné zrýchlenie, pri ktorom sa ešte kufrík nepohne. Po dosadení N z rovnice (3) do rovnice (4) dostaneme

$$F_{t\max} = \mu_0 m\left(a_0 \sin\alpha + g\cos\alpha\right),$$

a odtiaľto dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$m\left(a_0\cos\alpha - g\sin\alpha\right) = \mu_0 m\left(a_0\sin\alpha + g\cos\alpha\right)$$

Riešením pre a_0 dostaneme

$$a_0 = g\,\frac{\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha}$$

$$a_0 = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}\,\frac{\sin 5^\circ + 0{,}3\cdot\cos 5^\circ}{\cos 5^\circ - 0{,}3\cdot\sin 5^\circ} = 3{,}9\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

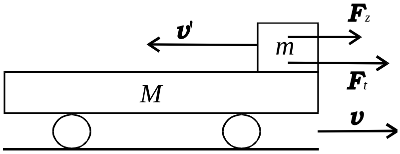
Kufrík sa nepohne z poličky, ak vlak brzdí so spomalením menším alebo rovným 3,9 m.s^{-2}.

6.2. Po hladkých koľajniciach sa horizontálne pohybuje vozík hmotnosti 50 kg rýchlosťou 1 m.s^{-1}. Na predný okraj vozíka opatrne položili závažie hmotnosti 2 kg. Koeficient šmykového trenia medzi závažím a vozíkom je rovný 0,1. Pri akej minimálnej dĺžke vozíka závažie nespadne z vozíka?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
M = 50 kg	l= ?
m = 2 kg	
v = 1 m.s^{-1}	
μ =0,1	

V prvom okamihu vozík akoby sa snažil ujsť z pod závažia. Ale v dôsledku sily trenia sa bude rýchlosť vozíka vzhľadom na koľajnice zmenšovať a rýchlosť závažia vzrastať. Závažie nespadne z vozíka, ak za čas, po ktorom budú rýchlosti vozíka a závažia voči koľajniciam rovnaké, dráha závažia vzhľadom na vozík s' nebude väčšia ako je dĺžka vozíka l. Znamená to, že úloha vedie k hľadaniu relatívnej dráhy s' závažia a toto je vhodné riešiť v súradnicovej sústave pevne spojenej s vozíkom, pozri obr.42. Táto súradnicová sústava je neinerciálnou, pretože v dôsledku sily trenia, pokiaľ sa závažie vzhľadom na vozík nezastaví, pohybuje sa vozík spomalene. Spomalenie a_0, ktoré získa vozík v dôsledku sily trenia, má horizontálny smer. Na závažie v neinerciálnej sústave pevne spojenej s vozíkom budú pôsobiť tiažová sila a sila reakcie vozíka, ktoré sa vzájomne



Obr.42

kompenzujú, sila trenia $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ a zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_z = -m\boldsymbol{a}_0$. V okamihu položenia závažia bude jeho rýchlosť voči vozíku $\boldsymbol{v}_0' = -\boldsymbol{v}$. Keď závažie skončí svoj relatívny pohyb voči vozíku, prejde dráhu s', a jeho konečná rýchlosť vzhľadom na vozík je rovná 0. Je zrejmé, že úbytok kinetickej energie závažia na dráhe s' je:

$$\Delta E_\mathrm{k} = A_\mathrm{t} + A_\mathrm{z}\ , \qquad (1)$$

kde A_t je práca na prekonanie trenia;

A_z – zdanlivá práca zotrvačnej sily.

Obe sily F_t a F_z sú konštantné, a preto práca, ktorú tieto sily vykonajú bude priamo úmerná dráhe s'. Znamená to, že pomocou rovnice (1) môžeme vypočítať dráhu s' ak poznáme obidve sily.

Riešenie:

Aby sme mohli nájsť zotrvačnú silu, ktorá pôsobí na závažie, je potrebné zistiť zrýchlenie $\boldsymbol{a}_0$ vozíka. Sila trenia, ktorou pôsobí závažie na vozík je

$$F_t = \mu m g\ .$$

Smer tejto sily má opačný smer ako rýchlosť vozíka $\boldsymbol{v}$. Pretože je to jediná sila pôsobiaca v horizontálnom smere na vozík bude jeho zrýchlenie

$$a_0 = \mu m g / M$$

a vektor $\boldsymbol{a}_0$ bude tiež mať smer opačný smeru rýchlosti $\boldsymbol{v}$. Na závažie budú pôsobiť sily

$$F_\mathrm{t} = \mu m g, \quad F_z = m\,\mu m g / M\ .$$

Obidve tieto sily sú orientované proti smeru relatívnej rýchlosti závažia voči vozíku. Pri posunutí závažia po vozíku do vzdialenosti s' bude práca týchto síl záporná.

$$A_\mathrm{t} = -\mu m g s', \quad A_z = -m\,\mu m g s'/M\ . \qquad (2)$$

Zmena kinetickej energie závažia je

$$\Delta E_k = -m\left(v_0'\right)^2/2 = -m v^2/2 \qquad (3)$$

Po dosadení rovníc (2) a (3) do rovnice (1) dostaneme

$$-m v^2/2 = -\mu m g s'\left(1 + m/M\right)$$

a odtiaľto

$$s' = \frac{M v^2}{2\mu g\left(m + M\right)}.$$

Znamená to, že závažie nespadne z vozíka ak jeho dĺžka l bude

$$l \geq s' = \frac{M v^2}{2\mu g\left(m + M\right)}$$

$$l \geq \frac{50\mathrm{kg}\cdot 1^2\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}}{2\cdot 0{,}1\cdot 9{,}81\ \mathrm{m.s}^{-2}(2+50)\mathrm{kg}}$$

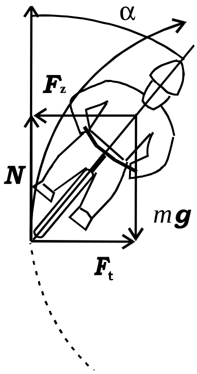
$$l \geq 0{,}49\ \mathrm{m}$$

6.3. Cyklista, ktorý ide po priamej betónovej ceste rýchlosťou 27 km/hod, náhle vojde do zákruty s polomerom 25 m. Ako sa musí cyklista nakloniť, aby bezpečne prešiel zákrutou?

Úvaha:

Zadané veličiny Hľadané veličiny
$v = 7{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$ $\alpha = ?$
$r = 25\ \mathrm{m}$

Budeme skúmať cyklistu a bicykel ako jediné tuhé teleso. Na bicyklistu pri jeho pohybe pôsobí tiažová sila, sila reakcie vozovky, sila pohonu a sily trenia tak v smere dotyčnice k trajektórii ako aj v smere do stredu kruhu. Pri pohybe po kružnici nie je žiaden posun bicykla v radiálnom smere, čo znamená, že posledná sila je silou trenia v pokoji. Keď sa bicyklista pohybuje konštantnou rýchlosťou, sila pohonu a sila trenia v smere dotyčnice k trajektórií sú rovnako veľké a opačného smeru a preto sa rušia. Tiažová sila pôsobí v ťažisku. Sila reakcie vozovky a radiálna sila trenia v pokoji pôsobia v najnižšom bode oboch kolies a vyvolávajú otáčavý moment voči horizontálnej osi, ktorá prechádza cez hmotný stred bicyklistu, pozri obr. 43. Táto os sa spolu s hmotným stredom pohybuje vzhľadom k Zemi po kružnici a teda sa pohybuje so zrýchlením. Znamená to, že súradnicová sústava spojená s hmotným stredom bicyklistu je neinerciálna sústava a preto v tejto sústave bude pôsobiť na bicyklistu ešte zotrvačná odstredivá sila



Ob.43

$$\boldsymbol{F}_z = \sum_j \boldsymbol{F}_{zj} = -\sum m_j \boldsymbol{a}_{0j} = \sum m_j \omega^2 \boldsymbol{r}_j ,$$

kde m_j je hmotnosť j -tého hmotného bodu,
$\boldsymbol{a}_{0j}$- normálové zrýchlenie j-tého hmotného bodu, ktoré má smer do stredu kruhu,
$\boldsymbol{r}_j$- polohový vektor hmotného bodu vzhľadom na stred kružnice.

Budeme predpokladať, že rozmery bicyklistu sú malé voči polomeru kružnice. Potom môžeme položiť polomery každého hmotného bodu rovné polomeru kružnice t.j. $r_j = r$. Znamená to, že aj postupná rýchlosť všetkých hmotných bodov bude rovnaká a

$$v_j = \omega r \quad \text{a} \quad F_z = m\,\omega^2 r \,.$$

V takomto prípade zotrvačná odstredivá sila pôsobí v hmotnom strede a nevyvoláva otáčavý moment voči uvažovanej osi. Podmienka rovnováhy bicyklistu bude spočívať v tom, aby súčet momentov síl trenia v pokoji M_t a reakcie vozovky $\boldsymbol{M}_N$ voči horizontálnej osi, ktorá prechádza cez hmotný stred, bol rovný nule,

$$\boldsymbol{M}_t + \boldsymbol{M}_N = 0 \qquad (1)$$

Rovnica (1) umožňuje zistiť uhol odklonu bicyklistu od kolmice, pretože momenty oboch síl závisia od tohto uhla. V skúmanej neinerciálnej sústave je bicyklista v pokoji. Znamená to, že súčet všetkých síl pôsobiacich na bicyklistu je rovný nule,

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_z + \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{N} = 0 \,. \qquad (2)$$

Pretože zotrvačná sila závisí od uhlovej rýchlosti pohybu cyklistu, rovnica (2) umožňuje s pomocou rovnice (1) nájsť uhol odklonu.

Riešenie:

Momenty síl trenia v pokoji a reakcie vozovky sa budú navzájom rušiť t.j. bude splnená rovnica (1), ak výslednica týchto síl bude prechádzať cez hmotný stred, t.j. ak

$$\operatorname{tg}\alpha = F_t / N \qquad (3)$$

Vektorovú rovnicu (2) si prepíšeme do skalárnych rovníc pomocou súradnicovej sústavy x,y, kde os x je v horizontálnom smere (kladný smer do stredu kruhu) a os y je vo vertikálnom smere.

$$F_t - F_z = 0 \tag{4}$$

$$N - mg = 0 \tag{5}$$

Z rovnice (4) vyplýva

$$F_t = m\omega^2 r = mv^2/r \tag{6}$$

Dosadením vzťahov (5) a (6) do rovnice (3) dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha = v^2/gr = \frac{\left(7{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}\right)^2}{25\ \mathrm{m}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}} = 0{,}229$$

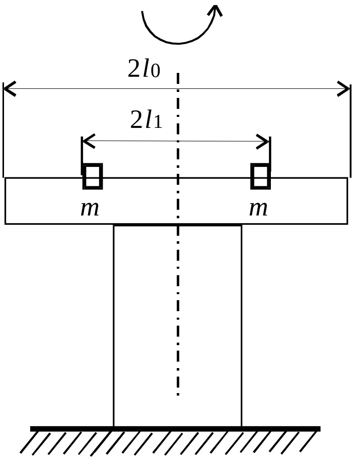
odkiaľ

$$\alpha = 12{,}92^\circ \approx 13^\circ$$

Aby sa cyklista pri jazde nepreklopil, musí sa nakloniť o uhol 13° smerom dovnútra zákruty.

6.4. Na odstredivom stroji je upevnená hladká horizontálna tyč dĺžky 1 m. Os rotácie je vertikálna a prechádza cez stred tyče, pozri obr. 44. Na tyč sú nasunuté dva neveľké krúžky, každý o hmotnosti 400 g. Krúžky sú spojené niťou dlhou 20 cm a nachádzajú sa symetricky vzhľadom na os otáčania. Aká veľká bude Coriolisova sila, ktorá bude pôsobiť na krúžky v okamihu, keď po prepálení nite skĺznu na konce tyče? Riešte pre dva prípady:

1) stroj sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou 2 rad.s^{-1};
2) v okamihu prepálenia nite sa motor stroja vypne a sústava je ponechaná sama na seba. Moment zotrvačnosti rotujúcej časti stroja a tyče je 0,02 kg.m^2. Trenie zanedbajte!



Obr.44

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$J_0 = 0{,}02$ kg.m^2	F_{c1} = ?
$m = 0{,}4$ kg	F_{c2} = ?
$2l_0 = 1$ m	
$2l_1 = 0{,}2$ m	
$\omega_1 = 2$ rad.s^{-1}	

Zo zadania treba vypočítať veľkosť Coriolisovej sily, preto sa zdá, že je nutné počítať v neinerciálnej vzťažnej sústave pevne spojenej s tyčou. V tejto sústave bude Coriolisova sila rovná

$$\boldsymbol{F}_c = 2m\left[\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega}\right], \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{v}'$ je radiálna rýchlosť krúžku v neinerciálnej sústave. Okrem Coriolisovej sily budú na každý krúžok pôsobiť tiažová sila a sila reakcie tyče, ktoré sa kompenzujú a odstredivá sila

$$\boldsymbol{F}_0 = m\omega^2\boldsymbol{r}\,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor krúžku (počiatok súradnicovej sústavy je na osi otáčania). Znamená to, že pre výpočet Coriolisovej sily je potrebné zistiť relatívnu rýchlosť $\boldsymbol{v}'$ a tiež okamžitú uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$. V prvom prípade bude odstredivá sila rovná

$$\boldsymbol{F}_0 = m\omega_1^2 \boldsymbol{r} \,. \tag{3}$$

Táto sila bude udeľovať krúžkom zrýchlenie a zvyšovať ich rýchlosť $\boldsymbol{v}'$. Rotačný moment tejto sily je rovný nule. Coriolisova sila má smer kolmý na $\boldsymbol{v}'$, mení silu normálovej reakcie tyče, ale v dôsledku zanedbania síl trenia nijako nevplýva na pohyb krúžku. Ľahko môžeme posúdiť, že Coriolisova sila mení len režim práce motoru: čím ďalej budú krúžky od osi otáčania, tým väčší bude brzdiaci moment Coriolisových síl a tým väčší výkon bude musieť podávať motor, aby zachoval uhlovú rýchlosť otáčania. Pohyb krúžkov po tyči je vyvolaný len zotrvačnou odstredivou silou a rýchlosť $\boldsymbol{v}'$ môžeme vypočítať dvoma spôsobmi. Buď pomocou druhého Newtonovho zákona alebo zo vzťahu medzi zmenou kinetickej energie krúžku ΔE_k a prácou A_z, ktorú vykoná pri radiálnom posunutí zotrvačná odstredivá sila. Potom

$$\Delta E_k = \frac{m(v')^2}{2} = A_z \tag{4}$$

V druhom prípade, keď je motor vypnutý, Coriolisove sily vyvolajú rotačný moment, ktorý bude brzdiť pohyb celej sústavy. Uhlová rýchlosť sa bude meniť a vznikne doplňujúca zotrvačná sila $\boldsymbol{F} = m\left[\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right]$, ktorá taktiež bude vplývať na uhlovú rýchlosť sústavy. Riešenie úlohy v neinerciálnej sústave sa stáva veľmi zložité a zdĺhavé. Preto preskúmajme možnosť stanovenia rýchlostí $\boldsymbol{v}'$ a $\boldsymbol{\omega}$ v inerciálnej sústave. V inerciálnej sústave pôsobia na sústavu sily tiaže a reakcie opory. Tieto ale nevyvolávajú žiaden rotačný moment síl voči vertikálnej osi a nevykonávajú prácu. Preto moment hybnosti a kinetická energia sústavy sa musia zachovávať. (Toto tvrdenie je pravdivé, ak zanedbáme sily trenia v osi stroja). Potom uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega}_2$ v tom okamihu, keď krúžky prídu na konce tyče, môžeme stanoviť zo zákona zachovania momentu hybnosti.

$$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2 , \quad J_1\boldsymbol{\omega}_1 = J_2\boldsymbol{\omega}_2 , \tag{5}$$

kde J_1 a J_2 sú momenty zotrvačnosti celej sústavy na počiatku a konci radiálneho pohybu krúžkov. Relatívnu rýchlosť $\boldsymbol{v}'$ každého z krúžkov môžeme zistiť zo zákona zachovania energie sústavy

$$E_{k_1} = E_{k_2} , \quad \frac{J_1\omega_1^2}{2} = \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{2m(v')^2}{2} \,. \tag{6}$$

Všimnite si, že kinetickú energiu sústavy E_{k2}, môžeme vyjadriť ako súčet kinetickej energie rotačného pohybu a postupného pohybu len preto, že os rotácie prechádza cez hmotný stred celej sústavy.

Riešenie:

1) Vypočítame prácu zotrvačnej sily, ktorá pôsobí na každý krúžok. Vezmeme do úvahy rovnicu (3) a dostaneme

$$A_z = \int_{l_1}^{l_0} m\,\omega_1^2 r \,\mathrm{d}r = \frac{m\,\omega_1^2}{2}\left(l_0^2 - l_1^2\right). \tag{7}$$

Táto práca je kladná. Dosadením do rovnice (4) dostaneme

$$v' = \omega_1\sqrt{l_0^2 - l_1^2} = 2\,\mathrm{s}^{-1}\sqrt{(0{,}5)^2\,\mathrm{m}^2 - (0{,}1)^2\,\mathrm{m}^2} = 0{,}98\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

Dosadením výrazu pre v' do rovnice (1) vzhľadom na to, že $\boldsymbol{v}'$ a $\boldsymbol{\omega}$ sú na seba kolmé, dostaneme

$$F_{c1} = 2m\,\omega_1^2\sqrt{l_0^2 - l_1^2} = 2\cdot 0{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 4\mathrm{s}^{-2}\sqrt{(0{,}5)^2\,\mathrm{m}^2 - (0{,}1)^2\,\mathrm{m}^2} = 1{,}568\ \mathrm{N}$$

2) Ak budeme riešiť úlohu pomocou druhého Newtonovho zákona, potom ak si zvolíme os x vo smere tyče a počiatok súradnice dáme do osi otáčania, Newtonov zákon bude mať tvar

$$m\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t} = m\,\omega^2 x\ ,$$

kde x je okamžitá vzdialenosť krúžku od osi otáčania. Aby sme vylúčili premennú t, vyjadríme si $\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t}$ nasledovne:

$$\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v'\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}x}\ .$$

Potom dostaneme diferenciálnu rovnicu s rozdelenými premennými

$$m v'\mathrm{d}v' = m\omega_1^2 x\ \mathrm{d}x\ .$$

Rovnicu (5) si prepíšeme do skalárneho tvaru a upravíme

$$\omega_2 = J_1\omega_1\ /\ J_2 \tag{8}$$

Dosadením do rovnice (6) dostaneme

$$(v')^2 = \frac{\omega_1^2}{2m}\frac{J_1}{J_2}\left(J_2 - J_1\right) \tag{9}$$

Na začiatku bol moment zotrvačnosti sústavy

$$J_1 = J_0 + 2ml_1^2 \tag{10}$$

Keď krúžky skĺznu na konce tyče bude moment zotrvačnosti

$$J_2 = J_0 + 2ml_0^2 \tag{11}$$

Dosadením výrazov (8), (9), (10) a (11) do rovnice (1) nájdeme

$$F_{c2} = 2m\,v'\omega_2$$

$$F_{c2} = 2m\,\omega_1^2\sqrt{\frac{\left(J_0 + 2ml_1^2\right)^3}{\left(J_0 + 2ml_0^2\right)^3}\left(l_0^2 - l_1^2\right)}\,.$$

$$F_{c2} = 2\cdot 0{,}4\ \mathrm{kg}\cdot 4\mathrm{s}^{-2}\sqrt{\frac{\left(0{,}02\ \mathrm{kg.m}^2 + 0{,}8\,\mathrm{kg}\,(0{,}1)^2\,\mathrm{m}^2\right)^3}{\left(0{,}02\ \mathrm{kg.m}^2 + 0{,}8\,\mathrm{kg}\,(0{,}5)^2\,\mathrm{m}^2\right)^3}\left((0{,}5)^2 - (0{,}1)^2\right)\mathrm{m}^2} = 0{,}1\ \mathrm{N}$$

Neriešené príklady

6.5. Auto zvýšilo pri rozbiehaní svoju rýchlosť z 36 km/hod. na 72 km/hod za 40 sekúnd. Určite veľkosť sily, ktorou bol vodič o hmotnosti 70 kg pritlačený do operadla sedadla. [17,5 N]

6.6. Kabína výťahu má hmotnosť m_1 = 900 kg a je čiastočne vyvážená závažím hmotnosti m_2=750 kg. Akú ťažnú silu musí vyvinúť motor výťahu, ak výťah

a) stúpa stálou rýchlosťou;

b) stúpa so zrýchlením a = 1,2 m.s^{-2};

c) klesá so zrýchlením $a = 1{,}2$ m.s^{-2}?

[a) 1470 N; b) 2551 N; c) 508 N]

6.7. Na strope železničného vagóna idúceho rýchlosťou 50 km/hod visí kyvadlo. Keď začne vlak brzdiť, kyvadlo sa vychýli o 3°. Za ako dlho sa vlak zastaví za predpokladu, že spomalenie je rovnomerné? [27 s]

6.8. Sekundové kyvadlo v pohybujúcom sa výťahu vykonáva 72 kmitov za minútu. S akým zrýchlením sa pohybuje výťah? Aký je smer zrýchlenia? Aká musí byť minimálna výška výťahovej kabíny? [4,3 m.s^{-2}, proti smeru zemskej tiaže, 0,25 m]

6.9.* Vo výťahu, ktorý sa pohybuje so zrýchlením $a = 1/4\ g$, z výšky h púšťa chlapec guličku. Po uplynutí doby $\tau = 0{,}2$ s sa mení znamienko zrýchlenia výťahu a po čase 2τ je zrýchlenie výťahu rovné nule. V tom okamihu sa gulička dotkne podlahy. Vypočítajte, do akej výšky H od dlážky sa gulička odrazí, ak ráz je absolútne pružný! Vypočítajte výšku h, z ktorej chlapec pustil guličku. [a) a súhlasne s g: $h = 0{,}68$ m, $H = 0{,}78$ m; b) a v protismere g: $h = 0{,}88$ m, $H = 0{,}78$ m]

6.10. Vozidlo s hmotnosťou 5800 kg prechádza rýchlosťou 41 km.h^{-1} po vypuklom moste s polomerom krivosti 62 m. Akou silou tlačí vozidlo na most v okamihu, keď prechádza jeho stredom? [44 800 N]

6.11. Odstredivka má polomer bubna 0,5 m a vykonáva 1200 otáčok za minútu. Koľkokrát väčšia sila odtrhuje z mokrého prádla kvapku vody ako je jej tiaž? [800 krát]

6.12. Akou maximálnou rýchlosťou môže vojsť autobus do zákruty s polomerom 50 m, ktorej klopenie je 15°, aby nebola ohrozená bezpečnosť cestujúcich? [11,5 m.s^{-1}]

6.13. Na zvislej osi sú výkyvne pripevnené dve ramená tvaru tyče dĺžky 0,3 m tak, že pri roztáčaní sústavy sa ramená odstredivou silou vychyľujú v opačných smeroch od osi v tej istej rovine. Aká je frekvencia otáčania, ak sú ramená vychýlené o uhol 30°? [1,2 s^{-1}]

6.14. Guľôčka s hmotnosťou 0,1 kg je zavesená na vlákne dlhom 0,5 m a pohybuje sa tak, že opisuje vo vodorovnej rovine kružnicu rýchlosťou stálej veľkosti. Vlákno pritom opisuje plášť kužeľa a zviera so zvislým smerom 30°. Nájdite veľkosť rýchlosti, periódu obiehania guľôčky po kružnici, ako aj silu, ktorá pri tomto pohybe napína vlákno. [1,18 m.s^{-1}; 1,321 s; 1,13 N]

6.15. Na tenkej obruči s polomerom 10 cm je navlečená korálka, ktorá sa môže pohybovať po obruči voľne (prakticky bez trenia). Obruč, umiestnená vo zvislej rovine, sa začne otáčať okolo zvislej osi prechádzajúcej jej stredom uhlovou rýchlosťou
a) 7 rad/s b) 14 rad/s. V akej polohe bude korálka v rovnováhe?

[a) v najnižšom bode obruče; b) 60°]

6.16.* Slnko je hviezda o polomere $6{,}95 \cdot 10^{8}$ m s hmotnosťou $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg. Po vyhasnutí sa gravitáciou zmrští na „bieleho trpaslíka“ o polomere asi $6{,}5 \cdot 10^{3}$ km. Aký bude relatívny rozdiel tiažového zrýchlenia na póle a na rovníku u Slnka a u „bieleho trpaslíka“, ak doba otáčania Slnka okolo jeho osi je 25,4 dňa? (Slnko i „bieleho trpaslíka“ považujeme za homogénne gule). [0,22]

6.17 Automobil hmotnosti 20 t sa pohybuje z juhu na sever rýchlosťou 90 km/hod na severnej šírke 60°. Vypočítajte veľkosť a smer sily, ktorá sa snaží zmeniť smer pohybu automobilu. [62,9 N, k východu]

6.18. Rieka, ktorá má v určitom mieste šírku 250 m, priemernú hĺbku 5,6 m a objemový prietok $5{,}3 \cdot 10^{3}$ m^{3}.s^{-1}, tečie v smere poludníka na sever. Zemepisná šírka miesta je 50° severnej šírky. Aký rozdiel tlaku vody na ľavý a pravý breh spôsobuje Coriolisova sila? Ktorým smerom bude sila stáčať tok rieky? [105 Pa, k východu]

7 Mechanika tekutín

Hydrostatika skúma podmienky a zákonitosti rovnováhy kvapalín a plynov, ktoré sa nachádzajú pod vplyvom vnútorných a vonkajších síl. Skúma tiež podmienky rovnováhy tuhých telies, ktoré sa nachádzajú v kvapalinách a plynoch.

1. Rozdelenie tlakových síl po povrchu dotýkajúceho sa s kvapalinou tuhého telesa je charakterizované silou *F*, ktorá pôsobí kolmo na jednotku plochy *S*. Tlak je stanovený vzorcom

$$p = \frac{F}{S} \, .$$

2. Tlak, ktorý spôsobuje tiažová sila a závisí od vzdialenosti od povrchu sa volá hydrostatický tlak. Pre ideálnu kvapalinu je hydrostatický tlak v hĺbke h pod povrchom daný vzťahom

$$p = \rho g h \, .$$

3. Rozdelenie tlaku vo vnútri tekutín pri prítomnosti vonkajších síl je dané Pascalovym zákonom. Z neho vyplýva, že celkový tlak v ľubovoľnom bode tekutín sa skladá z tlaku na povrchu tekutiny p_0 a hydrostatického tlaku stĺpca tekutiny nachádzajúceho sa nad týmto bodom

$$p = p_0 + \rho g h \, .$$

4. Na hmotné teleso, ponorené v tekutine pôsobí Archimedova sila, ktorá má smer zvisle nahor a jej veľkosť je rovná tiažovej sile vytlačenej tekutiny o objeme ponorenej časti hmotného telesa

$$F = \rho_t g V \, .$$

Hydroaeromechanika skúma pohyb tekutín a tiež vzájomné pôsobenie tekutín s tuhými telesami pri ich relatívnom pohybe.

5. Pri stacionárnom prúdení tekutín cez ľubovoľný prierez potrubia za rovnaký časový úsek prejde jeden a ten istý objem kvapaliny, t.j. platí rovnica kontinuity

$$v \cdot S = \text{konšt.},$$

kde v je rýchlosť v prierezе *S*.

6. Pre stacionárne prúdenie ideálnej tekutiny platí Bernoulliho rovnica (zákon zachovania energie)

$$p + \rho g h + \rho \frac{v^2}{2} = \text{konšt.},$$

kde p je vonkajší tlak,
ρ - hustota tekutiny,
v – rýchlosť tekutiny.

Riešené príklady

7.1. Na lievik položíme sklenenú platňu hmotnosti 1,2 kg , prevrátime ho a ponoríme aj s platňou do vody, pozri obr.45. Najväčší polomer lievika je 6 cm. Do akej najmenšej hĺbky musíme lievik ponoriť bez toho, aby platňa odpadla?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m = 1,2 kg	h = ?
r = 6 cm	
ρ = 1000 kg.m^{-3}	

Ak ponoríme sklenenú platňu s lievikom do vody, na platňu budú pôsobiť dve sily. Tiažová sila mg v smere zvislom nadol a tlaková sila vody F, ktorá pritláča zo spodu platňu na lievik (pozri obr.45).

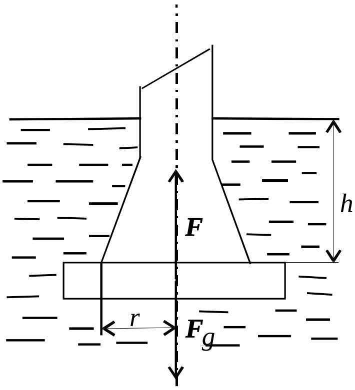
Aby platňa neodpadla, musí platiť

$$|\boldsymbol{F}| \geq |m\boldsymbol{g}|, \qquad (1)$$

t.j. tlaková sila musí byť väčšia alebo rovná tiažovej sile sklenenej platne. Hraničná podmienka bude splnená, ak budú tieto dve sily čo do veľkosti rovnaké. Tlaková sila bude rovná súčinu plochy lievika a hydrostatického tlaku. Tento závisí od hĺbky ponorenia podľa vzťahu

$$p = \rho g h\ , \qquad 2)$$

kde h je hĺbka ponorenia lievika v kvapaline, ρ je hustota kvapaliny a g je tiažové zrýchlenie.



Obr.45

Riešenie:

Keďže lievik má kruhový prierez, pre plochu S platí vzťah $S = \pi R^2$, a tlaková sila je

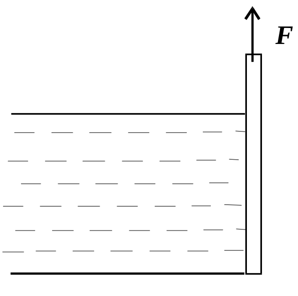
$$F = \pi r^2 \rho g h\ . \qquad (3)$$

Dosadením do (1) a úpravou dostaneme hľadanú hĺbku minimálneho ponorenia

$$h = \frac{m}{\pi r^2 \rho} = \frac{1{,}2\ \text{kg}}{3{,}14(0{,}06)^2\ \text{m}^2 1000\ \text{kg.m}^{-3}} = 0{,}106\ \text{m}$$

7.2. Rovinná hať uzatvárajúca výpust vodnej nádrže má hmotnosť 250 kg a šírku 3 m. Hĺbka vody je 1,5 m a koeficient trenia hate o opory je μ = 0,3 ? (pozri obr.46).

a) Akú silu musí byť schopný zdvíhací mechanizmus vyvinúť, aby hať vyzdvihol?
b) Aká je minimálna práca, potrebná na vyzdvihnutie hate tesne nad hladinu vody?



Obr.46

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m = 250 kg	$F_{\min}$ = ?
b = 3 m	$A_{\min}$ = ?
h = 1,5 m	
μ = 0,3	
ρ = 10^3 kg.m^{-3}	

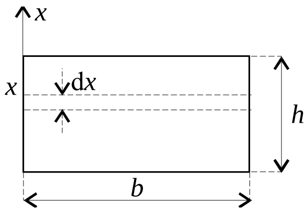
a) Najúspornejší spôsob dvíhania hate z hľadiska vynaloženej sily je dvíhania konštantnou rýchlosťou. Vtedy v každom okamžiku treba na hať pôsobiť silou, ktorá prekonáva jej tiaž a silu trenia hate o opory:

$$F = F_g + F_t = mg + \mu N\ , \qquad (1)$$

kde N je kolmá tlaková sila, ktorou voda pôsobí na hať a teda aj na opory. Sila N závisí od ponorenej plochy hate a najväčšia bude na začiatku dvíhania kedy je plocha ponorenej časti najväčšia. Potom je najväčšia aj sila trenia, ako aj celková sila potrebná na dvíhanie hate:

$$F_m = mg + \mu N_m \tag{2}$$

Vypočítame teraz silu N_m. V hĺbke x, pozri obr. 47, zvolíme si elementárnu plôšku hrúbky dx. Sila, ktorou voda pôsobí na túto plôšku je:



Obr.47

$$\mathrm{d}N_m = p\,\mathrm{d}S = \rho\, g\, x\, b\, \mathrm{d}x\,.$$

Sila na celú ponorenú časť hate je

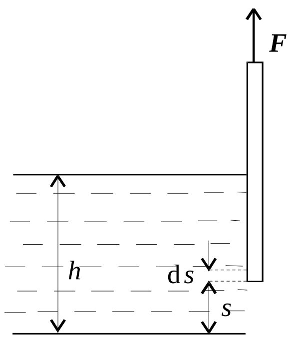
$$N_m = \rho g b \int_0^h x\ \mathrm{d}x \tag{3}$$

Dosadením (3) do (2) dostaneme:

$$F_m = mg + \mu\rho g b \int_0^h x\ \mathrm{d}x = mg + \frac{1}{2}\mu\rho g b h^2 \tag{4}$$

Takúto silu musí byť schopný zdvíhací mechanizmus vyvinúť na začiatku dvíhania. Potom už sila postupne klesá až na hodnotu mg.

b) Práca na vyzdvihnutie hate bude minimálna, ak pre zdvíhaciu silu opäť bude platiť rovnica (1). Jedná sa o prácu premennej sily, preto



Obr.48

$$A = \int_0^h F\ \mathrm{d}s\,.$$

$$A = \int_0^h (mg + \mu N)\mathrm{d}s\,. \tag{5}$$

N znamená tlakovú silu vody na ponorenú plochu hate (pozri obr.48), keď hať je vyzdvihnutá o vzdialenosť s od dna. N vypočítame podľa (3), avšak s inými hranicami integrálu:

$$N = \rho g b \int_0^{h-s} x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho g b (h-s)^2 \tag{6}$$

Dosadením rovnice (6) do výrazu (5) vypočítame minimálnu prácu potrebnú na vytiahnutie hate.

Riešenie

a) Dosadením daných veličín do vzťahu (4) dostaneme

$$F_m = mg + \frac{1}{2}\mu\rho g b h^2 = 250\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}} + \frac{0{,}3\cdot 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}\cdot 3\ \mathrm{m}\cdot (1{,}5\ \mathrm{m})^2}{2}$$

$$F_m = 12390\ \mathrm{N}\,.$$

b) Tlakovú silu N zo vzťahu (6) dosadíme do (5) a vypočítame hľadanú prácu

$$A = \int_0^h \left[mg + \frac{\mu\rho g b}{2}\left(h^2 - 2hs + s^2\right)\right] \mathrm{d}s = mgh + \frac{\mu\rho g b}{2}\cdot\frac{h^3}{3}$$

$$A = mgh + \frac{1}{6}\mu\rho g h^3$$

$$A = 250\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}\cdot 1{,}5\ \mathrm{m} + \frac{0.3}{6}\cdot 10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}\cdot\left(1{,}5\ \mathrm{m^3}\right)\cdot 3\ \mathrm{m}$$

$$A = 3678{,}75\ \mathrm{J} + 4966{,}3125\ \mathrm{J} = 8645\ \mathrm{J}\,.$$

7.3. Z vodovodného kohútika o priemere 1 cm vyteká voda v množstve 2,7 litra za 1/2 minúty. Výška vodovodného kohútika nad zemou je 1 m. Aký priemer musí mať základňa kužeľa, aby voda dopadla len naň. Ako bude závisieť sila, ktorou je kužeľ pritláčaný k zemi, od vrcholového uhlu kužeľa? Vypočítajte túto silu pre vrcholové uhly kužeľa 60°, 90° a 120°. Vodu uvažujte ako ideálnu kvapalinu.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$Q_v = 9\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3 s^{-1}}$	$r_2 = ?$
$h = 1\ \mathrm{m}$	$F(\alpha) = ?$
$r_1 = 0{,}5\ \mathrm{cm}$	
$\rho = 1\cdot 10^3\ \mathrm{kg\ m^3}$	

Pretože vodu považujeme za ideálnu kvapalinu, musí byť jej prúd v priestore spojitý. Znamená to, že platí rovnica kontinuity prúdenia pre ideálnu kvapalinu

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \qquad (1)$$

kde S_1 je prierez otvoru kohútika, S_2 – prierez dopadajúcej vody v hĺbke h pod kohútikom, v_1 – rýchlosť výtoku a v_2 – rýchlosť v prieraze S_2.

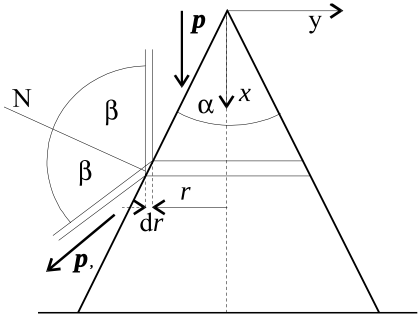
Ak budeme poznať rýchlosť dopadajúcej vody v_2, budeme môcť vypočítať prierez S_2, ktorý sa bude rovnať hľadanému obsahu základne kužeľa. Z neho môžeme zistiť polomer základne kužeľa. Rýchlosť v_2 môžeme vyjadriť pomocou Bernoulliho rovnice, ktorá pre tento prípad bude mať tvar

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho v_2^2}{2}, \qquad (2)$$

kde ρ je hustota vody.

Silu, ktorou je pritláčaný kužeľ k zemi, môžeme odhadnúť pomocou impulzu sily. Vezmeme veľmi zjednodušený model, ktorý nám umožní približný výpočet sily, ktorou pôsobí voda na kužeľ. Budeme predpokladať, že voda dopadajúca na kužeľ a voda odrazená od kužeľa prechádzajú cez seba bez toho, aby na seba vzájomne pôsobili. Voda pri dopade na kužeľ mení smer svojho pohybu a mení svoju hybnosť, a preto bude platiť

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\Delta t\,. \qquad (3)$$



Obr.49

Budeme predpokladať, že rozmery kužeľa sú v porovnaním so vzdialenosťou medzi vodovodným kohútikom a kužeľom veľmi malé, t.j., môžeme predpokladať, že rýchlosť dopadajúcej vody je na celom plášti kužeľa rovnaká, rovná v_2. Za dobu Δt dopadne na plášť kužeľa množstvo vody hmotnosti

$$m = \rho\pi r_2^2 v_2 \Delta t \ ,$$

ktorej hybnosť je

$$p = \rho\pi r_2^2 v_2^2 \Delta t \ . \tag{4}$$

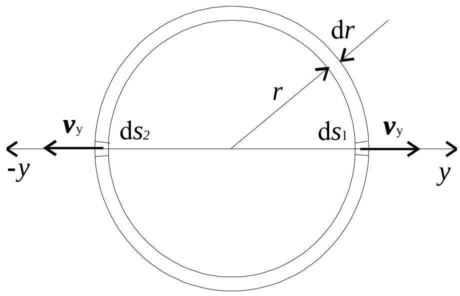
Voda dopadá na kužeľ pod uhlom β=90-α/2 a odráža sa pod tým istým uhlom vzhľadom k normále k povrchu kužeľa. Zavedieme si súradnice, ako je to znázornené na obr. 49. Potom zmena hybnosti vody v zvislom smere bude

$$\Delta p_x = p(1-\cos\alpha),$$

$$\Delta p_x = \rho\pi r_2^2 v_2^2 \Delta t\,(1-\cos(\alpha/2)) \ . \tag{5}$$

Dosadením do rovnice (3) dostaneme pre silu, ktorou je pritláčaný kužeľ výraz

$$F = \rho\pi r_2^2 v_2^2\,(1-\cos(\alpha/2)) \ . \tag{6}$$



Obr.50

Aby sme mohli vypočítať zmenu hybnosti vo vodorovnom smere, nakreslíme si pohľad na medzikružie v smere osi x, pozri obr.50. Vezmeme plôšku dlhú ds_1. Pred dopadom bola hybnosť vody dopadajúca na túto plôšku v smere osi y rovná nule. Po odraze bude hybnosť odrazenej vody od tejto plôšky rovná

$$dp_{ys_1} = \rho 2\pi r dr ds_1 v_2 v_y \Delta t \ .$$

Ale na druhej strane medzikružia môžeme vziať rovnako dlhú plôšku ds_2. Po odraze od tejto plôšky bude hybnosť odrazenej vody rovnako veľká, ako od plôšky ds_1, len bude mať opačný smer.

Znamená to, že celková zmena hybnosti vody dopadajúcej na medzikružie v smere osi y je rovná nule a tak isto vzhľadom na rovnicu (3), aj celková sila pôsobiaca na kužeľ v smere osi y bude rovná nule. To isté platí aj pre zmenu hybnosti vody dopadajúcej na kužeľ v smere osi y.

Riešenie:

Dosadením v_2 z rovnice (1) do rovnice (2) a úpravou dostaneme

$$v_1^2 + 2gh = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 v_1^2$$

a nasledovnou úpravou dostaneme

$$r_2^2 = r_1^2 \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gh}} \ . \tag{7}$$

Ale $v_1 = Q_v / S_1$ a dosadením do (7) a úpravou dostaneme

$$r_2 = r_1 \sqrt{\frac{Q_v / S_1}{\sqrt{(Q_v / S_1)^2 + 2gh}}} \ . \tag{8}$$

Zo vzorca (8) je zrejmé, že vhodnejšie bude vypočítať rýchlosť v_1 číselne a túto dosadzovať do vzorca

$$v_1 = \frac{Q_v}{S_1} = \frac{9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3.s^{-1}}}{3{,}14\cdot\left(5.10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2} = 1{,}146\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Potom

$$r_2 = 0{,}005\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{1{,}146\ \mathrm{m.s^{-1}}}{\sqrt{1{,}146\,\mathrm{m^2.s^{-2}} + 2\cdot 9{,}81\cdot 1\ \mathrm{m^2.s^{-2}}}}} = 0{,}0025\ \mathrm{m}\,.$$

Prítlačnú silu vypočítame ak do vzorca (6), ktorý upravíme pomocou rovnice (1) dosadíme príslušný uhol a hodnoty zo zadania. Dostaneme

$$F = \rho\frac{S_1^2}{S_2}v_1^2(1-\cos\alpha) = 2\rho\frac{Q_v^2}{S_2}(1-\cos\alpha).$$

Pre uhol α = 60° bude prítlačná sila rovná

$$F\left(60^\circ\right) = \rho\frac{Q_v^2}{S_2}(1-\cos\alpha) = \frac{1\cdot 10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}\left(9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3.s^{-1}}\right)^2}{3{,}14\cdot(0{,}0025\,\mathrm{m})^2}(1-0{,}5) = 0{,}21\ \mathrm{N}\,.$$

Pre uhol α = 90° bude prítlačná sila rovná

$$F\left(90^\circ\right) = \frac{1\cdot 10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}\left(9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3.s^{-1}}\right)^2}{\pi(0{,}0025\ \mathrm{m})^2}(1-0) = 0{,}41\ \ \mathrm{N}\,.$$

Pre uhol α = 120° bude prítlačná sila rovná

$$F\left(120^\circ\right) = \frac{1\cdot 10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}\left(9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3.s^{-1}}\right)^2}{3{,}14(0{,}0025\,\mathrm{m})^2}(1-(-0{,}5)) = 0{,}62\ \ \mathrm{N}\,.$$

Neriešené príklady.

7.4. Z ľadovca plávajúceho vo vode vyčnieva hranolovitý kus o rozmeroch 500x50x50 $\mathrm{m^3}$. Aký je ponorený objem ľadovca, keď pomer hustoty ľadu a vody je 9:10? [$1{,}1\cdot 10^7\ \mathrm{m^3}$]

7.5. Plošný obsah priečneho prierezu lode vo výške vodnej hladiny je 3800 $\mathrm{m^2}$. Po naložení nákladu sa ponor lode zväčší o 2 m. Aký veľký je náklad lode? [7600 t]

7.6. Hliníková guľa má tiaž vo vzduchu 5,4 N a vo vode 2,4 N. Je guľa homogénna alebo má dutinu ? [Má dutinu.]

7.7. Zdanlivá tiaž v benzíne ponorenej hliníkovej gule je F_g= 0,2 N. Aký priemer má guľa? Hustotu benzínu uvažujte 700 $\mathrm{kgm^{-3}}$. [2,68 cm]

7.8. Nákladný čln s hmotnosťou 6,5 t vyplával z rieky na more (ρ = 1,03 g/$\mathrm{cm^3}$). Ako treba upraviť náklad člna, aby ponor zostal rovnaký?
[pridáme náklad o hmotnosti 195 kg]

7.9. Rovnorodá guľa pláva na rozhraní dvoch nemiešajúcich sa kvapalín. Hustota hornej kvapaliny je 880 $\mathrm{kgm^{-3}}$, hustota dolnej kvapaliny je $1\cdot 10^3$ $\mathrm{kgm^{-3}}$ a hustota gule je 980 $\mathrm{kgm^3}$. Vypočítajte, aká časť objemu sa nachádza v hornej kvapaline. [1/6]

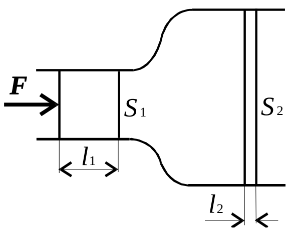
7.10. Piest hmotnosti 3 kg je tvorený okrúhlym diskom o polomere 4 cm s otvorom v strede, do ktorého je vstavaná tenkostenná trubica o polomere 1 cm. Piest sa môže bez trenia, ale bez prepúšťania kvapaliny popri stene, pohybovať v pohári. Na počiatku leží piest na dne. Do akej výšky sa zdvihne piest, ak do trubice nalejeme 700 g vody? [0,1 m]

7.11. Nádoba tvaru valca výšky 0,13 m s plošným otvorom o priemere 35 cm a bola naplnená vodou, prikrytá listom papiera a obrátená dnom nahor do zvislej polohy. Akou veľkou silou je papier pritlačený k nádobe pri atmosferickom tlaku $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa? [349,4 N]

7.12. Balón hmotnosti 600 kg a objemu 800 m^3 sa dvíha zvislo nahor. Do akej výšky vystúpi balón za prvých 10 sekúnd, keď jeho pohyb za tento čas pokladáme rovnomerne zrýchlený. Hustota vzduchu je 1,29 $kg.m^{-3}$ [353 m]

7.13. Aký elektrický výkon by bolo možné získať z malej vodnej elektrárne na potoku s objemovým prietokom 0,5 m^3s^{-1}, ak hladina v nádrži je vo výške 5m nad vyústením vodnej turbíny, ktorej účinnosť je 90% a ak neuvažujeme straty energie v potrubí? [22 kW]

7.14. Vráta plavebnej komory majú dve krídla široké 5m a vysoké 10 m, ktoré sú otočné okolo zvislej osi. Akým silovým momentom vzhľadom na os otáčania pôsobí voda na každé z krídiel vrát, keď sa komora zaplní vodou tak, že spodná hladina je 4 m a horná 8 m? [$0{,}98 \cdot 10^6$ Nm]



Obr.51

7.15.* Určitá planéta je celá v kvapalnom stave. Jej polomer je rovný R a jej hustota ρ je konštantná. Predpokladá sa, že planéta sa neotáča okolo svojej osi. Dokážte, že vo vzdialenosti r od stredu planéty bude tlak rovný $G\dfrac{2\pi\rho^2}{3}\left(R^2 - r^2\right)$! Odhadnite tlak v strede Zeme, za predpokladu , že jej hustota je konštantná a rovná $5 \cdot 10^3$ kgm^{-3}! [$1{,}4 \cdot 10^{11}$ Pa]

7.16. Menší piest hydraulického lisu, pozri obr.51, sa pri jednom zdvihu posunie o $l_1 = 20$ cm, väčší o $l_2 = 4$ mm. Akou veľkou silou tlačí väčší piest na lisovaný predmet, keď na menší piest pôsobí sila 25 N? [1250 N]

7.17. V troch rovnakých spojených nádobách sa nachádza ortuť. O koľko sa zvýši hladina ortuti v strednej nádobe, ak do ľavej nádoby naliali vrstvu vody vysokú 102 mm a do pravej 153 mm? [6,25 mm]

7.18.* Pomocou hydraulického lisu s pomerom plôch 1:100 je treba zdvihnúť náklad hmotnosti 10 t. Vypočítajte počet pracovných chodov malého piesta za 1 minútu, ak za jeden pracovný chod má zdvih 20 cm. Výkon motora lisu je 5 kW a jeho účinnosť 80%. [120]

7.19. Voda priteká potrubím s priemerom 0,04 m rýchlosťou 1,25 $m.s^{-1}$ do dýzy, z ktorej vyteká rýchlosťou 20 $m.s^{-1}$. Aký je priemer dýzy? [0,01 m]

7.20. Čerpadlo načerpá 300 litrov vody za 1 minútu. Prívodné potrubie má priemer 80 mm. Výtokovým potrubím prúdi voda rýchlosťou 8 $m.s^{-1}$. Vypočítajte rýchlosť vody v prívodovom potrubí a priemer výtokového potrubia. [1,0 $m.s^{-1}$, 28 mm]

7.21. Akou rýchlosťou vyteká voda z výstupného otvoru údolnej priehrady, ak je otvor 20 m pod voľnou hladinou? [20 $m.s^{-1}$]

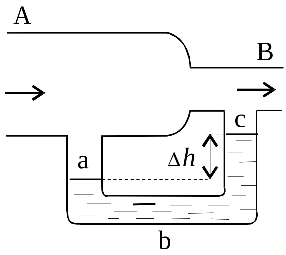
7.22. Akou rýchlosťou prúdi voda cez vodorovnú trubicu s prierezom 15 cm^2, keď v zúženom mieste s prierezom 5 cm^2 sa zníži tlak o hodnotu 5000 Pa? [1,1 $m.s^{-1}$]

7.23. Injekčná striekačka má plošný obsah piesta 1,2 cm^2 a jej otvor má prierez 1 mm^2. Ako dlho bude vytekať voda zo striekačky uloženej vo vodorovnej rovine, ak na piest bude pôsobiť sila 4,9 N a ak sa piest posunie o dĺžku 4 cm? Vnútorné trenie zanedbajte![0,53 s].

7.24. Z vodného dela strieka voda otvorom o priemere 4 cm pri pretlaku v prívodnej hadici (s veľkým priemerom) 500 kPa. Akou silou pôsobí prúd vody na stojacu prekážku s rovinným povrchom, ak na ňu dopadá kolmo? Môže takýto prúd povaliť človeka? [1,25 kN, áno]

7.25. Venturiho manometer určený na meranie spotreby kvapaliny pozostáva zo zužujúcej sa trubice s priemermi 10cm a 8 cm na koncoch. Bolo zistené, že rozdiel tlakov v týchto prierezoch je rovný 15 cm vodného stĺpca. Vypočítajte prietok vody v litroch za sekundu vo Venturiho trubici! [11,2 l/s]

7.26. Vzduch prúdi cez trubicu AB (pozri obr.52) tak, že za 1 minútu prejde 15 litrov vzduchu. Plošný obsah širšej časti trubice AB je rovný 2 cm^2. Plošný obsah tenšej časti trubice ako aj trubice abc je 0,5 cm^2. Vypočítajte rozdiel hladín vody naliatej do trubice abc! Hustotu vzduchu uvažujte 1,32 kgm^{-3}. [1,6 mm]



Obr.52

7.27. Vo valcovej nádobe je voda siahajúca do výšky 100 cm. V akej hĺbke pod voľnou hladinou vody treba urobiť otvor, aby na vodorovnú podložku voda striekala do vzdialenosti 60 cm. [90 cm, 10 cm]

7.28. Z vodnej nádrže vyteká otvorom s priemerom 3 cm 30 l vody za 15 s. Voľná hladina vody ostáva konštantná. Ako vysoko je hladina vody nad stredom otvoru? [0,41 m].

7.29. Nádoba valcového tvaru má v bočnej stene dva otvory vo výškach h_1 a h_2 nad dnom. V akej výške má byť hladina kvapaliny nad dnom nádoby, aby kvapalina striekala z obidvoch otvorov do rovnakej vzdialenosti na vodorovnú rovinu, na ktorej je nádoba položená? [$h = h_1 + h_2$].

7.30.* Na vozíku stojí valcová nádoba naplnená vodou do výšky 1 m. V nádobe sú na protiľahlých stranách dva rovnaké ventily s otvormi s plošnými obsahmi $S = 10$ cm^2. Jeden ventil je vo výške $h_1 = 25$ cm nad dnom nádoby, druhý ventil vo výške $h_2 = 50$ cm. Aká veľká sila F a v ktorom smere musí pôsobiť na vozík, aby sa nepohyboval, keď sú obidva ventily otvorené? [4,9 N]

7.31. V nádobe tvaru hranola je v bočnej stene kruhový otvor polomeru $r = 20$ cm uzavretý zátkou. Aká je celková sila, ktorá pôsobí na zátku, keď stred kruhového otvoru je vo výške $h_1 = 50$ cm nad dnom a keď je nádoba naplnená vodou do výšky $h = 1$ m ? [616 N]

7.32.* V bočnej stene nádoby sú vyvŕtané dva otvory vo vzdialenosti 0,2 m jeden nad druhým. Prierez otvorov je rovnaký a rovný 2 cm^2. Vypočítajte vzdialenosti bodu, v ktorom sa pretínajú prúdy vody, od steny nádoby a od hladiny kvapaliny v nádobe, ak do nádoby priteká 1,4 l vody za sekundu a výška hladiny v nádobe sa nemení.
[s=1,2 m; h=1,3m]

7.33. Vo valcovej nádobe je voda o objeme 2 l, pričom hladina je vo výške 15 cm nad dnom. Vodu chceme vypustiť hadičkou s vnútorným priemerom 5 mm, vedenou cez horný okraj nádoby s jedným koncom v nádobe pri dne a druhým v hĺbke 10 cm pod úrovňou dna. Vodu nasajeme do hadičky a necháme vytekať. Za aký čas sa vyprázdni? (Vodu považujte za ideálnu kvapalinu). [56 s]

7.34.* Voda sa nachádza vo valcovej nádobe o priemere 0,5 m. V dne nádoby je otvor o priemere 1 cm. Vypočítajte rýchlosť klesania hladiny vody v nádobe ako funkciu výšky hladiny nad dnom. Nájdite číselnú hodnotu tejto rýchlosti pre výšku hladiny 0,2 m. [$v = \sqrt{\dfrac{2g\,h}{\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}}$; $8 \cdot 10^{-4}$ m.s^{-1}]

7.35. Automobil s cisternou sa začal pohybovať po vodorovnej ceste so zrýchlením 2,44 m.s^{-2}. Vypočítajte aký uhol bude zvierať hladina benzínu v cisterne s vodorovnou hladinou. [14°]

7.34. Vo valcovej nádobe s polomerom 5 cm je voda, pričom hladina je 4cm pod horným okrajom nádoby. Pri akej frekvencii otáčok otáčania nádoby okolo zvislej osi sa začne voda vylievať cez okraj nádoby? [4 Hz]

7.35.* Rovnomerne rotujúca nádoba s ortuťou sa používa ako parabolický reflektor. Vypočítajte, aká má byť frekvencia otáčania nádoby, aby ohnisková vzdialenosť paraboloidu bola rovná 1 m. [21 min^{-1}]

ČASŤ II.

SÚSTAVY S VEĽKÝM POČTOM STUPŇOV VOĽNOSTI

8 Molekulárno-kinetická teória ideálneho plynu

V tejto kapitole sa riešia úlohy, ktoré sa týkajú molekulárno-kinetického výkladu tlaku, kinetickej energie chaotického pohybu molekúl a rozdelenia molekúl podľa ich rýchlosti. Základná rovnica molekulárno-kinetickej teórie bola odvodená pomocou zjednodušeného modelu ideálneho plynu. V tomto modeli

1) Skutočné rozdelenie podľa jednotlivých zložiek rýchlostí sa nahradzuje predpokladom, že molekuly sa pohybujú len v troch navzájom kolmých smeroch;
2) rozdelenie molekúl podľa absolútnej hodnoty rýchlosti sa nahradzuje predpokladom o rovnosti absolútnej hodnoty u všetkých molekúl.

Prvý predpoklad ako by vylučoval zrážky molekúl. Ale v procese vzniku tepelnej rovnováhy práve zrážky hrajú veľmi významnú úlohu. Potom, ako vznikne rovnováha, zrážky už nemôžu vplývať ani na tlak, ani na teplotu, ani na iné charakteristiky sústavy.

1. Základná rovnica kinetickej teórie plynov má tvar

$$p=\frac{2}{3V}\left\langle E_k\right\rangle=\frac{2}{3}n_0\frac{m\left\langle v^2\right\rangle}{2},$$

kde $\left\langle \mathrm{E_k}\right\rangle$ je celková kinetická energia postupného pohybu n molekúl plynu v objeme V,

n_0 – koncentrácia molekúl (počet molekúl v jednotke objemu),
m – hmotnosť molekuly,
$\left\langle v^2\right\rangle$ - štvorec strednej kvadratickej rýchlosti molekúl.

2. Stredná hodnota celkovej kinetickej energie jednej molekuly je rovná

$$\left\langle E_k\right\rangle=\frac{i}{2}kT,$$

kde i je počet stupňov voľnosti,
k – Boltzmanova konštanta,
T – absolútna teplota.

3. Stredná hodnota kinetickej energie postupného pohybu jednej molekuly je

$$\left\langle E_{kp}\right\rangle=\frac{3}{2}kT.$$

4. Keďže tlak plynu závisí len od postupného pohybu molekúl, tak plynu sa dá vyjadriť nasledovne

$$p=n_0kT.$$

5. Stavová rovnica ideálneho plynu má tvar

$$pV = \frac{m}{M} RT \ ,$$

kde m je hmotnosť plynu,

M – molárna hmotnosť plynu,

R – univerzálna plynová konštanta.

6. Pre zmes ideálnych plynov platí Daltonov zákon. Výsledný tlak zmesi plynov je rovný súčtu parciálnych tlakov jednotlivých zložiek. Stavová rovnica zmesi ideálnych plynov má potom tvar

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3} + ... + \frac{m_k}{M_k} \right) RT \ .$$

7. Rozdelenie molekúl v potenciálovom silovom poli je dané Boltzmanovym rozdelením

$$n = n_0 e^{\frac{-E_p}{kT}} \ ,$$

kde E_p je potenciálna energia molekuly.

8. Rozdelenie molekúl podľa výšky v tiažovom poli Zeme má tvar

$$n = n_0 e^{\frac{-Mg}{RT}(h - h_0)} \ ,$$

kde n je počet molekúl vo výške h,

n_0 – počet molekúl vo výške h_0.

9. Barometrická formula, ktorá vyjadruje súvis medzi tlakmi p a p_0 vo výškach h a h_0 má tvar

$$p = p_0 \, e^{-\frac{Mg}{RT}(h - h_0)} \ .$$

10. Maxwellovo rozdelenie molekúl podľa rýchlosti sa dá vyjadriť nasledovne

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 \mathrm{d}v \ ,$$

kde dn je počet molekúl z celkového počtu n, ktoré majú pri teplote T rýchlosť v intervale v, v+ dv a m je hmotnosť molekuly.

11. Z tohto rozdelenia je možné vypočítať najpravdepodobnejšiu rýchlosť molekuly

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \ ,$$

strednú aritmetickú rýchlosť molekuly

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \ ,$$

a strednú kvadratickú rýchlosť molekuly

$$v_k = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \ .$$

Riešené príklady

8.1. Zmes kyslíka a dusíka pri teplote 290° K a tlaku 5,8 kPa má hustotu 0,4 kg.m^{-3}. Vypočítajte koncentráciu molekúl kyslíka v zmesi.
Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$T = 290$ K	$n_{01} = ?$
$p = 5{,}8$ kPa	
$\rho = 0{,}4$ kg.m^{-3}	
$M_1 = 32$ kg/kmol	
$M_2 = 28$ kg/kmol	

Budeme predpokladať, že obe zložky sa chovajú ako ideálne plyny. Potom celková koncentrácia molekúl zmesi n_0 bude rovná súčtu koncentrácií jednotlivých zložiek. Nech kyslík je prvá zložka a dusík druhá. Môžeme teda napísať

$$n_0 = n_{01} + n_{02} . \tag{1}$$

Na druhej strane, na základe molekulárnej teórie plynov, môžeme koncentráciu zmesi vyjadriť nasledovne

$$n_0 = \frac{p}{kT} . \tag{2}$$

Podľa Daltonovho zákona tlak zmesi plynov je rovný súčtu parciálnych tlakov jednotlivých zložiek

$$p = p_1 + p_2 . \tag{3}$$

Ak vezmeme do úvahy, že hustota látky je definovaná ako pomer hmotnosti látky a jej objemu $\rho = m/V$, môžeme pomocou stavovej rovnice vyjadriť parciálne tlaky

$$p_1 = \frac{\rho_1}{M_1}RT \; ; \; p_2 = \frac{\rho_2}{M_2}RT , \tag{4}$$

kde ρ_1 a ρ_2 sú parciálne hustoty, ktoré by mali jednotlivé zložky, keby sa každá zložka nachádzala v tom istom objeme ako zmes. Je zrejmé, že platí

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 . \tag{5}$$

Riešením rovníc (1) až (5) môžeme vypočítať koncentráciu molekúl kyslíka.

Riešenie:

Upravíme si rovnice (4) pomocou rovnice (2) do tvaru

$$n_{01} = \frac{\rho_1}{M_1}N_A \; ; \; n_{02} = \frac{\rho_2}{M_2}N_A$$

a odtiaľ
úpravou a dosadením do rovnice (5) dostaneme

$$\rho = \frac{n_{01}M_1}{N_A} + \frac{n_{02}M_2}{N_A} . \tag{6}$$

Z rovníc (1) a (2) dostaneme

$$\frac{p}{kT} = n_{01} + n_{02} . \tag{7}$$

Riešením rovníc (6) a (7) dostaneme pre koncentráciu molekúl kyslíku n_{01}

$$n_{01} = \frac{1}{M_1 - M_2}\left(N_A \cdot \rho - \frac{M_2 \cdot p}{kT}\right) =$$

$$\frac{1}{32\text{kg.kmol}^{-1} - 28\text{kg.kmol}^{-1}}\left(6{,}023 \cdot 10^{23}\text{kmol}^{-1} \cdot 0{,}4\text{kg.m}^{-3} - \frac{28\text{kg.kmol}^{-1} \cdot 5{,}8 \cdot 10^{3}\text{Pa}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\text{J.K}^{-1} \cdot 290\text{K}}\right)$$

$$= 5 \cdot 10^{25}\text{m}^{-3}$$

8.2. Nádoba , v ktorej sa nachádza určité množstvo plynu, sa pohybuje rýchlosťou 20 m.s^{-1}. Ako sa zmení stredná kvadratická rýchlosť molekúl pri zastavení nádoby v prípade jednoatómového a dvojatómového plynu. Tepelnú kapacitu, vodivosť ako aj hmotnosť stien nádoby môžeme zanedbať.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
u = 20 m.s^{-1}	v_k = ?
$i_1 = 3$	
$i_2 = 5$	

Pri pohybe nádoby všetky molekuly plynu vykonávajú chaotický (tepelný) pohyb ako aj priamočiary pohyb spojený s pohybom nádoby rýchlosťou u. Pri zastavení nádoby molekuly si budú určitú dobu ešte zachovávať svoju jednosmernú rýchlosť, ale v dôsledku zrážok medzi sebou a stenami nádoby príde plyn do rovnovážneho stavu, v ktorom už jeho molekuly budú vykonávať len tepelný pohyb. V tomto stave vznikne nové Maxwellovo rozdelenie molekúl podľa rýchlosti s novou hodnotou sttednej kvadratickej rýchlosti v_{k2}. V dôsledku toho sa ustáli nová hodnota teplota plynu T_2. Pôvodná teplota T_1 bola úmerná pôvodnej hodnote strednej kvadratickej rýchlosti v_{k1}. Znamená to, že je potrebné zistiť, o koľko je v_{k2} väčšia ako v_{k1}, t.j. potrebujeme zistiť prírastok strednej kinetickej energie ΔE_k chaotického pohybu jednej molekuly v dôsledku zastavenia nádoby. Pri pohybe nádoby budú výsledná rýchlosť $\boldsymbol{c}_i$ a kinetická energia postupného pohybu i-tej molekuly rovné

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{u}_i\ ;\ \ \frac{m_0 c_i^2}{2} = \frac{m_0 v_i^2}{2} + \frac{m_0 u^2}{2} + m_0(\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{u}), \qquad (1)$$

kde $\boldsymbol{v}_i$ je rýchlosť tepelného pohybu molekuly.

Aby sme vypočítali strednú kinetickú energiu postupného pohybu molekuly je treba urobiť súčet kinetických energií molekúl a podeliť ho celkovým počtom N molekúl.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_0 c_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_0 v_i^2}{2} + \frac{m_0 u^2}{2} + \frac{1}{N}m_0\left(\boldsymbol{u} \cdot \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\right). \qquad (2)$$

V dôsledku toho, že tepelný pohyb je chaotický, t.j. platí, že veštky smery sú rovnako pravdepodobné, bude $\sum \boldsymbol{v}_i = 0$, a posledný člen v súčte rovnice (2) bude rovný nule.

Prvý člen môžeme vyjadriť nasledovne $\frac{m_0 v_{k1}^2}{2}$. Stredná kinetická energia postupného pohybu jednej molekuly počas pohybu nádoby bude

$$\langle E_{kp}\rangle_1 = \frac{m_0 v_{k1}^2}{2} + \frac{m_0 u^2}{2}.$$

Je zrejmé, že aj strednú hodnotu celkovej kinetickej energie molekuly počas pohybu nádoby môžeme vyjadriť analogickým súčtom

$$\langle E_0 \rangle' = \langle E_0 \rangle_1 + \frac{m_0 u^2}{2}. \tag{3}$$

Prvý člen na pravej strane rovnice (3) je stredná hodnota celkovej energie chaotického (tepelného) pohybu molekuly, ktorá je rovná $ikT_1/2$.

Po zastavení bude platiť

$$\langle E_0 \rangle'' = \langle E_0 \rangle_2 = \frac{i}{2} k T_2 . \tag{4}$$

Keď vezmeme do úvahy doplňujúce podmienky, ktoré vyjadrujú že nádoba sa nezúčastňuje na energetickej bilancii, potom $\langle E_0 \rangle' = \langle E_0 \rangle''$. Znamená to, že pri zastavení nádoby kinetická energia molekúl spojená s pohybom nádoby sa premieňa na kinetickú energiu tepelného pohybu molekúl. Porovnaním rovníc (3) a (4) dostaneme

$$\Delta \langle E_0 \rangle = \langle E_0 \rangle_2 - \langle E_0 \rangle_1 = \frac{m_0 u^2}{2}. \tag{5}$$

Rovnica (5) umožňuje zistiť hľadaný prírastok strednej kvadratickej rýchlosti molekúl.

Riešenie:

Z výrazu pre strednú energiu postupného pohybu molekuly $\frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT$ vyplýva, že $\langle v_2 \rangle = \frac{3kT}{m_0}$. Celková kinetická energia jednej molekuly je $\langle E_0 \rangle = ikT/2$. Porovnaním posledných dvoch rovníc dostaneme $\langle v^2 \rangle = 6\langle E_0 \rangle / i m_0$. Potom zmena štvorca strednej kvadratickej rýchlosti bude

$$\Delta \langle v^2 \rangle = v_{k2}^2 - v_{k1}^2 = \Delta \langle E_0 \rangle \frac{6}{i m_0}.$$

Dosadením za $\Delta \langle E_0 \rangle$ z (5) a úpravou dostaneme $\Delta \langle v^2 \rangle = 3u^2 / i$. Pre plyn s jednoatómovými molekulami je $i = 3$ a

$$\Delta \langle v^2 \rangle = u^2 = \left(20\,\mathrm{m.s^{-1}}\right)^2 = 400\,\mathrm{m^2.s^{-2}} ,$$

čo zodpovedá zmene strednej kvadratickej rýchlosti o 20 m.s^{-1}.
Pre plyn s dvojatómovými molekulami je $i = 5$.

$$\Delta \langle v^2 \rangle = 0{,}6\, u^2 = 0{,}6\left(20\,\mathrm{m.s^{-1}}\right)^2 = 240\,\mathrm{m^2.s^{-2}},$$

čo zodpovedá zmene strednej kvadratickej rýchlosti o 15,5 m.s^{-1}.

8.3. Odvoďte vzťah pre závislosť atmosferického tlaku od výšky nad zemským povrchom, ak platí dp = -ρgdh, kde dp je zmena tlaku pri zmene výšky o dh a ak teplota vzduchu klesá s výškou podľa vzťahu $T = T_0 - \alpha h$, kde T_0 je teplota vo výške h_0 a tlak v tejto výške je p_0. Zmenu tiažového zrýchlenia neuvažujte.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
p_0	$p\ (T,h\ )$
T_0	
h_0	
$\mathrm{d}p = -\ \rho g \mathrm{d}h$	
$T = T_0 - \alpha h$	

Je zrejmé, že závislosť tlaku od výšky dostaneme integrovaním vzťahu

$$\mathrm{d}p = -\ \rho g\mathrm{d}h. \qquad (1)$$

Pomocou stavovej rovnice si vyjadríme ρ ako funkciu tlaku a teploty.

$$pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{\rho}{M}RT$$

a odtiaľ

$$\rho = \frac{M\ p}{RT} = \frac{M\ p}{R\left(T_0 - \alpha h\right)}. \qquad (2)$$

Dosadením tohto vzťahu do rovnice (1) a úpravou dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{-Mg}{R}\frac{\mathrm{d}h}{T_0 - \alpha h}. \qquad (3)$$

Riešenie:

Aby sme dostali vzťah pre $p(h)$ musíme diferenciálnu rovnicu (3) integrovať

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{R}\int_{h_0}^{h}\frac{\mathrm{d}h}{T_0 - \alpha h}.$$

Je vhodné použiť substitúciu $x = T_0 - \alpha h$. Derivovaním dostaneme $\mathrm{d}x = -\ \alpha \mathrm{d}h$ a hranice integrovania teraz budú od $x_0 = T_0 - \alpha h_0$ po $x = T_0 - \alpha h$.

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p} = +\frac{Mg}{\alpha R}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Integrovaním dostaneme

$$\ln\frac{p}{p_0} = \frac{Mg}{\alpha R}\ln\frac{x}{x_0} = \frac{Mg}{\alpha R}\ln\frac{T_0 - \alpha h}{T_0 - \alpha h_0}.$$

Pretože hodnota $T_0 - \alpha h$ bude menšia ako hodnota $T_0 - \alpha h_0$, hodnota $\ln\dfrac{T_0 - \alpha h}{T_0 - \alpha h_0}$ bude záporná, a preto je vhodné vziať logaritmus na pravej strane so záporným znamienkom a s prevrátenou hodnotou pod logaritmom

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{\alpha R}\ln\frac{T_0 - \alpha h_0}{T_0 - \alpha h}.$$

Odstránime logaritmy na oboch stranách a dostaneme

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 - \alpha h_0}{T_0 - \alpha h}\right)^{-\frac{Mg}{\alpha R}}$$

a odtiaľ

$$p = p_0\left(\frac{T_0 - \alpha h_0}{T_0 - \alpha h}\right)^{-\frac{Mg}{\alpha R}}.$$

8.4. Kyslík bol ohriaty z teploty T_1 =300 K na teplotu T_2 = 600 K. Vypočítajte, ako sa zmení relatívny počet molekúl s rýchlosťami $v_p(T_1) \pm 5\,\mathrm{m.s^{-1}}$, $v_k(T_1) \pm 5\,\mathrm{m.s^{-1}}$ a $\bar{v}(T_1) \pm 5\,\mathrm{m.s^{-1}}$. Ako sa zmenia samotné rýchlosti v_p, v_k a $\bar{v}$?

Úvaha:

	Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$T_1 = 300$ K		$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1, v_p(T_1)} : \left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, v_p(T_1)} = ?$
$T_2 = 600$ K		$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1, v_k(T_1)} : \left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, v_k(T_1)} = ?$
$v_p(T_1) \pm 5$ m.s^{-1}		$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1, \bar{v}(T_1)} : \left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, \bar{v}(T_1)} = ?$
	$v_k(T_1) \pm 5$ m.s^{-1}	$\frac{v_p(T_2)}{v_p(T_1)} = ?$
	$\bar{v}(T_1) \pm 5$ m.s^{-1}	$\frac{v_k(T_2)}{v_k(T_1)} = ?$
		$\frac{\bar{v}(T_2)}{\bar{v}(T_1)} = ?$

Nezávisle od charakteru deja, ktorým bola uskutočnená zmena , môžeme predpokladať, že počiatočný a konečný stav sú tepelne rovnovážne stavy, preto v každom s týchto stavov je rozdelenie molekúl podľa rýchlosti Maxwellovo rozdelenie. Relatívny počet molekúl dN/N, rýchlosť ktorých leží v intervale od $v - \mathrm{d}v/2$ do $v + \mathrm{d}v/2$ bude

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = f(v,T)\mathrm{d}v\ .$$

Maxwellovo rozdelenie má tvar

$$f(v,T) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{v^2}{v_p^3}e^{-\frac{v^2}{v_p^2}}\ . \tag{1}$$

Najpravdepodobnejšiu rýchlosť v_p môžeme vypočítať zo vzťahu

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}\ . \tag{2}$$

Stredná kvadratická rýchlosť je daná vyťahom

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3}{2}}v_p\ . \tag{3}$$

Stredná aritmetická rýchlosť je daná vzťahom

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}}v_p\ . \tag{4}$$

Znamená to, že v obecnom prípade môžeme vypočítať relatívny počet molekúl podľa vzorca

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v,T)\mathrm{d}T\ . \tag{5}$$

V prípade, ak rozdiel $v_2 - v_1$ je vzhľadom na zmenu Maxwellovho rozdelenia malý, relatívny počet molekúl môžeme počítať

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = f(v,T)\Delta v \ , \tag{6}$$

kde za v sa berie stredná hodnota rýchlosti v intervale Δv.

Riešenie:

Vypočítame si najprv relatívny počet molekúl pre teplotu 300 K. Pre najpravdepodobnejšiu rýchlosť pri teplote 300 K dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{v_p(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{v_p^2}{v_p^3}e^{-\frac{v_p^2}{v_p^2}}\Delta v$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{v_p(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}}\frac{1}{e}\Delta v \ . \tag{7}$$

Pri výpočte pre stredne kvadratickú rýchlosť vezmeme do úvahy vzťah (3) a dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{v_k(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}}e^{-3/2}\Delta v$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{v_k(T_1)} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}}\frac{1}{e^{3/2}}\Delta v \ . \tag{8}$$

Pri výpočte pre stredne aritmetickú rýchlosť vezmeme do úvahy vzťah (4) a dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{\bar{v}(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}}e^{-4/\pi}\Delta v$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{\bar{v}(T_1)} = \frac{16}{\pi^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}}\frac{1}{e^{4/\pi}}\Delta v \ . \tag{9}$$

Vypočítame teraz relatívny počet molekúl pri teplote 600 K, pre ten istý interval teplôt. Aby sme to mohli urobiť, musíme najprv vypočítať rýchlosť v_p pre teplotu T_2. Táto je rovná

$$v_p(T_2) = \sqrt{\frac{2RT_2}{M}} \ . \tag{10}$$

Pomocou vzťahov (3) a (4) vypočítame v_k a $\bar{v}$. Dosadením zodpovedajúcich vzťahov do rovnice (1) dostaneme nasledovné vzťahy:

Pre rýchlosť $v_p(T_1)$ pri teplote 600 K

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2,v_p(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{T_1}{T_2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}}e^{-T_1/T_2}\Delta v \ ; \tag{11}$$

Pre rýchlosť $v_k(T_1)$ pri teplote 600 K

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2,v_k(T_1)}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{3}{2}\frac{T_1}{T_2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}}e^{-\frac{3}{2}\frac{T_1}{T_2}}\Delta v\ ; \qquad (12)$$

a pre rýchlosť $\bar{v}\left(T_1\right)$ pri teplote 600 K

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2,\bar{v}(T_1)}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{4}{\pi}\frac{T_1}{T_2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}}e^{-\frac{4}{\pi}\frac{T_1}{T_2}}\Delta v\ . \qquad (13)$$

Pomer relatívnych počtov molekúl pri zadaných rýchlostiach dostaneme vydelením zodpovedajúcich vzťahov. Pre rýchlosť $v_p\left(T_1\right)$ použijeme vzťahy (7) a (11) a dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1,v_p(T_1)}:\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2,v_p(T_1)}=\frac{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}}\frac{T_2}{T_1}\frac{e^{T_1/T_2}}{e}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}e^{T_1/T_2-1}=1{,}72\ .$$

Pre rýchlosť $v_k\left(T_1\right)$ použijeme vzťahy (8) a (12) a dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1,v_k(T_1)}:\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2,v_k(T_1)}=\frac{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}}\frac{2}{3}\frac{T_2}{T_1}\frac{\frac{3}{2}e^{-3/2}}{e^{-3T_1/2T_2}}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}e^{-3/2\left(1-T_1/T_2\right)}=1{,}34$$

Pre rýchlosť $v_k\left(T_1\right)$ použijeme vzťahy (9) a (13) a dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1,\bar{v}(T_1)}:\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2,\bar{v}(T_1)}=\frac{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}}\frac{T_2}{T_1}\frac{e^{-4/\pi}}{e^{-4T_1/\pi T_2}}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}e^{-\frac{4}{\pi}\left(1-T_1/T_2\right)}=1{,}50\ .$$

Pre zmeny rýchlostí dostaneme zo vzťahov (2), (3) a (4) nasledujúce pomery

$$\frac{v_p\left(T_2\right)}{v_p\left(T_1\right)}=\frac{v_k\left(T_2\right)}{v_k\left(T_1\right)}=\frac{\bar{v}\left(T_2\right)}{\bar{v}\left(T_1\right)}=\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}=\sqrt{2}\ .$$

Neriešené príklady

8.5. Koľko molekúl obsahuje a) liter vody, b) kocka železa s hranou 1 cm?
[$3{,}35\cdot 10^{25}, 8{,}41\cdot 10^{22}$]

8.6. Vypočítajte počet molekúl dusíka, ktorý sa nachádza v nádobe objemom 1 l pri teplote 27° C a tlaku $1{,}333\cdot 10^{4}$ Pa. [$3{,}22\cdot 10^{21}$]

8.7.* Dvojité okno má plochu 2 m^2. Vzdialenosť medzi tabuľami skla je 0,2 m. Vonkajšie sklo má teplotu –10° C, vnútorné 20° C. Tlak vzduchu v okne je atmosferický, a teplota sa mení v smere kolmom na sklá lineárne. Vypočítajte počet molekúl vzduchu, ktoré sa nachádzajú medzi tabuľami skla a ich celkovú energiu.

[$1{,}06 \cdot 10^{25}$, 0,1 MJ]

8.8. V guľovej nádobe o polomere 1 cm sa nachádza hélium pri teplote 300 K a tlaku $1{,}5 \cdot 10^5$ Pa. Samotná nádoba sa nachádza vo vákuu. Aký bude tlak v nádobe, ak v dôsledku netesnosti vo ventile unikne $3{,}035 \cdot 10^{19}$ molekúl? [$1{,}2 \cdot 10^5$ Pa]

8.9. Vypočítajte hustotu zmesi 4 g vodíka a 32 g kyslíka pri tlaku 93,3 kPa a teplote 7° C. Predpokladáme, že plyny sa chovajú ako ideálne. [0,48 kg.m^{-3}]

8.10. V nádobe, ktorej objem je 0,01 m^{-3}, sa nachádza zmes dusíka a vodíka pri teplote 280 K. Vypočítajte tlak zmesi plynov, ak viete, že hmotnosť dusíka je 7 g a vodíka 1 g. [$1{,}75 \cdot 10^5$ Pa]

8.11. V nádobe objemu 164 cm^3 sa nachádza plynu pri teplote 20° C a tlaku $0{,}993 \cdot 10^5$ Pa. Vypočítajte, aký objem bude mať to isté množstvo plynu, ak bude jeho teplote 0° C a tlak $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa. [$\cong$ 150 cm^3]

8.12. Vypočítajte, koľko váži vzduch v miestnosti, ktorej rozmery sú. šírka 4 m, dĺžka 5 m a výška 3 m, pri tlaku 0,1 MPa a pri izbovej teplote 20° C. Hustota vzduchu pri teplote 0° C a tlaku 0,1 MPa je 1,293 kg.m^{-3}. [709 N]

8.13. Žiarovka objemu 150 cm^3 je naplnená argónom. Aká je jeho teplota, ak pri tlaku 0,1 MPa má argón tiaž $1{,}42 \cdot 10^{-3}$ N. [224° C]

8.14. Koľko vzduchu unikne y 220 m^3 veľkej miestnosti, keď pri rovnakom tlaku v nej stúpne teplota z 12° C na 22° C? [7 m^3]

8.15. Pretlak v oceľovej tlakovej fľaši stúpne zohriatím zo 6,2 MPa na 7,5 MPa. Aká je výsledná teplota, keď počiatočná teplota bola –14° C? [39,5° C]

8.16. Keď v nádobe uzavreté množstvo plynu zohrejeme o 150° C, zvýši sa jeho tlak o 40%. Aká je počiatočná a konečná teplota plynu? [102° C; 252° C]

8.17. V tenkej sklenej trubici na jednom konci zatavenej je uzavretý vzduch stĺpcom ortuti dĺžky 8,5 cm. Keď je trubica vo vertikálnej polohe so zataveným koncom hore, je výška vzduchového stĺpca 5 cm, a keď je trubica vo vertikálnej polohe so zataveným koncom dole, je výška vzduchového stĺpca 4 cm. Aký je atmosferický tlak?

[$1{,}01 \cdot 10^5$ Pa]

8.18.* Nádoba je predelená piestom, ktorý sa môže pohybovať vplyvom tlakových síl v zvislom smere a meniť pomer objemov oboch častí nádoby. V oboch častiach je rovnaká hmotnosť plynu. Vplyvom tiaže pôsobiacej na piest pri teplote 400 K je objem dolnej časti rovný jednej tretine z celkového objemu. Pri akej teplote bude objem dolnej časti rovný jednej štvrtine z celkového objemu? [225 K]

8.19. V pneumatike automobilu je pri teplote 280 K objem vzduchu 35 dm^3 a jeho tlak je $2 \cdot 10^5$ Pa. Ako sa zvýši objem vzduchu v pneumatike, ak sa pri jazde pneumatika zohreje na teplotu 288 K za stáleho tlaku? [o 1 dm^3]

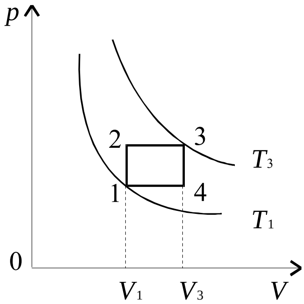
8.20. Predpísaný tlak vzduchu v pneumatikách auta je 220 kPa. Pretekárske automobily však majú pneumatiky nastavené na nižší tlak. A akým zvýšením teplota sa počíta, keď pri teplote 20° C má vzduch v pneumatikách tlak 200 kPa? Nepatrnú zmenu objemu pneumatiky zanedbajte. [29,3 K]

8.21. V balóne bolo 10 kg dusíka pri tlaku 10 MPa. Aké množstvo sme vypustili. ak konečný tlak bol2,5 MPa? Teplota dusíka sa nemení. [7,5 kg]

8.22. Aký tlak je v oceľovej fľaši s objemom 40 l, keď je v nej 4,2 kg kyslíka pri teplote 20° C? [$8\cdot10^6$ Pa]

8.23. Bomba obsahuje stlačený plyn pri teplote 293K a tlaku $3{,}76\cdot10^6$ Pa. Ako sa zmení jeho tlak, keď polovičné množstvo plynu vypustíme a jeho teplota pritom klesne na 283 K? [$1{,}82\cdot10^6$ Pa]

8.24. V jednom valci objemu V_1 = 5 m^3 je kysličník uhoľnatý s tlakom p_1 = 15 MPa, v druhom valci objemu V_2 = 8 m^3 je vodík s tlakom 22 MPa pri rovnakej teplote. Aký bude výsledný tlak zmesi po spojení oboch nádob? [19,3 MPa]



Obr.53

8.25.* Na obrázku 53 je znázornený kruhový dej 1-2-3-4-1. Stavy 1 a 3 zodpovedajú izotermám s teplotami 27° C a 327° C. V stave 1 je známy aj objem plynu a to 20 l. Aký musí byť objem V_3 aby stavy 2 a 4 boli na tej istej izoterme? Aká je teplota tejto izotermy? [28,3 l; 424,26 K]

8.26. Koľko zdvihov musí vykonať piest vývevy, aby odsal časť vzduchu z nádoby, objem ktorej je 200 l, a to tak, aby tlak v nádobe klesol z $1\cdot10^5$ Pa na $3{,}695\cdot10^4$ Pa? Teplota vzduchu pri odsávaní sa nemení. Objem valca vývevy je 2 l. [$\cong$ 100]

8.27. Kompresor nasáva pri každom zdvihu 5 l vzduchu pri normálnom atmosferickom tlaku $1\cdot10^5$ Pa a teplote 280 K a vtláča ho do zásobníka s objemom 2 m^3. Teplota vzduchu v zásobníku sa udržuje konštantná 300 K. Koľko zdvihov musí urobiť kompresor, aby sa tlak v zásobníku zväčšil o 0,3 MPa? [1120]

8.28.* Dve nádoby s objemami 200 cm^3 a 0,1 l sú spojené krátkou trubičkou, v ktorej sa nachádza izolačná pôristá priehradka. Pomocou tejto priehradky je možné dosiahnuť rovnakého tlaku v oboch nádobách pri rôznych teplotách plynu v jednotlivých nádobách. V nádobách sa nachádza kyslík a v počiatočnom stave bola jeho teplota 27° C a tlak $1\cdot10^5$ Pa. Potom bola menšia nádoba umiestená do nádoby s ľadom, v ktorej sme udržovali teplotu 0° C. Väčšia nádoba bola vložená do nádoby s parou o teplote 100^0 C. Vypočítajte výsledný tlak kyslíku v sústave. Tepelnú rozťažnosť nádob neuvažujte. [$1{,}11\cdot10^5$ Pa]

8.29. Balón naplnený na zemi vodíkom má objem 500 m^3 pri atmosferickom tlaku 101 kPa. Hmotnosť balónu a záťaže je 450 kg. Do akej výšky vystúpi, ak teplota atmosféry je konštantná a rovná 20° C? (Objem balónu sa nemení). [2260 m]

8.30. Aký je relatívny pokles tlaku pri výstupe z nadmorskej výšky 300 m na vrchol hory v nadmorskej výške 2000 m? Teplotu považujeme za konštantnú a rovnú 20° C. (Molárna hmotnosť vzduchu je približne 30 g/mol). [19%]

8.31. Perrin zistil, že vo dvoch rovnako hrubých vrstvách vzdialených od seba 100 μm, počet častíc vznášajúcich sa v kvapaline je v jednej vrstve 2 krát väčší ako v druhej. Teplota kvapaliny bola 20° C. Rozmer častíc bol $3\cdot10^{-4}$ cm. Hustota kvapaliny bola o 0,2 mg/cm^3 menšia ako častíc. Vypočítajte Avogadrovo číslo. [$6{,}1\cdot10^{26}$ kmol^{-1}]

8.32. Vypočítajte strednú aritmetickú, strednú kvadratickú a najpravdepodobnejšiu rýchlosť molekúl kysličníka uhličitého pri teplote 0° C.
[362 $m.s^{-1}$; 393 $m.s^{-1}$; 321 $m.s^{-1}$]
8.33. Určte teplotu dusíka, pre ktorú hustota pravdepodobnosti rozdelenia molekúl podľa rýchlosti je rovnaká pre rýchlosť v_1 = 200 $m.s^{-1}$ a rýchlosť v_2 = 650 $m.s^{-1}$.
[274 K]
8.34. Teplota kysličníka dusného je 300 K. Vypočítajte, aké percentuálne množstvo molekúl bude mať rýchlosť v intervale od 815 $m.s^{-1}$ do 825 $m.s^{-1}$. [0,4%]

9 Termodynamika

Pri riešení úloh z termodynamiky budeme predpokladať, že všetky deje prebiehajú kvazistacionárne (t.j. všetky priebežné stavy sú rovnovážne). Tento predpoklad nám dovoľuje použiť prvú vetu termodynamickú v integrálnom tvare. Diferenciálny tvar prvej termodynamickej vety je vhodný len v tých prípadoch, ak potrebujeme pomocou tejto vety a stavovej rovnice napísať rovnicu deja alebo tepelnú kapacitu.

Druhá veta termodynamická nám umožňuje zistiť smer procesov, ak ponecháme sústavu samú na seba.

Analýzu príkladov je vhodné začínať grafickým zobrazením dejov. Pre lepšiu predstavivosť je vhodné nazerať sa na jednotlivé deje z hľadiska molekulárno-kinetickej teórie ideálneho plynu.

1. Zákon zachovania energie sa v termodynamike volá prvá veta termodynamická. Pre uzavretú sústavu platí

$$\mathrm{d}'Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}'A \,,$$

kde $\mathrm{d}'Q$ je množstvo tepla, ktoré sústava dostáva alebo odovzdáva, $\mathrm{d}U$ – zmena vnútornej energie a sústavy a $\mathrm{d}'A$ práca sústavy proti vonkajším silám.

2. Vnútorná energia jedného molu ideálneho plynu je

$$U = \frac{i}{2} RT \,,$$

kde i je počet stupňov voľnosti a R je molárna plynová konštanta.

3. Elementárna práca plynu je súčin tlaku a elementárnej zmeny objemu

$$\mathrm{d}\acute{A} = p\mathrm{d}V \,.$$

Práca, ktorú vykoná sústava pri prechode zo stavu 1 do stavu 2, vypočítame zo vzťahu

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V \,.$$

4. Tepelná kapacita plynu je definovaná ako prvá derivácia tepla podľa teploty pri fixovanej zmene stavu

$$C_x = \left(\frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}T} \right)_x .$$

5. Molárne teplo jedného kilomolu plynu pri izochorickom procese je dané vzťahom:

$$C_{mv} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{i}{2} R \,.$$

6. Molárne teplo jedného kilomolu plynu pri izobarickom procese je

$$C_{mp} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{i+2}{2} R \,.$$

7. Súvis medzi molárnymi teplami kilomolu pri stálom tlaku a stálom objeme vyjadruje Mayerov vzťah:

$$C_{mp} = C_{mv} + R \,.$$

8. Rovnice adiabatického deja (Poissonove rovnice) majú nasledovný tvar

$$pV^{\gamma} = \text{konšt.}; \quad TV^{\gamma-1} = \text{konšt.}, \; T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{konšt.},$$

kde $\gamma = \dfrac{C_{mp}}{C_{mv}}$ je Poissonova konštanta. Molárne teplá sa dajú vyjadriť pomocou hmotnostnej tepelnej kapacity nasledovnými vzťahmi

$$C_{mv} = M\, c_v, \quad C_{mp} = M\, c_p,$$

kde M je hmotnosť jedného molu.

9. Rovnica polytropického deja má nasledovný tvar:

$$pV^{n} = \text{konšt.},$$

kde $n = \dfrac{c_p - c_n}{c_v - c_n}$ a c_n je hmotnostná tepelná kapacita pri danom deji.

10. Pri fázových prechodoch prvého druhu platí Clausiusova – Clapeyronova rovnica: Zmena teploty topenia (vyparovania) súvisí so zmenou tlaku podľa vzťahu

$$\mathrm{d}T = \frac{T(v_2 - v_1)}{l}\mathrm{d}p,$$

kde v_1 a v_2 sú špecifické objemy látok pred skupenskou premenou a po nej a l je latentné teplo, t.j. teplo, ktoré sa pri fázovej premene spotrebuje jednotkovou hmotnosťou.

11. Koeficient objemovej rozťažnosti a_v je daný vzťahom

$$a_v = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}.$$

12. Pomerný koeficient rozpínavosti je daný vzťahom

$$a_p = \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}.$$

13. Izotermická stlačiteľnosť κ_T je definovaná vzťahom

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

14. Účinnosť kruhového deja tepelného stroja sa dá vypočítať zo vzťahu:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1},$$

kde A je práca, ktorú vykoná tepelný stroj za jeden kruhový dej, Q_1 teplo, ktoré získa od teplého zásobníka tepla počas jedného kruhového deja a Q_2 – teplo, ktoré odovzdá chladnejšiemu zásobníku tepla počas jedného kruhového deja.

15. V prípade ideálneho Carnotovho kruhového deja bude účinnosť rovná

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

kde T_1 je teplota teplejšieho zásobníka tepla a T_2 je teplota chladnejšieho zásobníka tepla.

16. Zmena entrópie ΔS pri prechode sústavy zo stavu 1 do stavu 2 je daná vzťahom

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}'Q}{T} .$$

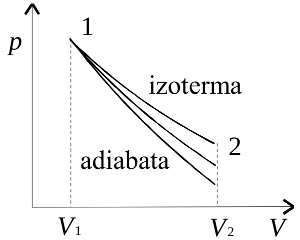
Riešené príklady

9.1. Ideálny plyn pozostávajúci z dvojatómových molekúl sa nachádza vo valci s pohyblivým piestom pod tlakom $2 \cdot 10^5$ Pa. Objem plynu v počiatočnom stave bol 6 litrov. Potom plyn zväčšil svoj objem na dvojnásobok podľa zákona pV^k = konšt., kde k = 1,2. Vypočítajte zmenu vnútornej energie plynu a prácu, ktorú plyn pri svojom rozširovaní sa vykonal. Vypočítajte molárne teplo plynu pre tento dej.
Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa	$\Delta U = ?$
$V_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ m^3	$A = ?$
$V_2 = 2V_1 = 12 \cdot 10^{-3}$ m^{-3}	$C_m = ?$
$k = 1{,}2$	

Aby sme mohli kvalitatívne posúdiť prebiehajúci dej, je vhodné porovnať grafické zobrazenie tohoto deja v súradniciach p,V s izotermou a adiabatou pri prechode z jedného a toho istého počiatočného stavu do rovnakého konečného objemu (pozri obr. 54).

V skúmanom deji je $k \rangle 1$, preto bude jeho pV diagram prebiehať nižšie ako izoterma. Znamená to, že pri tomto deji bude teplota klesať $(\Delta T \langle 0)$ a zároveň sa bude zmenšovať vnútorná energia $(\Delta U \langle 0)$. Z druhej strany, súčiniteľ $k \langle \gamma = C_{mp}/C_{mV}$, t.j. pV diagram skúmaného deja bude nad adiabatou. Znamená to, že zmenšenie vnútornej energie ΔU je menšie ako pokles vnútornej energie pri adiabatickom deji $(|\Delta U| \langle |\Delta U_{ad}|)$. Práca A bude pri tomto deji väčšia ako pri adiabatickom deji $(A \rangle A_{ad})$, pretože pri adiabatickom deji $|\Delta U_{ad}| = A_{ad}$ a teda $|\Delta U| \langle A$. Znamená to,



Obr.54

že množstvo tepla potrebné pre uskutočnenie skúmaného deja bude $Q = A - |\Delta U| > 0$, t.j. plyn pri takomto deji dostáva teplo, ale jeho teplota klesá. Potom tepelná kapacita pri tomto deji je záporná. Vidíme, že na vykonanie práce proti vonkajším silám plyn spotrebuje okrem dodaného tepla aj časť svojej vnútornej energie.

Zmenu vnútornej energie môžeme vyjadriť vzťahom

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{m}{M} C_{mV}\left(T_2 - T_1\right) . \qquad (1)$$

Neznáme veličiny z rovnice (1) môžeme zistiť pomocou stavovej rovnice a rovnice deja. Práca je daná vzťahom

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V , \qquad (2)$$

kde závislosť $p(V)$ je daná rovnicou deja. Teplo prijaté sústavou je podľa prvej vety termodynamickej

$$Q = A + \Delta U \qquad (3)$$

Ak pre skúmaný dej bude Q priamo úmerné rozdielu teplôt $\Delta T = T_2 - T_1$, potom bude molárne teplo konštantné (polytropický dej). Porovnaním rovnice (3) s rovnicou (1) môžeme odvodiť výraz pre molárne teplo daného deja.

Riešenie:

Úpravou rovnice (1) dostaneme

$$\Delta U = \frac{i}{2}\left(\frac{m}{M}RT_2 - \frac{m}{M}RT_1\right) = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) \tag{4}$$

Výsledný tlak podľa zadanej rovnice deja pV^k = konšt. bude

$$p_2 = p_1(V_1/V_2)^k = 2\cdot 10^5\,\text{Pa}\left(\frac{1}{2}\right)^{1,2} = 8,7\cdot 10^4\,\text{Pa}$$

Skúmaný plyn pozostáva z dvojatómových molekúl a teda $i = 5$. Potom zmena je vnútornej energie

$$\Delta U = \frac{5}{2}\left(8,7\cdot 10^4\,\text{Pa}\cdot 12\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 - 2\cdot 10^5\,\text{Pa}\cdot 6\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3\right) = -390\,\text{J}$$

Aby sme mohli vypočítať prácu, prepíšeme si rovnicu deja do tvaru $pV^k = p_1V_1^k$

odkiaľ $p = p_1\dfrac{V_1^k}{V^k}$.

Dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$A = p_1V_1^k\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V^k} = p_1V_1^k\,\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{V_1^{k-1}} - \frac{1}{V_2^{k-1}}\right).$$

Keďže $p_1V_1^k = p_2V_2^k$, dostaneme $A = \dfrac{1}{k-1}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right)$. (5)

$$A = \frac{1}{1,2-1}\left(2\cdot 10^5\,\text{Pa}\cdot 6\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 - 8,7\cdot 10^4\,\text{Pa}\cdot 12\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3\right) = 780\,\text{J}$$

Množstvo tepla prijatého plynom vypočítame dosadením rovníc (4) a (5) do rovnice (3).

$$Q = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) - \frac{1}{k-1}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right),$$

alebo

$$Q = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) = \frac{m}{M}\left(\frac{i}{2} - \frac{1}{k-1}\right)R\left(T_2 - T_1\right).$$

Znamená to, že množstvo prijatého tepla je priamo úmerné rozdielu teplôt a to znamená, že molárne teplo je konštantné. Porovnaním s rovnicou (4) dostaneme

$$C_{.m} = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\text{R} = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1,2-1}\right)8,31\,\text{kJ.kmol}^{-1} = -21\,\text{kJ.kmol}^{-1}$$

Overme si zápornosť molárneho tepla. Poissonova konšt. $\gamma = i + 2/i$ a odkiaľ $\dfrac{i}{2} = \dfrac{1}{\gamma - 1}$. Potom

$$C_{mk} = \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1}\right)R \,\langle\, 0, \quad ak \quad 1 \langle k \langle \gamma.$$

9.2. Určité množstvo vzduchu sme nechali rozpínať sa z počiatočného objemu $V_1 = 2l$ na päťnásobný. Počiatočný tlak bol 0,1 MPa. Vypočítajte, akú prácu vykonal vzduch, ak jeho rozšírenie sa uskutočnilo a) izobaricky, b) izotermicky, c) adiabaticky.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3	$A_a = ?$
$p_1 = 1 \cdot 10^5$ Pa	$A_b = ?$
$V_2 = 10 \cdot 10^{-3}$ m^3	$A_c = ?$

a) izobara
b) izoterma
c) adiabata
$\gamma = 1,4$

Elementárna práca plynu, ktorú vykoná pri elementárnej zmene svojho objemu, je daná vzťahom

$$d'A = p\,dV \ . \qquad (1)$$

Celkovú prácu vypočítame, ak budeme integrovať rovnicu (1)

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \ . \qquad (2)$$

Je zrejmé, že aby sme mohli vypočítať integrál v rovnici (2), musíme poznať funkciu $p(V)$.

a) Pre izobarický dej je p= konšt.

b) Pre izotermický dej platí vzťah

$$pV = \text{konšt.} = p_1 V_1$$

a odtiaľto

$$p = \frac{p_1 V_1}{V} \ . \qquad (3)$$

c) Pre adiabatický dej platí Poissonova rovnica

$$pV^{\gamma} = konšt. = p_1 V_1^{\gamma}$$

a odtiaľto

$$p = \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}} \ . \qquad (4)$$

Riešenie:

a) Pri izobarickom deji bude práca rovná

$$A = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p\left(V_2 - V_1\right) = 10^5 \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2} \cdot (10-2) \cdot 10^{-3} \text{m}^3 = 800 \text{ J} \ .$$

b) Dosadením za p z rovnice (3) do rovnice (2) dostaneme

$$A = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = 10^5 \text{kg m}^{-1}.\text{s}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 \cdot \ln 5 = 322 \text{ J} \ .$$

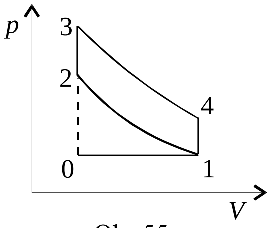
c) Dosadením za p z rovnice (4) do rovnice (2) dostaneme

$$A = p_1 V_1^{\gamma} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] = \frac{10^5 \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{m}^3}{1,4 - 1}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{0,4}\right]$$

$$A = 237 \text{ J} \ .$$

9.3. V pracovnom cykle štvortaktných plynových motorov ako aj motorov s karburátorom (Ottov kruhový dej) sa teplo dodáva a odoberá pri stálych objemoch (pozri obr. 55). Zvláštnosťou týchto motorov je to, že pracovná zmes, ktorá je stlačovaná v motore, sa pripravuje mimo valcov motora:

0 – 1 – nasávanie pracovnej zmesi;



Obr.55

1 – 2 – adiabatické stlačenie na konci ktorého dochádza k zapáleniu pracovnej zmesi od elektrickej iskry;

2 – 3 – veľmi rýchly rast tlaku produktov horenia a teploty (prakticky pri stálom objeme);

3 – 4 – adiabatická expanzia produktov horenia, (pracovný chod stroja);

4 – 1 – otvára sa výfukový ventil a dochádza k poklesu tlaku vo valci pri stálom objeme;

1 – 0 – vytláčanie produktov horenia z valca.

Pomer objemov $V_1 / V_2 = \varepsilon$ sa volá stupeň adiabatickej kompresie. Vypočítajte účinnosť kruhového deja ak Poissonova konšt. adiabaty je rovná 1,4 a $\varepsilon = 4$.

Úvaha:

Zadané veličiny
$\gamma = 1{,}4$
$\varepsilon = 4$

Hľadané veličiny
$\eta = ?$

Účinnosť kruhového deja je daná vzťahom

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}. \tag{1}$$

Znamená to, že potrebujeme zistiť teplá Q_1 a Q_2. Pretože teplo Q_1 sa dodáva pri stálom objeme a teplo Q_2 sa odoberá tiež pri stálom objeme bude platiť:

$$Q_1 = nC_{mV}\left(T_3 - T_2\right) \quad \text{a} \quad Q_2 = nC_{mV}\left(T_4 - T_1\right) \quad . \tag{2}$$

Dosadením do rovnice (1) dostaneme

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}. \tag{3}$$

Ale deje 3 – 4 a 1 – 2 sú adiabaty, pre ktoré bude platiť Poissonova rovnica, pomocou ktorej môžeme vyjadriť teploty T_3 a T_2 ako funkcie teplôt T_4 a T_1. Dosadením týchto závislostí do rovnice (3) dostaneme hľadanú účinnosť.

Riešenie:

Na základe Poissonovej rovnice $TV^{\gamma-1} = \text{konšt}$. môžeme napísať:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1},$$

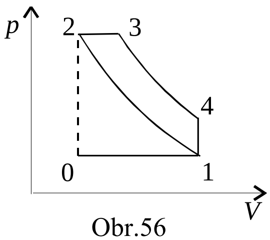
$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1}$$

a odtiaľto $T_2 = T_1\varepsilon^{\gamma-1}$ a $T_3 = T_4\varepsilon^{\gamma-1}$.

Dosadením do rovnice (3) dostaneme

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_4\varepsilon^{\gamma-1} - T_1\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{4^{0,4}} = 0{,}426\,.$$

9.4. Kruhový dej Dieselovho motora prebieha nasledovne (pozri obr. 56):
0 – 1 – nasávanie vzduchu do valca prakticky pri stálom tlaku, obyčajne rovnému atmosferickému tlaku;
1 – 2 – adiabatické stlačenie vzduchu, na konci tohto deja dochádza ku vstreknutiu paliva a jeho vznietenie;
2 – 3 – horenie paliva a expanzia produktov horenia pri stálom tlaku (izobarický prívod tepla);



Obr.56

3 – 4 – po dosiahnutí stavu 3 končí horenie paliva a expanzia produktov horenia sa deje adiabaticky, v stave 4 sa otvára výfukový ventil;
4 – 1 – tlak produktov horenia klesá na úroveň atmosferického (izochorické odvádzanie tepla);
1 – 0 – vytlačenie produktov horenia z valca.
Pomer $V_1/V_2 = \varepsilon$ sa volá stupeň adiabatickej kompresie a pomer $V_3/V_2 = \rho$ stupeň predbežnej expanzie.

Vypočítajte účinnosť Dieselovho kruhového deja pre $\varepsilon = 12$, $\rho = 4$ a Poissonovu konštantu $\gamma = 1{,}4$!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$\varepsilon = 12$	$\eta = ?$
$\rho = 4$	
$\gamma = 1{,}4$	

Účinnosť kruhového deja tepelného stroja je daná vzťahom

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}\,. \tag{1}$$

Teplo Q_1 sa privádza pri stálom tlaku, a preto platí

$$Q_1 = nC_{mp}\left(T_3 - T_2\right). \tag{2}$$

Teplo Q_2 sa odvádza pri stálom objeme a teda

$$Q_2 = nC_{mV}\left(T_4 - T_1\right). \tag{3}$$

Dosadením rovníc (2) a (3) do rovnice (1) dostaneme

$$\eta = 1 - \frac{nC_{mV}\left(T_4 - T_1\right)}{nC_{mp}\left(T_3 - T_2\right)} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(T_4 - T_1\right)}{\left(T_3 - T_2\right)}\,. \tag{4}$$

Pomocou rovníc, ktoré popisujú deje pri prechode z jedného stavu do druhého, môžeme vyjadriť teploty T_2 , T_3 a T_4 pomocou teploty T_1 a zadaných pomerov ε, ρ a γ.

Riešenie:

Pretože dej 2 – 3 je izobarický platí:

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_2}{T_3}\,,$$

odkiaľ

$$T_3 = T_2\frac{V_3}{V_2} = T_2\rho\,. \tag{5}$$

Dej 3 – 4 je adiabatický dej, pre ktorý platí Poissonova rovnica. Preto môžeme napísať:

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1},$$

odkiaľ

$$T_4 = T_3\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}. \tag{6}$$

Vyjadríme si pomer $\frac{V_3}{V_4}$ pomocou pomeru $\frac{V_1}{V_2} = \varepsilon$ a pomeru $\frac{V_3}{V_2} = \rho$.

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}\cdot\frac{V_2}{V_1} = \rho\frac{1}{\varepsilon}.$$

Dosadením do rovnice (6) dostaneme:

$$T_4 = T_3\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1}.$$

Po dosadení T_2 z rovnice (5) dostávame:

$$T_4 = T_2\,\rho\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1} = T_2\,\frac{\rho^{\gamma}}{\varepsilon^{\gamma-1}}. \tag{7}$$

Zostáva nám nájsť vzťah medzi T_2 a T_1, ale pretože dej 1 – 2 je adiabatický, bude platiť:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1} \qquad \text{odkiaľ} \quad T_2 = \varepsilon^{\gamma-1}T_1. \tag{8}$$

Dosadením vzťahu (8) do rovníc (5) a (7) dostaneme

$$T_3 = \rho\,\varepsilon^{\gamma-1}T_1, \qquad T_4 = \rho^{\gamma}T_1.$$

Po dosadení teplôt do rovnice (4) dostaneme pre účinnosť výraz

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa}\frac{\left(\rho^{\gamma}-1\right)T_1}{\left(\rho\,\varepsilon^{\gamma-1} - \varepsilon^{\gamma-1}\right)T_1} = 1 - \frac{1}{\kappa}\frac{\rho^{\gamma}-1}{\varepsilon^{\gamma-1}\left(\rho-1\right)}$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{1{,}4}\frac{4^{1{,}4}-1}{12^{0{,}4}\left(4-1\right)} = 0{,}47\,.$$

9.5. V mosadznom kalorimetri hmotnosti 200 g sa nachádza kúsok ľadu hmotnosti 100 g s teplotou –10°C. Koľko pary teplej 100°C je treba vpustiť do kalorimetra, aby voda v ňom mala teplotu 40°C?

Úvaha:

Pre kalorimeter platí zákon zachovania energie, t.j. množstvo tepla Q_1, ktoré príjme kalorimeter pri svojom ohreve a ľad pri svojom ohreve, premene na vodu a ohreve vody, bude rovné množstvu tepla, ktoré odovzdá para pri kondenzácií a svojom ochladzovaní.

Zadané veličiny
$m_1 = 0{,}2\text{kg}$
$m_2 = 0{,}1\text{ kg}$
$t_1 = 263\text{K}$
$t_2 = 373\text{K}$
$t_k = 313\text{K}$
$c_1 = 398\ \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$c_2 = 2{,}09\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$c_{\text{H}_2\text{O}} = 4186\ \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$l_2 = 3{,}35\cdot 10^5\,\text{J.kg}^{-1}$
$l_3 = 2{,}26\cdot 10^6\,\text{J.kg}^{-1}$

Hľadané veličiny
$m_3 = ?$

$$Q_1 = Q_2 \tag{1}$$

Množstvo tepla Q_1 je rovné súčtu tepla potrebného na ohriatie kalorimetra z teploty t_1 na teplotu t_K

$$m_1 c_1 (t_k - t_1)\,,$$

tepla potrebného na ohriatie ľadu do teploty topenia (273K) $m_2 c_2 (273\text{K} - t_1)$,tepla potrebného na premenu ľadu na vodu $m_2 l_2$ a tepla potrebného na ohriatie tejto vody do teploty t_k $m_2 c_{H_2O}(t_k - 273\text{K})$, t. j.,

$$Q_1 = m_1 c_1 (t_k - t_1) + m_2 c_2 (273\text{K} - t_1) + m_2 l_2 + m_2 c_{H_2O}(t_k - 273\text{K})\,. \tag{2}$$

Množstvo tepla Q_2 je rovné súčtu tepla získaného kondenzáciou pary pri 100°C $m_3 l_3$ a tepla získaného z ochladenia toho istého množstva vody do teploty t_k $m_3 c_{H_2O}(373\text{K} - t_k)$

$$Q_2 = m_3 l_3 + m_3 c_{H_2O}(373\text{K} - t_n) \tag{3}$$

Dosadením vzťahov (2) a (3) do rovnice (1) dostaneme rovnicu o jednej neznámej m_3.

Riešenie:

Po dosadení vzťahov (2) a (3) do rovnice (1) dostaneme

$$m_1 c_1 (t_k - t_1) + m_2 c_2 (273\text{K} - t_1) + m_2 l_2 + m_2 c_{H_2O}(t_k - 273\text{K}) =$$
$$= m_3 l_3 + m_3 c_{H_2O}(373\text{K} - t_k)$$

a odtiaľto

$$m_3 = \frac{m_1 c_1 \left(t_k - t_1\right) + m_2 c_2 \left(273\text{K} - t_1\right) + m_2 l_2 + m_2 c_{H_2O}\left(t_k - 273\text{K}\right)}{l_3 + c_{H_2O}\left(373\text{K} - t_k\right)}$$

$$m_3 = \frac{0{,}2\,\text{kg}\cdot 398\,\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}\left(313\,\text{K} - 263\,\text{K}\right) + 0{,}1\text{kg}\cdot 2{,}09\,\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}\left(273\,\text{K} - 263\,\text{K}\right)}{2{,}26\cdot 10^6\,\text{J.kg}^{-1} + 4186\,\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}\left(373\,\text{K} - 313\,\text{K}\right)} +$$

$$+\frac{0{,}1\,\text{kg}\cdot 3{,}35\cdot 10^{-6}\,\text{J.kg}^{-1} + 0{,}1\,\text{kg}\cdot 4186\,\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}\left(313\,\text{K} - 273\,\text{K}\right)}{2{,}26\cdot 10^6\,\text{J.kg}^{-1} + 4186\,\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}\left(373\,\text{K} - 313\,\text{K}\right)}$$

$$m_3 = 22g$$

9.6. Voda v kvapalnom stave hmotnosti 1 kg mala teplotu 0^0C. Vypočítajte zmenu entrópie a) pri ohriatí vody na 100 ^{0}C; b) pri ohriatí vody tak, že došlo k fázovému prechodu, t.j. voda sa zmenila na paru teplú 100 ^{0}C.

Úvaha:

Zadané veličiny
$m = 1\text{kg}$
$T_1 = 273{,}16\text{ K}$
$T_2 = 373{,}16\text{ K}$

Hľadané veličiny
$\Delta S_a = ?$
$\Delta S_b = ?$

Pre elementárnu zmenu entrópie platí vzťah

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}'Q}{T}\,, \tag{1}$$

kde d´Q – je elementárne množstvo tepla dodaného pri teplote T. Celkovú zmenu entrópie zo stavu 1 do stavu 2 dostaneme integrovaním rovnice (1)

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{d'Q}{T} \qquad (2)$$

a) Pri ohriatí látky bez fázového prechodu môžeme dodané teplo vyjadriť vzorcom

$$d'Q = mc\ dT\ , \qquad (3)$$

kde m je hmotnosť látky, c je hmotnostná tepelná kapacita a dT elementárna zmena teploty. Dosadením vzťahu (3) do rovnice (2) dostaneme hľadanú zmenu ΔS_a.

b) V prípade, že pri ohreve dôjde k fázovému prechodu, bude potrebné dodať ešte teplo Q´ potrebné na túto skupenskú premenu, t.j.

$$Q_l = m\,l\ , \qquad (4)$$

kde l je merné skupenské teplo varu vody.

Fázový prechod prebieha pri konštantnej teplote, a preto môžeme napísať

$$\Delta S_b = \Delta S_a + \frac{Q_l}{T} \qquad (5)$$

Riešenie:

a) Po dosadení $d'Q$ rovnice (3) do vzťahu (2) dostaneme

$$\Delta S_a = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc\ dT}{T} = mc\left[\ln T\right]_{T_1}^{T_2} = mc\ \ln\frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S_a = 1\text{kg}\cdot 4186\ \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}\cdot\ln\frac{373{,}16\ \text{K}}{273{,}16\ \text{K}} = 1{,}306\cdot 10^3\ \text{J.K}^{-1}$$

b) Vypočítame si druhý člen na pravej strane rovnice (5)

$$\frac{Q_l}{T} = \frac{1\text{kg}\cdot 2{,}256\cdot 10^6\,\text{J.kg}^{-1}}{373{,}16\ \text{K}} = 6{,}046\cdot 10^3\ \text{J.K}^{-1}$$

Pripočítaním ΔS_a dostaneme $\Delta S_b = 7{,}352\cdot 10^3\ \text{J.K}^{-1}$.

Neriešené príklady

9.7. Aké množstvo tepla vznikne v brzdách nákladného vlaku s hmotnosťou 1200 t, keď sa z rýchlosti 50 km/h celkom zastaví ? [115,7 MJ]

9.8. Kompresor nasáva atmosferický vzduch s tlakom 0,1 MPa a teplotou 27°C a stláča ho pri stálej teplote na tlak 3,5 MPa. Vypočítajte, koľko tepla sa odvádza chladiacej vode za hodinu, keď za tento čas sa stlačí 10 kg vzduchu! [$3{,}1\cdot 10^6$ J]

9.9. Ideálny plyn, hmotnosť ktorého je 16 g, má teplotu 300 K. Plyn bol izochoricky ochladený tak, že jeho tlak klesol 5 násobne. Potom plyn expandoval pri stálom tlaku tak, že jeho výsledná teplota nadobudla pôvodnú hodnotu. Vypočítajte, akú prácu vykonal plyn, ak viete, že jeho molárna hmotnosť je 32 g. [997,2 J]

9.10. Vznetový motor nasáva vzduch o teplote 20° C a tlaku 101 kPa. V akom pomere sa musí zmenšiť objem vzduchu pri kompresii, aby sa zohrial na teplotu 800° C? Dej považujte za adiabatický. [26]

9.11. Koľko tepla treba na izotermickú expanziu 2 litrov vodíka tlaku 0,08 MPa na štvornásobný objem? Aký bude výsledný tlak? [221,5 J; 0,02MPa]

9.12. Vo valci s pohyblivým piestom je m = 36 g vodíka teploty t_1 = 270° C pod tlakom p_1 = 0,4 MPa. Na jeho stlačenie na tretinu pôvodného objemu bolo treba vynaložiť prácu $A = 1{,}5 \cdot 10^5$ J a súčasne sa mu chladením odňalo $Q^{`} = 5{,}95 \cdot 10^4$ J tepla. Vypočítajte teplotu a tlak vodíka po stlačení ! [548 K ; 2,17 MPa]

9.13. Určité množstvo plynu má pri tlaku $p_0 = 0{,}1$ MPa objem $V_0 = 1$ l. Plyn podrobíme postupne týmto zmenám:

a) Najprv ho izobaricky zohrejeme, až sa jeho objem zdvojnásobí;
b) potom ho izochoricky zohrejeme, až sa jeho tlak zdvojnásobí;
c) napokon ho necháme adiabaticky rozopnúť, až jeho teplota poklesne na začiatočnú hodnotu.

Vypočítajte, aké celkové teplo plynu sa počas tejto zmeny dodalo, akú prácu plyn vykonal a ako sa pritom zmenila jeho vnútorná energia ! Poissonova konštanta plynu $\gamma = 1{,}4$. [850 J; 850 J; 0]

9.14. Vypočítajte vnútornú energiu kyslíka hmotnosti 12 g pri teplote 700° C, ak viete, že jedna tretina molekúl je disociovaná na atómy! [8090 J]

9.15.* V nádobe A sa nachádza vodík pri teplote 107^0 C a tlaku $6 \cdot 10^5$ Pa. V nádobe B sa nachádza dusík pri teplote 37^0 C a tlaku 10^6 Pa. Objem nádoby A je 0,5 m^3, objem nádoby B je 0,8 m^3. Nádoby sú spojené trubicou s ventilom, ktorý je zatvorený. Vypočítajte výslednú teplotu a tlak zmesi po otvorení ventilu za predpokladu, že molárne teplo pri stálom objeme je konštantné a dej prebehol adiabaticky!
[326 K, $8{,}47 \cdot 10^5$ Pa]

9.16. Keď sme určitému množstvu argónu teploty 60° C pri stálom objeme dodali 209,3 J tepla, zvýšila sa jeho teplota na 88° C. Koľko bolo argónu? [23,9 g]

9.17. Plyn sa nachádza vo vertikálnom valci, ktorý je zhora uzavretý piestom. Hmotnosť piesta je 20 kg a jeho plocha 10 cm^2. Piest sa môže pohybovať vo valci bez trenia. Počiatočný objem plynu bol 11,2 l a jeho teplota 0° C. Aké množstvo tepla treba dodať plynu, aby sme ho ohriali o 10 K, ak viete, že tepelná kapacita tohto plynu, ktorá bola nameraná pri upevnenom pieste, bola 20,9 $J.K^{-1}$? Vonkajší tlak vzduchu na piest zanedbajte. [289,5 J]

9.18. Predpokladáme, že energia vodopádu so spádovou výškou 15 m sa celá premenila na teplo. O koľko stupňov by sa pritom mohla zvýšiť teplota vody? [0,035 K]

9.19. Na udržanie stálej teploty v miestnosti sa za hodinu spotrebuje $4{,}2 \cdot 10^6$ J tepla. Koľko vody pretečie radiátorom ústredného kúrenia za hodinu, keď voda pri vstupe do radiátora má teplotu 80° C a pri výstupe 70° C? Hmotnostná tepelná kapacita vody je 4200 $J.kg^{-1}.K^{-1}$ [100 dm^3]

9.20. Pracovný stroj, konajúci 1200 otáčok za minútu, má brzdu chladenú vodou. Moment trecích síl je 4905 Nm. Brzde sa privádza za hodinu 8 m^3 vody teploty 10°C. Vypočítajte, akú teplotu bude mať odtekajúca voda, keď predpokladáme, že iba 75% práce síl trenia prispieva k zvýšeniu vnútornej energie chladiacej vody ? [59,7°C]

9.21. Olovená guľôčka hmotnosti 30 g a teploty 395K narazí na železný terč rýchlosťou 75 $m.s^{-1}$ a zastaví sa. Určite: a) aké teplo vzniklo pri tomto zabrzdení; b) o koľko sa zväčší teplota guľky, ak predpokladáme, že 1/3 vzniknutého tepla sa v nej absorbuje. [a) 84,4 J; b) 7K]

9.22. Koľko litrov vody s teplotou 95° C môžeme za minútu odoberať z elektrického ohrievača vody, keď jeho výkon je 1,6 kW a keď začiatočná teplota vody je 14 ^{0}C?
[0,28 l]

9.23. Stroj pracujúci s výkonom P = 368 W vyvŕta za dve minúty otvor do liatinového bloku hmotnosti m = 20 kg. O koľko stupňov sa blok ohreje, keď 80% práce, vykonanej pri vŕtaní, prispieva k zväčšeniu vnútornej energie bloku? Hmotnostná tepelná kapacita liatiny $c = 544{,}2\ J.kg^{-1}.K^{-1}$. [$\Delta t = 3{,}25°$ C]

9.24. Kúsok železa bol vrhnutý v šikmom smere nahor a dopadol na rovnako veľký kúsok železa, ktorý bol vzdialený od prvého vo vodorovnom smere 37,5 m. Ráz bol absolútne nepružný, a oba kúsky sa ohriali o 0,8 K. Vypočítajte maximálnu výšku, ktorú letiaci kúsok dosiahol. [1,2 m]

9.25. Na prípravu 200 l vaňového kúpeľa sa udáva spotreba 70 l vody teplej 85° C. S akou výslednou teplotou vody sa pritom ráta, ak studená voda má teplotu 15° C?
[39,5° C]

9.26. V automatickej práčke sa zohrieva 30 litrov vody,. Koľko tepla voda príjme, ak sa jej teplota zvýši z 288 K na 363 K? Ako dlho trvá zohrievanie, ak príkon výhrevného telesa práčky je 1,7 kW? [$9{,}4 \cdot 10^{6}$ J ; 92 min]

9.27. Koľko tepla treba na zohriatie 1,5 litra vody v hliníkovom hrnci hmotnosti 0,4 kg z 283 K na 373 K? [$599{,}4 \cdot 10^{3}$ J]

9.28. Do medeného kalorimetra hmotnosti 151 g vlejeme 200 g vody, a nameriame teplotu 18,6° C. Po vložení 85 g medi, ktorá bola predtým zohriata na 98,5° C, stúpne teplota na 21,4° C. Aká hodnota z toho vyplýva pre hmotnostnú tepelnú kapacitu medi? [383 $J.kg^{-1}.K^{-1}$]

9.29. Dva odliatky, jeden z hliníka a druhý z medi, o teplote 450° C a celkovej hmotnosti 650 g, vložíme do 2,5 kg vody o teplote 12° C, ktorá sa pritom zohreje na 27° C. Akú hmotnosť majú jednotlivé odliatky? [240g; 410g]

9.30. Kusy nástrojovej ocele ohriate na 950° C sa majú zakaliť v 80 kg oleja s teplotou 25° C, pričom výsledná teplota nesmie prekročiť 350° C. Koľko ocele sa môže najviac ponoriť, keď rátame s 10 % tepelných strát? [174 kg]

9.31. Oceľová guľa padá z výšky 20 m so začiatočnou rýchlosťou 4 $m.s^{-1}$ a po dopade sa odrazí do výšky 4 m. O koľko stupňov sa pritom ohreje, keď predpokladáme, že len 60% práce, vykonanej pri deformovaní guľky pri náraze, prispieva k zvýšeniu vnútornej energie guľky ? [0,23° C]

9.32. V kalorimetri bolo 1500 g vody teploty 6° C, do ktorej sme pridali 120 g ľadu neznámej teploty. Po vyrovnaní teplôt sme z vody kalorimetra ľad vybrali a vážením zistili, že sa jeho hmotnosť zväčšila o 12 g. Aká bola pôvodná teplota ľadu? [-166° C]

9.33.* Olovená guľka preráža dosku v dôsledku čoho sa zmení jej rýchlosť zo 420 $m.s^{-1}$ na 120 $m.s^{-1}$. Na ohrev guľky šlo 80% úbytku kinetickej energie guľky. Vypočítajte aká časť hmotnosti guľky sa roztavila, ak teplota guľky pred nárazom bola 27° C! [30%]

9.34. V termoske s tepelnou kapacitou 50 J/K je 500 ml vody o teplote 20° C . Do vody začneme vháňať vodnú paru teploty 100° C v množstve 5 g/min. Za aký čas prestane para v termoske kondenzovať? (Tepelné straty neuvažujeme). [15 min]

9.35. Koľko vody sa odparí varom, keď rozžeravené oceľové skrutky hmotnosti 6 kg a teploty 1200° C vhodíme do 3 kg vody teploty 20° C? [0,9 kg]

9.36. Zmena entrópie medzi adiabatami v Carnotovom kruhovom deji je 4160 $J.K^{-1}$. Rozdiel teplôt medzi izotermani je 100° C. Aké množstvo tepla sa premení na prácu v tomto kruhovom deji? [416 kJ]

9.37. Ideálny tepelný stroj, ktorý pracuje v režime Carnotovho kruhového deja, dostáva počas jedného kruhového deja energiu 2,52 kJ. Teplota teplého zásobníka je 400 K, teplota chladnejšieho zásobníka je 300 K. Vypočítajte prácu, ktorú vykoná stroj za jeden kruhový dej. [630 J]

9.38. Aká je teoreticky najvyššia účinnosť parného stroja, ktorý pracuje s parou teplou 190 ^{0}C a ktorého kondenzátor má teplotu 40° C? [η = 32,4%]
9.39. Vypočítajte, aké by mali byť teploty zásobníka tepla a chladiča, keď je medzi nimi teplotný rozdiel 40° C, aby ideálny Carnotov stroj, ktorý by medzi nimi pracoval, mal účinnosť 12%! [60° C; 20° C]
9.40. Carnotov tepelný stroj naberá pri každom cykle zo zásobníka tepla 419 J tepla a chladiču odovzdáva 335 J. Vypočítajte, aká je teplota chladiča, keď zásobník tepla udržiavame na teplote 127° C! [t_2=47° C]
9.41. Aký najmenší musí byť výkon stroja, ktorý má odoberať vode stálej teploty 17° C teplo 41,9 kJ za sekundu a dodávať ho tepelnému radiátoru teploty 46° C? Koľko tepla sa odovzdá teplejšiemu zásobníku ? [4,18 kW; 46,1 kJ.s^{-1}]
9.42. Spaľovaním benzínu sa uvoľňuje energia 45 MJ.kg^{-1}. Aká je účinnosť motora automobilu, ak pri výkone 15 kW spotrebuje 7 l benzínu na 100 km pri rýchlosti jazdy 90 km/hod? [25%]
9.43.* Kruhový dej pozostáva z dvoch izochor a dvoch izobár. Vypočítajte množstvo tepla dodané z teplého zásobníka tepla za jeden kruhový dej, prácu, ktorú vykoná pracovný plyn za jeden kruhový dej a účinnosť kruhového deja. Vypočítajte účinnosť Carnotovho kruhového deja pri teplotách izoterm rovných maximálnej a minimálnej teplote vo vyše uvedenom kruhovom deji! V počiatočnom stave mal pracovný plyn objem 0,3 m^3 a tlak 60 kPa. Po izochorickom ohreve bol jeho tlak 120 kPa a po nasledujúcom izobarickom ohreve bol jeho objem 0,6 m^3. Pracovný plyn bol dusík a jeho hmotnosť bola 0,3 kg. [171 kJ, 18 kJ, 0,1; 0,75]
9.44. Tepelný stroj pracujúci medzi zásobníkom tepla a chladičom má polovičnú účinnosť ako ideálny Carnotov kruhový stroj pracujúci medzi týmito teplotami. Stroj pri každom kruhovom deji odoberá zo zásobníka teplo 2 kJ a odovzdáva chladičom teplo 1,6 kJ. Aká je teplota zásobníka tepla, ak chladič má teplotu 17^{0}C? [210,4^{0}C]
9.45. O koľko sa zmení entropia 20 g vody, keď ju zohrejeme z 10 ^{0}C na 75 ^{0}C?
[17,3 J.K^{-1}]
9.46. O koľko sa zmení entropia 20 g ľadu teploty 0°C, keď ho premeníme na vodnú paru teploty 100°C pri normálnom atmosferickom tlaku? [171,6 J.K^{-1}]
9.47. Vypočítajte zmenu entropie 56 g dusíku, ak v počiatočnom stave má objem 15 l a teplotu 60^O C a prejde do konečného stavu keď teplota je 450^O C a objem 75 l.
[59 J.K^{-1}]
9.48. Bezstarostný experimentátor, ktorý sa ponáhľal na víkend, neuzavrel dokonale uzáver nádoby s héliom. Plyn, ktorý sa v počiatočnom stave nachádzal pod tlakom $2\cdot10^7$ Pa, začal pomaly izotermický unikať z nádoby pri teplote 20° C. Vypočítajte zmenu entrópie na 1 kg plynu. [3225 kJ.K^{-1}]
9.49. Vypočítajte, ako sa zmení entrópia po zmiešaní 10 g vody teploty 100°C a 20 g vody teploty 15°C ! [0,94 J.K^{-1}]
9.50. Nájdite vzťah medzi tlakom, objemom a entrópiou ideálneho plynu !
[$pV = \text{konšt.}\cdot\exp\left(\dfrac{S}{mC_V}\right)$]

10 Stavová rovnica reálnych plynov

1. V reálnych plynoch už nemôžeme zanedbať vlastný objem molekúl, ani vplyv rozhrania povrchov na tlak plynu. Preto je potrebné stavovú rovnicu ideálneho plynu pre reálny plyn upraviť. Najčastejšie sa používa Van der Waalsova rovnica

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT\ ,$$

kde $a > 0$ je konštanta charakterizujúce sily vzájomného pôsobenia molekúl, $b = 4\upsilon N$ – konštanta charakterizujúca vlastný objem molekúl, $\upsilon = (1/6)\pi\sigma^3$ je objem jednej molekuly, σ je efektívny priemer molekúl a N je počet molekúl v jednom kilomole.

2. Pre n kilomolov Van der Waalsova rovnica má tvar

$$\left(p+\frac{n^2a}{V^2}\right)(V-nb)=n\,RT\ .$$

3. Konštanty a a b sú spojené s kritickými hodnotami p_k, V_k, T_k pre jeden kilomol látky

$$T_k=\frac{8a}{27bR};\quad V_k=3b;\quad p_k=\frac{a}{27b^2}\,,$$

kde V_k je objem jedného kilomolu látky pri kritickom tlaku p_k a kritickej teplote T_k.

Riešené príklady:

10.1. 1 mol kysličníka uhličitého, ktorý mal pri teplote 127^0 C objem $V_1 = 0{,}5$ l, sa izotermicky rozširoval do objemu $V_2 = 2V_1$. Vypočítajte počiatočný tlak, prácu, ktorú vykonal plyn pri expanzii, zmenu vnútornej energie plynu ako aj množstvo pohlteného tepla. Konštanty pre jeden mol kysličníka uhličitého vo Van der Waalsovej rovnici sú rovné $a = 0{,}36$ N.m^4/mol^2, $b = 4{,}3\cdot10^{-5}$ m^3/mol.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$T = 400$ K	$p_1 = ?$
$V_1 = 0{,}5\cdot10^{-3}$ m^3	$A = ?$
$V_2 = 1\cdot10^{-3}$ m^3	$\Delta U = ?$
1 mol CO_2	$Q = ?$
$a = 0{,}36$ N.m^4/mol^2	
$b = 4{,}3\cdot10^{-5}$ m^3/mol	

Ako je známe, pri normálnych podmienkach 1 mol ideálneho plynu má objem 22,4 l/mol, zatiaľ čo podľa zadania bol objem 1 molu plynu pri teplote T_1 (podstatne vyššej ako T_0= 273 K) len 0,5 litra. Z toho vyplýva, že tlak plynu bude oveľa vyšší ako atmosferický a plyn nemôžeme považovať za ideálny. V takomto prípade pre výpočet hľadaných veličín musíme použiť Van der Waalsovu rovnicu, ktorá pre jeden mol má tvar

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT\ , \tag{1}$$

kde R je univerzálna plynová konštanta pre jeden mol.

Práca, ktorú vykoná plyn je daná vzťahom

$$A=\int_1^2 p\,\mathrm{d}V\,. \tag{2}$$

Vnútorná energia reálneho plynu sa skladá zo súčtu kinetických energií všetkých molekúl a potenciálnej energie vzájomného pôsobenia molekúl. Sily vzájomného odpudzovania molekúl vo Van der Waalsovej rovnici sú vyjadrené korekciou objemu, t.j. konštantou b pre každý plyn. Je zrejmé, že tieto sily, ktoré sa prejavujú len počas zrážok molekúl, nie sú potenciálové. Zohľadnenie síl vzájomného priťahovania vedie k doplňujúcemu tlaku plynu $p' = a/V^2$, ktorý je vo Van der Waalsovej rovnici.

Zmena potenciálnej energie vzájomného pôsobenia molekúl je rovná práci príťažlivých síl vzatou so záporným znamienkom. Pri rozširovaní plynu práca príťažlivých síl

$$\mathrm{d}A' = -p'\mathrm{d}V = -\left(a/V^2\right)\mathrm{d}V$$

(pri $\mathrm{d}V\rangle 0$, t.j. pri rozšírení plynu je práca príťažlivých síl záporná). Potom zmena potenciálnej energie

$$\mathrm{d}E_p = -\mathrm{d}A' = \left(a/V^2\right)\mathrm{d}V\,.$$

Zmena kinetickej energie všetkých molekúl

$$\mathrm{d}E_k = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\,\mathrm{d}T\,.$$

Odtiaľto dostaneme pre zmenu vnútornej energie

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}E_p + \mathrm{d}E_k = \frac{a}{V^2}\mathrm{d}V + \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\,\mathrm{d}T$$

a pri prechode zo stavu 1 do stavu 2

$$\varDelta U = \int_{V_1}^{V_2}\frac{a\,\mathrm{d}V}{V^2} + \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right). \tag{3}$$

Množstvo dodaného tepla vypočítame z prvej vety termodynamickej

$$Q = \Delta U + A\,. \tag{4}$$

Riešenie:

Podľa Van der Waalsovej rovnice (1)

$$p_1 = \frac{RT}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1^2} = \frac{8{,}31\ \mathrm{J.K^{-1}}\cdot 400\ \mathrm{K}}{0{,}5\cdot 10^{-3}\mathrm{m^3} - 4{,}3\cdot 10^{-5}\mathrm{m^3}} - \frac{0{,}36\ \mathrm{N.m^4/mol^2}}{25\cdot 10^{-8}\mathrm{m^6/mol^2}} = 58{,}33\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$

Dosadením tlaku z rovnice (1) do rovnice (2) dostaneme

$$A = \int_{V_1}^{V_2}\frac{RT}{V-b}\mathrm{d}V - \int_{V_1}^{V_2}\frac{a}{V^2}\mathrm{d}V\,.$$

Po integrovaní

$$A = RT\ln\frac{V_2 - b}{V_1 - b} + \frac{a}{V_2} - \frac{a}{V_1} = RT\ln\frac{2V_1 - b}{V_1 - b} - \frac{a}{2V_1}\,.$$

$$A = 8{,}31\ \mathrm{J.K^{-1}} \cdot 400\ \mathrm{K} \cdot \ln \frac{1 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3 - 4{,}3 \cdot 10^{-5}\mathrm{m}^3}{0{,}5 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3 - 4{,}3 \cdot 10^{-5}\mathrm{m}^3} - \frac{0{,}36\ \mathrm{N.m}^4}{1.10^{-3}\mathrm{m}^3} = 2{,}1\ \mathrm{kJ}$$

Pri výpočte zmeny vnútornej energie druhý člen v rovnici (3) bude rovný nule v dôsledku toho, že dej je izotermický. Po integrovaní prvého členu v rovnici (3) dostaneme

$$\Delta U = a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = 0{,}36\ \mathrm{N.m}^4\left(\frac{1}{0{,}5 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3} - \frac{1}{1 \cdot 10^{3}\mathrm{m}^3}\right) = 360\ \mathrm{J}.$$

Dosadením do rovnice (4) dostaneme pre množstvo pohlteného tepla Q = 2,46 kJ.

Neriešené príklady:

10.2. Vypočítajte hodnoty konštánt a a b vo Van der Waalsovej rovnici pre vzduch. Kritický tlak a kritická teplota vzduchu sú rovné $p_k = 37{,}6 \cdot 10^5$ Nm^{-2} a T_k = 132,5 K.

[$a = 13{,}8 \cdot 10^4$ N.m^4.kmol^{-2}; $b = 36{,}7 \cdot 10^{-3}$ m^3/kmol]

10.3. Vypočítajte hodnoty kritického tlaku a kritickej teploty neónu. Konštanty vo Van der Waalsovej rovnici sú rovné $a = 2{,}13 \cdot 10^4$ N.m^4/kmol^2, $b = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ m^3/kmol.

[$p_k = 27{,}3.10^7$ Pa; T_k = 446 K]

10.4. Vypočítajte tlak 1 kilomolu kysličníka uhličitého, ktorého teplota je 100° C. Predpokladajte: 1) plyn sa chová ako ideálny; 2) plyn sa chová ako reálny. Úlohu riešte pre objemy a) 1 m^3; b) 0,05 m^3. Hodnoty kritického tlaku a kritickej teploty sú $p_k = 74 \cdot 10^5$ Pa a T_k = 304 K.

[$p_{1,a} = 3{,}1 \cdot 10^6$ Pa; $p_{1,b} = 620 \cdot 10^5$ Pa; $p_{2,a} = 28{,}65 \cdot 10^5$ Pa; $p_{2,b}$ = 279 MPa]

10.5. V nádobe objemu V = 2 m^3 je m = 4 kg kyslíka pri teplote t = 29° C. Aký je jeho tlak? Ako sa zmení tento tlak, keď kyslík pri stálom objeme zohrejeme na dvojnásobnú teplotu? Pri výpočte použite Van der Waalsovu rovnicu. Konštanty vo Van der Waalsovej rovnici sú rovné $a = 1{,}37 \cdot 10^5$ N.m^4/kmol^2, $b = 31{,}7 \cdot 10^{-3}$ m^3/kmol.

[$1{,}566 \cdot 10^5$ Pa ; Δp=0,015 MPa]

10.6.* Jeden mól reálneho plynu, správajúceho sa podľa Van der Waalsovej stavovej rovnice, zohrejeme z teploty t_1 na teplotu t_2. Jeho objem sa pritom zmení z V_1 na V_2. Vypočítajte, ako sa pri tejto stavovej zmene zmenila vnútorná energia plynu.

[$C_V(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$]

10.7.* Určite molárny objem plynu, pri ktorom pre danú teplotu je súčin tlaku a objemu minimálny. Použite Van der Waalsovu rovnicu. [$V = \frac{\sqrt{a} \times b}{\sqrt{a} - \sqrt{bRT}}$]

10.8.* Vypočítajte, ako sa zmení teplota plynu správajúceho sa podľa Van der Waalsovej rovnice pri Joulovom-Thomsovom pokuse. (Ak sa plyn adiabaticky a nevratne rozpína, pričom entalpia plynu ostáva konštantná). Predpokladajte, že konštantu b vo Van der Waalsovej rovnici možno zanedbať. [$\frac{2a}{C_V + R}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$]

10.9.*Vypočítajte hodnoty stavových veličín *p*, *V*, *T* v kritickom stave (izoterma plynu má inflexný bod a dotyčnica v tomto bode je rovnobežná s osou *V*). PoužiteVan der Waalsovu rovnicu.

[$V_K = 3b$; $p_K = \dfrac{a}{27b^2}$; $T_K = \dfrac{8a}{27bR}$]

11 Povrchové napätie. Prenosové javy.

Poznáme dva druhy fázových rozhraní. Fázové rozhrania, ktoré prenášajú tlak a fázové rozhrania, ktoré tlak neprenášajú. V druhom prípade bude po oboch stranách rozhrania rôzny tlak, ak jeho povrch je zakrivený.

1. Rozdiel tlakov vypočítame podľa Laplaceovho vzorca

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

kde α je koeficient povrchového napätia, ktorý je rovný, čo do veľkosti, sile pôsobiacej na jednotku dĺžky okraja povrchovej blany kvapaliny a R_1 a R_2 sú polomery zakrivenia dvoch vzájomne kolmých prierezov povrchu kvapaliny.

2. Na zmenu plochy ΔS povrchovej blany je potrebné vykonať prácu

$$\Delta A = \alpha \Delta S .$$

3. Výška, do ktorej stúpne kvapalina v kapiláre s polomerom r, je

$$h = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g r},$$

kde ρ je hustota kvapaliny, θ - okrajový uhol. Pri úplnom zmáčaní je $\theta = 0$ a pri úplnom nezmáčaní je $\theta = \pi$.

Pod prenosovými javmi rozumieme prenos energie v rôznych formách.

4. Množstvo tepla, ktoré prejde plochou ΔS v kolmom smere v dôsledku tepelnej vodivosti látky za čas Δt je dané vzťahom

$$Q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S . \Delta t ,$$

kde $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ je gradient teploty v smere kolmom na plôšku ΔS a λ - koeficient tepelnej vodivosti.

5. Tepelný tok medzi dvomi látkami s rôznou teplotou je rovný

$$\Phi = -h \Delta T ,$$

kde h je koeficient prestupu tepla a ΔT rozdiel teplôt dotýkajúcich sa látok.

6. Sila trenia medzi dvomi vrstvami tekutiny, ktoré sa pohybujú paralelne voči sebe rôznymi rýchlosťami je rovná

$$\boldsymbol{F} = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} S \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|},$$

kde S je plocha dotýkajúcich sa vrstiev, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ - gradient rýchlosti pohybu vrstiev v smere x, kolmom na vrstvy a η - dynamická viskozita tekutiny.

7. Množstvo tekutiny, ktoré vytečie z trubice o polomere R je rovné

$$V = \frac{1}{\eta}\frac{\pi R^4}{8l}(p_1 - p_2)\Delta t \ ,$$

kde η je dynamická viskozita tekutiny, l – dĺžka trubice, $(p_1 - p_2)$ – rozdiel tlakov na koncoch trubice a Δt –doba vytekania tekutiny.

Riešené príklady

11.1. Medzi dvomi rovnobežnými sklenými doštičkami sa nachádza kvapka ortuti o hmotnosti $2 \cdot 10^{-3}$ kg. Akou silou treba stlačiť doštičky, aby sme kvapku ortuti stlačili na hrúbku 0,1 mm? Predpokladajte, že ortuť nezmáča sklo. Koeficient povrchového napätia ortuti je 0,5 N.m^{-1}.

Úvaha:

Zadané veličiny:	Hľadané veličiny
$m = 2 \cdot 10^{-3}$ kg	$F = ?$
$\alpha = 0{,}5$ kg.s^{-2}	
$d = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ m	
$\rho = 13{,}5 \cdot 10^3$ kg.m^{-3}	

Kvapka po stlačení nadobudne tvar disku s bočným povrchom, ktorý bude mať dva polomery zakrivenia. Doplňujúci tlak v ortuti v dôsledku tohoto zakrivenia je rovný

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1)$$

kde α je koeficient povrchového napätia ortuti, R_1 – polomer disku a R_2 polomer zakrivenia priečneho rezu disku. Pretože ortuť nezmáča sklo môžeme R_2 vyjadriť pomocou hrúbky disku d, $R_2 = d/2$. Z druhej strany, tento doplňujúci tlak musí byť kompenzovaný vonkajším tlakom

$$\Delta p = F / S \ , \qquad (2)$$

kde S je plocha kvapky ortuti, ktorou sa dotýka sklenenej doštičky, $S = \pi R_1^2$.

Polomer R_1 môžeme vypočítať z objemu kvapky. Je zrejmé, že polomer R_2 bude oveľa menší ako R_1 a preto môžeme uvažovať, že objem kvapky bude po stlačení rovný

$$V = \pi R_1^2 d \ . \qquad (3)$$

Objem V zistíme z hmotnosti m a hustoty ortuti ρ, $V = m/\rho$. Dosadením do rovnice (3) a úpravou dostaneme pre R_1

$$R_1 = \sqrt{\frac{m}{\pi\rho d}} \ . \qquad (4)$$

Porovnaním rovníc (1) a (2) a dosadením za R_1 a R_2 vypočítame hľadanú silu, pričom plochu S vyjadríme ako $\frac{m}{\rho d}$.

Riešenie:

Porovnaním rovníc (1) a (2) dostaneme

$$F = S\,\Delta p = \frac{m\,\alpha}{\rho d}\left(\sqrt{\frac{\pi\rho d}{m}} + \frac{2}{d}\right)$$

$$F = \frac{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}5\,\mathrm{kg.s^{-2}}}{13{,}5\cdot 10^{3}\,\mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 1\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}}\left(\sqrt{\frac{3{,}14\cdot 13{,}5\cdot 10^{3}\,\mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 1\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}}{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}}+\frac{2}{1\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}}\right)=$$

$$F = 14{,}8\,\mathrm{N}$$

11.2. V zimnom období sa v jednej z rohových miestnosti staršieho tehlového bytu pokazil radiátor. V miestnosti udržujeme teplotu 20° C elektrickým radiátorom pri vonkajšej teplote –10° C. Plocha vonkajších tehlových stien je 13 m^2, plocha okna s jednou vrstvou skla je 2 m^2. Únik tepla cez vnútorné steny bytu zanedbajte. Cenu elektrickej energie uvažujte 2,70 SK za 1 kWh. Vypočítajte:

a) Aký výkon by mal mať elektrický ohrievač?
b) Koľko zaplatíme za elektrickú energiu za jeden týždeň?
c) Aký výkon elektrického ohrievača by stačil v prípade bytu s dvojitou tehlovou stenou a oknom s dvomi vrstvami skla?
d) Koľko by sa ušetrilo, keby bol byt ako v bode c?

Tepelné straty cez jednotlivé druhy stien sú uvedené v tabuľke.

Konštrukcia steny	Φ [W.m^{-2}.K^{-1}]
Dvojitá tehlová stena s výplňou izolačnej peny	0,5
Sklenné okno s dvomi vrstvami skla	2,7
Sklenné okno s jednou vrstvou skla	5,7
Tehlová stena	3,6

Úvaha:

Zadané hodnoty:	Neznáme hodnoty:
$S_1 = 13$ m^2	P_s =?
$S_2 = 2$ m^2	Náklady ?
t_1= 20°C	P_{su}=?
t_2= -10°C	Ušetrené?
Φ_1=3,6 W.m^{-2}.K^{-1}	
Φ_2=5,7 W.m^{-2}.K^{-1}	
Φ_3=0,5 W.m^{-2}.K^{-1}	
Φ_4=2,7 W.m^{-2}.K^{-1}	
1 kWh = 2,70 SK	

Priemerný výkon elektrického radiátora

$$P_s = \frac{\Delta Q}{\Delta\tau}, \tag{1}$$

musí byť rovný teplu odvedenému stenou a oknom za jednotku času. Vzhľadom na to , že všetko teplo z radiátora sa využije na ohrev izby, budeme považovať elektrický príkon radiátora rovný jeho tepelnému výkonu.

Teplá odvedené stenami a oknom za jednotku času budú priamo úmerné ich plošným obsahom S, rozdielu teplôt Δt medzi vnútrom izby a vonkajším okolím a hodnotou tepelného toku Φ, vzhľadom na materiál steny a okna. Za čas $\Delta\tau$ prejde stenou S_1 teplo

$$\Delta Q_1 = \Phi_x \Delta\tau S_1 (t_1 - t_2). \tag{2}$$

Oknom S_2 prejde za čas $\Delta\tau$ teplo

$$\Delta Q_2 = \Phi_y \Delta\tau S_2 (t_1 - t_2). \tag{3}$$

Aby v miestnosti ostala rovnaká teplota, je potrebné odvedené teplo nahradiť teplom

$$\Delta Q = (\Delta Q_1 + \Delta Q_2) = P_s \Delta\tau \tag{4}$$

z náhradného zdroja. Odtiaľto inštalovaný výkon elektrického ohrievača bude

$$P_s = (\Delta Q_1 + \Delta Q_2)/\Delta\tau .$$

Ak spotrebu elektrickej energie $P_s \Delta\tau$ vynásobíme jej cenou, dostaneme hľadané náklady. V prípade a) dosadíme za Φ_x hodnotu Φ_1 a za Φ_y hodnotu Φ_2, v prípade c) dosadíme za Φ_x hodnotu Φ_3 a za Φ_y hodnotu Φ_4. Rozdiel vypočítaných nákladov bude hľadaná úspora.

Riešenie:

a) Pre hľadaný výkon radiátora dostaneme: v prípade a)

$$P_s = (3{,}6\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}} \cdot 13\mathrm{m}^2 + 5{,}7\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}} \cdot 2\ \mathrm{m}^2)\ 30\ \mathrm{K} = 1746\ \mathrm{W}$$

Aby sa nám v izbe podarilo udržať stálu teplotu, radiátor by musel mať výkon minimálne 1764 W.

b) Za týždeň by sme zaplatili $1{,}746\ \mathrm{kWh} \cdot 7 \cdot 24\mathrm{h} \cdot 2{,}7\ \mathrm{SK / kWh} = 792\ \mathrm{SK}$

c) V byte s s dvojitou tehlovou stenou a oknom s dvomi vrstvami skla nám postačí výkon $P_s = (0{,}5\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}} \cdot 13\mathrm{m}^2 + 2{,}7\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}} \cdot 2\ \mathrm{m}^2)\ 30\ \mathrm{K} = 357\ \mathrm{W}$,

a za týždeň by sme zaplatili: $0{,}357\ \mathrm{kW} \cdot 7 \cdot 24\mathrm{h} \cdot 2{,}7\ \mathrm{Sk / kWh} = 162\ \mathrm{Sk}$.

d) Za týždeň by sa ušetrilo (792- 162) Sk = 630 Sk.

11.3. Vo veľkej uzavretej kovovej nádrži sa nachádza 500 l transformátorového oleja, ktorého kinematická viskozita je $2{,}0 \cdot 10^{-3}\mathrm{m^2.s^{-1}}$ a hustota 900 kgm^{-3}. Olej treba prečerpať cez trubicu o priemere 2 cm dĺžky 0,5 m. Výtokový otvor v nádobe je na dne a olej bol vytláčaný pretlakom $0{,}72 \cdot 10^5$ Pa. Vypočítajte a) maximálnu rýchlosť oleja v priereze potrubia; b) čas, za ktorý olej prečerpali; c) priemernú rýchlosť oleja v potrubí.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$V = 0{,}5\ \mathrm{m}^3$	$v_{\max} = ?$
$\nu = 2 \cdot 10^{-3}\mathrm{m^2.s^{-1}}$	$t = ?$
$\rho = 900\ \mathrm{kg.m^{-3}}$	$v_p = ?$
$d = 0{,}02$ m	
$l = 0{,}5$ m	
$\Delta p = 0{,}72 \cdot 10^5\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$	

Pri prúdení viskóznej kvapaliny v potrubí kruhového prierezu bude medzi dvomi koaxiálnymi vrstvami oleja pôsobiť šmykové napätie

$$\tau = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\ , \qquad (1)$$

kde η je koeficient dynamickej viskozity, v je rýchlosť oleja a r vzdialenosť od osi trubice. Koeficient dynamickej viskozity sa dá vyjadriť ako súčin koeficienta kinematickej viskozity ν a hustoty oleja ρ

$$\eta = \nu\rho\ . \qquad (2)$$

Uvažujme teraz objem kvapaliny ohraničený koaxiálnym povrchom o polomere r a dĺžky l vo vnútri trubice. Na túto časť kvapaliny pôsobí brzdiaca sila od susednej vrstvy

$$F = 2\pi r\, l\, \tau = -2\pi r\, l\, \nu\rho \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\ . \qquad (3)$$

Táto sila trenia sa kompenzuje silou, ktorú vyvoláva rozdiel tlakov Δp a ktorá je rovná

$$\pi r^2 \Delta p. \qquad (4)$$

Porovnaním dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{r}{2l\,\nu\,\rho}\Delta p \ . \tag{5}$$

Integrovaním rovnice (5)

$$\int_0^v \mathrm{d}v = -\frac{\Delta p}{2l\,\nu\,\rho}\int_R^r r\,\mathrm{d}r \ ,$$

kde sme vzali do úvahy, že pri stene potrubia je rýchlosť oleja rovná 0, dostaneme

$$v = \frac{\Delta p}{4l\,\nu\,\rho}\left(R^2 - r^2\right) , \tag{6}$$

kde R je polomer potrubia.

Pre objemový výtok kvapaliny za jednotku času platí Poiseuillov vzorec

$$V_1 = \frac{\pi \Delta p}{8l\,\nu\,\rho}R^4 \ . \tag{7}$$

Ak vynásobíme rovnicu (7) dobou, za ktorú určitý objem vytiekol, dostaneme hodnotu tohto objemu.

Priemerná rýchlosť oleja cez prierez bude rovná objemu oleja, ktorý vytečie z potrubia za jednotku času podeleného obsahom prierezu potrubia.

Riešenie:

Zo vzorca (6) je zrejmé, že maximálna rýchlosť oleja bude v strede potrubia, teda pri $r = 0$.

$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{4l\,\nu\,\rho}\frac{d^2}{4} = \frac{0{,}72\cdot 10^5\,\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}\cdot(0{,}02\,\mathrm{m})^2}{16\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2.s^{-1}}\cdot 900\,\mathrm{kg.m^{-3}}} = 2{,}0\,\mathrm{m.s^{-1}} \ .$$

Celý objem oleja vytečie za dobu t, ktorú vypočítame, ak podelíme celkový objem objemom oleja, ktorý vytečie za jednotku času

$$t = \frac{V}{V_1} = \frac{V\cdot 8l\,\nu\,\rho}{\pi\Delta p\, R^4} = \frac{0{,}5\,\mathrm{m^3}\cdot 8\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2.s^{-1}}\cdot 900\,\mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 16}{3{,}14\cdot 0{,}72\cdot 10^5\,\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}\cdot(0{,}02\,\mathrm{m})^4} = 1591{,}5\,\mathrm{s} =\approx 26{,}5\,\mathrm{min}$$

Priemernú rýchlosť vypočítame, ak vydelíme objemový prietok za jednotku času plošným obsahom prierezu potrubia.

$$v_p = \frac{V_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{\pi\,\Delta p\, d^4}{\frac{\pi d^2}{4}16\cdot 8l\,\nu\,\rho} = \frac{\Delta p\, d^2}{32l\,\nu\,\rho} = \frac{0{,}72\cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}\cdot(0{,}02\,\mathrm{m})^2}{32\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2.s^{-1}}\cdot 900\,\mathrm{kg.m^{-3}}} = 1\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

Neriešené príklady:

11.4. Aký je relatívny rozdiel tlaku vo vnútri mydlovej bubliny o priemere 4 cm a v jej okolí, ak povrchové napätie mydlového roztoku je $5\cdot 10^{-2}$ N/m? Atmosferický tlak je 0,1 MPa. [0,01%]

11.5. Aký musí byť priemer kapiláry v tele rastliny, aby v nej voda vystúpila do výšky 5 m? (Predpokladajte dokonalú zmáčavosť steny a povrchové napätie vody $7\cdot 10^{-2}$ N/m). [5,7 μm]

11.6. Kapilára s priemerom 1,5 mm bola ponorená do vody. Polomer zakrivenia menisku vody v kapiláre je rovný 1,5 mm. Vypočítajte koľkokrát je menšia výška vody v kapiláre ako v prípade, ak by bolo zmáčanie steny kapiláry dokonalé! [dvakrát]
11.7. Do akej výšky vystúpi voda v dôsledku kapilarity medzi dvoma zvislými platňami s dokonale zmáčavým povrchom, ktorých vzdialenosť je 0,1 mm, ak je povrchové napätie vody 0,07 N/m? [14 cm]
11.8. Kapilára bola ponorená do nádoby s ortuťou a to tak, že dĺžka kapiláry nad hladinou ortuti bola 10 cm. Rozdiel hladín ortuti v kapiláre a v nádobe bol 5 cm. Potom bol horný koniec kapiláry uzatvorený. Kapiláru dvíhali z nádoby z ortuťou dovtedy, kým hladiny ortuti v nádobe a kapiláre neboli rovnaké. O koľko bolo potrebné zdvihnúť kapiláru? Atmosferický tlak uvažujte $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa . [6 cm]
11.9. Akú vrstvu vody udrží impregnovaná tkanina, ak otvory medzi vláknami považujeme za kruhové s priemerom 0,1 mm? [29 cm]
11.10.* V meste, plocha ktorého je 400 km^2, napršalo počas silného dažďa za 10 minút 20 mm vody. Vypočítajte množstvo tepelnej energie, ktoré vzniklo pri zlievaní kvapiek dažďa, ak kvapky, ktoré dopadali na zem, mali priemer 3 mm a vznikali z malých kvapiek o priemere $3 \cdot 10^{-3}$ mm. Vypočítajte výkon tohto procesu.
[1168 GJ; 1,95 GW]
11.11.* Pri tavení dolného konca zvisle zaveseného oloveného drôtu o priemere 2 mm vzniklo 50 kvapiek olova. Vypočítajte priemer kvapiek. O koľko sa skrátil drôt? Súčiniteľ povrchového napätia roztaveného olova je 0,47 N.m^{-1}. [3,7 mm; 42,4 cm]
11.12. Pri sústružení je nôž chladený emulziou (uvažujte tepelné konštanty vody). Pri rýchlosti otáčania 400 ot/min pôsobí nôž na obrábaný predmet momentom sily 50 N.m. Aký musí byť objemový prietok emulzie , aby sa nezohriala viac ako o 5°C ak predpokladáme, že odvádza teplo odpovedajúce 80% mechanického výkonu?
[80 cm^3/s]
11.13. Potrubím diaľkového teplovodu o priemere 50 cm sa privádza do výmenníkovej stanice voda o teplote 120°C pri priemernej rýchlosti prúdenia 3m/s. Aký tepelný výkon voda vo výmenníku odovzdáva, ak teplota vracajúcej sa vody je 80°C?
[100 MW]
11.14. Antikatóda röntgenovej trubice je tvorená medenou tyčou dlhou 250 mm o priemere 15 mm. Vypočítajte rozdiel teplôt medzi horúcim a studeným koncom tyče, ak cez bočný povrch tyče sa teplo neodvádza a studený koniec tyče sa chladí vodou z vodovodu! Voda sa ohrieva o 3°C pri spotrebe 1 kg za minútu. [800 K]
11.15. Jeden koniec oceľovej tyče dĺžky 20 cm a prierezu 3 cm^2 udržujeme na stálej teplote 300°C, druhý koniec zasahuje do topiaceho sa ľadu. Určite hmotnosť ľadu, ktorý sa roztopí za 10 minút, keď predpokladáme, že tepelné straty do okolia sú nulové. [0,047 kg]
11.16. Medená tyč dĺžky 15 cm je pripojená k železnej tyči rovnakého prierezu a dĺžky 8 cm. Voľný koniec medenej tyče udržiavame na stálej teplote 150° C. Koniec železnej tyče na teplote 20° C. Vypočítajte hustotu tepelného toku v tyči a teplotu na stykovej ploche oboch tyčí za predpokladu nulových tepelných strát do okolia!
[$75 \cdot 10^3$ J.m^{-2}.s^{-1}; 121,9° C]
11.17. Dve doštičky, medená hrúbky 6 mm a železná hrúbky 4 mm, sa dotýkajú. Vypočítajte, aká má byť tepelná vodivosť jednoduchej rovnorodej dosky hrúbky 10 mm, aby viedla teplo rovnako, ako tieto dve doštičky! [118 W.m^{-1}.K^{-1}]
11.18. Valcové oceľové potrubie vnútorného priemeru 7 cm a vonkajšieho priemeru 7,6 cm je obalené azbestovým obalom hrúbky 3 cm. Vnútorný povrch potrubia má

teplotu 10°C, vonkajší povrch obalu má teplotu -10°C. Aké sú straty tepla na jeden meter potrubia za 24 hodín? Aké budú straty za rovnakých podmienok, keby potrubie nebolo obalené izolujúcim obalom? [$3{,}9\cdot 10^{6}$ J, $7{,}7\cdot 10^{9}$ J]

11.19. Priestor medzi dvoma koncentrickými guľami s polomermi R_1 a R_2 ($R_2 > R_1$) je vyplnený homogénnou látkou dobre vedúcou teplo, ktorej tepelná vodivosť je λ. Teploty povrchov sú T_1 a T_2. Určite množstvo tepla, ktoré prejde za čas Δt za ustáleného tepelného toku ktoroukoľvek guľovou plochou koncentrickou s oboma danými guľovými plochami! $\left[Q = 4\pi\lambda\Delta t \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\left(T_1 - T_2\right) \right]$

11.20. Tepelná vodivosť azbestu bola meraná nasledovne. Azbestová doska hrúbky (30 ± 0,5)mm je zo spodnej strany ohrievaná elektrickým ohrievačom, teplota ktorého sa udržuje konštantná, a je rovná (800 ± 5)°C. Horná strana tvorí dno prietokového vodného kalorimetra o priemere (250 ± 1) mm. Vypočítajte súčiniteľ tepelnej vodivosti azbestu a jeho chybu, ak viete, že spotreba vody v kalorimetri je (120±1) kg/hod, teplota vody na vstupe do kalorimetra je (20,12±0,01)°C a na výstupe (22,36±0,01)°C! Teploty teplejšej a chladnejšej strany azbestovej dosky sú (800±5)°C a (200±5)°C. Merné teplo vody je 4186 $J.K^{-1}.kg^{-1}$. [(0,315±0,008) $J.m^{-1}.s^{-1}.K^{-1}$]

11.21.* Vypočítajte tok tepla cez ohňovzdornú vymurovku tepelného zdroja, ak viete, že hrúbka vymurovky je 400 mm, teplota vnútornej strany 900°C a vonkajšej 60°C. Súčiniteľ tepelnej vodivosti ohňovzdorného materiálu závisí od teploty podľa vzťahu $k = k_0\,(1+bt)$, kde $k_0 = 0{,}35\,\mathrm{Wm^{-1}.K^{-1}}$, $b = 1{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}$. [1265 $\mathrm{W.m^{-2}}$]

11.22. Aký výkon musí mať vykurovacie teleso v miestnosti, aby kompenzovalo straty tepla cez stenu o ploche 3,5x2,5 m^2 a hrúbke 30 cm, ak je teplota vzduchu v miestnosti 20°C a vonku -10°C? Uvažujte súčiniteľ mernej tepelnej vodivosti steny 1,2 $W.m^{-2}.K^{-1}$ a súčinitele prestupu tepla na vnútornej strane 15 $W.m^{-2}.K^{-1}$ a na vonkajšej strane steny 30 $W.m^{-2}.K^{-1}$. Aké sú teploty vnútorného a vonkajšieho povrchu steny? [750 W, 14°C, -7°C]

11.23. Tenká planparalelná doska s plochou 2 m^2 sa nachádza v prúde kvapaliny, ktorá tečie pozdĺž jej povrchu. Vypočítajte, aká je dynamická viskozita tejto kvapaliny, ak na dosku pozdĺž jej povrchu pôsobí kvapalina silou $0{,}244\cdot 10^{-3}$ N a gradient rýchlosti v mieste kde sa doska nachádza je 0,1 s^{-1}. [$1{,}22\cdot 10^{-3}$ $kg.m^{-1}.s^{-1}$]

11.24. Prívodné vodovodné potrubie o priemere 400 mm privádza vodu z priehrady do úpravovne vody. Vzdialenosť priehrady od úpravovne je 50 km. Vstupný otvor potrubia je 10 m pod hladinou vody v priehrade, na výstupe potrubia je tlak atmosferický. Vypočítajte prietok vody na výstupe potrubia! Potrubie považujte za vodorovné. Koeficient dynamickej viskozity vody je 0,00131 $kg.m^{-1}.s^{-1}$. [0,94 $m^3.s^{-1}$]

11.25. Do prevodovky vtláča mechanik olej o viskozite $4{,}8\cdot 10^{-2}$ $kg.m^{-1}.s^{-1}$ pomocou striekačky, ktorá ma výstupnú trubicu dlhú 5 cm o priemere 6 mm a jej valec má polomer 5 cm. Akou silou musí pôsobiť mechanik na piest valca, aby vtlačil 1 l oleja za 30 s ? [19,7 N]

11.26. Na stole stojí nádoba s olejom hustoty 900$kg.m^{-3}$ a dynamickou viskozitou 0,5 $N.s.m^{-2}$. V bočnej stene nádoby vo výške 5 cm od dna je otvor, do ktorého je tesne zasunutá kapilára. Vnútorný polomer kapiláry je 1 mm a jej dĺžka je 1 cm. Hladina oleja sa udržuje vo výške 50 cm nad kapilárou. V akej vzdialenosti od konca kapiláry (v horizontálnom smere) bude prúd oleja dopadať na stôl? [1,1 cm]

12 Deformácia tuhých telies. Teplotná rozťažnosť látok.

1. Budeme predpokladať, že vo všetkých príkladoch napätie pôsobiace na tuhé teleso neprekročí medzu úmernosti, t. j., že bude platiť Hookov zákon. Ak na teleso pôsobí normálové napätie (obyčajne berieme $\sigma = F/S$), potom bude pomerné predĺženie tuhého telesa ε ($\varepsilon = \dfrac{l - l_0}{l_0}$, kde l_0 je dĺžka bez priloženého napätia a l je dĺžka po priložení napätia) rovné

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma ,$$

kde E je Yungov modul pružnosti v ťahu.

2. Pomer pomerného priečneho skrátenia η ku pomernému predĺženiu sa volá Poissonovo číslo $$\mu = \eta / \varepsilon .$$

3. Na deformáciu tuhého telesa je potrebné vykonať prácu a preto deformované tuhé teleso má potenciálnu energiu, ktorej hustota v prípade jednoosovej deformácie je

$$w = \frac{E\,\varepsilon^2}{2} .$$

4. Ak budeme pôsobiť na tuhé teleso všestranným tlakom, potom zmenu jeho objemu môžeme vyjadriť vzťahom

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{K} ,$$

kde $K = \dfrac{E}{3(1-2\mu)}$ je modul všestranného tlaku. Jeho obrátená hodnota je rovná izotermickej stlačiteľnosti $\kappa_T = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_T$.

4. Hustota deformačnej energie v prípade všestranného tlaku je rovná

$$w = \frac{p^2}{2K} .$$

5. V prípade jednoosovej deformácie tlakom, pri ktorej nie je možná zmena priečnych rozmerov tuhého telesa, je relatívne stlačenie tuhého telesa rovné

$$\varepsilon = \frac{1-\mu-2\mu^2}{E(1-\mu)}\,p .$$

6. Ak na tuhé teleso pôsobí šmykové napätie τ, potom bude skosenie γ priamo úmerné τ

$$\gamma = \tau / G ,$$

kde G je modul pružnosti v šmyku, ktorý sa dá vyjadriť pomocou modulu pružnosti v ťahu a Poissonovho čísla vzťahom

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} .$$

7. Ak na jeden koniec tyče s kruhovým prierezom pôsobí krútiaci moment M a druhý koniec je nepohyblivý, potom skrútenie ϑ sa dá vyjadriť vzťahom

$$\vartheta = \frac{2lM}{\pi r^4 G}.$$

8. Mierou bezpečnosti k sa volá pomer dovoleného napätia a medze pevnosti

$$k = \frac{\sigma_{dov}}{\sigma_p}.$$

9. Pri zvýšení teploty dĺžka tuhých látok rastie v prvom priblížení lineárne s teplotou, takže môžeme napísať

$$l_t = l_0 (1 + \alpha_l t),$$

kde l_t je dĺžka tuhého telesa pri teplote t, l_0 – jeho dĺžka pri teplote 0°C a α_l je koeficient dĺžkovej rozťažnosti $\alpha_l = \frac{1}{l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}T}$.

10. Pri zvýšení teploty látok rastie objem (až na niektoré výnimky, napr. voda v rozmedzí 0°C – 4°C) v prvom priblížení lineárne s teplotou

$$V = V_0 (1 + a_V \Delta t),$$

kde V je objem pri teplote t, V_0 je objem pri počiatočnej teplote t_0, Δt – rozdiel teplôt $\Delta t = t - t_0$ a α_V je koeficient objemovej rozťažnosti $a_V = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}$.

Pre homogénne a izotropné tuhé látky môžeme brať $\alpha_V = 3\alpha_l$, t. j. koeficient objemovej rozťažnosti tuhých telies je rovný trojnásobku koeficientu dĺžkovej rozťažnosti.

Riešené príklady

12.1. Na koniec oceľového drôtu, ktorý je jedným koncom upevnený k stropu, bolo pripevnené závažie hmotnosti 100 kg. Vypočítajte zmenu objemu drôtu a energiu pružnej deformácie, ak viete, že dĺžka drôtu bola 10 m, jeho priemer 2 mm! Oceľ drôtu mala Yungov modul rovný $1{,}96 \cdot 10^{11}$ Pa a Poissonovo číslo rovné 0,3.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$l_0 = 10$ m	$\Delta V = ?$
$r_0 = 1.10^{-3}$ m	$E_d = ?$
$E = 1{,}96 \cdot 10^{11}\,\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$	
$\mu = 0{,}3$	
$m = 100$ kg	

Pri zaťažení drôtu dôjde k jeho predĺženiu a zároveň k zmenšeniu jeho priemeru. Zmenu objemu vypočítame ako rozdiel konečného a počiatočného objemu. Pôvodný objem bol $V_0 = \pi r_0^2 l_0$ a konečný objem je

$$V = \pi r^2 l, \tag{1}$$

kde $l = l_0(1+\varepsilon)$ a $r = r_0(1 - \mu\varepsilon)$. 2)

Z Hookovho zákona je

$$\varepsilon = \frac{F}{SE}. \tag{3}$$

Dosadením za r a l z rovníc (2) do rovnice (1) dostaneme

$$V = \pi r_0^2 l_0 (1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2 = V_0(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2.$$

Odtiaľto

$$\Delta V = V - V_0 = V_0\left[(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2 - 1\right]. \tag{4}$$

Veličiny ε a με sú malé voči 1 a preto ich vyššie mocniny môžeme zanedbať. Hustota energie pružnej deformácie je daná vzťahom

$$w = \frac{E\,\varepsilon^2}{2} \ . \qquad (5)$$

Celkovú energiu dostaneme, ak hustotu energie vynásobíme objemom drôtu. Pretože *ΔV* je malé, môžeme v tomto prípade za hodnotu objemu vziať hodnotu počiatočného objemu.

Riešenie:

Rovnicu (4) upravíme pričom vyššie rády ε zanedbáme

$$\Delta V = V_0\left(1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon - 2\mu\varepsilon^2 + (\mu\varepsilon)^2 + \mu^2\varepsilon^3 - 1\right)$$

$$\Delta V = V_0\varepsilon(1-2\mu) = \pi r_0^2 l_0 \varepsilon(1-2\mu)$$

$$\Delta V = \pi r_0^2 l_0 \frac{mg}{\pi r_0^2 E}(1-2\mu)$$

$$\Delta V = \frac{mgl_0}{E}(1-2\mu) = \frac{100\text{kg}\cdot 9{,}81\text{m.s}^{-2}\cdot 10\text{m}(1-0{,}6)}{1{,}96\cdot 10^{11}\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}} = 20\ \text{mm}^3$$

Pre energiu pružnej deformácie dostaneme

$$E_d = wV_0 = \frac{\pi r_0^2 l_0 E}{2}\left(\frac{mg}{\pi r_0^2 E}\right)^2 = \frac{m^2 g^2 l_0}{2\pi r_0^2 E} =$$

$$= \frac{(100\text{kg})^2\cdot(9{,}81\text{m.s}^{-2})^2\cdot 10\text{m}}{2\cdot 3{,}14\cdot(2\cdot 10^{-3}\text{m})^2\cdot 1{,}96\cdot 10^{11}\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}} = 1{,}95\ \text{J} \ .$$

12.2. Oceľový stĺp vysoký desať metrov o priemere 0,5 m stojí vo zvislej polohe. Vypočítajte o koľko sa stĺp skráti v dôsledku vlastnej tiaže. Hustota ocele je $7{,}85\cdot 10^3$ kg.m^{-3} a modul pružnosti je $2{,}0\cdot 10^{11}$ Pa .

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$l = 10$ m	$\Delta l = ?$
$r = 0{,}25$ m	
$\rho = 7{,}85\cdot 10^3$ kg.m^{-3}	
$E = 2.0\cdot 10^{11}$ kg.m^{-1}.s^{-2}	

Je zrejmé, že v tomto prípade na rozdiel od príkladu 12.1. nemôžeme počítať s rovnorodou deformáciou, pretože na horný koniec stĺpa nepôsobí žiadna tiažová sila a na dolný koniec pôsobí celá tiaž stĺpu. Preto bude stlačenie stĺpu na hornom konci nulové a na dolnom maximálne. Aby sme mohli vypočítať celkovú zmenu dĺžky stĺpu, zvolíme si os *x* vo smere osi stĺpu s počiatkom na jeho hornom konci. Zvolíme si teraz vo vzdialenosti *x* tenkú vrstvu o hrúbke d*x*. Stlačenie hrúbky d*x* bude nekonečne malým príspevkom k celkovému stlačeniu Δ*l*, preto ho označíme d(Δ*l*).

Podľa Hookovho zákona

$$\mathrm{d}(\Delta l) = \frac{F\mathrm{d}x}{ES} = \frac{\rho g S x \mathrm{d}x}{ES} \ . \qquad (1)$$

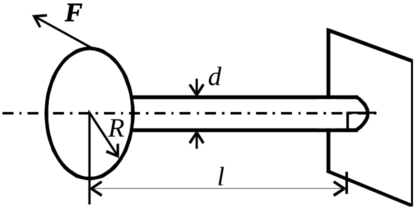
Riešenie:

Celkové stlačenie Δ*l* dostaneme integrovaním rovnice (1)

$$\Delta l = \int_0^{l_0} \frac{\rho g\, x}{E} dx = \frac{\rho g\, l^2}{2E} .$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$\Delta l = \frac{7{,}85 \cdot 10^3 \mathrm{kg.m^{-3}} \cdot 9{,}81 \mathrm{m.s^{-2}} \cdot (10\mathrm{m})^2}{2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-11} \mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}} = 1{,}83 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} = 18{,}3\,\mu\mathrm{m} .$$



Obr.57

12.3. Železná valcová tyč dĺžky 50 cm a priemeru 0,5 cm je na jednom konci upevnená. Na druhom konci má pripevnené koleso s polomerom 20 cm. Akou tangenciálnou silou treba pôsobiť na obvode kolesa, aby sa prierez tyče v mieste kolesa stočil vzhľadom na upevnený koniec tyče o uhol 15°? Pozri obr.57.

Úvaha:

Zadané hodnoty	Hľadané hodnoty
$l = 0{,}5$ m	$F = ?$
$d = 0{,}005$ m	
$R = 0{,}2$ m	
$\varphi = 15°$	
$G = 7{,}16 \cdot 10^{10}$ Pa	

Budeme predpokladať, že pri krútení tyče nebude prekročená medza úmernosti, t.j. uhol pootočenia bude priamoúmerný pôsobiacemu šmykovému napätiu. Vzťah medzi momentom sily M a pootočením φ jednej základne voči druhej je nasledovný

$$\varphi = \frac{2l}{\pi r^4 G} M , \tag{1}$$

Moment sily v prípade tangenciálnej sily F je

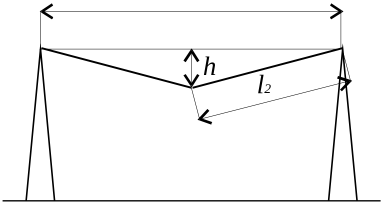
$$M = F\,R \tag{2}$$

Riešenie:

Dosadením M z rovnice (2) do rovnice (1) a úpravou dostaneme

$$F = \frac{\pi G\, d^4 \varphi}{2 R\, l\, 2^4} = \frac{3{,}14 \cdot 7{,}16 \cdot 10^{10} \mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}} \cdot \left(5 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}\right)^4 \cdot 0{,}262}{2 \cdot 0{,}2\mathrm{m} \cdot 0{,}5\mathrm{m} \cdot 16} = 11{,}5\ \mathrm{N} .$$

Aby sa prierez tyče v mieste kolesa stočil vzhľadom na upevnený koniec tyče o uhol φ, treba na obvode kolesa pôsobiť tangenciálnou silou 11,5 N.



Obr.58

12.4. Hliníkové drôty vysokonapäťového vedenia sú napnuté na stožiaroch, ktoré majú odstup 60 m. Aký veľký musí byť previs drôtov pri 20°C, keď pri –25°C majú byť drôty vodorovné a keď previs kvôli zjednodušeniu výpočtu považujeme za trojuholníkový? Pozri obr.58.

Úvaha:

Zadané veličiny
$2l_1 = 60$ m
$\alpha_l = 23 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$
$t_1 = -25°C$
$t_2 = 20°C$

Hľadané veličiny
$h = ?$

Pri výpočte budeme vychádzať zo vzťahu pre dĺžkovú rozťažnosť

$$l_t = l_0\left[1 + \alpha_l\left(t - t_0\right)\right], \qquad (1)$$

kde l_t je dĺžka drôtu pri teplote t, l_0 je dĺžka drôtu pri teplote t_0 a (podľa normy 0°C) α_l je koeficient dĺžkovej rozťažnosti. Z obrázku 58 je zrejmé, že previs h môžeme vypočítať pomocou Pytagorovej vety a teda

$$h^2 = l_2^2 - l_1^2, \qquad (2)$$

kde l_1 je polovičná vzdialenosť medzi stožiarmi, rovná polovičnej dĺžke hliníkového drôtu pri teplote –25°C a l_2 je polovičná dĺžka hliníkového drôtu medzi dvomi stožiarmi pri teplote 20°C.

Riešenie:

Vyjadríme si dĺžky l_1 a l_2 pomocou rovnice (1)

$$l_1 = l_0\left(1 + \alpha_l t_1\right) \text{ a } l_2 = l_0\left(1 + \alpha_l t_2\right),$$

odkiaľ

$$l_2 = l_1 \frac{\left(1 + \alpha t_1\right)}{\left(1 + \alpha t_2\right)}.$$

Dosadíme zadané hodnoty a dostaneme

$$l_2 = 30\mathrm{m} \cdot \frac{1 + 23 \cdot 10^{-6} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot 20\mathrm{K}}{1 + 23 \cdot 10^{-6} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \left(-25\mathrm{K}\right)} = 30{,}031\mathrm{m}$$

Potom dĺžka previsu h bude

$$h = \sqrt{l_2^2 - l_1^2} = \sqrt{\left(30{,}031\mathrm{m}\right)^2 - \left(30\mathrm{m}\right)^2} = 1{,}34\mathrm{m}.$$

12.5. Koleso rušňa má pri teplote 0°C polomer $r_0 = 1$ m. Aký je rozdiel v počte otočení kolesa na dráhe $l = 100$ km v lete pri teplote $t_1 = 25°C$ a v zime pri teplote $t_2 = -25°C$, keď súčiniteľ dĺžkovej rozťažnosti materiálu kolesa $\alpha_l = 12 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$?

Úvaha:

Zadané veličiny
$t_0 = 0°C$
$r_0 = 1$ m
$l = 10^5$ m
$t_1 = -25°C$
$t_2 = 25°C$
$\alpha_l = 12 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$

Hľadané veličiny
$\Delta n = ?$

V dôsledku dĺžkovej rozťažnosti bude obvod kolesa v zime pri $t_1 = -25°C$ menší ako v lete $t_2 = 25°C$. Závislosť polomeru kolesa od teploty je daný vzťahom

$$r_t = r_0\left(1 + \alpha_l \Delta t\right), \qquad (1)$$

kde r_t je polomer kolesa pri teplote t a r_0 je polomer pri teplote 0°C. α_l je koeficient dĺžkovej rozťažnosti. Pre obvody kolesa pri teplotách t_1 a t_2 budú platiť vzťahy

$$O_1 = 2\pi r_1 \quad \text{a} \quad O_2 = 2\pi r_2. \qquad (2)$$

Počet otáčok kolesa n na dráhe l je

$$n = \frac{l}{O}. \qquad (3)$$

Riešenie:

Rozdiel v počte otočení $n_1 - n_2$ pri použití vzorcov (3) a (2) bude

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{l}{O_1} - \frac{l}{O_2} = \frac{l}{2\pi r_1} - \frac{l}{2\pi r_2} \ .$$

Vyjadríme si teraz pomocou rovnice (1) polomery r_1 a r_2

$$\Delta n = \frac{l}{2\pi r_0}\left(\frac{1}{1+\alpha\Delta t_1} - \frac{1}{1+\alpha\Delta t_2}\right). \tag{4}$$

Zo zadania sú teplotné rozdiely Δt_1 a Δt_2 rovné čo do hodnoty ale opačného znamienka, Δt_1 je záporný rozdiel teplôt, Δt_2 kladný. Označme si hodnotu teplotného rozdielu Δt a upravíme rovnicu (4)

$$\Delta n = \frac{l}{2\pi r_0}\left(\frac{1}{1-\alpha\Delta t} - \frac{1}{1+\alpha\Delta t}\right).$$

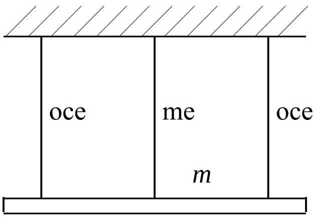
Pretože $\alpha\Delta t$ je malá veličina môžeme podľa nej rozložiť každý zlomok do radu a vyššie mocniny zanedbať.

Potom $$\Delta n = \frac{1}{2\pi r_0}\left[1 + 2\alpha\Delta t - (1 - 2\alpha\Delta t)\right] = \frac{l\cdot 2\alpha\Delta t}{2\pi r_0}.$$

PO dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$\Delta n = \frac{10^5\,\mathrm{m}\cdot 2\cdot 12\cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}\cdot 25\,\mathrm{K}}{2\cdot 3{,}14\,\mathrm{m}} = 9{,}6$$

Neriešené príklady



Obr.59

12.6. Pomocou žeriavu bolo potrebné preniesť hriadeľ hmotnosti 10 t. K dispozícií boli ale len dve oceľové laná, každé s nosnosťou 4 t. Preto pridali tretie lano medené. Všetky laná mali rovnaký prierez. Oceľové laná boli upevnené na koncoch hriadeľa, medené v strede. Pozri obr.59. Vypočítajte akou silou boli namáhané jednotlivé laná pri prenášaní? $[\,3{,}74\cdot 10^4\,\mathrm{N}\,; 2{,}32\cdot 10^4\,\mathrm{N}\,; 3{,}74\cdot 10^4\,\mathrm{N}\,]$

12.7.* O koľko by sa účinkom vlastnej tiaže predĺžilo oceľové lano dĺžky 9000 m, spustené do mora do takej hĺbky, aby lano voľne viselo a bolo celé ponorené do vody, ak hustota morskej vody $\rho_1 = 1{,}03\cdot 10^3$ kg.m^{-3}, hustota lana $\rho_2 = 7{,}7\cdot 10^3$ kg.m^{-3} a modul pružnosti v ťahu ocele $E = 21{,}6\cdot 10^{10}$ Pa? [12,28 m]

12.8.* Do hlbinného vrtu je spustené závažie hmotnosti 50 kg na oceľovom lane dĺžky 2,5 km. Aký musí byť priemer lana, aby bol dodržaný koeficient bezpečnosti 3 proti pretrhnutiu, ak medza pevnosti v ťahu je 600 Mpa? Aký je rozdiel medzi dĺžkou zaťaženého lana a dĺžkou lana v nezaťaženom stave, ak má priemer 10 mm?
[8,4 mm, 1,2 m]

12.9. Vypočítajte hodnotu Poissonovho čísla látky, ktorej objem sa pri deformácií ťahom nemení. [0,5]

12.10. Valcová tyč pôvodnej dĺžky l_0 je na jednom konci upevnená a na druhom konci namáhaná v smere dĺžky silou *F*. Ako sa zmenil objem tyče pri deformácii, keď modul pružnosti v ťahu tyče je *E*? [$\Delta V = l_0 F(\mu-2)/\mu E$]

12.11. Drôt pôvodnej dĺžky $l_0 = 10$ m je na jednom konci upevnený a na druhom konci sa napína v smere dĺžky silou $F = 200$ N, čím sa predĺži o $\Delta l = 4$ mm. Nájdite pôvodný priemer drôtu ako aj zmenu priemeru pri predĺžení, ak modul pružnosti v ťahu drôtu $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa a jeho modul pružnosti v šmyku $G = 7{,}35 \cdot 10^{10}$ Pa!
[0,18 cm; $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ cm]

12.12. Ako sa zmení objem železnej tyče tvaru hranola pôvodných rozmerov $a_0 = 1$m, $b_0 = c_0 = 10$ cm, keď je tyč v smere rozmeru a_0 namáhaná ťahom $\sigma = 9{,}81 \cdot 10^7$ N.m^{-2}? Modul pružnosti železa, z ktorého je tyč zhotovená je $E = 19{,}62 \cdot 10^{10}$ N.m^{-2} a modul pružnosti v šmyku $G = 7{,}35 \cdot 10^{10}$ N.m^{-2}. [1,65 cm^3]

12.13. Akú dĺžku mal železný drôt, ktorý sa vplyvom vlastnej tiaže roztrhol , keď objemová hmotnosť železa je $7{,}8 \cdot 10^3$ kg.m^{-3} a medza pevnosti železa $7{,}2 \cdot 10^8$ Pa?
[$l > 9400$ m]

12.14.* Dokážte, že hrúbku steny guľovitej nádrže je možné urobiť dva razy tenšou ako stenu valcovitej nádrže, ak majú rovnaký priemer a sú vyrobené z rovnakého materiálu a nachádzajú sa pod rovnakým tlakom!

12.15. Z plnej gumenej hadice bol vyrobený prak. Polomer hadice bol $3 \cdot 10^{-3}$ m a jej dĺžka bola 0,42 m. Ak natiahneme gumu praku o 0,2 m a vystrelíme kameň hmotnosti 0,02kg, jeho počiatočná rýchlosť bude 20 m.s^{-1}. Vypočítajte Youngov modul pružnosti gumy za predpokladu, že zmenu prierezu gumy neuvažujeme. [2,94 MPa]

12.16.* Na skokanskom mostíku je vodorovne upevnená za jeden koniec drevená doska široká 40 cm a voľne vyčnievajúca z upevnenia dĺžkou 2,5 m. Aký bude priehyb dosky, ak sa na jej koniec postaví osoba hmotnosti 80 kg? Aký uhol sklonu bude mať koniec dosky? (Vlastnú tiaž dosky neuvažujte, modul pružnosti v ťahu dreva je $1{,}2 \cdot 10^{10}$ Pa). [16 cm, 0,1 rad]

12.17. K oceľovému drôtu o priemere 1 mm a dlhému 0,5 m je pripevnené závažie hmotnosti 1 kg. Vypočítajte maximálnu frekvenciu, ktorou môžeme drôt so závažím rovnomerne otáčať vo zvislej rovine, aby sa drôt neroztrhol. [5,3 s^{-1}]

12.18. Stroj je spojený s motorom oceľovým hriadeľom dĺžky 80 cm o priemere 25 mm. Aký je uhol skrútenia hriadeľa, ak sa pri rýchlosti otáčania 2000 ot/min prenáša mechanický výkon 500 kW? [0,06 rad]

12.19. Brzdový hydraulický rozvod je realizovaný trubičkami s vonkajším priemerom 6 mm, hrúbkou steny 0,3 mm a medzou pevnosti v ťahu 600 MPa. Aký tlak brzdovej kvapaliny trubička vydrží? [67 MPa]

12.20. Stanovte relatívnu zmenu objemu železného telieska a vody, ak sú vystavené v tlakovej komore pôsobeniu všestranného tlaku 5 MPa. Porovnajte objemovú stlačiteľnosť oboch látok. [pre železo $3{,}3 \cdot 10^{-5}$, pre vodu $2{,}5 \cdot 10^{-3}$]

12.21. Vypočítajte potenciálnu energiu drôtu dlhého $5 \cdot 10^{-2}$ m s priemerom $4 \cdot 10^{-4}$ m ,ktorý je skrútený o uhol 10′. Modul pružnosti v šmyku materiálu drôtu je $5{,}9 \cdot 10^{10}$ Pa. [$1{,}25 \cdot 10^{-8}$ J)

12.22. Aký musí byť polomer medeného drôtu, aby sa účinkom sily 500 N, ktorá naň pôsobí v smere dĺžky, nepretrhol, keď medza pevnosti medi je $2 \cdot 10^8$ N.m^{-2} ?

[0,89 mm]
12.23. Vypočítajte deformačnú energiu hliníkovej tyčky so štvorcovým prierezom, ktorá bola vtlačená do otvoru rovnakého prierezu, ale o 0,1% kratšieho. (Priečne rozmery tyčky sa nemôžu meniť). [4846 J]
12.24. Hliníková kocka s hranou 10^{-2} m bola deformovaná všestranným tlakom. Aká veľká bola sila, ktorá pôsobila na každú stranu kocky, ak sa jej objem zmenšil o 1%. [60 kN]
12.25. V trubici hydraulického rozvodu o vnútornom priemere 20 mm sú dva piesty vzdialené od seba 50 cm a priestor medzi nimi je vyplnený kvapalinou so súčiniteľom objemovej stlačiteľnosti $5 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}. Ako sa zmení vzdialenosť piestov, ak ich zaťaží prenášaná sila 15 kN? (Mechanickú rozťažnosť trubice neuvažujte). [1,2 cm]
12.26. Na železnú tyč tvaru kvádra pôvodných rozmerov a_0 = 50 cm, b_0 = 10 cm, c_0 = 5 cm pôsobí rovnomerný všestranný normálový tlak $9{,}81 \cdot 10^5$ Pa. Ako sa zmenší objem kvádra po deformácii, keď modul pružnosti v ťahu tyče je $19{,}62 \cdot 10^{10}$ Pa? [-12,7 mm^3]
12.27. Keď banku teplomera ohrejeme zápalkou, v prvom okamihu klesne stĺpec ortuti, skôr než začne stúpať. Prečo?
12.28. Vzdialenosť dvoch bodov, odmeraná oceľovým meradlom pri teplote 30°C, bola 186 m. Aká je skutočná hodnota tejto dĺžky, keď meradlo je správne pri teplote 18°C? [186,024 m]
12.29. Aký dlhý je oceľový drôt s prierezom 4 mm^2, ktorý sa po prijatí tepla 1,25 kJ predĺži o 0,1%. [962 mm]
12.30. Homogénna železná tyč hmotnosti 3 kg má pri teplote 8°C dĺžku 1 m. Vypočítajte, ako sa zmení moment zotrvačnosti tejto tyče vzhľadom na os kolmú na smer tyče a prechádzajúcej jej koncovým bodom, keď sa zohreje na teplotu 100°C!
[$\Delta J = 24 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg.m^2}$]
12.31. Dve tyče jedna železná a druhá medená sú položené na seba tak, že jedným koncom sa opierajú o stenu. Vypočítajte dĺžku železnej tyče, ak viete, že medená tyč bola pri teplote 0°C dlhá 24 cm a rozdiel tyčí bol pri ľubovoľnej teplote konštantný. [0,18m]
12.32. Pravouhlá nádrž dlhá 5,2 m a široká 4,1 m je naplnená do výšky 3,9 m vykurovacím olejom s hustotou 880 $kg.m^{-3}$ a teplotou 12°C. Aby olej ľahko tiekol, zohrejeme ho na 70°C (α_V= 0,00096 K^{-1}). O koľko pritom stúpne hladina oleja a ako sa zmení objemová hmotnosť oleja? [o 22 cm; 833 $kg.m^{-3}$]
12.33. Sklený pyknometer objemu 15 cm^3 je pri teplote 0°C naplnený ortuťou. Keď teplotu okolia zvýšime na 100°C, z pyknometra vytečie 234 mm^3 ortuti. Vypočítajte, aký je koeficient objemovej rozťažnosti ortuti! [$18{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$]
12.34. Oceľovú tyč s prierezom 2 cm^2 zohrejeme z teploty 0°C na teplotu 50°C a potom ju prudko ochladíme na pôvodnú teplotu. Vypočítajte, akou najmenšou silou pôsobiacou v smere osi treba pôsobiť na tyč, aby sa pri ochladení neskrátila! Predpokladáme, že modul pružnosti sa s teplotou nemení. [25200 N]
12.35. Priamy úsek koľajníc bol zváraný pri teplote 20°C. Aká tlaková sila vznikne v priereze koľajnice o ploche 80 cm^2, keď sa v lete koľajnice zohrejú na teplotu 50°C (nemajú možnosť sa predĺžiť). [576 kN]
12.36. Dva oceľové valce, ktoré majú rovnakú dĺžku 0.5 m a prierezy S_1=2S_2= 20 cm^2 pri teplote 20°C, sú postavené na seba. Dolný valec je širší a je uchytený v základe.

Horný koniec tenšieho valca je o 0,3 mm nižšie ako nosník. Vypočítajte silu, s ktorou budú valce pôsobiť na nosník, ak sa ich teplota zvýši o 50°C. [21,8 kN]

12.37.* Betónový nosník s oceľovou výstužou má plochu priečneho prierezu betónu 500 cm^2 a ocele 10 cm^2. Pri teplote 18°C bolo napnutím oceľovej výstuže vytvorené v betóne mechanické predpätie 5 MPa. Aký je rozdiel predpätia betónu v teplotnom intervale -20°C až 40°C, ak uvažujeme modul pružnosti v ťahu pre oceľ 200 GPa a pre betón 40 GPa a súčinitele teplotnej dĺžkovej rozťažnosti ocele $11 \cdot 10^{-6}$ K^{-1} a betónu $12 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}? [0,22 MPa, rastie s teplotou]

ČASŤ III.

MECHANICKÉ KMITY A VLNY

13 Mechanické kmity

V tomto paragrafe sa zaoberáme riešením úloh týkajúcich sa netlmených, tlmených a vynútených kmitov hmotného bodu alebo tuhého telesa. Prv než sa pristúpi k riešeniu konkrétnej úlohy je potrebné urobiť kvalitatívnu analýzu deja, t.j. urobiť analýzu síl, ktoré pôsobia na hmotný bod alebo tuhé teleso.

V ďalšom budeme skúmať len jednorozmerné kmity a preto pre ich opísanie vystačíme s jednou súradnicou, ktorá v závislosti od charakteru pohybu môže byť buď lineárna alebo uhlová. Rovnica kmitavého pohybu sa vyjadruje pomocou harmonickej funkcie. Voľba harmonickej funkcie sínusu alebo kosínusu sa obyčajne robí na základe počiatočných podmienok.

1. Rovnica netlmených harmonických kmitov má tvar

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

kde x je výchylka z rovnovážnej polohy, A je amplitúda kmitov, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ - vlastná uhlová frekvencia, T - perióda kmitov, f_0 - vlastná frekvencia a φ_0 – počiatočná fáza. Funkcia x=$x(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice pre harmonické kmity

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 x \ ,$$

čo je zjednodušený zápis Newtonovej pohybovej rovnice

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \quad \text{pre} \quad \omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ ,$$

pre pohyb telieska hmotnosti m pri pôsobení elastickej sily o veľkosti kx.

2. Kinetická energia kmitajúceho telesa je rovná

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

3. Potenciálna energia kmitajúceho telesa je rovná

$$E_p = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

4. Celková energia je rovná súčtu potenciálnej a kinetickej energie

$$E = E_p + E_k = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

5. Perióda kmitov matematického kyvadla je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ ,$$

kde l je dĺžka kyvadla a g tiažové zrýchlenie.

6. Perióda kmitov fyzikálneho kyvadla je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}},$$

kde m je hmotnosť kyvadla, l- vzdialenosť ťažiska hmotného telesa od osi otáčania a J moment zotrvačnosti vzhľadom k osi otáčania.

7. Uhlová frekvencia torzného kyvadla je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{\pi G r^4}{2lJ}},$$

kde G je modul pružnosti v šmyku, r- polomer závesu a l –dĺžka závesu kyvadla a J moment zotrvačnosti závažia vzhľadom k osi otáčania.

8. Rovnica tlmených kmitov oscilátora má tvar

$$x = A\,e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

kde δ je koeficient tlmenia a $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ uhlová frekvencia kmitov.

9. Logaritmický dekrement tlmenia je definovaný ako prirodzený logaritmus pomeru dvoch za sebou idúcich amplitúd.

$$\Lambda = \ln\frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \delta T$$

10. V prípade, že na harmonický oscilátor s tlmením bude pôsobiť vonkajšia harmonická sila $F_0 \sin\omega t$, potom sústava bude vykonávať v ustálenom režime vynútené kmity podľa rovnice

$$x = A\sin(\omega t - \varphi),$$

kde $A = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ je amplitúda kmitov a fázový posuv φ stanovíme z rovnice $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Riešené príklady

13.1. Vypočítajte periódu harmonického pohybu hmotného bodu o hmotnosti 10 g, keď sila udržiavajúca hmotný bod v tomto pohybe má pri výchylke 3 cm hodnotu 0,05 N.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m = 0{,}01$ kg	$T = ?$
$x_1 = 0{,}03$ m	
$F_1 = 0{,}05$ kg.m.s^{-2}	

Pretože výchylka je zadaná ako skalárna veličina, môžeme predpokladať, že harmonický pohyb prebieha po priamke. Rovnica harmonického pohybu bude mať tvar

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{1}$$

kde x je výchylka v čase t, A – amplitúda kmitov, ω- kruhová frekvencia a φ_0 počiatočná fáza. Perióda kmitov je spojená s uhlovou frekvenciou nasledovným vzťahom

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{2}$$

V prípade harmonických kmitov pôsobí na hmotný bod sila

$$F = -kx . \tag{3}$$

Rovnica (1) platí pre harmonické kmity, pre ktoré ω je dané vzťahom

$$\omega^2 = \frac{k}{m} . \tag{4}$$

Dosadením rovníc (3) a (4) do rovnice (2) vypočítame hľadanú hodnotu periódy kmitov.

Riešenie:

Dosadením za ω do rovnice (2) dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

a po dosadení za k z rovnice (3)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mx_1}{F_1}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}01\ \mathrm{kg}\cdot 0{,}03\ \mathrm{m}}{0{,}05\ \mathrm{kg.m.s^{-2}}}} \cong 0{,}49\ \mathrm{s} .$$

13.2. Ideálna pružina je voľne zavesená za jeden koniec. Jej dĺžka je l_0. Keď na druhý koniec pružiny zavesíme teliesko hmotnosti m, bude jej dĺžka $l_0 + h$. Na toto teliesko, ktoré sa nachádza v pokoji, dopadne z výšky h druhé teliesko tej istej hmotnosti. Ráz je absolútne nepružný. Vypočítajte periódu, počiatočnú fázu a amplitúdu kmitov takejto sústavy a tiež maximálnu výšku nad počiatočnou rovnovážnou polohou, do ktorej sa zdvihnú telieska pri kmitavom pohybe. Riešte najprv všeobecne, potom pre $h = 0{,}1$m.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$h = 0{,}1$ m	$T = ?$
	$\varphi_0 = ?$
	$A = ?$
	$h_{max} = ?$

Pre harmonické kmity telieska na pružine sú dôležité dva údaje, a to tuhosť pružiny a hmotnosť telieska. Okrem toho je treba poznať rovnovážnu polohu, okolo ktorej budú prebiehať kmity. Tuhosť pružiny zistíme z predĺženia pružiny pri jej zaťažení telieskom hmotnosti m. Zo vzťahu $mg = k\,h$ dostaneme

$$k = mg / h .$$

Rovnovážnu polohu x_0, t.j. dĺžku pružiny zaťaženej obidvomi telieskami, zistíme zo vzťahu $k\left(x_0 - l_0\right) = 2mg$ a odtiaľto $x_0 = l_0 + 2h$, kde l_0 je dĺžka nezaťaženej pružiny.

Nech počiatok súradnicovej sústavy bude v bode x_0 a kladný smer osi x nech smeruje dole. Rovnica pohybu oboch spojených teliesok bude mať tvar

$$2m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \quad \text{alebo} \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{2h}x = 0 . \tag*{1)}$$

Rovnice takéhoto druhu popisujú harmonické kmity s periódou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2h}{g}} \ ,$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{g}{2h}}$.

Riešenie rovnice (1) budeme hľadať v tvare

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) . \qquad (2)$$

Amplitúda A a počiatočná fáza φ_0 sa dajú určiť z počiatočných podmienok.

Riešenie:

Za čas $t = 0$ si zvolíme okamžik, keď $x(0) = -h$. Počiatočnú rýchlosť $v(0)$ vypočítame z podmienky, že ráz teliesok bol absolútne nepružný, a teda

$$m v_1 = 2m v(0) . \qquad (3)$$

Ak vezmeme do úvahy, že teliesko dopadlo z výšky h, jeho rýchlosť na základe zákona zachovania mechanickej energie bude $v_1 = \sqrt{2hg}$.

Dosadením do rovnice (3) a úpravou dostaneme

$$v(0) = \sqrt{\frac{gh}{2}} .$$

Deriváciou rovnice (2) dostaneme rýchlosť teliesok ako funkciu času

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) . \qquad (4)$$

V čase $t=0$ vzťahy (2) a (4) prejdú do tvaru

$$x(0) = A \sin \varphi_0$$

$$v(0) = A\omega \cos \varphi_0 .$$

Z týchto dvoch vzťahov dostávame pre amplitúdu kmitov

$$A = \sqrt{x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}}$$

a počiatočnú fázu

$$\varphi_0 = \operatorname{arctan} \frac{\omega\, x(0)}{v(0)} .$$

Dosadením za $x(0)$, $v(0)$ a ω po úprave dostaneme

$$A = h\sqrt{2} \quad \text{a} \quad \varphi_0 = \operatorname{arctan}(-1) = 135^\circ .$$

Maximálna výška nad pôvodnou rovnovážnou polohou, (ktorá bola vo vzdialenosti h od počiatku súradníc) je

$$h_{\max} = A - h = h\left(\sqrt{2} - 1\right) . \qquad (4)$$

Dosadením číselných hodnôt od rovnice (2) dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m.s}^{-2}}} = 0{,}897\ \text{s}$$

Dosadením číselných hodnôt za h dostaneme

$$A = 0{,}1\ \text{m}\ \sqrt{2} = 0{,}1414\ \text{m} ,$$

a z (4) dostaneme $h_{\max} = 0{,}0414$ m.

13.3. Aký je koeficient tlmenia kmitov hmotného bodu, keď podiel dvoch za sebou idúcich amplitúd hmotného bodu na tú istú stranu sa rovná 2 a perióda tlmených kmitov $T = 0{,}5$ s? Aká by bola perióda netlmených kmitov za rovnakých podmienok?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$T = 0{,}5$ s	$\delta = ?$
$\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = 2$	$T_0 = ?$

Budeme hľadať vzťah, v ktorom koeficient tlmenia kmitov hmotného bodu δ vystupuje spolu s periódou kmitov T a pomerom dvoch po sebe idúcich amplitúd. Takým vzťahom je definícia logaritmického dekrementu útlmu

$$\Lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \delta T \ . \tag{1}$$

Perióda netlmených kmitov sa dá vyjadriť pomocou vlastnej kruhovej frekvencie vzťahom

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\,, \tag{2}$$

kde $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ je vlastná uhlová frekvencia netlmených harmonických kmitov. Podobne pre periódu tlmených kmitov platí

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \tag{3}$$

Uhlová frekvencia tlmených harmonických kmitov ω sa rovná

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\ . \tag{4}$$

Riešením rovníc (2),(3),(4) dostaneme hľadanú periódu vlastných kmitov.

Riešenie:

Z rovnice (1) pre koeficient tlmenia kmitov hmotného bodu δ platí:

$$\delta = \frac{\Lambda}{T}\,.$$

Zo zadania vyplýva, že $\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = 2$, a preto

$$\delta = \frac{ln\ 2}{T}\,. \tag{5}$$

Po dosadení za $T = 0{,}5$ s dostaneme

$$\delta = \frac{\ln 2}{0{,}5} = 1{,}39\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

Koeficient tlmenia kmitov hmotného bodu je 1,39 s^{-1}.

Po dosadení ω zo vzťahov (4) a (3) do vzorca (2) a úpravou dostaneme

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2+\delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2+\delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\dfrac{2\pi}{0{,}5\ \mathrm{s}}\right)^2+\left(1{,}39\ \mathrm{s}^{-1}\right)^2}}\,.$$

$$T_0 = 0{,}497\ \mathrm{s}\,.$$

Perióda netlmených kmitov za rovnakých podmienok by bola 0,497 s.

13.4. Guľôčka hmotnosti 50 g je zavesená na nehmotnej pružine s tuhosťou 20 N.m^{-1}. Na guľôčku pôsobí vonkajšia harmonická sila v zvislom smere, ktorej uhlová frekvencia je 18 s^{-1}. V dôsledku toho gulička koná vynútené kmity s amplitúdou 1,3 cm. Fázový posun výchylky guličky z rovnovážnej polohy voči vonkajšej sile je $\pi/4$. Vypočítajte prácu vonkajšej sily za dobu 1 periódy kmitov! Koľkokrát je táto práca menšia než maximálna práca, ktorú môže vykonať vonkajšia sila za 1 periódu?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m = 0{,}05$ kg	$A = ?$
$k = 20$ kg.s^{-2}	$A_{\text{Max}} = ?$
$\omega = 18$ s^{-1}	
$X_0 = 0{,}013$ m	
$\varphi = \pi/4$	

Guľôčku, ktorá vykonáva vynútené kmity, môžeme považovať za hmotný bod. Amplitúdu kmitov označíme ako X_0. Elementárna práca vonkajšej sily F je rovná

$$\mathrm{d}A = Fv \ \mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

kde v je rýchlosť guličky. Vonkajšia sila sa mení s časom podľa vzťahu

$$F = F_0 \sin \omega t\ , \tag{2}$$

kde F_0 je amplitúda vonkajšej sily a ω jej uhlová frekvencia. Výchylka kmitajúcej guľôčky z rovnovážnej polohy a jej rýchlosť sa menia podľa vzťahov

$$x = X_0 \sin(\omega t - \varphi), \tag{3}$$

$$v = \dot{x} = \omega X_0 \cos(\omega t - \varphi)\,. \tag{4}$$

Amplitúda a fázový posun vynútených kmitov sú rovné

$$X_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - 4\delta^2\omega^2}}\,, \tag{5}$$

$$tg\, \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\,, \tag{6}$$

kde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ je vlastná uhlová frekvencia oscilátora. Rovnice (5) a (6) tvoria sústavu rovníc pre neznáme δ a F_0. Znamená to, že môžu byť stanovené všetky parametre, ktoré charakterizujú vonkajšiu silu a rýchlosť kmitajúceho telesa v závislosti na čase. Dosadením rovníc (2) a (4) do vzťahu (1) dostaneme

$$\mathrm{d}A = Fv \ \mathrm{d}t = F_0 X_0\, \omega \sin \omega t\ \cos(\omega t - \varphi)\mathrm{d}t\,. \tag{7}$$

Prácu, ktorú vykonáva sila za jednu periódu, môžeme zistiť integrovaním rovnice (7) podľa času. Ako je vidieť z rovnice (7), elementárna práca mení znamienko počas jednej periódy. Práca vynucujúcej vonkajšej sily bude maximálna vtedy, ak dA bude v ľubovoľný časový úsek dt kladná, t.j., keď vynucujúca sila a rýchlosť kmitajúceho hmotného bodu budú vo fáze. Znamená to, že v ľubovoľnom čase bude platiť

$$\cos(\omega t - \varphi) = \sin \omega t\ . \tag{8}$$

Pomocou rovníc (8) a (6) môžeme nájsť hodnoty φ a ω, pri ktorých bude práca vonkajšej síl maximálna.

Riešenie:

Prácu vonkajšej sily za jednu periódu dostaneme integrovaním rovnice (7). Najprv ale podľa trigonometrického pravidla pre cosínus rozdielu dvoch uhlov vypočítame $\cos(\omega t - \varphi)$ a dosadíme do rovnice (7)

$$A = F_0 X_0 \omega \left(\cos\varphi \int_0^T \sin\omega t \cdot \cos\omega t \,\mathrm{d}t + \sin\varphi \int_0^T \sin^2 \omega t \,\mathrm{d}t \right).$$

Hodnota integrálov je

$$\int_0^T \sin\omega t \cdot \cos\omega t \,\mathrm{d}t = 0\,, \quad \int_0^T \sin^2 \omega t \,\mathrm{d}t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}\,.$$

Potom hľadaná práca

$$A = F_0 X_0 \pi \sin\varphi\,. \tag{9}$$

Z rovnice (6) pre $\varphi = \pi/4$ vyplýva

$$2\delta\,\omega = \omega_0^2 - \omega^2\,. \tag{10}$$

Dosadíme vzťah (10) do rovnice (5)

$$X_0 = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sqrt{2}}\,,$$

a odtiaľto

$$F_0 = X_0\, m \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sqrt{2}\,. \tag{11}$$

Dosadením vzťahu (11) do rovnice (9) vezmúc do úvahy, že $\varphi = \pi/4$ dostaneme

$$A = X_0^2\, m\, \pi \left(\omega_0^2 - \omega^2\right),$$

$$A = X_0^2\, m\, \pi \left(k/m - \omega^2\right).$$

$$A = \left(0{,}013\,\mathrm{m}\right)^2 \cdot 0{,}05\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{20\ \mathrm{kg.s^{-2}}}{0{,}05\ \mathrm{kg}} - 18^2\ \mathrm{s^{-2}} \right) = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}\,.$$

Prejdeme k riešeniu druhej otázky. Rovnica (8) platí pre $\varphi_1 = \pi/2$. Po dosadení tejto hodnoty do rovnice (6) dostávame $\omega_1 = \omega_0$. Pri tejto kruhovej frekvencií rýchlosť kmitajúceho hmotného bodu a vonkajšia sila sa menia s časom vo fáze, a preto práca vonkajšej sily za jednu periódu bude maximálnou. Ak vezmeme do úvahy, že F_0 je konštantná, bude pomer maximálnej práce A_{max} k práci A na základe rovnice (9) nasledovný

$$A_{max}/A = X_{0max} \sin\varphi_1 / \left(X_0 \sin\varphi\right),$$

kde X_{0max} a φ_1 sú amplitúda vynútených kmitov a ich fázový posun oproti vonkajšej sile pri

$\omega_1 = \omega_0$.

Z rovnice (5) dostaneme

$$X_{0max} = F_0 / \left(2\, m\, \delta\, \omega_0\right).$$

Ak vezmeme do úvahy rovnice (10) a (11) nájdeme

$$X_{0max} = X_0\, \omega \sqrt{2} / \omega_0\,.$$

Potom

$$A_{max}/A = X_0\, \omega\sqrt{2} / \left(X_0\, \omega_0 \sin\varphi\right),$$

ale $\sin\varphi = \sqrt{2}/2$, a preto

$$A_{max}/A = \frac{2\omega}{\omega_0} = \frac{2\omega}{\sqrt{k/m}} = \frac{2 \cdot 18\ \mathrm{s^{-1}}}{\sqrt{20\ \mathrm{kg.s^{-2}} / 0{,}05\ \mathrm{kg}}} = 1{,}8\,.$$

13.5. Dva rovnobežné kmitavé pohyby rovnakej amplitúdy, rovnakej počiatočnej fázy a blízkych periód $T_1 = 3\ s$ a $T_2 = 3{,}1\ s$ sa skladajú do výsledného pohybu. Nájdite periódu výsledného kmitavého pohybu a periódu rázov!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$T_1 = 3$ s	$T = ?$
$T_2 = 3{,}1$ s	$T_r = ?$

Pre kmitavý pohyb platí

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

kde x_0 je amplitúda, φ je počiatočná fáza a $\omega = (m/k)^{1/2}$ je uhlová frekvencia kmitavého pohybu.

Preto môžeme pre uvedené kmitavé pohyby napísať:

$$x_1 = x_0 \sin(\omega_1 t + \varphi); \quad x_2 = x_0 \sin(\omega_2 t + \varphi).$$

Pre výsledný pohyb potom platí: $x = x_1 + x_2$

$$x = x_0 \sin(\omega_1 t + \varphi) + x_0 \sin(\omega_2 t + \varphi),$$

$$\mathrm{x} = 2\,\mathrm{x}_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi\right).$$

Výsledný kmitavý pohyb má uhlovú frekvenciu rovnú polovičnému súčtu uhlových frekvencií jednotlivých kmitov a amplitúdu, ktorá sa periodicky mení s uhlovou frekvenciou rovnou polovičnému rozdielu pôvodných frekvencií.

Riešenie:

Pre periódu výsledného kmitavého pohybu možno písať

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{2}{\frac{\omega_1}{2\pi} + \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{2}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} = 3{,}05\mathrm{s}\ .$$

Perióda amplitúdy bude rovná

$$T' = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Keďže za jednu periódu zmeny amplitúdy vzniknú dve zosilnenia a dve zoslabenia amplitúdy, t.j. dva rázy, pre periódu rázov platí:

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{T_1T_2}{T_1 - T_2} = 93s$$

Neriešené príklady

13.6. Za koľko sekúnd po prechode rovnovážnou polohou sa pri sínusovom kmitaní s amplitúdou $A_0 = 2$ cm a $f = 50$ Hz dosiahnu výchylky a) 1mm; b) 5mm; c)15 mm?
[a) 160 μs; b) 805 μs ; c) 2,7 ms]

13.7. Hmotný bod vykonáva harmonické kmity pozdĺž osi x. V čase 0,1 s od začiatku pohybu je vzdialenosť hmotného bodu od rovnovážnej polohy 5 cm, rýchlosť 62 cm/s a zrýchlenie -540 cm/s^2. Vypočítajte: 1) amplitúdu, uhlovú frekvenciu a počiatočnú fázu kmitov; 2) polohu ,rýchlosť a zrýchlenie v čase t=0!
[1) 7,8 cm, 10,4 s^{-1} , -π/9; 2) -2,7 cm, 76 cm/s, 289 cm/s^2]

13.8. Teleso vykonáva harmonický pohyb s amplitúdou 12 cm a s frekvenciou 4 Hz. Vypočítajte: a)čas potrebný na to, aby sa teleso dostalo z rovnovážnej polohy do bodu, kde výchylka má hodnotu 6 cm, b) okamžitú rýchlosť telesa v tomto bode, c) okamžité zrýchlenie telesa v tomto bode! Pre zjednodušenie uvažujte riešenie v intervale 0 s až *T*/2.

[a) 0,02 s; 0,1 s; b) 2,6 $m.s^{-1}$; -2,6 $m.s^{-1}$; c) -38 $m.s^{-2}$; -38 $m.s^{-2}$]

13.9. Hmotný bod kmitajúci s amplitúdou 6 cm dosiahol v prvej polperióde v časovom rozpätí 0,001 s dva razy za sebou výchylku 3 cm. Akou frekvenciou kmitá? [333,3 Hz]

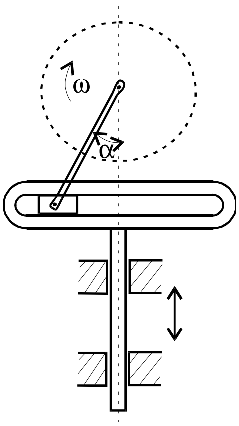
13.10. Výchylka hmotného bodu, konajúceho harmonické kmity, dosiahne za 1/20 sekundy po prechode rovnovážnou polohou 1/4 maximálnej výchylky. Aká je frekvencia kmitania? [0,806 Hz]

13.11. Hmotný bod, ktorý harmonicky kmitá, má v čase t_1 výchylku 0,05 m. Pri dvojnásobnom zväčšení fáz bude výchylka bodu 0,08 m. Určite amplitúdu kmitavého pohybu!

[0,083 m]

13.12. Hmotný bod hmotnosti 0,01 kg kmitá harmonicky s periódou 2s a s počiatočnou fázou rovnajúcou sa nule. Celková energia hmotného bodu pri tomto pohybe je $1 \cdot 10^{-4}$ J. Vypočítajte amplitúdu kmitov a nájdite maximálnu hodnotu sily pôsobiacej na hmotný bod! [0,045 m; $4{,}44 \cdot 10^{-3}$ N]

13.13. Hmotný bod kmitá s amplitúdou 100 cm a periódou 20 s. Akú vzdialenosť od krajnej polohy prešiel za 2,5 s? [29 cm]



Obr.60

13.14. Na obrázku 60 je znázornená 18 cm dlhá kľuka, ktorej voľný koniec kĺže v kulise posúvača a ktorej počet otáčok za minútu je 210. Vyjadrite rýchlosť posúvača všeobecne a vypočítajte pre prípad, keď kľuka so zvislým smerom zviera uhol: a)15°; b) 30°; c) 45°; d) 60°; e) 90°.

[a) 102,4 cm/s; b) 197,9 cm/s; c) 279,9 cm/s; d) 342,8 cm/s; e) 395,8 cm/s]

13.15. Teleso harmonicky kmitá s amplitúdou 2 cm a jeho celková energia je $3 \cdot 10^{-7}$ J. Určite okamžitú výchylku, pri ktorej pôsobí na teleso sila $2{,}25 \cdot 10^{-5}$ N. [1,5 cm]

13.16. Na koniec pružiny v zvislej polohe zavesili teliesko, v dôsledku čoho sa táto predĺžila o 10 cm. Potom teliesko vychýlili v zvislom smere z rovnovážnej polohy a uvolnili. Vypočítajte periódu kmitov telieska. [0,628 s]

13.17.* **Z**istite pohyb hmotnej guľôčky pozdĺž priameho kanála prechádzajúceho stredom Zeme, keď vieme, že sila pôsobiaca na guľôčku vnútri zemskej gule je priamo úmerná vzdialenosti pohybujúceho sa bodu od stredu Zeme a smeruje do jej stredu. Guľôčka bola spustená do kanála bez počiatočnej rýchlosti. Treba určiť čas, za ktorý sa guľôčka dostane zo zemského povrchu do stredu Zeme, ako aj rýchlosť, ktorou prebehne stredom Zeme.

[1248 s; 7,9 $km.s^{-1}$]

13.18. Horizontálna doska koná harmonický pohyb vo vodorovnom smere s periódou 5 s. Teleso, ktoré leží na doske začne kĺzať, keď amplitúda kmitov dosiahne hodnotu x_0 = 0,5 m. Aký je koeficient trenia medzi závažím a doskou? [0,08]

13.19. Tenká skúmavka o priemere 1,5 cm , ktorá je čiastočne zaplnená pieskom, pláva v zvislej polohe na hladine vody. Aby sme zistili dĺžku ponorenej časti, udelíme skúmavke impulz v zvislom smere, takže začne v zvislom smere kmitať. Aká je hľadaná dĺžka, ak perióda uvedených kmitov je 0,8 s? (Vplyv tlmenia neuvažujte). [16 cm]

13.20. Môžu vo vode plávajúca drevená guľa a drevený kváder vykonávať harmonické kmity? Zdôvodnite svoju odpoveď! [guľa nie, vztlaková sila nie je priamo úmerná hĺbke ponorenia; kváder áno, vztlaková sila je priamo úmerná hĺbke ponorenia]

13.21. Kruhová doska, uložená v horizontálnej rovine, koná vo zvislom smere kmitavý pohyb s amplitúdou 0,75 m. Aká môže byť maximálna frekvencia kmitania dosky, aby predmet voľne uložený na doske sa od nej neoddelil? [0,575 s^{-1}]

13.22. Pružina má tuhosť 0,25 N/cm. Teleso akej hmotnosti musíme zavesiť na pružinu, aby konalo 25 kmitov za 1 minútu? [3,6 kg]

13.23. Na pružine visí miska váh (jej hmotnosť zanedbáme), na ktorú položíme teleso o hmotnosti 300 g. Pružina začne kmitať s amplitúdou 12 cm. Vypočítajte frekvenciu kmitov a periódu. [1,44 Hz; 0,694 s]

13.24. Teleso zavesené na pružine vykonáva za minútu 42 kmitov. Aké predĺženie má pružina pôsobením tohoto telesa v rovnovážnej polohe? [0,507 m]

13.25. V zvislej trubke vrhacieho mechanizmu je pružina, na ktorej je položená guľa. Po stlačení pružiny o 10 cm a uvoľnení vyletí guľa do výšky 2,3 m (meranej od polohy gule pred zaťažením pružiny). Do akej výšky vyletí guľa, ak pružinu mechanizmu s guľou stlačíme o 15 cm a uvoľníme? [5,25 m]

13.26. Aká je tuhosť pružinových (v počte 4) pier železničného vozňa, ktorého hmotnosť s nákladom je $5 \cdot 10^4$ kg, ak sa zistilo, že pri rýchlosti 12 $m.s^{-1}$ sa vozeň začne prudko hojdať vplyvom nárazov na spojoch koľajníc? Dĺžka koľajnice 12,8 m. Vplyv trenia zanedbajte. [$4{,}34 \cdot 10^5$ $N.m^{-1}$]

13.27. Kyvadlo je tvorené guľkou hmotnosti 20 g zavesenej na vlákne dĺžky 1m. Určite energiu guľôčky pri jej najväčšej výchylke 5°! Aká je najväčšia rýchlosť guľôčky? [$761 \cdot 10^{-6}$ J , 0,237 $m.s^{-1}$]

13.28. Kým jedno z dvoch matematických kyvadiel vykoná 50 kmitov, druhé vykoná 54 kmitov. Keď druhé kyvadlo predĺžime o 6 cm, tak v rovnakom čase vykoná tak isto 50 kmitov. Aké dlhé sú kyvadlá? [l_1 = 42,1 cm, l_2 = 36,1 cm]

13.29. O koľko percent sa skráti doba kmitu *T* matematického kyvadla, keď jeho dĺžku skrátime o 1/4? [o 13,4%]

13.30. Na strope vysokého sálu je zavesené na kovovej trubici osvetľovacie teleso. Pri pozornom sledovaní vidíme, že teleso pomaly kmitá. Dobu kyvu odhadneme na (3,0±0,5)s. Aká je dĺžka trubky vrátane chyby odhadu? Predpokladáme, že sústava kmitá ako tuhá tyč danej dĺžky. [(13±5)m]

13.31. Reverzné kyvadlo je tvorené tyčou s dvoma osami otáčania v nerovnakej vzdialenosti od ťažiska, pričom ťažisko je medzi nimi. Okolo týchto osí tyč kmitá s rovnakou periódou. Vzdialenosť osí určená meraním je (80,5±0,5) cm. V danom mieste bola zmeraná doba kmitu (1,800±0,002) s. Akú hodnotu má tiažové zrýchlenie v danom mieste vrátane chyby merania? [(9,81±0,06) ms^{-2}]

13.32. Priemer tenkého krúžku možno určiť i stopkami. Krúžok zavesíme na vodorovnú ostrú hranu, necháme ho kývať v rovine krúžku a meriame čas. Nameraná doba 100 kyvov je (85,0±0,5) s. Aký je priemer krúžku vrátane chyby merania, ak je tiažové zrýchlenie 9,81 ms^{-2}? [(718±8) mm]

13**.33.** Rovnorodá tyč vykonáva malé kmity vo vertikálnej rovine okolo vodorovnej osi, ktorá prechádza cez jej horný koniec. Vypočítajte periódu kmitov tejto tyče na

Zemi a na Mesiaci ak viete, že jej dĺžka je $20/\pi^2$ metrov. Hmotnosť Mesiaca uvažujte $7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg a jeho polomer 1737 km. [2,33 s; 5,7 s]

13.34. Akú dobu kmitu má 80 cm dlhá homogénna tyč, ktorá kýva ako fyzikálne kyvadlo okolo bodu A, ktorý sa nachádza 20 cm od horného konca? [1,37 s]

13.35. Kruhový kotúč, ktorý kýva vo svojej rovine okolo bodu A na obvode kotúča, má dobu kmitu 0,5 s. Aký je priemer kotúča? [8,3 cm]

13.36. Okolo svojho horného konca kývajúca homogénna tyč s hmotnosťou m má vo svojom ťažisku prídavnú hmotnosť m, ktorú považujeme za hmotný bod. Akú dĺžku má tyč, keď doba kmitu je 5 s? [10,65 m]

13.37.* Akú minimálnu dobu kmitu možno realizovať fyzikálnym kyvadlom, tvoreným obdĺžnikovou doskou s dĺžkou uhlopriečky 25 cm, ktorá kmitá v zvislej rovine okolo osi kolmej na plochu dosky? [0,76 s]

13.38. Na meranie momentu zotrvačnosti rotora použijeme torzné kyvadlo. Na dolný koniec zvislej torznej tyče s upevneným horným koncom pripevníme súoso valcový zotrvačník hmotnosti 50 kg o priemere 60 cm a nameriame periódu torzných kmitov 1,8 s. Potom namiesto zotrvačníka pripevníme súoso na dolný koniec tyče meraný rotor a určíme periódu kmitov 2,1 s. Aký je moment zotrvačnosti rotora vzhľadom na jeho os? [3,1 kg.m^2]

13.39. Oceľová gulička o priemere 12 mm, ktorá je zavesená na tenkom vlákne, kýva ako matematické kyvadlo s dobou kmitu 2 s. Pod kyvadlo umiestnime nádobu s kvapalinou, takže sa gulička bude pohybovať v tejto kvapaline. Aká musí byť viskozita kvapaliny, aby tlmenie kmitov kyvadla bolo kritické? (Predpokladáme, že sila odporu kvapaliny je daná Stokesovym vzťahom). [0,39 Pa s]

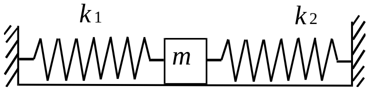
13.40. Aký je logaritmický dekrement tlmenia matematického kyvadla dĺžky 0,8 m, ak jeho počiatočná amplitúda 5^0 klesne po 5 minútach na hodnotu $0{,}5^0$? [0,0138]

13.41. Matematické kyvadlo dĺžky 0,5m stratilo v tlmiacom prostredí 99% svojej počiatočnej energie počas prvých 8 minút od začiatku pohybu. Vypočítajte logaritmický dekrement tlmenia! [$6{,}8 \cdot 10^{-3}$]

13.42. Logaritmický dekrement tlmenia je 0,02. Vypočítajte, koľkokrát sa zmenší amplitúda kmitov po 100 kmitoch hmotného bodu! [7,4 krát]

13.43. Kyvadlo začína kývať v tlmiacom prostredí. Amplitúda 10. kmitu je 8 cm a 20. kmitu 3 cm. Aká bola počiatočná amplitúda? [21,3 cm]

13.44. Závažie hmotnosti 0,5 kg je zavesené na pružine a ponorené v oleji. Na horný koniec pružiny pôsobí vonkajšia sila $F = F_0 \sin(\omega t)$, kde $F_0 = 0{,}98$ N. Tuhosť pružiny je 49 N.m^{-1} a koeficient odporu oleja je 0,5 kg.s^{-1}. Vypočítajte amplitúdu kmitov závažia pri rezonančnom kmitočte a amplitúdy týchto kmitov, ak kmitočet vonkajšej sily je dvojnásobok a potom polovica kmitočtu vlastných kmitov.
[0,5 %; 0,2 m; 0,027 m; 0,007 m]



Obr.61

13.45.* Kváder hmotnosti 0,2 kg ležiaci na ideálne hladkej vodorovnej ploche je pripojený prostredníctvom dvoch pružín k dvom stenám (pozri obr.61). Dĺžky nestlačených pružín sú 40 cm. V rovnovážnej polohe telesa pružiny nie sú natiahnuté ani stlačené. Tuhosti pružín sú k_1 = 20 N.m^{-1}, k_2 = 8,8 N.m^{-1}. a) Vypočítajte uhlovú frekvenciu, frekvenciu a amplitúdu kmitov kvádra, ak ho vychýlime z rovnovážnej polohy o 10 cm a pustíme! b) V okamihu prechodu kvádra cez rovnovážnu polohu necháme padnúť naň teliesko hmotnosti 38 g, ktoré sa naň prilepí. Vypočítajte novú uhlovú frekvenciu, frekvenciu kmitov a amplitúdu! c) Bude energia sústavy kváder + teliesko iná ako pôvodná energia kvádra? Vypočítajte rozdiel energií! [a) 12 s^{-1}; 1,9 s^{-1}; 10 cm; b) 11 s^{-1}; 1,75 s^{-1}; 9,17 cm; c) energia sústavy sa zmení; 2,29 J]

13.46. Nájdite amplitúdu výsledného harmonického pohybu, ktorý vznikne zložením dvoch jednosmerných kmitavých pohybov s rovnakou periódou, s amplitúdami 3 a 5 cm, keď rozdiel ich fáz je 60°C! [7 cm]

14 Vlny v pružnom prostredí. Akustika

1. Rovnice priestorovej vlny šíriacej sa rýchlosťou c môžeme vyjadriť pomocou periodických funkcií.

a) Jednorozmerná vlna:

$$u = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = A\sin(\omega t - kx),$$

kde A je amplitúda vlny, $c = \lambda f$ - rýchlosť šírenia sa kmitov, $\lambda = cT$ - dĺžka vlny, x - vzdialenosť od zdroja, $k = 2\pi / \lambda$ - uhlové vlnové číslo a T – perióda kmitov.

b) Rovinná vlna:

$$u = A\sin(\omega t - (\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r})),$$

kde $\boldsymbol{k}_0$ - dvojrozmerný uhlový vlnový vektor, $\boldsymbol{r}$ – polohový vektor kmitajúceho bodu (zdroj leží v počiatku súradníc)

c) Guľová vlna

$$u = \frac{A}{r}\sin(\omega t - (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}))$$

kde $\boldsymbol{k}$ je trojrozmerný uhlový vlnový vektor a $\boldsymbol{r}$ polohový vektor kmitajúceho bodu voči bodovému zdroju, ktorý leží v počiatku súradníc.

Vlny uvedené pod a), b) a c) sú špeciálnymi prípadmi riešenia diferenciálnej rovnice pre vlnenie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

kde $u = u(x,y,z,t)$.

2. Rozdiel fáz kmitania v dvoch rôznych bodoch x_1 a x_2 môžeme stanoviť zo vzťahu

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda}.$$

3. Sinusoidálna vlna bude mať maximum amplitúdy v bode, v ktorom bude splnená podmienka, že vzdialenosť Δ bodu od zdroja bude rovná

$$\Delta = 2m\frac{\lambda}{2}, \quad \text{kde} \quad m = 0,1,2...$$

4. Sinusoidálna vlna bude mať minimum amplitúdy v bode vo vzdialenosti Δ od zdroja, v ktorom bude splnená podmienka, že vzdialenosť Δ bodu od zdroja bude rovná

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad \text{kde} \quad m = 0,1,2,...$$

5. Rýchlosť zvukových vĺn v plynoch je daná vzorcom

$$c = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma\frac{kT}{m}} = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}}$$

kde γ je pomer molárnych tepiel pri stálom tlaku a stálom objeme, p_0 a ρ_0 – tlak a hustota plynu bez prítomnosti akustickej vlny, k – Boltzmannova konštanta, T – absolútna teplota, m – hmotnosť molekuly plynu a M – molárna hmotnosť.

6. Šíriaca sa zvuková vlna vyvoláva zmenu tlaku Δp, ktorú môžeme stanoviť zo vzťahu

$$\Delta p = \rho_0 c v \,,$$

kde v je hydrodynamická rýchlosť molekúl.
V plynoch a kvapalinách sa šíria len pozdĺžne vlny. Veličina $\rho_0 c$ sa volá akustický odpor.

7. Rýchlosť šírenia sa zvukových vĺn v kvapaline je daná vzťahom

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \kappa_T}} \,,$$

kde ρ je hustota kvapaliny a κ_T izotermická stlačiteľnosť, ktorá je rovná prevrátenej hodnote modulu objemovej pružnosti.

8. Rýchlosť šírenia sa zvukových vĺn v kmitajúcej strune je daná vzťahom

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{S\,\rho}}$$

kde p je napätie v strune, ρ - hustota struny, F – napínajúca strunu sila a S – plošný obsah prierezu struny. V strune sa šíri len priečne vlnenie.

9. V tuhých látkach sa môže šíriť tak pozdĺžne ako i priečne vlnenie. Pre rýchlosti šírenia vĺn platia nasledovné vzťahy

$$c_l = \sqrt{\frac{E\,(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}$$

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

kde c_l je rýchlosť šírenia sa pozdĺžnych vĺn, c_t – rýchlosť šírenia sa priečnych vĺn, E – modul pružnosti v ťahu, μ- Poissonovo číslo, ktoré je rovné pomeru relatívneho priečnemu zúženia ku relatívnemu predĺženiu a G je modul pružnosti v šmyku.

10. Intenzitu zvuku môžeme vyjadriť pomocou akustického odporu a hydrodynamickej rýchlosti vzťahom

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 c V^2,$$

kde V je amplitúda hydrodynamickej rýchlosti. Stredný akustický výkon zdroja v tvare piestu v trubici je daný vzťahom

$$W = I\,S = \frac{1}{2}\rho_0 c V^2 S \,,$$

kde S je obsah plochy piestu.

11. Uhlová frekvencia vlastných kmitov v uzavretej trubici dĺžky l je rovná

$$\omega_n = \frac{n\,\pi c}{l}\text{, kde n = 1,2,3,...}$$

Uhlová frekvencia vlastných kmitov otvorenej trubici dĺžky l je rovná

$$\omega_n = \frac{n\,\pi c}{2l}\text{, kde n = 1,2,3 ...}$$

12. Podľa Dopplerovho javu je frekvencia zvuku, ktorú prijíma pozorovateľ, daná vzťahom

$$f' = \frac{c+v}{c-u} f \text{ ,}$$

kde f je frekvencia zvuku, ktorý vysiela zdroj zvuku, u – rýchlosť zdroja zvuku, v – rýchlosť pozorovateľa a c – rýchlosť zvuku. Rýchlosť $v \rangle 0$, platí v prípade, keď pozorovateľ sa pohybuje smerom k zdroju zvuku, $u \rangle 0$ platí v prípade, keď zdroj zvuku sa pohybuje smerom k pozorovateľovi.

13. Hladina veličiny poľa L_F je definovaná vzťahom

$$L_\mathrm{F} = \ln(F/F_0),$$

kde F a F_0 reprezentujú dve amplitúdy rovnakej veličiny charakterizujúcej fyzikálne pole, pričom F_0 je vzťažná amplitúda. 1 Np je hladina veličiny poľa, keď $\ln(F/F_0)=1$. V praxi sa často používa decibel (dB), preto všeobecne platí

$$L_F = \ln(F/F_0)\mathrm{Np} = 2\lg(F/F_0)\mathrm{B} = 20\lg(F/F_0)\mathrm{dB}\ .$$

Hladina výkonovej veličiny je definovaná vzťahom

$$L_\mathrm{P} = \ln(P/P_0),$$

kde P a P_0 predstavujú dva výkony rovnakej fyzikálnej veličiny, pričom P_0 je vzťažný výkon. 1 Np je hladina veličiny výkonu, keď $1/2\ln(F/F_0)=1$. Hladinu výkonovej veličiny v decibeloch dostaneme následovne

$$L_p = \frac{1}{2}\ln(P/P_0)\mathrm{Np} = \lg(P/P_0)\mathrm{B} = 10\lg(P/P_0)\mathrm{dB}\ .$$

14. Pri odraze zvuku cez rozhranie dvoch prostredí platí, že uhol dopadu je rovný uhlu odrazu

$$i = i'\ .$$

Pri prechode zvukovej vlny cez hranicu dvoch prostredí platí zákon lomu, ktorý má tvar

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2},$$

kde i je uhol dopadu na rozhranie, r – uhol lomu a c_1 a c_2 rýchlosti zvukovej vlny v prvom a druhom prostredí, pri čom normála vlny odrazenej i normála vlny po lome zostáva v rovine dopadu.

15. Ak sa zvuková vlna šíri v prostredí, ktoré zvuk pohlcuje, amplitúda kmitov zvukovej vlny sa mení podľa vzťahu

$$A = A_0 e^{-\alpha x},$$

kde α je koeficient útlmu a x dráha, ktorú prešla zvuková vlna v prostredí.

Riešené príklady

14.1. Sinusoidálna rovinná vlna má amplitúdu 10 cm, rýchlosť šírenia 0,6 ms^{-1}, vlnovú dĺžku 6 cm a počiatočnú fázu 0. Po 5 sekundách jej čelo došlo do bodu P. V akej vzdialenosti od zdroja vlnenia bude čelo vlny v čase, keď v bode P okamžitá výchylka bude mať prvýkrát hodnotu 5 cm.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$A = 0{,}1$ m	$x = ?$
$c = 0{,}6$ ms^{-1}	
$\lambda = 0{,}06$ m	
$t_1 = 5$ s	
$u_1 = 0{,}05$ m	
$\varphi_0 = 0$	

Pretože ide o rovinnú vlnu, táto sa bude šíriť len v jednom smere, ktorý si označíme x. Pre výchylku rovinnej vlny platí vzťah

$$u = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right], \qquad (1)$$

kde u je okamžitá výchylka kmitajúceho bodu v čase t vo vzdialenosti x od zdroja vlnenia. Ak poznáme amplitúdu a okamžitú výchylku môžeme zistiť argument sínusu, ktorý musí byť taký, aby hodnota sínusu bola rovná pomeru okamžitej výchylky ku amplitúde kmitania. Z rovnice (1) vidíme, že ak chceme zistiť vzdialenosť, potrebujeme poznať čas a naopak, ak chceme zistiť čas, potrebujeme poznať vzdialenosť. Tieto dve veličiny sú spojené vzťahom

$$x = c\cdot t\ . \qquad (2)$$

Pomocou rovníc (1) a (2) dostaneme hľadanú vzdialenosť.

Riešenie:

V našom prípade je počiatočná fáza rovná 0. Preskúmame aká bude vzdialenosť bodu P od zdroja a aká bude fáza vlny v tomto bode. Počas 5s prejde čelo vlny dráhu $x_P = c\cdot t = 0{,}6\,\mathrm{m.s^{-1}}\cdot 5\mathrm{s} = 3\mathrm{m}$, t.j. 50λ. Dosadením do výrazu pre fázu, vidíme, že fáza bude rovná 0.

Rovnicu (1) si upravíme pomocou vzťahu $T = \dfrac{\lambda}{c}$ nasledovne

$$\frac{u}{A} = \sin\left[2\pi\left(\frac{c\cdot t_x}{\lambda}-\frac{x_P}{\lambda}\right)\right],$$

kde t_x je čas, kedy bude mať výchylka v bode P po prvýkrát veľkosť 5 cm

Dosadením za u a A dostaneme, že $\sin\left[2\pi\left(\dfrac{c\cdot t_x}{\lambda}-\dfrac{x_P}{\lambda}\right)\right] = 1/2$ a odtiaľto argument sínusu môže mať hodnoty ($\pi/6$; $5/6\pi$) + $2m\pi$, kde m = 1, 2, ... Keďže nás zaujíma čas t_x, kedy bude mať výchylka v bode P po prvýkrát veľkosť 5 cm, bude pre fázu kmitania platiť

$$2\pi\left(\frac{c\cdot t_x}{\lambda}-\frac{x_P}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\frac{c\cdot t_x}{\lambda}-\frac{x_P}{\lambda} = \frac{1}{12},$$

a odtiaľto, nakoľko pre bod P je $x_P = 50\lambda$, $t_x = \dfrac{50\lambda + \dfrac{\lambda}{12}}{c}$.

Dosadením za t do rovnice (2) dostaneme

$$x = c \cdot t_x = \left(50 + \frac{1}{12}\right) \cdot \lambda = \frac{301 \cdot 0{,}06\,\mathrm{m}}{6} = 3{,}005\mathrm{m} \ .$$

14.2. Aktívna dĺžka oceľovej husľovej struny o priemere 0.45 mm je 33 cm. Aká je sila napínajúca strunu, ak struna vydáva základný tón a^1 (komorné "a" o kmitočte 440 Hz)? Akou rýchlosťou sa vlnenie šíri pozdĺž struny? O koľko treba strunu celkovej dĺžky 50 cm predĺžiť, aby sa preladila na tón "ais" o kmitočte 466 Hz?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$d = 0{,}45$ mm	$F = ?$
$l = 0{,}33$ m	$c = ?$
$f_0 = 440$ s^{-1}	$\Delta l = ?$
$l_0 = 0{,}5$ m	
$f_1 = 466$ s^{-1}	
$E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ kg.m^{-1}.s^{-2}	
$\rho = 7{,}85 \cdot 10^{3}$ kg.m^{-3}	

V strune vznikne vlnenie so základnou frekvenciou zodpovedajúcou vlnovej dĺžke, ktorá je daná uzlami kmitajúcej struny. Pre takéto stojaté vlnenie bude platiť, že

$$l = \lambda/2 \ . \qquad (1)$$

Pre rýchlosť šírenia vlny v strune platia vzťahy

$$c = \sqrt{p/\rho} \qquad (2)$$

$$c = f \cdot \lambda \ , \qquad (3)$$

kde p je napätie v strune a ρ je hustota materiálu struny.

Z rovnice (1) poznáme vlnovú dĺžku, frekvencia je zadaná a potom z rovnice (3) môžeme vypočítať rýchlosť šírenia sa zvukovej vlny v strune. Napätie v strune je definované ako podiel napínacej sily a obsahu prierezu struny, $p = F/S$. Dosadením do rovnice (2) a porovnaním pravých strán rovníc (2) a (3) dostaneme rovnicu o jednej neznámej pre výpočet napínacej sily.

Aby sme zmenili frekvenciu pri nemennej dĺžke vlny, je potrebné zmeniť rýchlosť šírenia sa zvukovej vlny v strune (pozri rovnicu (3). Toto môžeme dosiahnuť zvýšením napínacej sily. V dôsledku toho sa ale bude struna deformovať (predlžovať). Predĺženie struny je spojené s napätím v strune Hookovým zákonom

$$p = E \cdot \varepsilon = E\left(\frac{l_1 - l_0}{l_0}\right) \qquad (4)$$

Označíme si hodnoty pre predĺženú strunu indexom 1 a môžeme na základe rovnice (3) napísať

$$c_1 = \sqrt{\frac{p_1}{\rho}} = f_1\lambda \qquad (5)$$

$$p_1 = E\,\frac{\Delta l}{l_0} \quad . \qquad (6)$$

Riešením rovníc (5) a (6) môžeme vypočítať veľkosť predĺženia Δl.

Riešenie:

Dosadením zadaných veličín do rovníc (2) a (3) dostaneme

$$2lf = \sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}} \ , \tag{7}$$

kde sme použili vzťah $p = \dfrac{4F}{\pi d^2}$.

Úpravou rovnice (7) dostaneme pre napínaciu silu

$$F = l^2 \cdot f^2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot d^2 \ .$$

Pre komorné „*a*“ má hodnotu

$$F = (0{,}33\,\mathrm{m})^2 \cdot (440\,\mathrm{s}^{-1})^2 \cdot 3{,}14 \cdot (4{,}5 \cdot 10^{-4}\mathrm{m})^2 \cdot 7{,}85 \cdot 10^3\ \mathrm{kg.m}^{-3} = 105\ \mathrm{N}.$$

Dosadením do rovnice (3) dostaneme

$$c = 2 \cdot f \cdot l = 2 \cdot 440\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}33\,\mathrm{m} = 290{,}4\ \mathrm{ms}^{-1}.$$

Použitím rovníc (4), (5) a (6) dostaneme vzťah

$$\sqrt{\frac{E\Delta l}{l_0 \rho}} = 2 f_1 l \ .$$

A po jeho úprave

$$\Delta l = 4 f_1^2 l^2 l_0 \rho E^{-1}$$

$$\Delta l = 4 \cdot (466\mathrm{s}^{-1})^2 \cdot (0{,}33\mathrm{m})^2 \cdot 0{,}5 \cdot 7{,}875 \cdot 10^3 \mathrm{kg.m}^{-3} \cdot (2{,}1.10^{11}\mathrm{kg.m}^{-1}.\mathrm{s}^2)^{-1} = 0{,}018\mathrm{mm}$$

14.3. Vzorka betónu v tvare tyče dĺžky 20 cm má objemovú hmotnosť $1{,}8 \cdot 10^3$ kg.m^{-3}. Ultrazvukový impulz pozdĺžnej polarizácie vyslaný pozdĺž vzorky sa po odraze vráti za čas 90 μs. Stanovte modul pružnosti vzorky v ťahu. Akú maximálnu intenzitu môže mať ultrazvuková vlna s kmitočtom 20 kHz, aby nebola prekročená hranica dovoleného namáhania v tlaku 0,2 MPa a aká tejto intenzite odpovedá amplitúda akustickej výchylky?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$l = 0{,}2$ m	$E = ?$
$\rho_0 = 1{,}8 \cdot 10^3$ kgm^{-3}	$I_{\mathrm{Max}} = ?$
$\Delta t = 90$ μs	
$f = 20 \cdot 10^3$ Hz	
$\sigma_{\max} = 0{,}2$ MPa	

Pre rýchlosť šírenia sa ultrazvukovej vlny pozdĺžnej polarizácie platí nasledovný vzťah

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}} \ , \tag{1}$$

kde E je modul pružnosti v ťahu, μ – Poissonovo číslo a ρ - hustota prostredia, v ktorom sa šíri vlna. V prípade vzorky z betónu môžeme uvažovať, že $\mu \cong 0$ a namiesto ρ môžeme použiť ρ_0, hustotu nedeformovanej vzorky. To znamená, že môžeme napísať

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \ , \tag{2}$$

odkiaľ $E = \rho_0 c^2$.

Rýchlosť ultrazvukovej vlny vo vzorke dostaneme vydelením dráhy $2l$ dobou Δt. Závislosť intenzity zvuku od hustoty ρ_0, od rýchlosti c a amplitúdy hydrodynamickej rýchlosti V je daná vzťahom

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 c V^2 \ . \tag{3}$$

Závislosť akustického tlaku od tých istých veličín je daná vzťahom

$$\Delta p = \rho_0 c v \ , \tag{4}$$

kde v je hydrodynamická rýchlosť.

Aby nebola prekročená hranica dovoleného namáhania σ_{Max}, nesmie túto hodnotu prekročiť maximálna hodnota akustického tlaku, ktorá vzhľadom na to, že v je harmonická funkcia, dá sa vyjadriť nasledovne

$$\sigma_{max} = \Delta p_{max} = \rho_0 c V \ . \tag{5}$$

Zo vzťahu (5) môžeme vypočítať amplitúdu hydrodynamickej rýchlosti a dosadením do rovnice (3) vypočítame maximálnu dovolenú intenzitu ultrazvukovej vlny.

Pre šíriacu sa ultrazvukovú vlnu platí vzťah

$$u_1 = A \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \ , \tag{6}$$

kde A je amplitúda akustickej výchylky. Hydrodynamickú rýchlosť dostaneme derivovaním rovnice (6)

$$v = \omega A \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \ . \tag{7}$$

Odtiaľto z amplitúdy hydrodynamickej rýchlosti $V = \omega A$ môžeme vypočítať amplitúdu akustickej výchylky

$$A = V/\omega \ . \tag{8}$$

Riešenie:

Do rovnice (2) dosadíme zadané hodnoty a dostávame

$$E = \rho_0\left(\frac{2l}{\Delta t}\right)^2 = \frac{1{,}8\cdot 10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 4(0{,}2\mathrm{m})^2}{\left(90\cdot 10^{-6}\mathrm{s}\right)^2} = 35{,}5\mathrm{GPa} \ .$$

Vyjadrením amplitúdy hydrodynamickej rýchlosti V z rovnice (5) a dosadením do rovnice (3) dostaneme pre maximálnu dovolenú intenzitu ultrazvukovej vlny

$$I = \frac{1}{2}\frac{(\sigma_{max})^2}{\rho_0 c} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma_{max})^2 \Delta t}{\rho_0 2l} \ .$$

Po dosadení príslušných hodnôt dostaneme

$$I = \frac{\left(0{,}2\cdot 10^6\,\mathrm{Pa}\right)^2\cdot 90\cdot 10^{-6}\mathrm{s}}{2\cdot 1{,}8\cdot 10^3\,\mathrm{kg}\cdot 2\cdot 0{,}2\mathrm{m}} = 2{,}5\,\mathrm{kW.m^{-2}} \ .$$

14.4. Voľným koncom napnutej gumenej hadice pohybujeme hore a dolu s frekvenciou 3 s^{-1}, pričom sa vytvára stojaté vlnenie so vzdialenosťou uzlov 1,80 m. Aká veľká je rýchlosť šírenia vĺn?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$f = 3\ s^{-1}$	$c = ?$
$d = 1,8$ m	

Budeme predpokladať, že vlnenie sa šíri v homogénnom prostredí a jeho rýchlosť sa nemení. Potom riešenie môžeme dostať dvomi spôsobmi.

a) Vyjdeme zo vzťahu pre veľkosť rýchlosti rovnomenného priamočiareho pohybu

$$v = d\,/\,t\ , \tag{1}$$

kde t je doba, za ktorú vlnenie prejde vzdialenosť medzi dvomi susednými uzlami. Táto doba je rovná polovici periódy, $t = \dfrac{1}{2}T$.

b) Tým, že poznáme vzdialenosť dvoch susedných uzlov , poznáme vlnovú dĺžku λ vlnenia. To nám umožňuje použiť vzťah pre rýchlosť vlnenia

$$v = \lambda \cdot f \tag{2}$$

pričom $\lambda = 2d$.

Riešenie:

a) Perióda kmitov je rovná prevrátenej hodnote frekvencie $T = 1\,/\,f$. Dosadením do rovnice (1) dostaneme

$$v = \frac{d}{\dfrac{1}{2f}} = 2df = 2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{s}^{-1} = 10{,}8\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

b) Dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$v = 2d \cdot f = 2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{s}^{-1} = 10{,}8\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

14.5. Na nástupišti stojí výpravca, okolo ktorého prechádzajú dve lokomotívy idúce v protismere. Strojvodcovia sa zdravia zvukovými signálmi o frekvencii 440 Hz. Posunovacia lokomotíva má rýchlosť 18 km/hod., rýchliková 72 km/hod. V momente, keď sa stretávajú, sú oproti výpravcovi. Vypočítajte a) Aké frekvencie zvuku počuje výpravca, keď sa lokomotívy približujú k nemu; b) aký skok vo frekvenciách bude pozorovať výpravca, keď lokomotívy prejdú okolo neho; c) akú frekvenciu zvuku počujú strojvodcovia, keď sa lokomotívy k sebe približujú; d) akú frekvenciu zvuku počujú strojvodcovia, keď sa lokomotívy od seba vzďaľujú? Rýchlosť zvuku vo vzduchu uvažujte 340 $m.s^{-1}$.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny	Hľadané veličiny
$f_0 = 440\ s^{-1}$	$f'_n = ?$	$f''_n = ?$
$v_n = 5\ m.s^{-1}$	$f'_r = ?$	$f''_r = ?$
$v_r = 20\ m.s^{-1}$	$\Delta f_n = ?$	$f'''_n = ?$
$c = 340\ m.s^{-1}$	$\Delta f_r = ?$	$f'''_r = ?$

Frekvencia, ktorú de prijímať pozorovateľ, bude závisieť tak od rýchlosti, s ktorou sa pohybuje zdroj, ako aj od rýchlosti pozorovateľa. Pre výslednú prijímanú frekvenciu platí vzťah

$$f = \frac{c+v}{c-u} f \quad , \tag{1}$$

kde c je rýchlosť zvuku vo vzduchu, v – rýchlosť zdroja zvuku a u – rýchlosť pozorovateľa. Rýchlosť $v > 0$ bude v prípade, že zdroj zvuku sa pohybuje k pozorovateľovi. V prípade, že zdroj sa vzďaľuje, budeme brať rýchlosť v so znamienkom „ - „. Podobne ak pozorovateľ sa pohybuje smerom ku zdroju budeme brať $u > 0$ a ak sa pohybuje smerom od zdroja bude $u < 0$.

Riešenie:

a)Výpravca stojí a to znamená, že $u = 0$. Lokomotívy sa približujú a teda $v > 0$. Označíme si indexami n a r frekvencie prijímané od nákladnej a rýchlikovej lokomotívy. Potom budeme mať

$$f_n' = \left(1 + \frac{v_n}{c}\right) f_0 \quad \text{a} \quad f_r' = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) f_0 .$$

Po dosadení hodnôt dostaneme

$$f_n' = \left(1 + \frac{5\mathrm{m.s^{-1}}}{340\mathrm{m.s^{-1}}}\right) \cdot 440\mathrm{s^{-1}} = 446{,}5\,\mathrm{Hz} ,$$

$$f_r' = \left(1 + \frac{20\mathrm{m.s^{-1}}}{340\mathrm{m.s^{-1}}}\right) \cdot 440\mathrm{s^{-1}} = 465{,}88\,\mathrm{Hz} .$$

b) Aby sme vypočítali skok vo frekvenciách musíme vypočítať frekvencie, ktoré bude prijímať výpravca, keď sa lokomotívy od neho vzďaľujú. Teraz budeme brať rýchlosť v so záporným znamienkom. Vypočítané frekvencie odpočítame od frekvencie vypočítaných v odstavci a)

$$\Delta f = \left[\left(1 + \frac{v}{c}\right) - \left(1 - \frac{v}{c}\right)\right] f_0 = \frac{2v}{c} f_0 \ .$$

Odtiaľto

$$\Delta f_n = \frac{2v_n}{c} f_0 = \frac{10\mathrm{m.s^{-1}}}{340\mathrm{m.s^{-1}}} 440\mathrm{s^{-1}} = 12{,}99\,\mathrm{Hz}$$

a

$$\Delta f_r = \frac{2v_r}{c} f_0 = \frac{40\mathrm{m.s^{-1}}}{340\mathrm{m.s^{-1}}} 440\mathrm{s^{-1}} = 51{,}76\,\mathrm{Hz} .$$

c) V tomto prípade budeme mať nenulové obe rýchlosti, tak zdroja ako aj prijímateľa. Aj zdroj aj prijímateľ smerujú k sebe. Znamená to, že obe rýchlosti budeme brať ako kladné veličiny. Preto môžeme napísať

$$f'' = \frac{c+v}{c-u} f_0 \ .$$

Strojvodca nákladnej lokomotívy počuje frekvenciu

$$f_n'' = \frac{340\mathrm{m.s^{-1}} + 20\mathrm{m.s^{-1}}}{340\mathrm{m.s^{-1}} - 5\mathrm{m.s^{-1}}} 440\,\mathrm{s^{-1}} = 472{,}8\,\mathrm{Hz} \ .$$

Strojvodca rýchlikovej lokomotívy počuje frekvencie

$$f_r'' = \frac{340\mathrm{m.s^{-1}} + 5\mathrm{m.s^{-1}}}{340\mathrm{m.s^{-1}} - 20\mathrm{m.s^{-1}}} 440\,\mathrm{s^{-1}} = 474{,}4\,\mathrm{Hz} \ .$$

d) Lokomotívy sa od seba vzďaľujú a teda budeme brať rýchlosti v a u ako záporné. Potom bude platiť

$$f''' = \frac{c - v}{c + u} f_0 \ .$$

Strojvodca nákladnej lokomotívy bude počuť frekvenciu

$$f_n''' = \frac{c - v_r}{c + u_n} f_0 = \frac{340\mathrm{m.s^{-1}} - 20\mathrm{m.s^{-1}}}{340\mathrm{m.s^{-1}} + 5\mathrm{m.s^{-1}}} 440\,\mathrm{s^{-1}} = 408{,}1\,\mathrm{Hz} \ .$$

Strojvodca rýchlikovej lokomotívy bude počuť frekvenciu

$$f_r''' - \frac{c - v_n}{c + u_r} f_0 = \frac{340\mathrm{m.s^{-1}} - 5\mathrm{m.s^{-1}}}{340\mathrm{m.s^{-1}} + 20\mathrm{m.s^{-1}}} 440\,\mathrm{s^{-1}} = 409{,}5\,\mathrm{Hz}$$

14. 6. Vypočítajte rozdiel hladín intenzity dvoch zvukových vĺn, ak intenzita jednej vlny je a) dvojnásobná; b) dvadsaťnásobná, ako intenzita druhej vlny.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
a) $I_1/I_2 = 2$	a) $\Delta L_I = ?$
b) $I_1/I_2 = 20$	b) $\Delta L_I = ?$

Intenzita zvuku má fyzikálny rozmer W.m^{-2}, čo znamená, že intenzita zvuku je fyzikálna veličina spojená s výkonom. Potom hladina intenzity zvuku vyjadrená v decibeloch (dB) je definovaná nasledovne

$$L_I = 10\lg(I / I_0), \tag{1}$$

kde I – je intenzita zvuku a I_0 – referenčná intenzita zvuku rovná 10^{-12} W.m^{-2}. Rozdiel hladín intenzity zvuku potom bude

$$\Delta L_I = L_{I_1} - L_{I_2} = 10\lg(I_1 / I_0) - 10\lg(I_2 / I_0) = 10\lg(I_1 / I_2). \tag{2}$$

Riešenie:

Rozdiely hladín intenzity dvoch zvukových vĺn dostaneme, ak dosadíme príslušné zadané veličiny do rovnice (2).

a) $\Delta L_I = 10\lg(I_1 / I_2) = 10\lg 2 = 3\,\mathrm{dB}$.

b) $\Delta L_I = 10\lg(I_1 / I_2) = 10\lg 20 = 13\,\mathrm{dB}$.

Neriešené príklady

14.7. Aký je fázový rozdiel dvoch kmitajúcich bodov rovinnej vlny, ak ich vzájomná vzdialenosť je 2 m a vlnová dĺžka je 0,5 m? [8 π]

14.8. Aká je výchylka bodu z rovnovážnej polohy v čase T/6, ak bod je vzdialený od zdroja vlnenia λ/12, keď amplitúda výchylky je 5 cm? Zdroj má v čase t = 0 nulovú výchylku. [2,5 cm]

14.9. Vypočítajte vlnovú dĺžku zvukovej vlny, ak rozdiel fáz kmitania dvoch bodov vzdialených od seba 0,025 m je rovný π/6. [0,3 m]

14.10. Vypočítajte dĺžku zvukovej vlny, ktorej perióda kmitov je 10^{-5} s a rýchlosť $3 \cdot 10^3$ m.s^{-1} . [$3 \cdot 10^{-2}$ m]

14.11. Akú frekvenciu má rovinná vlna, ktorá potrebuje 12 sekúnd na prekonanie dráhy, rovnej 7,5 vlnovým dĺžkam ? [0,625 s^{-1}]

14.12. Vypočítajte rýchlosť zvuku v dvojatomovom plyne, keď viete, že jeho hustota pri tlaku 0,1 MPa je 1,29 kg.m^{-3}. [330 m.s^{-1}]

14.13. Vypočítajte rýchlosť zvuku vo vzduchu pri teplotách a) -20°C; b) 0°C; c)20°C. [a) 318 $m.s^{-1}$; b) 330 $m.s^{-1}$; c) 343 $m.s^{-1}$]
14.14. Rýchlosť zvuku v plyne bola pri teplote 293 K 343 $m.s^{-1}$. Vypočítajte Poissonovu konštantu plynu, ak je jeho molárna hmotnosť 29 $gmol^{-1}$. [1,403]
14.15. V tabuľkách nájdeme pre rýchlosť zvuku vo vode hodnotu 1460 m/s pri teplote 20°C. Aký odpovedá tejto hodnote súčiniteľ objemovej stlačiteľnosti vody? [$4{,}7 \cdot 10^{-10}\ Pa^{-1}$]
14.17. Aké sú vlnové dĺžky zvuku, ktorý odpovedá hraniciam počuteľnosti (16 Hz, 20 kHz) pri teplote 30° C ? [22 m, 18 mm]
14.18. Oceľová tyč dĺžky 1,1 m je upevnená na jednom konci. Úderom kladiva vzbudíme v nej pozdĺžne vlnenie. Na akých frekvenciách sa môže táto tyč chvieť. [$1{,}18 \cdot 10^3 (2m+1) s^{-1}$; m = 0,1,2 . . .]
14.19. Vlastný kmitočet kmitania oceľovej struny je 4 Hz. Vypočítajte dĺžku struny, ak jej priemer je 0,5 mm a je napínaná silou 0,1 N. [1 m]
14.20. Ak poznáte medzu pevnosti ocele, vypočítajte najvyššiu frekvenciu, na ktorú je možné naladiť strunu dlhú1 m. [158 Hz]
14.21. Jeden koniec pružnej tyče je pripojený ku zdroju harmonických kmitov $u = A\sin\omega t$, druhý je upevnený. Stanovte charakter kmitov v ľubovoľnom bode tyče za predpokladu, že pri odraze vĺn od upevneného konca sa mení fáza o π. Vypočítajte podmienku minimálnej amplitúdy šíriacej sa vlny.
[$u = -2A\sin(\omega x/c)\cos\omega t$; $u = u_{\min}$ ak $\Delta = (2m+1)(\lambda/2)$]
14.22. Dokážte, že pre sinusoidálnu vlnu, ktorá sa šíri pozdĺž napnutej struny, bude potenciálna a kinetická energia vlny rovnaká.
14.23. Mosadzná tyč dĺžky 1 m je upevnená v strede a jej koniec s piestom je vsunutý do otvoreného rezonátora – Kundtovej trubice. Pozdĺžnym rozkmitaním tyče vznikne chvenie a v rezonátore sa utvorí stojaté vlnenie s vlnovou dĺžkou 20 cm. Určte rýchlosť zvuku v mosadznej tyči, ak rýchlosť zvuku vo vzduchu je 340 $m.s^{-1}$. [3400 $m.s^{-1}$]
14.24. Ako dlhá je otvorená organová píšťala, ktorá je naladená na komorné a (tón frekvencie 440 Hz) ? [39 cm]
14.25. Zdroj zvuku frekvencie 5 kHz je umiestnený pri otvorenom konci Kundtovej trubice. Na druhom konci je trubica uzavretá. Predpokladajme, že zvuk sa odráža od druhého konca bez zoslabenia. Dĺžka Kundtovej trubice je 1 m, rýchlosť zvuku vo vzduchu c=340 $m.s^{-1}$. Určite polohu uzlov vzniknutého stojatého vlnenia. Vypočítajte, aká je najmenšia vzdialenosť uzla od zdroja. [$(1 - n \cdot 0{,}034)$m; 0,017 m]
14.26. Uzavretá trubica dáva základný tón zodpovedajúci kmitočtu 130,5 Hz. Trubicu z jednej strany otvorili. Aký bude dávať základný tón? Aká je jej dĺžka? Rýchlosť zvuku vo vzduchu uvažujte 340 $m.s^{-1}$. [261 Hz; 1,30 m]
14.27. Dutinový akustický rezonátor vyplnený vzduchom je naladený na kmitočet 1 kHz pri teplote 20°C. Aké je relatívne rozladenie rezonátora, ak teplota vzduchu v rezonátore poklesne na –5°C ? Predpokladáme, že rozmery rezonátora sa nemenia. [4,4 %]
14.28. Nad valcovou trubicou vysokou 1m zvučí ladička, ktorej základná frekvencia je 340 Hz. Do trubice pomaly nalievame vodu. Pri ktorých polohách hladiny vody sa bude zosilovať zvuk v trubici? [0,25 m ; 0,75 m]
14.29. Pre aké najväčšie frekvencie sa dá použiť Kundtova metóda stanovenia rýchlosti zvuku, ak vezmeme do úvahy, že najmenšia vzdialenosť medzi uzlami, ktorú mô-

žeme ešte rozlíšiť je ≅ 4 mm? Rýchlosť zvuku vo vzduchu uvažujte 340 $m.s^{-1}$. [≅ 43 kHz]

14.30. Youngov modul pružnosti v ťahu a Poissonovo číslo ocele zisťovali pomocou merania rýchlosti ultrazvukovej vlny. Ak vyslali pozdĺžnu vlnu, vrátila sa odozva za 0,3448 μs. Ak vyslali priečnu vlnu, vrátila sa odozva za 0,6452 μs. Vypočítajte Youngov modul pružnosti a Poissonovo číslo pre túto oceľ, ak vzorka ocele mala dĺžku 2 cm a hustota ocele bola $8 \cdot 10^3$ $kg.m^{-3}$. [$2 \cdot 10^{11}$ Pa, 0,3]

14.31. Vo vzdialenosti 0,5 m od bodového zdroja zvuku (reproduktora) je hladina hlasitosti zvuku 80 dB. Aký je jej pokles, ak z tejto vzdialenosti prejdeme do vzdialenosti 10 m od zdroja? [26 dB]

14.32.* Oceľovou tyčou kruhového prierezu sa šíri pozdĺžne vlnenie o frekvencii 50 Hz a amplitúde 0,1 mm. Priemer tyče je 1 cm. Vypočítajte strednú hodnotu intenzity vlnenia v ľubovoľnom priereze tyče a tok intenzity vlnenia (strednú hodnotu výkonu) prechádzajúceho cez prierez tyče. [$1{,}997 \cdot 10^4$ $W.m^{-2}$; 1,57 W]

14.33. Intenzita zvuku je rovná 10^{-2} $W.m^{-2}$. Vypočítajte a) hladinu intenzity zvuku; b) amplitúdu tlaku zvukovej vlny. [a) 100 dB; b) 2 Pa]

14.34. Na stanici stojí lokomotíva a jej siréna vysiela tón s frekvenciou 10^3 Hz. Okolo prechádza rýchlik, ktorý sa pohybuje konštantnou rýchlosťou 20 $m.s^{-1}$. Akú absolútnu výšku tónu bude počuť cestujúci pri otvorenom okne rýchlika, keď sa rýchlik a) približuje k lokomotíve; b) vzďaľuje od lokomotívy? Rýchlosť zvuku vo vzduchu je 340 $m.s^{-1}$. [1060 Hz, 940 Hz]

14.35.* Zdroj zvuku, ktorého vlastný kmitočet je 1,8 kHz, sa rovnomerne pohybuje po priamke vzdialenej 250 m od nepohyblivého pozorovateľa. Rýchlosť zdroja je rovná 0,8 rýchlosti zvuku. Vypočítajte a) kmitočet prijímaný pozorovateľom v okamžiku, keď zdroj je oproti pozorovateľovi; b) vzdialenosť medzi zdrojom a pozorovateľom, keď pozorovateľ prijíma vlastnú frekvenciu zdroja. [2,95 kHz; 320 m]

14.36. Netopier letí kolmo na stenu rýchlosťou 6 $m.s^{-1}$ a pri tom vysiela ultrazvuk o frekvencii 45 kHz. Aké frekvencie počuje netopier? Rýchlosť zvuku uvažujte 340 $m.s^{-1}$. [45 kHz; 46,6 kHz]

14.37. Vypočítajte relatívny index lomu zvukových vĺn na rozhraní vzduch – sklo. Youngov modul pružnosti v ťahu pre sklo uvažujte $6{,}9 \cdot 10^{10}$ Pa , hustotu skla $2{,}6 \cdot 10^3$ $kg.m^{-3}$ a rýchlosť zvuku vo vzduchu 340 $m.s^{-1}$. [0,067]

14.38. Aký môže byť najväčší uhol dopadu vlnenia, ak relatívny index lomu je 0,5, aby sa lomené vlnenie ešte dostalo do druhého prostredia? [30°]

14.39. Pod akým uhlom meraným od hladiny musí dopadnúť zvuk na hladinu vody, aby neprenikol do vody v dôsledku úplného odrazu od hladiny? [< 77°]

14.40. Aká vrstva vody zoslabí intenzitu ultrazvuku frekvencie 100 kHz na jednu desatinu, keď vieme, že vrstva hrúbky 1400 m ju zoslabí na polovicu ? [4651 m]

Hodnoty fyzikálnych konštánt

Konštanta a jej značka		Hodnota
svetelný rok	l.y.	$9{,}460\,730 \cdot 10^{15}$ m
astronomická jednotka	AU	$1{,}495\,978\,7 \cdot 10^{11}$ m
parsec	pc	$30{,}856\,78 \cdot 10^{15}$ m
normálne zrýchlenie	g_n	9,806 65 m/s^2 (presne)
gravitačná konštanta	G	$(6{,}672\,59 \pm 0{,}000\,85) \cdot 10^{-11}$ $N.m^2/kg$
permitivita vákua	$\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2)$	$10^7/(4\pi \cdot 299\,792\,458^2)$ (presne) = =$8{,}854\,188 \cdot 10^{-12}$ F/m
permeabilita vákua	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (presne)
rýchlosť svetla	c_0	299 792 458 m/s (presne)
Planckova konštanta	h	$(6{,}626\,075\,5 \pm 0{,}000\,004\,0) \cdot 10^{-34}$ J.s
$h/2\pi$		$(1{,}054\,572\,66 \pm 0{,}000\,000\,63) \cdot 10^{-34}$ J.s
Stefanova-Boltzmannova konšt.	σ	$(5{,}670\,51 \pm 0{,}000\,19) \cdot 10^{-8}$ $W/(m^2.K)$
Boltzmannova konštanta	k	$(1{,}380\,658$ x $0{,}000\,012) \cdot 10^{-23}$ J/K
Avogadrova konštanta	N_A	$(6{,}022\,136\,7 \pm 0{,}000\,006\,6) \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
molárny objem ideál. plynu (pri 273,15 K a 101,325 kPa)	V_m	$(0{,}0022\,414\,10 \pm 0{,}000\,000\,19)$ m^3/mol
molárna plynová konštanta	R	$8{,}314\,510 \pm 0{,}000\,070$ J/(mol . K)
Faradayova konštanta	F	$(9{,}648\,530\,9 \pm 0{,}000\,002\,9) \cdot 10^4$ C/mol
elementárny elektr. náboj	e	$+(1{,}602\,177\,33 \pm 0{,}000\,000\,49) \cdot 10^{-19}$ C
atómová jednotka hmotnosti	u	$(1{,}660\,540\,2 \pm 0{,}000\,001\,0) \cdot 10^{-27}$ kg
hmotnosť elektrónu	m_e	$(9{,}109\,389\,7 \pm 0{,}000\,005\,4) \cdot 10^{-31}$ kg
hmotnosť protónu	m_p	$(1{,}672\,623\,1 \pm 0{,}000\,001\,0) \cdot 10^{-27}$ kg
hmotnosť neutrónu	m_n	$(1{,}674\,928\,6 \pm 0{,}000\,001\,0) \cdot 10^{-27}$ kg

Tabuľky

TABUĽKA 1- Objemová hmotnosť

Tuhá látka	$kg.m^{-3}$	Tuhá látka	$kg.m^{-3}$
Hliník	$2{,}7 \cdot 10^3$	Nikel	$8{,}8 \cdot 10^3$
Ľad	$0{,}92 \cdot 10^3$	Olovo	$11{,}3 \cdot 10^3$
Meď	$8{,}9 \cdot 10^3$	Sklo	$2{,}5 \cdot 10^3$
Mosadz	$8{,}5 \cdot 10^3$	Železo	$7{,}8 \cdot 10^3$
Kvapalina	$kg.m^{-3}$	Kvapalina	$kg.m^{-3}$
Benzín	$0{,}700 \cdot 10^3$	Ortuť	$13{,}6 \cdot 10^3$
Lieh	$0{,}79 \cdot 10^3$	Petrolej	$0{,}9 \cdot 10^3$
Morská voda	$1{,}03 \cdot 10^3$	Voda	$1{,}0 \cdot 10^3$
Plyny (za normálnych podmienok – - pri teplote 0°C a pri tlaku 101,325 kPa)	$kg.m^{-3}$	Plyn	$kg.m^{-3}$
Dusík Hélium Kysličník uhličitý	1,251 0,178 1,977	Kyslík Vodík Vzduch	1,428 0,0899 1,293

TABUĽKA 2 –Hmotnostné tepelné kapacity

Látky tuhé a kvapalné (c)	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
Hliník	900
Ľad	2090
Liatina	544
Meď	383
Mosadz	389
Olej	(priemerná hodnota) 1674
Olovo	134
Ortuť	139
Voda	4186
Železo	460

TABUĽKA 3 Teplota (t) a hmotnostné teplá topenia (l_l) niektorých látok pri tlaku 0,1 MPa

Látka	°C	J.kg^{-1}
Hliník	658,0	$393 \cdot 10^3$
Ľad	0,0	$333,6 \cdot 10^3$
Olovo	327,0	$20,9 \cdot 10^3$
Ortuť	-38,9	$11,7 \cdot 10^3$
Hmotnostné skupenské teplo varu vody pri teplote 100°C a tlaku 0,1 MPa je $2256 \cdot 10^6$ J.kg^{-1}		

TABUĽKA 4 Povrchové napätie (σ)

Látka	N.m^{-1}	Látka	N.m^{-1}
Ortuť	0,49	Voda pri 20°C	0,07
Lieh	0,022	Terpentín	0,027

TABUĽKA 5 Súčinitele tepelnej vodivosti (λ)

Látka	J.K^{-1}.m^{-1}.s^{-1}	Látka	J.K^{-1}.m^{-1}.h^{-1}
Hliník	209,3	Azbest	753,5
Meď	370,0	Omietka	2 512,0
Železo	58,6	Kotolný kameň	8 372,0
		Sadze	293,0
		Tehla	1 883,7

TABUĽKA 6 Moduly pružnosti v ťahu E, Poissonovo číslo a medza pevnosti niektorých látok σ_p

Látka	Pa	1	Pa
Hliník	$7,2 \cdot 10^{10}$	0,3	$6 \cdot 10^7$
Meď	$11,3 \cdot 10^{10}$	0,33	$2 \cdot 10^8$
Oceľ	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,28	$7,2 \cdot 10^8$

TABUĽKA 7   Koeficienty teplotnej rozťažnosti

Dĺžková rozťažnosť (α_l)			
Látka	K^{-1}	Látka	K^{-1}
Hliník	$23 \cdot 10^{-6}$	Sklo	$10 \cdot 10^{-6}$
Meď	$17 \cdot 10^{-6}$	Zinok	$29 \cdot 10^{-6}$
Mosadz	$19 \cdot 10^{-6}$	Železo	$12 \cdot 10^{-6}$
Objemová rozťažnosť (α_V)			
Látka	K^{-1}	Látka	K^{-1}
Lieh	$110 \cdot 10^{-5}$	Ortuť	$18{,}2 \cdot 10^{-5}$

Literatúra

1) Baník, I., Baník, J., Zámečník, J.: Fyzika netradične – mechanika. ALFA Bratislava 1990.
2) Bogdan, V.I., Bondar, V.A., Kuľbickij, D. I., Jakovenko, V.A: Praktikum po metodike rešenija fyzičeskich zadač. Vyššejšaja škola, Minsk, 1983.
3) Bušovský, L. a kol.: Zbierka príkladov a úloh z fyziky I, 2. vydanie.: Edičné stredisko SVŠT, Bratislava, 1984.
4) Butikov, E.I., Bykov, A.A., Kondratjev, A.S.: Fizika v zadačach. Izdateľstvo Leningradskogo universita, Leningrad, 1974.
5) Dillinger, J. a kol.: Príklady z fyziky pre prijímacie skúšky, 2. vydanie. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 1994.
6) Fejnmanovskije lekcie po Fizike – Zadači i upražnenia s otvetami a rešenijami. Mir, Moskva, 1969.
7) Ginzburg, V.L., Levin, L.M., Rabinovič, M.S., Sivuchin, D.V., Četveriková, E.S.: Sbírka příkladů z fyziky II, ČSAV Praha, 1963.
8) Guriev, L.G., Kostnev, A.V., Kucenko, A.N., Latjev, V.V., Minkova, S.E., Protopopov, R.V., Rublev, Ju.V., Tiščenko, V.V., Šepetucha, M.I.: Sborník zadač po obščemu kursu fiziki. Vyššaja škola, Moskva, 1966.
9) Hajko Vl. a kol.: Fyzika v príkladoch, 6. vydanie. ALFA, Bratislava, 1988
10) Hanzelík, F. a kol.: Zbierka riešených úloh z fyziky.ALFA, Bratislava, 1989.
11) Linder, H.: Riešené úlohy z fyziky, Alfa Bratislava, 1973.
12) Novodvorskaja, Je. M., Dmitriev, E.M.: Metodika provedenija upražnenij po fizike vo VTUZe. Vyššaja škola, Moskva, 1981.
13) Obrazovannyj učenyj: Nauka, Moskva, 1979.
14) Strelkov, S.P., Elcin, I.A., Jakovlev, I. A.: Sbírka příkladů z fyziky I, ČSAV Praha, 1953.
15) Šťavina, C. a kol.: Fyzika – príklady a úlohy, 2. vydanie. ALFA, Bratislava, 1989.
16) Tarasov, L.V., Tarasova, A.N.: Voprosy i zadači po fizike, Vyššaja škola, Moskva, 1975.
17) Voľkenštejn V.S.: Sborník zadač po obščemu kursu fiziki, Nauka, Moskva, 1976.