

VOJENSKÁ AKADEMIA V LIPTOVSKOM MIKULÁŠI

Katedra fyziky
Fakulta logistiky

RNDr. Alena Kučerová
RNDr. Jarmila Müllerová, CSc.

FYZIKA V PRÍKLADOCH

Liptovský Mikuláš

2002

© RNDr. Alena Kučerová
RNDr. Jarmila Müllerová, CSc.
2002

Recenzent: RNDr. Alojz Bajči, CSc.

Za odbornú a jazykovú úpravu tohto učebného textu zodpovedajú autori. Rukopis vo vydavateľstve neprešiel redakčnou a jazykovou úpravou.

ISBN 80-8040-183-7

OBSAH	3
PREDSLOV	5
MATEMATICKÝ APARÁT FYZIKY	7
Základy vektorového počtu	7
Operátory	9
Úlohy	11
MECHANIKA	12
Kinematika hmotného bodu	12
Riešené príklady	15
Úlohy	18
Dynamika hmotného bodu	19
Riešené príklady	21
Úlohy	24
Mechanika sústavy hmotných bodov a telesa	25
Riešené príklady	27
Úlohy	32
Tepelný pohyb	35
Riešené príklady	38
Úlohy	42
Mechanika ideálnych tekutín	44
Riešené príklady	46
Úlohy	49
FYZIKÁLNE POLIA	51
Gravitačné pole	51
Riešené príklady	52
Úlohy	55
Pohyb telies v gravitačnom poli	56
Riešené príklady	58
Úlohy	60
Elektrostatické pole	61
Riešené príklady	63
Úlohy	67
Elektrický prúd	69
Riešené príklady	71
Úlohy	75
Magnetické pole	77
Riešené príklady	79
Úlohy	83
Elektromagnetické pole	85
Riešené príklady	87
Úlohy	92

KMITY A VLNY	94
Kmitavý pohyb	94
Riešené príklady	95
Úlohy	99
Vlnenie	100
Riešené príklady	102
Úlohy	104
Elektromagnetické vlnenie	106
Riešené príklady	107
Úlohy	109
Geometrická optika	111
Riešené príklady	113
Úlohy	116
Vlnová optika	118
Riešené príklady	119
Úlohy	122
RELATIVISTICKÁ FYZIKA	124
Riešené príklady	125
Úlohy	127
KVANTOVÁ FYZIKA	129
Korpuskulárne vlastnosti elektromagnetických vln	129
Riešené príklady	130
Úlohy	132
Vlnové vlastnosti častíc	133
Riešené príklady	134
Úlohy	137
Schrödingerova formulácia kvantovej mechaniky	138
Riešené príklady	140
Úlohy	143
ATÓMOVÁ A JADROVÁ FYZIKA	145
Elektrónový obal atómu	145
Riešené príklady	146
Úlohy	150
Atómové jadro	151
Riešené príklady	152
Úlohy	154
Rádioaktivita	155
Riešené príklady	156
Úlohy	158
DODATKY	160
LITERATÚRA	162

PREDSLOV

Pri spracovaní týchto učebných textov sme vychádzali z dvoch základných cieľov:

1. poskytnúť študentom všetkých fakúlt Vojenskej akadémie príklady a úlohy na precvičenie učiva,
2. účinne pomôcť študentom pri príprave na semestrálnu skúšku z fyziky.

Učebné texty obsahujú sedem základných tematických celkov z fyziky: Matematický aparát fyziky, Mechanika, Fyzikálne polia, Kmity a vlny, Relativistická fyzika, Kvantová fyzika a Atómová fyzika. Tieto celky sú rozdelené na konkrétnejšie fyzikálne oblasti koncipované v troch častiach:

- teoretický úvod so stručným prehľadom základných vzťahov a zákonov z danej problematiky, ktorý uľahčuje riešenie príkladov a podporuje individuálnu prácu študentov,
- riešené príklady, ktoré ukazujú vzory správneho metodického postupu riešenia,
- neriešené úlohy, pri ktorých je na konci zadania vždy uvedený výsledok riešenia, čo umožňuje kontrolu správnosti postupu a výpočtu.

Výber, náročnosť a rozsah príkladov a úloh sme podriadili cieľom, ktoré sme si dali na začiatku spracovávanía učebných textov. Všetky príklady a úlohy sú zostavené tak, aby sa mohli využiť na cvičeniach z fyziky, na písomných kontrolných prácach, ale tiež na precvičení, preverení a upevnení teoretických fyzikálnych záverov vo fáze prípravy študentov na výučbu fyziky.

Našou snahou bolo vytvoriť v knižničnom fonde zbierku fyzikálnych príkladov a úloh pre študentov, ktorí v rámci svojho štúdia majú zaradený predmet fyzika. Rozsah a výber príkladov a úloh bol vo veľkej miere prispôsobený teoretickému rozsahu učiva fyziky na Vojenskej akadémii. Myslíme si, že tak pomôžeme v systematickej a kvalitnejšej príprave študentov na vyučovanie a skúšky z fyziky.

Zbierka príkladov z fyziky dostupná študentom, prípadne ďalším prezieravým záujemcom, navyše plní aj ďalšie ciele. Umožňuje prakticky precvičiť poznatky, z ktorých mnohé sú súčasťou všeobecného vzdelania kultúrneho, tým skôr technicky vzdelaného človeka. Fyzikálne úlohy sú navyše vhodnou metódou praktického precvičenia mnohých matematických postupov a algoritmov v podobe primeranej technickej aj každodennej praxi. Analógie precvičených matematicko-fyzikálnych postupov sa inžinierom určite zídu pri riešení praktických inžinierskych úloh.

Zbierka bola zostavená z príkladov, ktoré sme vybrali z dostupných zbierok príkladov určených pre štúdium fyziky na vysokých školách technického zamerania a z ďalších vytvorených príkladov, ktoré sa nám osvedčili na katedre po dlhoročných skúsenostiach s výučbou fyziky. Sme si vedomé, že zbierka môže obsahovať chyby a nepresnosti, a budeme vďačné čitateľom a používateľom zbierky, ktorí nám ich prepáčia a ktorí nás na ne upozornia.

MATEMATICKÝ APARÁT FYZIKY

ZÁKLADY VEKTOROVÉHO POČTU

Skalár je fyzikálna veličina, ktorá je úplne určená jedným údajom, a to číslom vyjadrujúcim jej veľkosť v príslušných jednotkách (napr. hmotnosť m , čas t , elektrický prúd I , moment zotrvačnosti J , atď.).

Vektor je fyzikálna veličina, ktorá je úplne určená dvoma súbormi údajov. Jeden z nich sa vzťahuje na veľkosť, druhý na smer (napr. rýchlosť $\vec{v}$, uhlové zrýchlenie $\vec{\varepsilon}$, sila $\vec{F}$, intenzita magnetického poľa $\vec{H}$, atď.).

Absolútna hodnota vektora je kladné číslo určujúce jeho hodnotu v príslušných jednotkách. Označujeme ju znakmi $|\vec{v}|$, $|\vec{F}|$ alebo v , F , atď.

Smer vektora je určený **jednotkovým vektorom**. Je to vektor rovnobežný s daným vektorom s absolútnou hodnotou = 1. Označujeme ich $\vec{e}_0$, $\vec{n}_0$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, a pod.

Vektory považujeme za **totožné**, keď majú rovnaké absolútne hodnoty aj smery. Znamienkom $(-)$ pred vektorom (napr. $-\vec{v}$) označujeme, že daný vektor má rovnakú absolútnu hodnotu ako vektor $\vec{v}$, ale opačný smer.

Každý vektor môžeme vyjadriť ako skalárny násobok jednotkového vektora v smere daného vektora a absolútnej hodnoty tohto vektora

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0 = a\vec{a}_0$$

Rozklad vektora na zložky:

Najčastejšie rozkladáme vektor na zložky do dvoch alebo troch navzájom kolmých smerov predstavujúcich napr. súradnicové osi pravouhlej súradnicovej sústavy. Ak v smere súradnicových osí (x,y,z) sú orientované jednotkové vektory $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pre rozklad vektora $\vec{F}$ platí

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$
$$|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Ak označíme uhly, ktoré zvierá vektor $\vec{F}$ so smermi jednotkových vektorov $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, postupne symbolmi (α, β, γ) , potom platí $\cos \alpha = \frac{F_x}{F}$, $\cos \beta = \frac{F_y}{F}$, $\cos \gamma = \frac{F_z}{F}$.

Základné pravidlá vektorovej algebry:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ α, β sú skaláry
5. $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a} = (\alpha + \beta)\vec{a}$

6. $\alpha \vec{a} + \alpha \vec{b} = \alpha(\vec{a} + \vec{b})$
7. $0\vec{a} = \alpha\vec{0} = \vec{0}$
8. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Skalárny súčin dvoch vektorov $\vec{a}, \vec{b}$ (α je uhol, ktorý zvierajú vektory $\vec{a}, \vec{b}$)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = ab \cos \alpha$$

Výsledkom skalárneho súčinu je skalár (veľkosť, číslo).

Vlastnosti skalárneho súčinu:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$ platí, ak vektory $\vec{a}, \vec{b}$ sú navzájom rovnobežné ($\cos 0 = 1$)
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ platí, ak vektory $\vec{a}, \vec{b}$ sú navzájom kolmé ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$)
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$
5. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
6. $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ α je skalár
7. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ ($\cos 0 = 1$)
8. $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$)
9. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Vektorový súčin dvoch vektorov $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$|\vec{c}| = c = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = ab \sin \alpha$$

Výsledný vektor $\vec{c}$ je kolmý na rovinu vektorov $\vec{a}, \vec{b}$ a je orientovaný na tú stranu, z ktorej sa stotožnenie prvého vektora s druhým na kratšej ceste javí proti pohybu hodinových ručičiek (smer pohybu pravotočivej skrútky).

Vlastnosti vektorového súčinu:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ neplatí komutatívny zákon
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ platí, ak vektory $\vec{a}, \vec{b}$ zvierajú navzájom uhol $\alpha = 0$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
4. $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$
5. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ dvojnásobný vektorový súčin
6. $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i} \times \vec{k}| = |\vec{j} \times \vec{k}| = 1$ ($\sin \frac{\pi}{2} = 1$)
7. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ ($\sin 0 = 0$)

$$8. \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

OPERÁTORY

Operátor je znak alebo súbor znakov, ktoré definujú určitý predpis úkonu (operácie) s príslušnou veličinou. V užšom slova zmysle operátor priradzuje funkcii funkciu podľa dohodnutého predpisu. Praktický význam majú operátory poľa a kvantovomechanické operátory.

1. Operátory poľa:

Hamiltonov operátor
(operátor nabla):

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Gradient skalárnej funkcie a :

$$\text{grad } a = \nabla a = \frac{\partial a}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{k}$$

Gradient vektorovej funkcie $\vec{v}$:

$$\text{grad } \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \vec{k}$$

Divergencia vektorovej funkcie $\vec{v}$:

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Rotácia vektorovej funkcie $\vec{v}$:

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Laplaceov operátor:

$$\Delta \equiv \text{div grad} = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Pravidlá pre počítanie s operátormi:

1. $\text{grad } c = \vec{0}$ $c = \text{konšt.}$
2. $\text{grad}(cV) = c \text{ grad } V$ $V = V(x, y, z)$ je skalárna funkcia
3. $\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \text{grad } \vec{b} + \vec{b} \cdot \text{grad } \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot } \vec{a}$
4. $\text{div } \vec{c} = 0$ $\vec{c}$ je konštantný vektor
5. $\text{div}(c\vec{a}) = c \text{ div } \vec{a}$
6. $\text{div}(\vec{a}\vec{b}) = a \text{ div } \vec{b} + \vec{b} \cdot \text{grad } a$
7. $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b}$
8. $\text{rot}(\vec{c}) = \vec{0}$ $\vec{c}$ je konštantný vektor
9. $\text{rot}(c\vec{a}) = c \text{ rot } \vec{a}$

10. $\text{rot}(\vec{a}\vec{b}) = (\text{grad } a) \times \vec{b} + a \text{rot } \vec{b}$
11. $\text{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\text{grad } \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{b} \text{div } \vec{a} + \vec{a} \text{div } \vec{b} - (\text{grad } \vec{b}) \cdot \vec{a}$
12. $\text{div rot } \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\nabla \times \nabla) = 0$
13. $\text{rot grad } a = \nabla \times \nabla a = 0$

Gaussova - Ostrogradského veta vyjadruje, že plošný integrál vektora $\vec{v}$ cez uzavretú plochu S sa rovná objemovému integrálu divergencie vektora $\vec{v}$ cez objem V ohraničený touto plochou.

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{v} dV$$

Stokesova veta hovorí, že krivkový integrál vektora $\vec{v}$ cez uzavretú krivku K sa rovná plošnému integrálu rotácie vektora $\vec{v}$ cez ľubovoľnú plochu, ohraničenú krivkou K .

$$\oint_K \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

2. Kvantovomechanické operátory:

Operátor súradnice (polohového vektora) alebo každej funkcie súradníc je s nimi totožný

$$\hat{x} \equiv x \quad \hat{\vec{r}} \equiv \vec{r}$$

Operátor potenciálnej energie:

$$\hat{U}(x, y, z) \equiv U(x, y, z)$$

Operátor kinetickej energie:

$$\hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

Operátor hybnosti:

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Operátor momentu hybnosti:

$$\hat{\vec{b}} = -\vec{r} \times i\hbar \nabla$$

Operátor celkovej mechanickej energie (hamiltonián):

$$\hat{H} = \hat{E}_k + \hat{U}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \hat{U}$$

Operátory v kvantovej mechanike sú Hermitove operátory, pretože sa vyznačujú lineárnosťou a samozdruženosťou.

Operátor $\hat{L}$ je lineárny, keď pre ľubovoľné dve funkcie u_1 a u_2 platí

$$\hat{L}(u_1 + u_2) = \hat{L}u_1 + \hat{L}u_2$$

Operátor $\hat{L}$ je samozdružený, ak pre dve kvadraticky integrovateľné funkcie u_1, u_2 platí

$$\int u_1^* \hat{L}u_2 dV = \int u_2 \hat{L}^* u_1^* dV$$

Hviezdičkou označené veličiny (operátory) sa nazývajú konjugované a z pôvodných veličín (operátorov) sa získavajú zamenou $i \rightarrow -i$, kde i je imaginárna jednotka.

Dva operátory $\hat{L}_1, \hat{L}_2$ navzájom komutujú, keď platí $\hat{L}_1 \hat{L}_2 - \hat{L}_2 \hat{L}_1 = 0$, a nekomutujú, keď platí $\hat{L}_1 \hat{L}_2 - \hat{L}_2 \hat{L}_1 \neq 0$. Komutátor operátorov je $[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = \hat{L}_1 \hat{L}_2 - \hat{L}_2 \hat{L}_1$.

ÚLOHY

- Určte skalárny súčin vektorov $\vec{a}, \vec{b}$, keď $\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$.
[15]
- Určte vektorový súčin vektorov $\vec{a}, \vec{b}$, keď $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.
[$-7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}$]
- Vypočítajte $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, ak $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{k}$.
[30]
- Vypočítajte vektorový súčin $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$.
[$2(\vec{a} \times \vec{b})$]
- Vypočítajte dĺžku a orientáciu vektora $\vec{a} = (1, -1, \sqrt{2})$ v karteziánskej súradnicovej sústave.
[2; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 120^\circ$; $\gamma = 45^\circ$]
- Vypočítajte veľkosť priemetu vektora $\vec{a} = (1, 2, -2)$ do smeru vektora $\vec{b} = (1, 0, -1)$.
[2, 121]
- Vypočítajte plochu trojuholníka ABC, keď A(1, 1, 0), B(1, 0, 1), C(0, 1, 1).
[$\sqrt{3}/2$]
- V karteziánskej sústave sú dané tri body A(2, 0, 2), B(2, 2, 0), C(0, 1, 1). Určte
a) jednotkový vektor kolmý na rovinu určenú bodmi A, B, C,
b) uhol medzi vektormi $\vec{a}, \vec{b}$, ak $|\vec{a}| = AB$, $|\vec{b}| = AC$,
c) plochu rovnobežníka vytvoreného vektormi $\vec{a}, \vec{b}$, ak ich veľkosti sú v metroch.
[$\vec{n} = (\vec{j} + \vec{k})/\sqrt{2}$; $54^\circ 74'$; 5,66 m²]
- Vypočítajte grad r , kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ je veľkosť polohového vektora.
[jednotkový vektor $\vec{r}_0$]
- Dokážte, že $\text{rot } \vec{A} = \text{grad } \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$.
- Vypočítajte grad $(\vec{r} \cdot \vec{a})$, keď $\vec{r}$ je polohový vektor, $\vec{a}$ je ľubovoľný konštantný vektor.
[$\vec{a}$]
- Vypočítajte $\text{div } \vec{r}$, keď $\vec{r}$ je polohový vektor.
[3]
- Dokážte platnosť vzťahu $\text{rot } \vec{r} = \vec{0}$, kde $\vec{r}$ je polohový vektor.
- Dokážte platnosť vzťahu $\text{div}(\vec{r} \times \vec{a}) = 0$, $\vec{r}$ je polohový vektor, $\vec{a}$ je konštantný vektor.
- Dokážte vzťah $\text{rot}(\vec{r} \times \vec{a}) = -2\vec{a}$, $\vec{r}$ je polohový vektor, $\vec{a}$ je konštantný vektor.
- Nájdite grad r^n , keď $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ je veľkosť polohového vektora, $n = \text{konšt.}$
[$\text{grad } r^n = nr^{n-2}\vec{r}$]

MECHANIKA

KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

Pohyb hmotného bodu je popísaný, ak poznáme v každom čase jeho polohu, rýchlosť a zrýchlenie.

Polohový vektor $\vec{r}$ hmotného bodu v priestore vzhľadom k počiatku karteziánskej súradnicovej sústavy môžeme vyjadriť

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Jeho veľkosť určíme vzťahom

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sú jednotkové vektory v smere príslušných karteziánskych osí x, y, z .

Rýchlosť $\vec{v}$ pohybujúceho sa hmotného bodu je definovaná vzťahom

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Vzhľadom na vyjadrenie polohového vektora môžeme vektor rýchlosti vyjadriť

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Veľkosť vektora rýchlosti vyjadríme

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Zrýchlenie $\vec{a}$ pohybujúceho sa hmotného bodu je definované

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

V karteziánskych súradniciach

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Pre priamočiare pohyby hmotného bodu sú vzťahy pre rýchlosť a zrýchlenie po dráhe s

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Rovnomerný priamočiary pohyb (počiatočná rýchlosť v_0 , počiatočná dráha pohybu s_0)

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$v = \text{konšt.} = v_0$$

$$s = vt + s_0$$

Rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb

$$a = \text{konšt.}$$

$$v = at + v_0$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

V prípade, že $a = \text{konšt.}$, ale platí $a < 0$, potom sa jedná o **rovnomerne spomalený priamočiary pohyb** hmotného bodu.

Voľný pád ($g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je tiažové zrýchlenie)

$$a = g$$

$$v_0 = 0$$

$$v = gt$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

Zvislý vrh nadol

$$a = g$$

$$v_0 \neq 0$$

$$v = gt + v_0$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

Zvislý vrh nahor

$$a = -g$$

$$v_0 \neq 0$$

$$v = v_0 - gt$$

$$s = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

Krivočiary pohyb - zrýchlenie $\vec{a}$ môžeme rozložiť na dve zložky:

- **normálovú zložku** $\vec{a}_n$, ktorá spôsobuje zmenu smeru rýchlosti,
- **tangenciálnu zložku** $\vec{a}_t$, ktorá spôsobuje zmenu veľkosti rýchlosti.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \frac{v^2}{R} \vec{n}_0 + \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_0$$

kde $\vec{n}_0$ a $\vec{\tau}_0$ sú jednotkové vektory v smere normály a dotyčnice ku dráhe pohybu hmotného bodu v danom mieste a R je polomer krivosti dráhy.

Pri šikmom vrhu $\vec{a} = \vec{g}$, avšak zrýchlenie $\vec{g}$ a počiatočná rýchlosť $\vec{v}_0$ nespádajú do tej istej priamky. Ak šikmý vrh prebieha v rovine (x, y) a rýchlosť $\vec{v}_0$ zvierá s osou x uhol α , platí

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$x = v_0t \cos \alpha$$

$$a_y = -g$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

$$y = v_0t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Uhlová rýchlosť $\vec{\omega}$ je definovaná

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

kde $\vec{\varphi}$ je vektor s hodnotou danou veľkosťou uhla opísaného príslušným polohovým vektorom pohybujúceho sa hmotného bodu. Smer vektora $\vec{\varphi}$ je kolmý na rovinu uhla a smeruje na tú stranu, z ktorej sa vytváranie uhla javí proti pohybu hodinových ručičiek.

Uhlové zrýchlenie $\vec{\varepsilon}$ je definované

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$

Ak sa jedná o rovinný krivočiary pohyb, potom môžeme písať

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Vektory $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ spadajú do tej istej priamky kolmej na rovinu pohybu.

Veľkosť obvodovej rýchlosti v

$$v = R\omega$$

Veľkosť tangenciálnej zložky zrýchlenia a_t

$$a_t = R\varepsilon$$

Veľkosť normálovej zložky zrýchlenia a_n

$$a_n = R\omega^2 = v^2/R$$

Špeciálnym prípadom krivočiareho pohybu je **pohyb po kružnici**.

Rovnomerný pohyb po kružnici (počiatočná poloha φ_0)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0 \qquad \omega = \text{konšt.} \qquad \varphi = \omega t + \varphi_0$$

Rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici (počiatočná uhlová rýchlosť ω_0)

$$\varepsilon = \text{konšt.} \qquad \omega = \varepsilon t + \omega_0 \qquad \varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

Periód T je čas, za ktorý obehne hmotný bod pri svojom pohybe jedenkrát dráhu kružnice

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{R\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frekvencia f je určená počtom obehov hmotného bodu po kružnici za jednotku času

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Pohyb hmotného bodu je opísaný rovnicami $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$, $z = bt$, kde R , ω , b sú konštanty. Určte vektor rýchlosti a vektor zrýchlenia tohoto pohybu a tiež veľkosti týchto vektorov.

Riešenie:

Polohu hmotného bodu opisuje vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{i}R \cos \omega t + \vec{j}R \sin \omega t + \vec{k}bt$$

Pre vektor rýchlosti platí

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = (-R\omega \sin \omega t) \vec{i} + (R\omega \cos \omega t) \vec{j} + b\vec{k}$$

Veľkosť rýchlosti je daná

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2 \omega^2 + b^2}$$

Z definície určíme zrýchlenie pohybu

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

Pretože $\vec{v}_z = b\vec{k}$ nezávisí od času, je $\vec{a}_z = 0$. Vektor zrýchlenia má potom tvar

$$\vec{a} = -\vec{i} \omega^2 R \cos \omega t + \vec{j} \omega^2 R \sin \omega t$$

Pre veľkosť zrýchlenia platí

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\omega^4 R^2} = \omega^2 R$$

Príklad 2:

Zrýchlenie pohybu častice po priamej dráhe je vyjadrené rovnicou $a(t) = 4 - t^2$. Nájdite závislosť okamžitej rýchlosti pohybu a dráhy od času, ak v čase $t = 3$ s je rýchlosť $v = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a dráha $s = 9 \text{ m}$.

Riešenie:

Pre veľkosť zrýchlenia pri priamočiarom pohybe platí $a = \frac{dv}{dt}$. Veľkosť rýchlosti

$$v = \int a dt = \int (4 - t^2) dt = 4t - \frac{t^3}{3} + v_0$$

Dosadením za $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $t = 3 \text{ s}$ pre počiatočnú rýchlosť dostaneme

$$v_0 = v - 4t + \frac{t^3}{3} = 2 - 12 + 9 = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dráha častice

$$s = \int v dt = \int (4t - \frac{t^3}{3} + v_0) dt = \int 4t dt - \int \frac{t^3}{3} dt + \int -1 dt = 2t^2 - \frac{t^4}{12} - t + s_0$$

Počiatočná dráha

$$s_0 = s - 2t^2 + \frac{t^4}{12} + t = 9 - 18 + \frac{81}{12} + 3 = \frac{3}{4} \text{ m}$$

Výsledné rovnice závislosti rýchlosti a dráhy na čase potom majú tvar

$$v(t) = -\frac{t^3}{3} + 4t - 1$$

$$s(t) = -\frac{t^4}{12} + 2t^2 - t + \frac{3}{4}$$

Príklad 3:

Hmotný bod sa pohybuje po kružnici s polomerom $r = 0,1 \text{ m}$ a uhlovú dráhu popisuje rovnica $\varphi = 2 + 4t^3$, kde t je čas pohybu. Vypočítajte:

- veľkosť tangenciálneho a normálového zrýchlenia v čase $t = 2 \text{ s}$,
- pri akej uhlovej dráhe bude celkové zrýchlenie zvierat' s polomerom kružnice uhol 45° .

Riešenie:

a) Normálové zrýchlenie je dané

$$a_n = r\omega^2 = r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = r \left[\frac{d}{dt} (2 + 4t^3) \right]^2 = r (12t^2)^2 = r 144t^4 = 0,1 \cdot 144 \cdot 2^4 = 230 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Tangenciálne zrýchlenie je dané

$$a_t = r\varepsilon = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d}{dt} (12t^2) = 24rt = 0,1 \cdot 24 \cdot 2 = 4,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a_t}{a_n}$. Z tejto podmienky vyplýva, že $1 = \frac{r\varepsilon}{r\omega^2}$ a potom $\varepsilon = \omega^2$. Z rovnosti uhlového zrýchlenia a kvadrátu uhlovej rýchlosti určíme čas pohybu hmotného bodu

$$24t = (12t^2)^2 \quad \text{z toho} \quad t^3 = \frac{1}{6} \text{ s}^3$$

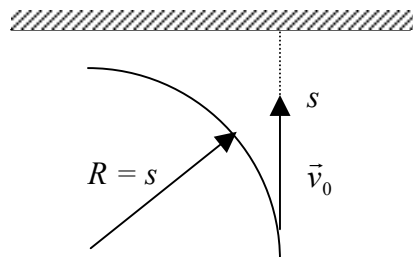
Uhlová dráha potom bude mať hodnotu

$$\varphi = 2 + 4 \frac{1}{6} = 2,67 \text{ rad}$$

Príklad 4:

Šofér, ktorý ide rýchlosťou v_0 , zbadá pred sebou prekážku vo vzdialenosti s . Je pre neho výhodnejšie brzdiť alebo stočiť volantom, aby do prekážky nenarazil?

Riešenie:



Pre pohyb rovnomerne spomalený (brzdzenie) platí $s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$, $v = v_0 - a t$.

Konečná rýchlosť sa musí rovnať nule a tú dosiahne za čas $t = v_0/a$. Po dosadení do rovnice pre dráhu rovnomerne spomaleného pohybu dostaneme

$$s = \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} \frac{v_0}{a} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a}$$

Pre pohyb po kružnici (stočenie volantom) platí

$$a_n = \frac{v_0^2}{R} = \frac{v_0^2}{s} \quad s = \frac{v_0^2}{a_n}$$

Porovnaním obidvoch pohybov dostaneme

$$\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} = \frac{v_0^2}{a_n} \quad \text{z čoho vyplýva} \quad a = \frac{a_n}{2}$$

Pre šoféra je výhodnejšie vykonať pohyb rovnomerne spomalený, teda brzdzenie.

ÚLOHY

1. Určte rýchlosť a zrýchlenie hmotného bodu, ktorého polohový vektor je daný rovnicou

$$\vec{r} = \vec{i} A \cos bt + \vec{j} A \sin bt, \text{ kde } A = 6 \text{ m a } b = \frac{\pi}{4} \text{ s}^{-1}.$$

$$\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi^2}{8} \right]$$

2. Pre rýchlosť častice pohybujúcej sa po priamke platí závislosť $v(t) = 9t^2 - 8t + 3$.

- a) Akú dráhu prejde častica v časovom intervale od $t_1 = 2 \text{ s}$ do $t_2 = 5 \text{ s}$?
b) Kedy je zrýchlenie častice nulové a aká je rýchlosť v tomto okamžiku?
c) Aké je zrýchlenie častice pre $t = 7 \text{ s}$?

$$\left[276 \text{ m}; \frac{4}{9} \text{ s}; \frac{41}{9} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}; 118 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \right]$$

3. Aká je začiatočná rýchlosť častice, ktorá sa pohybuje priamočiarno tak, že jej zrýchlenie v závislosti od času rovnomerne rastie a za prvých 5 s vzrástlo z nulovej hodnoty na hodnotu $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$? Po uplynutí 10 s od začiatku zrýchleného pohybu mala častica rýchlosť $50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$[20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}]$$

4. Hmotný bod sa pohybuje v rovine (xy) okolo počiatku uhlovou rýchlosťou ω .

- a) Určte polohový vektor pohybujúceho sa bodu, vektor rýchlosti a vektor celkového zrýchlenia, veľkosť dotyčnicového a normálového zrýchlenia.
b) Odvodte diferenciálnu rovnicu rovnomerného kruhového pohybu vo vektorovom tvare.
c) Odvodte diferenciálnu rovnicu priemetu pohybujúceho sa bodu do osi x a y .

5. Teleso padá z výšky 800 m a súčasne je zo zeme vystrelené nahor iné teleso so začiatočnou rýchlosťou 200 m/s. Za aký čas a v akej výške sa obidve telesá stretnú?

$$[4 \text{ s}; 721,5 \text{ m od zeme}]$$

6. Voľne padajúce teleso minie za časový interval 1 s dva body vzdialené od seba 12 m. Z akej výšky nad prvým bodom padá teleso a akú rýchlosť má v oboch bodoch?

$$[2,56 \text{ m}; 7,09 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}; 16,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}]$$

7. Vieme, že hmotný bod prešiel za 10 s dráhu 30 m, pričom sa jeho rýchlosť zväčšila 5-krát. Určte zrýchlenie pohybu za predpokladu, že sa počas pohybu nemení.

$$[0,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}]$$

8. Teleso sa otáča okolo pevnej osi s konštantným uhlovým zrýchlením $0,04 \text{ s}^{-2}$. Za aký čas od začiatku otáčania bude celkové zrýchlenie ľubovoľného bodu zvierat so smerom rýchlosti toho bodu uhol 76° ?

$$[10 \text{ s}]$$

9. Koleso sa otáča rovnomerne zrýchleným pohybom z kľudového stavu. V priebehu dvoch sekúnd vykoná 16 otáčok. Vypočítajte uhlové zrýchlenie.

$$[67 \text{ s}^{-2}]$$

10. Gulôčka padala do vody z výšky 50 cm a ponorila sa 20 cm pod hladinu vody. Vypočítajte spomalenie gulôčky vo vode za predpokladu, že pohyb je rovnomerne spomalený.

$$[25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}]$$

11. Zotrvačník s uhlovým zrýchlením 2 rad/s^2 sa otočil za čas 5 s o uhol 75 rad. Ako dlho bol už v pohybe pred začiatkom 5-sekundového intervalu, ak sa roztáčal z kľudu?

$$[7,07 \text{ s}]$$

12. Po priamej vozovke sa pohybuje auto konštantnou rýchlosťou 36 km/h. Motocykel

stojaci na krajnici sa začal rozbiehať v tom okamžiku, keď ho auto práve míňalo. Po uplynutí 30 s motocykel auto dobehol. Aké zrýchlenie má motocyklista a akou rýchlosťou predbieha auto?

[0,67 m·s⁻²; 20 m·s⁻¹]

13. Obvodová rýchlosť bodu na obvode otáčajúceho sa kotúča je 3 m·s⁻¹. Bod, ktorý je o 10 cm bližšie k osi otáčania, má rýchlosť 2 m·s⁻¹. Určte frekvenciu otáčania kotúča.
[1,59 s⁻¹]
14. Určte polomer krivosti dráhy telesa, ktoré bolo vrhnuté vodorovne počiatočnou rýchlosťou 40 m/s, v čase 3 s od začiatku pohybu.
[312,5 m]
15. Z dela pobrežného delostrelectva, umiestneného vo výške 30 m nad hladinou mora, je vystrelená strela pod uhlom 30° voči horizontálnej rovine s počiatočnou rýchlosťou 1000 m/s. Aká je vodorovná vzdialenosť dela od miesta, v ktorom strela zasiahla cieľ ležiaci na hladine mora?
[102 km]

DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

Dynamika v klasickej fyzike je založená na troch Newtonových zákonoch:

1. **Zákon zotrvačnosti:** Hmotný bod je v kľude alebo koná rovnomerný priamočiary pohyb, ak nie je pôsobením iných síl nútené tento stav zmeniť.
2. **Zákon sily:** Sila pôsobiaca na hmotný bod je úmerná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia, ktoré mu udeľuje. Platí
 $\vec{F} = m\vec{a}$

3. **Zákon akcie a reakcie:** Sily, ktorými navzájom na seba dve telesá pôsobia, sú rovnako veľké, ale opačne orientované. Platí
 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Platnosť Newtonových zákonov je viazaná na **inerciálne sústavy**, t.j. sústavy, ktoré sú v kľude, a sústavy, ktoré sa voči nim pohybujú rovnomerným priamočiarým pohybom.

Ak vzťahujeme pohyb hmotného bodu k neinerciálnej sústave, potom musíme uvažovať aj **zotrvačné sily**. Zákon sily s výslednicou zotrvačných síl $\vec{F}'$ má tvar

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}'$$

Ak $\vec{F}' = -m\vec{a}'$, ide o takú neinerciálnu sústavu, ktorá sa voči inerciálnej sústave pohybuje priamočiarým rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením $\vec{a}'$. Ak

$$\vec{F}' = \vec{F}_0 + \vec{F}_C = m(\vec{\omega} \times \vec{r}') \times \vec{\omega} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

ide o neinerciálnu sústavu, ktorá sa voči inerciálnej sústave otáča uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega} = \text{konšt.}$, pričom $\vec{F}_0$ je odstredivá sila, $\vec{F}_C$ je Coriolisova sila, $\vec{r}'$ je polohový vektor

hmotného bodu s hmotnosťou m vzhľadom na vzťažný bod na osi otáčania, $\vec{v}'$ je rýchlosť hmotného bodu voči neinerciálnej sústave.

Hybnosť $\vec{p}$ hmotného bodu je definovaná

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Impulz sily $\vec{I}$ pôsobiacej na hmotný bod za čas t

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Pohybová rovnica hmotného bodu

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Mechanická práca A ($\vec{r}_1$ je polohový vektor počiatočného bodu dráhy, $\vec{r}_2$ je polohový vektor koncového bodu dráhy, po ktorej sila $\vec{F}$ pôsobí)

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Výkon P

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Kinetická energia E_k pohybujúceho sa hmotného bodu

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Práca, ktorú sila vykoná na určitej dráhe, sa rovná zmene kinetickej energie hmotného bodu $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$, kde v a v_0 sú rýchlosti hmotného bodu na konci a na začiatku dráhy.

Potenciálna energia E_p ($\vec{F}$ je sila vonkajšieho poľa)

$$E_p = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

V gravitačnom poli Zeme vo výške h nad povrchom zanedbateľnej voči polomeru Zeme pre potenciálnu energiu platí

$$E_p = mgh$$

Zákon zachovania mechanickej energie

$$E = E_k + E_p = \text{konšt.}$$

Zákon zachovania hybnosti

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = \vec{p} = \text{konšt.}$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Na úpäti naklonenej roviny s uhlom sklonu $\alpha = 45^\circ$ stojí vozík s pieskom s hmotnosťou $m_2 = 5$ kg. Rovnobežne s naklonenou rovinou letí strela s hmotnosťou $m_1 = 50$ g rýchlosťou $400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a uviazne v piesku. Akú dráhu prejde vozík po naklonenej rovine až do svojho zastavenia? (Trenie a odpor prostredia zanedbáme).

Riešenie:

Uplatnením zákona zachovania hybnosti $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$ pre $v_2 = 0$ dostaneme

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

Z tejto rovnice vyjadríme rýchlosť vozíka na konci dráhy

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Kinetická energia vozíka sa zmení na potenciálnu energiu podľa vzťahu $E_k = E_p$, pričom

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)}$$
$$E_p = (m_1 + m_2) g h$$

Po úprave dostaneme pre výšku naklonenej roviny

$$h = \frac{m_1^2 v_1^2}{2 g (m_1 + m_2)^2}$$

Dráhu naklonenej roviny vyjadríme

$$s = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2 g \sin \alpha (m_1 + m_2)^2} = \frac{0,05^2 \cdot 400^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot 5,05^2} = 1,6 \text{ m}$$

Príklad 2:

Raketa s hmotnosťou $m = 500$ kg štartuje kolmo z povrchu Zeme. Jej rýchlosť je $v = 500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Určte veľkosť Coriolisovej a zotrvačnej odstredivej sily, ak raketa štartuje:

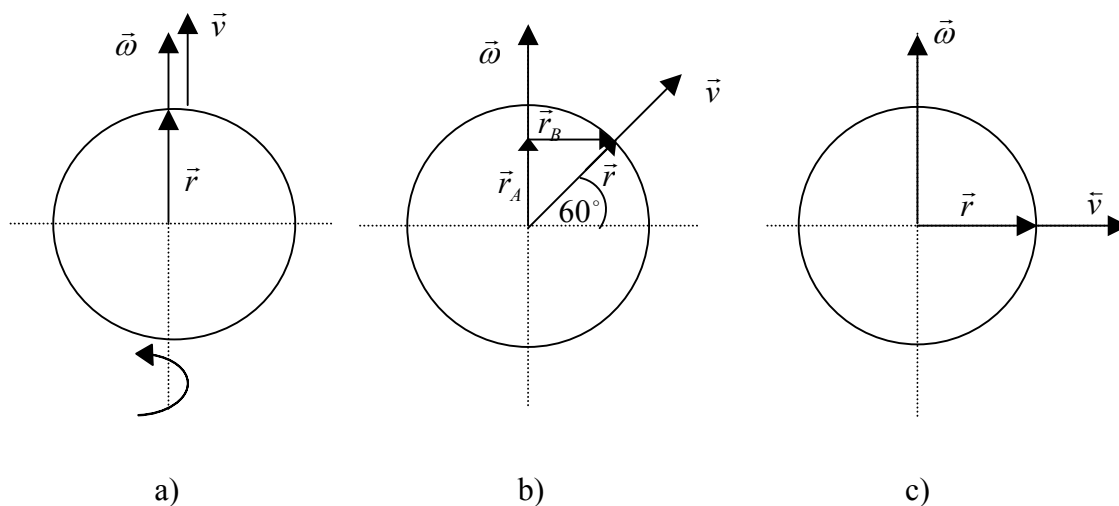
- a) na póle,
- b) na 60° zemepisnej šírky,
- c) na rovníku.

Riešenie:

Pre Coriolisovu silu $\vec{F}_C$ a odstredivú zotrvačnú silu $\vec{F}_0$ platí

$$\vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

$$\vec{F}_0 = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



- a) Keď raketa štartuje na póle, vektory $\vec{r}, \vec{\omega}, \vec{v}$ ležia na jednej priamke a vektorové súčiny v definičných vzťahoch pre Coriolisovu a odstredivú zotrvačnú silu, sú nulové.
- b) V tomto prípade vektor $\vec{r}$ rozložíme na dve navzájom kolmé zložky $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}_B$. Potom vektor odstredivej zotrvačnej sily vyjadríme takto

$$\vec{F}_0 = -m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_A) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_B)] = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_B) = -m[\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_B) - \vec{r}_B(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})] = m\omega^2 \vec{r}_B$$

Veľkosť odstredivej zotrvačnej sily a Coriolosovej sily vyjadríme

$$F_0 = m\omega^2 r \sin 30^\circ = 500 \cdot \left[\frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \right]^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cdot 0,5 = 8,4 \text{ N}$$

$$F_C = 2m\omega v \sin 30^\circ = 2 \cdot 500 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \cdot 500 \cdot 0,5 = 18,18 \text{ N}$$

- c) Pri štarte na rovníku

$$\vec{F}_0 = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m[\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})] = m\vec{r}\omega^2$$

Veľkosť zotrvačnej odstredivej sily

$$F_0 = r\omega^2 m = 6,37 \cdot 10^6 \left[\frac{2\pi}{24.3600} \right]^2 \cdot 500 = 16,83 \text{ N}$$

Pretože vektor $\vec{\omega}$ je kolmý na vektor $\vec{v}$, pre veľkosť Coriolisovej sily dostaneme

$$F_C = 2m\omega v = 2 \cdot 500 \cdot \frac{2\pi}{24.3600} \cdot 500 = 36,35 \text{ N}$$

Príklad 3:

Motor s hmotnosťou 100 kg zvyšuje svoju rýchlosť počas 6 s so zrýchlením $1,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a dosiahne konečnú rýchlosť $v = 85 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Akú prácu pritom musí vykonať?

Riešenie:

Mechanickú prácu vyjadríme ako rozdiel kinetických energií na konci a na začiatku pohybu

$$A = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

Počiatočnú rýchlosť určíme zo vzťahu

$$v = at + v_0$$

$$v_0 = v - at$$

Potom pre mechanickú prácu, ktorú motor vykoná platí

$$A = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2 + 2vat - a^2t^2) = \frac{1}{2}mat(2v - at) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1,8 \cdot 6 \cdot (2 \cdot 23,6 - 1,8 \cdot 6) = 1,97 \cdot 10^4 \text{ J}$$

Príklad 4:

Hmotný bod s hmotnosťou $m = 1 \text{ kg}$ je zavesený v pevnom bode na niti s dĺžkou $l = 30 \text{ m}$ a opisuje kružnicu konštantnou rýchlosťou. Niť pri pohybe zvierá so zvislým smerom uhol $\alpha = 60^\circ$. Určte rýchlosť pohybu hmotného bodu, periódu a silu, ktorá pri pohybe napína niť.

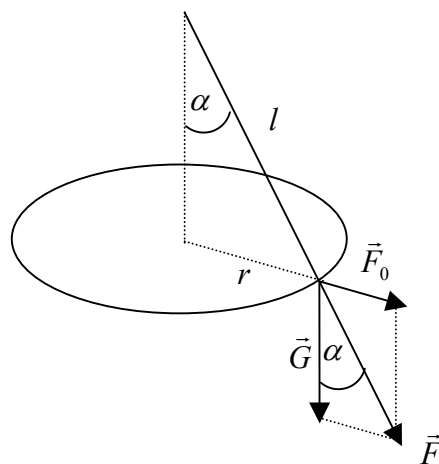
Riešenie:

Podľa obrázku

$$\text{tg } \alpha = \frac{F_0}{G} = \frac{m \frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{mv^2}{mgl \sin \alpha}$$

Z toho veľkosť rýchlosti

$$v = \sqrt{gl \sin \alpha \text{ tg } \alpha} = \sqrt{9,81 \cdot 30 \cdot \sin 60^\circ \cdot \text{tg } 60^\circ} = \sqrt{441,42} = 21,01 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$



Periódá

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi l \sin \alpha}{v} = \frac{2.3,14.30.0,866}{21,01} = 7,77 \text{ s}$$

Sila, ktorá napína niť

$$F = \frac{G}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\cos 60^\circ} = \frac{1.9,81}{0,5} = 19,62 \text{ N}$$

ÚLOHY

1. Akou minimálnou frekvenciou musíme po kružnici s polomerom 70 cm otáčať vo zvislej rovine nádobu, ktorá je naplnená vodou, aby sa voda nevyliala?
[0,6 Hz]
2. Teleso padá voľným pádom, pričom dráhu medzi dvoma bodmi, ktoré sú od začiatku voľného pádu vo výškach h_1 a h_2 , prešlo za 2 s. Ďalej platí, že kinetická energia v bode vzdialenejšom od začiatku voľného pádu je 2-krát väčšia ako v bode nad ním. Aké sú dráhy voľného pádu h_1 a h_2 ?
[114 m; 229 m]
3. Teleso prešlo za pôsobenia konštantnej sily (konštantnej čo do smeru a veľkosti) dráhu rovnú štvrtine kružnice s polomerom R . Vypočítajte prácu, ktorú sila vykoná.
[$A = FR$]
4. V najvyššom bode naklonenej roviny dĺžky s je položený kváder, ktorý pohybom po naklonenej rovine dosiahne rýchlosť 3 m/s. Určte výšku naklonenej roviny.
[0,45 m]
5. Teleso s hmotnosťou 150 g bolo vrhnuté zvislo nahor a vo výške 10 m malo kinetickú energiu 7 J. Akou počiatočnou rýchlosťou bolo vrhnuté?
[17 m·s⁻¹]
6. Strela s hmotnosťou 10 g vnikne do telesa s hmotnosťou 600 g, ktoré leží na vodorovnej doske a posunie ho po dráhe 5,5 m. Akú rýchlosť má strela pred vniknutím do telesa, keď súčiniteľ trenia medzi doskou a telesom je 0,4?
[405 m·s⁻¹]
7. Zdvihák výťahu naloženého materiálom s tiažou 10000 N sa zdvíha s konštantným zrýchlením 2 m/s². Vypočítajte prácu, ktorá sa vykoná za prvých 5 sekúnd zdvihu. Aká je kinetická energia telesa s hmotnosťou 5 kg? Teleso sa pohybuje po priamej dráhe pôsobením sily 12 N v čase 32 s od okamžiku, v ktorom malo rýchlosť 2 m/s.
[300 kJ; 1,55·10⁴ J]
8. Disk má hmotnosť 0,5 kg a priemer 40 cm. Otáča sa s frekvenciou 1 500 otáčok/min. Pri brzdení sa zastaví za čas 20 s. Určte moment brzdiacej sily.
[0,0785 N·m]
9. Aké má byť zvýšenie vonkajšej koľajnice v zákrute s polomerom 300 m, aby pri priemernej rýchlosti vlaku 50 km/h nevznikol postranný tlak kolies na koľajnici s rozchodom 1,435 m?
[9,4 cm]
10. Človek s tiažou G_1 stojí na hojdačke a zoskočí z nej pod elevačným uhlom α počiatočnou rýchlosťou v_1 . Tiaž hojdačky je G_2 a dĺžka zavesenej tyče hojdačky l .

Určte uhol φ , o ktorý sa hoidačka vychýli po zoskoku človeka.

$$[\varphi = \arccos(1 - \frac{v^2}{2gh})]$$

11. Teleso s hmotnosťou 10 kg je zavesené na pružinových váhach v kabíne výťahu. Určte, čo budú váhy ukazovať,
 - a) ak sa výťah pohybuje konštantnou rýchlosťou 3 m/s smerom nahor,
 - b) ak sa výťah pohybuje konštantným zrýchlením 3 m/s² smerom nahor,
 - c) ak sa lano pretrhne a kabína padá voľným pádom.
 [98,1 N; 128,1 N; 0 N]
12. Električka idúca rýchlosťou 30 km/h môže zabrzdiť do úplného zastavenia na dráhe 14,16 m. Určte, aká je brzdná sila električky. Silu vyjadrite ako násobok tiaže električky. Predpokladajte, že trať električky je vodorovná.
 [0,25G]

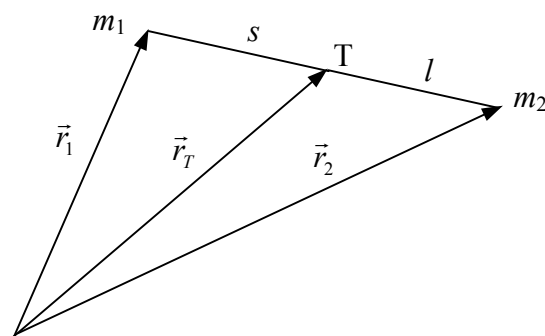
MECHANIKA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV A TELESA

Ťažisko sústavy dvoch hmotných bodov m_1 a m_2 je taký bod na ich spojnici, ktorý ju delí v obrátenom pomere k ich hmotnostiam.

$$s/l = m_2/m_1$$

Polohový vektor ťažiska pre dva hmotné body

$$\vec{r}_T = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$



Polohový vektor ťažiska sústavy hmotných bodov (celková hmotnosť m) a jeho karteziánske súradnice

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$x_T = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i$$

$$y_T = \frac{1}{m} \sum_i m_i y_i$$

$$z_T = \frac{1}{m} \sum_i m_i z_i$$

Polohový vektor ťažiska telesa so spojitou rozloženou hmotnosťou

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \int_m \vec{r} dm$$

kde hmotný element $dm = \rho dV$ môžeme vyjadriť pomocou hustoty telesa ρ a objemového elementu dV .

Karteziánske súradnice ťažiska sú

$$x_T = \frac{1}{m} \int x dm \quad y_T = \frac{1}{m} \int y dm \quad z_T = \frac{1}{m} \int z dm$$

Dokonale tuhé teleso je teleso, ktoré za pôsobenia vonkajších síl nemení svoj tvar. Sústava hmotných bodov (teleso) sa pohybuje tak, že jeho ľubovoľný zložitý pohyb možno rozložiť na postupný a rotačný pohyb.

I. impulzová veta o postupnom pohybe ťažiska ($\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov sa rovná časovej zmene celkovej hybnosti sústavy. Ťažisko sústavy hmotných bodov sa pohybuje tak, ako keby celá hmotnosť bola sústredená v ťažisku a všetky sily pôsobili v ťažisku.

II. impulzová veta - pohybová rovnica rotačného pohybu sústavy hmotných bodov (tuhého telesa) vzhľadom k osi rotácie ($\vec{\omega}$ je uhlová rýchlosť telesa, $\vec{\varepsilon}$ je uhlové zrýchlenie telesa)

$$\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ je celkový moment sily, $\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}$ je celkový moment hybnosti sústavy (telesa), $\vec{r}$ je polohový vektor pôsobiska vektora sily alebo hybnosti vzhľadom k osi rotácie.

Zákon zachovania momentu hybnosti - celkový moment hybnosti izolovanej sústavy je konštantný

$$\vec{b} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \text{konšt.}$$

Pre rotáciu telesa s momentom zotrvačnosti J uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ a uhlovým zrýchlením $\vec{\varepsilon}$ platia pohybové rovnice v tvare

$$\vec{b} = J\vec{\omega} \quad \vec{M} = J\vec{\varepsilon}$$

Kinetická energia rotujúceho tuhého telesa

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

kde J je moment zotrvačnosti telesa. Ak r_i je vzdialenosť hmotného bodu s hmotnosťou m_i od osi rotácie, potom

$$J = \sum m_i r_i^2$$

Pre teleso so spojitou rozloženou hmotnosťou

$$J = \int_m r^2 dm$$

Steinerova veta umožňujúca určiť moment zotrvačnosti telesa vzhľadom k osi rotácie, ktorá neprechádza ťažiskom

$$J = J_T + ma^2$$

m je celková hmotnosť telesa, a je vzdialenosť ťažiska od osi rotácie, J_T je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom k osi, ktorá prechádza cez ťažisko, J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom k rovnobežnej osi, ktorá neprechádza ťažiskom.

Momenty zotrvačnosti niektorých homogénnych telies

Teleso	Os rotácie	Moment zotrvačnosti
Tenčná tyč ľubovoľného prierezu s dĺžkou l	Kolmá k tyči na jej konci	$J = \frac{1}{3} ml^2$
Tenčná tyč ľubovoľného prierezu s dĺžkou l	Kolmá k tyči v jej strede	$J = \frac{1}{12} ml^2$
Dutý valec s polomerami r_1, r_2	Geometrická os valca	$J = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$
Tenký prstenec s polomerom r	Cez stred prstenca kolmo k jeho rovine	$J = mr^2$
Plný valec s polomerom r	Geometrická os valca	$J = \frac{1}{2} mr^2$
Plná guľa s polomerom r	Os gule v ťažisku	$J = \frac{2}{5} mr^2$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

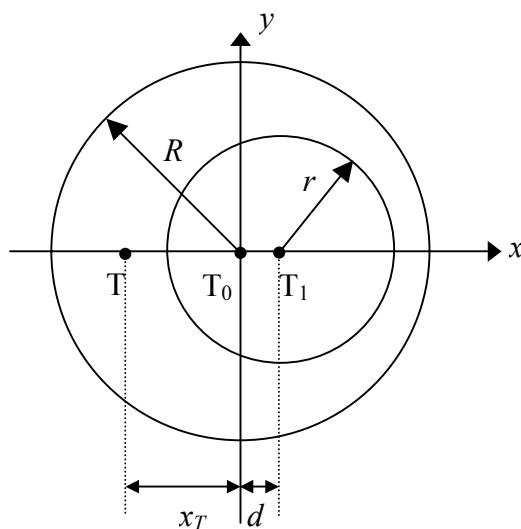
Príklad 1:

Z tenkej homogénnej kruhovej dosky s polomerom $R = 5$ cm sme vyrezali kruhový otvor s polomerom $r = 3$ cm tak, že stred vyrezanej časti je voči stredu pôvodnej kruhovej dosky posunutý o $d = 1$ cm. Určte súradnice ťažiska tohoto útvaru.

Riešenie:

Útvár rozdelíme na časti s plošnými obsahmi πr^2 a $\pi(R^2 - r^2)$. Obe časti majú rovnakú hustotu. Do stredu dosky s polomerom R dáme začiatok súradnicovej sústavy, vzhľadom na ktorú budeme určovať polohu ťažiska. Časť s plošným obsahom πr^2 má ťažisko v bode $T_1(d,0)$, časť s plošným obsahom $\pi(R^2 - r^2)$ má ťažisko v bode $T(x_T,0)$ a ťažisko plnej dosky je v bode $T_0(x^*,0)$. Hľadáme súradnicu x_T . Úlohu riešime ako sústavu dvoch hmotných bodov T_1, T . Súradnica ťažiska T_0 je $x^* = 0$ a súčasne platí

$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{dm_1 + x_T m_2}{m_1 + m_2}$$



Vzhľadom na symetriu útvaru a voľbu súradnicovej sústavy platí

$$0 = \frac{(R^2 - r^2)x_T + r^2 d}{R^2}$$

$$x_T = -\frac{r^2 d}{R^2 - r^2} = -\frac{9}{16} = -0,562 \text{ cm}$$

Súradnice ťažiska T sú $y_T = 0$ a $x_T = -0,562 \text{ cm}$ (vľavo od stredu plnej kruhovej dosky).

Príklad 2:

Gulôčka s hmotnosťou $m = 5 \text{ g}$ rotuje v kruhovom žliabku s polomerom $R = 0,5 \text{ m}$ konštantnou uhlovou rýchlosťou zodpovedajúcou frekvencii $f_0 = 3 \text{ Hz}$. Za aký čas zväčší moment síl $M = 4\pi \cdot 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}$ uhlovú rýchlosť gulôčky trojnásobne? Trenie zanedbajte a gulôčku považujte za hmotný bod.

Riešenie:

Použijeme vzťahy pre moment sily $\vec{M}$ a moment hybnosti $\vec{b}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt} \quad \vec{b} = J\vec{\omega}$$

kde J je moment zotrvačnosti. Spojením týchto vzťahov dostaneme

$$\int_{\omega_0}^{\omega} J d\omega = \int_{t_0}^t M dt$$

Po integrovaní

$$J(\omega - \omega_0) = M(t - t_0) \quad J2\pi(3f_0 - f_0) = M\Delta t$$

Z toho pre časový interval dostaneme $\Delta t = \frac{J 2\pi 2f_0}{M}$.

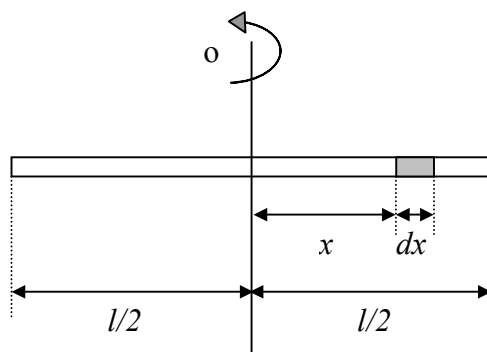
Pre moment zotrvačnosti guľôčky, ktorú považujeme za hmotný bod, vzhľadom na os prechádzajúcu stredom kruhovej dráhy platí $J = mR^2$. Takže

$$\Delta t = \frac{mR^2 2\pi 2f_0}{M} = \frac{4\pi f_0 m R^2}{M} = \frac{4\pi \cdot 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.5^2}{4\pi} = 0.375 \text{ s}$$

Príklad 3:

Určte moment zotrvačnosti tenkej homogénnej tyče s prierezom S , s hmotnosťou m a dĺžkou l , ktorej os otáčania ide stredom tyče kolmo na jej pozdĺžnu os.

Riešenie:



Pre moment zotrvačnosti elementárnej časti tyče, ktorej vzdialenosť od osi je x , a ktorej hrúbka je dx , platí

$$dJ = x^2 dm = \frac{x^2 m}{l} dx$$

$$dm = \rho dV = \frac{m}{V} S dx = \frac{m}{Sl} S dx = \frac{m}{l} dx$$

Pre celkový moment zotrvačnosti tyče tak dostaneme

$$J = \int_{-l/2}^{l/2} dJ = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{ml^3}{l} \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{12} ml^2$$

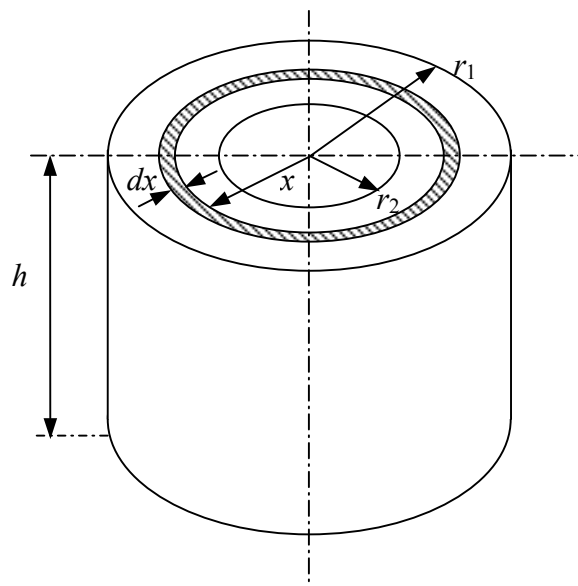
Príklad 4:

Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho dutého valca vzhľadom na jeho geometrickú os, ak poznáme vonkajší polomer valca r_1 , vnútorný polomer r_2 , výšku valca h a hustotu ρ .

Riešenie:

Pre moment zotrvačnosti elementárneho dutého valca platí

$$dJ = x^2 dm = x^2 \rho dV = x^2 \rho 2\pi x dx h$$



Celkový moment zotrvačnosti valca dostaneme integráciou

$$J = \int_{r_2}^{r_1} dJ = \int_{r_2}^{r_1} x^2 dm = 2\pi\rho h \int_{r_2}^{r_1} x^3 dx = 2\pi\rho h \left[\frac{x^4}{4} \right]_{r_2}^{r_1} = \frac{2\pi\rho h}{4} [r_1^4 - r_2^4]$$

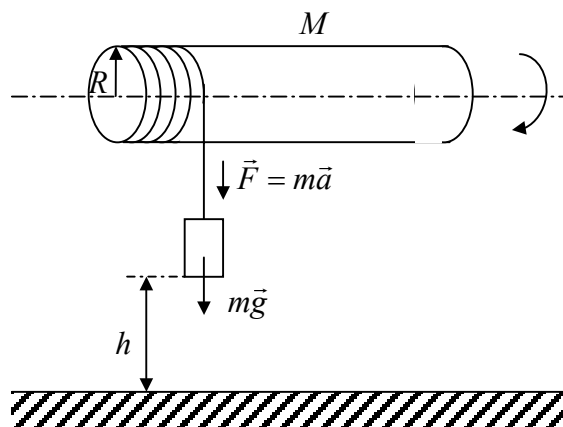
Pretože $\pi\rho h(r_1^2 - r_2^2) = m$, pre moment zotrvačnosti valca platí

$$J = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$$

Príklad 5:

Na valci s hmotnosťou M a s polomerom R je navinuté lano, na konci ktorého je zavesené závažie s hmotnosťou m . Vypočítajte, s akým zrýchlením sa bude závažie pohybovať, keď odpor prostredia a trenie zanedbáme.

Riešenie:



Pre moment zotrvačnosti valca platí $J = \frac{1}{2} MR^2$.

Zo zákona zachovania energie sa potenciálna energia závažia premení na kinetickú energiu posuvného pohybu závažia a kinetickú energiu rotačného pohybu valca. Platí

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Veľkosť obvodovej rýchlosti v bodoch na povrchu valca je totožná s rýchlosťou, ktorou klesá závažie. Uhlovú rýchlosť otáčania valca vyjadríme $\omega = \frac{v}{R}$. Potom platí

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \frac{v^2}{R^2}$$

Predpokladáme rovnomerne zrýchlený pohyb závažia. Potom pre výšku závažia a rýchlosť platí

$$h = \frac{1}{2}at^2 \quad v = at$$

Po dosadení dostaneme

$$mg \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}ma^2t^2 + \frac{1}{4}MR^2 \frac{a^2t^2}{R^2}$$

Po úprave $mg = ma + \frac{1}{2}Ma$. Z toho pre zrýchlenie platí

$$a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}$$

Príklad 6:

Valec s tiažou G a s polomerom r sa otáča okolo geometrickej osi uhlovou rýchlosťou ω . Vypočítajte, akou uhlovou rýchlosťou ω_1 sa musí otáčať valec okolo osi, ktorá prechádza jeho povrchovou priamkou, aby sa jeho kinetická energia nezmenila.

Riešenie:

Kinetickú energiu valca vzhľadom k osi, ktorá prechádza ťažiskom vyjadríme

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} mr^2 \omega^2 = \frac{1}{4} \frac{G}{g} r^2 \omega^2$$

kde moment zotrvačnosti valca $J = \frac{1}{2}mr^2$.

Kinetickú energiu valca otáčajúceho sa okolo osi, ktorá prechádza jeho povrchovou priamkou určíme vzhľadom

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$$

kde moment zotrvačnosti J_1 určíme pomocou Steinerovej vety

$$J_1 = J + mr^2 = \frac{1}{2} mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

Po dosadení

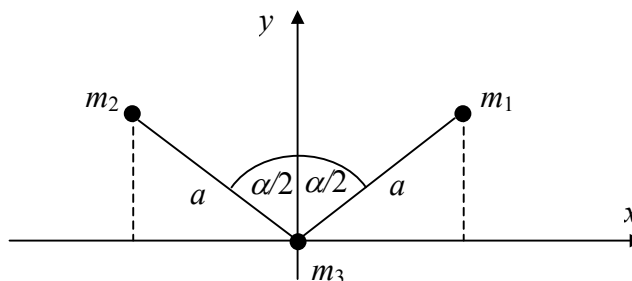
$$E_{k_1} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} mr^2 \omega_1^2 = \frac{3}{4} \frac{G}{g} r^2 \omega_1^2$$

Z rovnosti takto určených kinetických energií vyplýva pre uhlovú rýchlosť ω_1

$$\frac{1}{4} \frac{G}{g} r^2 \omega^2 = \frac{3}{4} \frac{G}{g} r^2 \omega_1^2 \quad \omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{3}}$$

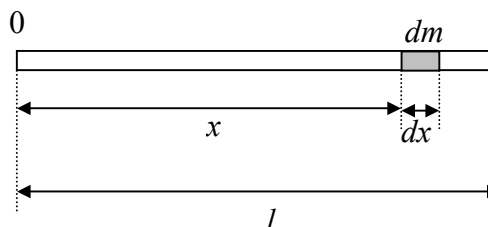
ÚLOHY

1. Určte súradnice x_T , y_T ťažiska molekuly vody, ktorú považujeme za sústavu hmotných bodov s hmotnosťami m_1 , m_2 , m_3 ležiacich v rovine xy . Platí $a = 9,57 \cdot 10^{-10}$ m, $\alpha = 104,5^\circ$, $m_1 = m_2 = m_0$, $m_3 = 16m_0$.



$[0; 6,51 \cdot 10^{-11} \text{ m}]$

2. Nájdite polohu ťažiska homogénnej tenkej tyče s dĺžkou l .

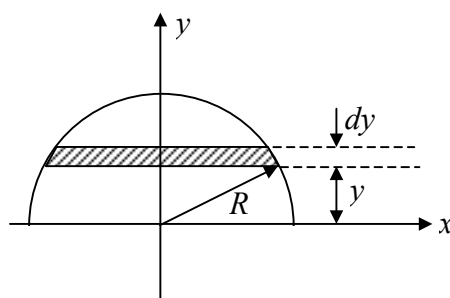


$[x_T = l/2]$

3. Na otáčavej stoličke sedí človek s momentom zotrvačnosti $J = 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ a otáča sa uhlovou rýchlosťou $\omega = 0,5 \text{ s}^{-1}$. V upažených rukách vo vzdialenosti 180 cm má dve činky s hmotnosťami 4 kg. Ako sa zmení uhlová rýchlosť, keď človek pritiahne činky na vzdialenosť 30 cm? Trenie a moment sily vzhľadom ku stoličke neuvažujeme.

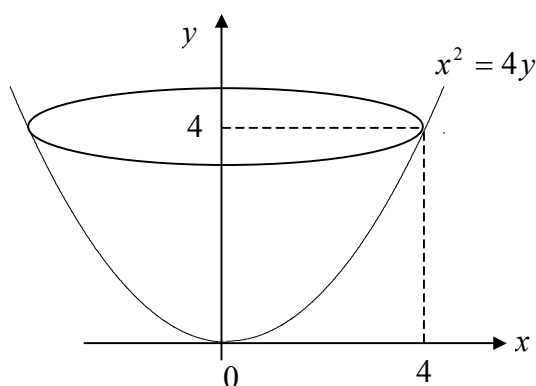
$[1,009 \text{ s}^{-1}]$

4. Nájdite polohu ťažiska homogénneho telesa tvaru poglobule s polomerom R .



$$[x_T = 0; y_T = 3R/8]$$

5. Zotrvačník s momentom zotrvačnosti $40 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ sa roztáča. Za aký čas dosiahne frekvenciu 480 otáčok/min, ak naň pôsobí moment sily $300 \text{ N}\cdot\text{m}$?
[8,37 s]
6. Vypočítajte polohu ťažiska svetlometu v tvare rotačného paraboloidu, ktorý vznikne rotáciou paraboly $x^2 = 4y$ okolo osi y , keď okrajový priemer svetlometu je 8 cm.



$$[2,4 \text{ cm}]$$

7. Homogénne teleso tvaru rotačného valca sa otáča okolo geometrickej osi. Určte hodnotu momentu vonkajších síl vzhľadom na os otáčania, keď sa hodnota momentu hybnosti telesa vzhľadom na túto os zmení za čas $t = 5 \text{ s}$ z $b = 0$ na $b = 0,157 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.
[0,0314 N·m]
8. Na teleso s hmotnosťou $m = 1 \text{ kg}$ s počiatočnou rýchlosťou $\vec{v}_0 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ pôsobí premenlivá sila $\vec{F} = (5 - 2t)\vec{i} - \frac{1}{3}t\vec{k} + \vec{j}$. Aká je veľkosť rýchlosti telesa a jeho kinetická energia v čase $t = 6 \text{ s}$?
[5 m·s⁻¹; 12,5 J]
9. Vypočítajte, akú prácu vykonala sila $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$, ktorá premiestnila časticu po parabole danej parametrickými rovnicami $x = t$, $y = t^2$ z bodu $M_1(1,1)$ do bodu $M_2(-1,1)$.
[14/15 J]
10. Valec s polomerom 5 cm visí na dvoch vláknach, ktoré sú navinuté po jeho obvodě, a pádom preletí dráhu 2 m. Akú uhlovú rýchlosť má valec na konci tejto dráhy a aký čas je k tomu potrebný?
[102,3 s⁻¹; 0,78 s]
11. Určte moment zotrvačnosti homogénnej kruhovej dosky s hmotnosťou 2 kg a s

- polomerom 10 cm vzhľadom na jej geometrickú os.
 $[10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2]$
12. Vypočítajte moment zotrvačnosti tyče s dĺžkou l a hmotnosťou m vzhľadom na os rotácie kolmú na geometrickú os tyče, ktorá
- prechádza koncovým bodom tyče,
 - prechádza stredom tyče.
- $$[J = \frac{1}{3}ml^2; J^* = \frac{1}{12}ml^2]$$
13. Závažie s tiažou $G_1 = 60 \text{ N}$ zavesené na osi s priemerom $d_1 = 4 \text{ cm}$ roztočí zotrvačník s tiažou $G_2 = 120 \text{ N}$ s priemerom $d_2 = 60 \text{ cm}$. Koľko otáčok dosiahne zotrvačník, ak závažie klesne o dĺžku $h = 2 \text{ cm}$? Akú rýchlosť má závažie v tomto bode? Moment zotrvačnosti osi zanedbáme.
 $[3,31 \text{ s}^{-1}; 0,416 \text{ m/s}]$
14. Zotrvačník s momentom zotrvačnosti $40 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ sa v dôsledku pôsobenia sily s momentom $20 \text{ N}\cdot\text{m}$ začal rovnomerne zrýchlene otáčať. Určte kinetickú energiu zotrvačníka po uplynutí 10 s od začiatku pohybu.
 $[500 \text{ J}]$
15. Miešačka sa otáča voľne okolo zvislej osi rovnomerne uhlovou rýchlosťou ω_0 a má moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania J_0 . Do miešačky začneme nalievat' vodu, pričom sa moment zotrvačnosti zmení každú sekundu o hodnotu ΔJ_1 . Určte uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie miešačky od začiatku nalievania vody.

$$[\omega = \frac{J_0\omega_0}{J_0 + \Delta J_1 t}; \varepsilon = -\frac{J_0\Delta J_1\omega_0}{(J_0 + \Delta J_1 t)^2}]$$
16. Vypočítajte hustotu homogénneho valca, ktorý rotuje okolo svojej geometrickej osi uhlovou rýchlosťou 300 s^{-1} a jeho kinetická energia je 2000 J . Polomer valca je $0,1 \text{ m}$ a jeho výška $0,5 \text{ m}$.
 $[566 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}]$
17. Koleso s polomerom $0,5 \text{ m}$ a momentom zotrvačnosti $200 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ rotuje s frekvenciou 180 otáčok za minútu. Vypočítajte, aká veľká sila musí pôsobiť na jeho obvode, aby ho zastavila za 1 minútu.
 $[125,6 \text{ N}]$
18. Gul'a s hmotnosťou 10 kg a s polomerom 20 cm rotuje okolo osi prechádzajúcej ťažiskom. Uhlové pootočenie gule v závislosti od času vyjadruje rovnica $\varphi = At^2 + Bt^3$, kde $A = 4 \text{ s}^{-2}$, $B = 1 \text{ s}^{-3}$. Vypočítajte veľkosť momentu sily pôsobiaceho na guľu v čase 2 s .
 $[3,2 \text{ N}\cdot\text{m}]$
19. Akú rýchlosť dosiahne homogénna guľa s hmotnosťou m , ktorá sa kotúľa bez trenia po naklonenej rovine z výšky h ?
 $[v = \sqrt{10gh/7}]$
20. Vypočítajte zrýchlenie ťažiska homogénnej gule, ktorá sa valí (bez klzania) po naklonenej rovine s uhlom 30° . Počiatočná rýchlosť gule je rovná nule. Vypočítajte to isté pre homogénny valec.
 $[3,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}; 1,96 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}]$
21. Vypočítajte, v ktorom bode musíme upevniť homogénny kruhový disk, aby jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os rotácie prechádzajúcu týmto bodom kolmo k rovine disku bol rovný $J = mR^2$ (m je hmotnosť disku, R je jeho polomer).
[bod vo vzdialenosti $0,707R$ od stredu disku]

TEPELNÝ POHYB

Tepelný pohyb je zvláštnym prípadom mechanického pohybu, ktorý vykonávajú všetky základné častice nášho sveta - atómy, molekuly, elektróny, protóny, neutróny.

Stredná kvadratická rýchlosť v_s molekúl plynu

$$v_s^2 = \frac{\sum_i n_i v_i^2}{n}$$

n_i je i -ta molekula plynu, v_i je rýchlosť tejto molekuly, n je celkový počet molekúl plynu. Z podrobnejších výpočtov pre strednú rýchlosť molekúl jednoatómového plynu vyplýva

$$v_s = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \text{alebo} \quad v_s = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$k = R/N_A$ je Boltzmanova konštanta, R je molárna plynová konštanta, T je teplota plynu, N_A je Avogadrova konštanta, m je hmotnosť plynu a M je molárna hmotnosť plynu.

Stredná kinetická energia e_k molekúl plynu

$$e_k = \frac{i}{2} kT$$

i je počet stupňov voľnosti molekuly, pričom $i = 3$ pre jednoatómovú molekulu, $i = 5$ pre dvoatómovú molekulu a $i = 6$ pre viacatómovú molekulu.

Tlak p molekúl jednoatómového plynu na steny nádoby

$$p = \frac{1}{3} n_0 m v_s^2 \quad p = \frac{2}{3} n_0 e_k$$

n_0 je počet molekúl v jednotkovom objeme plynu, m je hmotnosť molekúl plynu, e_k je stredná kinetická energia plynu.

Tepló Q , ktoré látka s hmotnosťou m a špecifickou tepelnou kapacitou c prijíma pri zmene teploty z T_1 na T_2

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} m c dT$$

Pri konštantnom m a c platí

$$Q = mc(T_2 - T_1)$$

Špecifická tepelná kapacita c

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$$

Molárna tepelná kapacita C (n je počet mólov)

$$C = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$$

Boyleov-Mariottov zákon platí pre **izotermický dej** za podmienky $T = \text{konšt.}$

$$p_0 V_0 = pV = \text{konšt.}$$

Gay-Lussacov zákon pre **izobarický dej** za podmienky $p = \text{konšt.}$

$$V = V_0 \frac{T}{T_0}$$

Gay-Lussacov zákon pre **izochorický dej** za podmienky $V = \text{konšt.}$

$$p = p_0 \frac{T}{T_0}$$

p_0, V_0, T_0 sú tlak, objem, teplota plynu na začiatku termodynamického zmeny a p, V, T sú stavové veličiny na konci termodynamického zmeny.

Stavová rovnica ideálneho plynu

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$
$$pV = nRT$$

$R = \frac{p_0 V_0}{T_0}$ je molárna plynová konštanta a $n = \frac{m}{M}$ je množstvo mólov plynu.

Vnútorá energia U pre n mólov plynu

$$dU = nC_v dT = \frac{m}{M} C_v dT = mc_v dT$$

kde C_v je molárna tepelná kapacita plynu pri konštantnom objeme a c_v je špecifická tepelná kapacita plynu pri konštantnom objeme.

Práca A (objemová), ktorú vykoná plyn pri elementárnej vratnej zmene svojho objemu proti vonkajším silám

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

I. termodynamická veta

$$dQ = dU + dA = nC_v dT + p dV$$

Izochorická zmena: plyn prijíma (odovzdáva) energiu len prostredníctvom tepla

$$dV = 0 \qquad dA = 0 \qquad dQ = dU$$
$$Q = \int_1^2 dU = U_2 - U_1$$

Izotermická zmena: plyn všetko teplo (prácu) dodané z vonku premení na mechanickú prácu (teplo)

$$dT = 0 \qquad dU = 0 \qquad dQ = dA$$
$$Q = \int_1^2 dA = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Izobarická zmena: teplo prijaté plynom sa spotrebuje na zmenu vnútornej energie a na vykonanie práce

$$dp = 0 \qquad dQ = dU + dA = nC_v dT + p dV \qquad dQ = dH$$

kde dH je zmena entalpie plynu, pričom platí entalpia $H = U + pV$.

Adiabatická zmena: práca vykonaná plynom sa rovná úbytku vnútornej energie

$$dQ = 0 \qquad dA = -dU$$
$$A = -\int_1^2 dU = U_1 - U_2$$

Poissonova rovnica pre adiabatický dej

$$pV^\kappa = p_0V_0^\kappa = \text{konšt.}$$

Poissonova konštanta

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

Mayerova rovnica vyjadruje súvislosť medzi molárnou tepelnou kapacitou plynu za stáleho tlaku a stáleho objemu

$$C_p - C_v = R$$
$$c_p - c_v = \frac{n}{m} R = \frac{R}{M}$$

II. termodynamická veta

Nemôžeme zostrojiť trvalo pracujúci tepelný stroj, ktorý by nespôsoboval nič iné, len odoberal teplo zo zásobníka a konal mechanickú prácu.

Účinnosť η ideálneho tepelného stroja (T_1 je teplota ohrievača a T_2 je teplota chladiča)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Entropia S

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad dS \geq 0$$

Celková zmena entropie plynu pri zmene stavových veličín z počiatočného stavu (1) do konečného stavu (2) je

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} + nC_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Pri vratných adiabatických dejoch sa entropia plynu nemení. Pri všetkých nevratných dejoch, ktoré prebiehajú v sústavách tepelne izolovaných od okolia, sa ich entropia zväčšuje.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Stredná kvadratická rýchlosť jednoatómových molekúl plynu je $v_s = 800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Koľko molekúl obsahuje 1 kg tohoto plynu, keď jeho teplota je 27°C ?

Riešenie:

Pre strednú kvadratickú rýchlosť jednoatómových molekúl plynu pri teplote T platí

$$v_s = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Odtiaľ pre hmotnosť jedného mólu plynu M dostaneme

$$M = \frac{3RT}{v_s^2}$$

Počet mólov plynu vypočítame zo vzťahu

$$n = \frac{m}{M} = \frac{m}{3RT} v_s^2$$

Tento výsledok dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme

$$pV = nRT = \frac{m}{3RT} v_s^2 RT = \frac{mv_s^2}{3}$$

Pre tlak plynu súčasne platí $p = n_0 kT$, kde k je Boltzmanova konštanta a n_0 je počet častíc plynu v objemovej jednotke. V objeme V pre počet častíc potom platí

$$n' = \frac{pV}{kT} = \frac{mv_s^2}{3kT} = \frac{1.800^2}{3.1,38.10^{-23} \cdot 300} = 5,15.10^{25}$$

Príklad 2:

Vypočítajte ako sa zmení stredná kinetická energia molekúl argónu s hmotnosťou $m = 200$ g, keď pri zachovaní stáleho objemu dodáme teplo $Q = 3,52.10^3$ J.

Riešenie:

Molárna hmotnosť argónu je $M = 39,9$ kg·kmol⁻¹. Keď plyn nemení svoj objem, energiu získava len prostredníctvom tepla dodávaného zvonku.

Prijatím tepla sa zvyšuje vnútorná energia plynu o ΔU podľa vzťahu $Q = \Delta U$. Súvislosť medzi vnútornou energiou plynu s hmotnosťou m a strednou kinetickou energiou vyjadruje vzťah

$$U = n N_A e_k$$

kde N_A je Avogadrova konštanta $N_A = 6,022 \cdot 10^{26}$ kmol⁻¹, n je počet kilomólov plynu a e_k je stredná kinetická energia..

Pretože argón je jednoatómový plyn s počtom stupňov voľnosti $i = 3$, stredná kinetická energia je $e_k = \frac{3}{2} kT$ (k je Boltzmannova konštanta $k = 1,38.10^{-23}$ J·K⁻¹) a vnútorná energia

$$U = \frac{m}{M} N_A \frac{3}{2} kT$$

Potom

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} N_A \frac{3}{2} k\Delta T = \frac{m}{M} N_A \Delta e_k$$

a z toho pre zmenu strednej kinetickej energie platí

$$\Delta e_k = \frac{MQ}{mN_A} = \frac{33,9.3,52.10^3}{0,2.6,03.10^{26}} = 116,4.10^{-23} \text{ J}$$

Príklad 3:

Vyjadrite molárnu hmotnosť a počiatočný objem plynu, ktorý sme izotermicky stlačili, ak na konci stlačenia bol tlak n – násobný vzhlľadom na pôvodný tlak p_0 . Plyn má hmotnosť m a teplotu T_0 . Práca, ktorú je potrebné pri stláčaní vykonať, má hodnotu A .

Riešenie:

Neznámy počiatočný objem plynu označme V_0 . Pretože sa jedná o izotermický dej, konečný objem V_1 určíme pomocou Boyleovho – Mariottovho zákona

$$p_0 V_0 = pV = p_0 n V_1$$

$$V_1 = \frac{V_0}{n}$$

Prácu, ktorú vykonajú vonkajšie sily, vyjadríme vzťahom

$$A = \int_{V_0}^{V_1} p dV = p_0 V_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = p_0 V_0 [\ln V]_{V_0}^{V_1} = p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = p_0 V_0 \ln \frac{p_0}{np_0} = -p_0 V_0 \ln n$$

Pre počiatočný objem V_0 odtiaľ dostaneme

$$V_0 = \frac{|A|}{p_0 \ln n}$$

Neznámu molárnu hmotnosť M vyjadríme pomocou stavovej rovnice

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M} RT_0$$

$$p_0 \frac{|A|}{p_0 \ln n} = \frac{m}{M} RT_0$$

Potom

$$M = \frac{mRT_0 \ln n}{|A|}$$

Príklad 4:

Valcový zotrvačník s hmotnosťou $m = 2$ kg a s polomerom $r = 10$ cm roztočený na frekvenciu $f = 2$ Hz bol zabrzdený ponorením do olejového kúpeľa. Vypočítajte, ako sa zmenila entropia oleja, keď jeho hmotnosť je $m_1 = 10$ kg a špecifická tepelná kapacita $c = 2800 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Teplota oleja pred ponorením zotrvačníka mala hodnotu $t_1 = 20^\circ \text{C}$. Príspevok zotrvačníka ku zmene entropie zanedbajte.

Riešenie:

Pred ponorením do oleja mal zotrvačník kinetickú energiu

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{4} m r^2 4 \pi^2 f^2 = \pi^2 f^2 m r^2$$

Zabrzdením sa celá jeho kinetická energia premenila na teplo, ktoré prijal olej. Platí

$$Q = m_1 c (T_2 - T_1) = \pi^2 f^2 m r^2$$

Olej sa zohrial na teplotu

$$T_2 = T_1 + \frac{\pi^2 f^2 m r_2}{m_1 c}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{\pi^2 f^2 m r^2}{m_1 c T_1}$$

Zmenu entropie určíme z definície

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m_1 c dT}{T} = m_1 c \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Po dosadení predtým vyjadrených vzťahov platí

$$\Delta S = m_1 c \ln \left[1 + \frac{\pi^2 f^2 m r^2}{m_1 c T_1} \right] = 10.2800 \cdot \ln \left[1 + \frac{\pi^2 \cdot 50^2 \cdot 2.0 \cdot 1^2}{10.2800 \cdot 293,15} \right] = 1,684 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Príklad 5:

Vo valci s piestom a s výškou $h = 50 \text{ cm}$ je vzduch s teplotou $20 \text{ }^\circ\text{C}$ a s tlakom $p_1 = 10^5 \text{ Pa}$. Ako sa zmení tlak a teplota vzduchu, ak pri adiabatickom stlačení vzduchu sa piest vo valci posunie o $\Delta h = 20 \text{ cm}$. Poissonova konštanta vzduchu $\kappa = 1,4$.

Riešenie:

Adiabatický dej prebieha v tepelne izolovanej sústave, pričom platí rovnica

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$$

Objemy vzduchu pred a po stlačení sú

$$V_1 = \pi r^2 h \quad V_2 = \pi r^2 (h - \Delta h)$$

Tlak vzduchu po stlačení vyjadríme a vypočítame

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa = p_1 \left[\frac{\pi r^2 h}{\pi r^2 (h - \Delta h)} \right]^\kappa = p_1 \left(\frac{h}{h - \Delta h} \right)^\kappa = 10^5 \cdot \left(\frac{0,5}{0,5 - 0,2} \right)^{1,4}$$

$$p_2 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Pre adiabatický dej platí medzi objemom a teplotou vzťah

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1}$$

Pre teplotu po stlačení potom dostaneme

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = 293,15 \left(\frac{0,5}{0,3} \right)^{1,4-1} = 360,15 \text{ K} = 87,15 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Príklad 6:

Hélium s objemom $V_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ zväčšilo pri stálom tlaku $p_0 = 2,026 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ svoj objem na dvojnásobný. Vypočítajte teplo potrebné na túto zmenu, keď Poissonova konštanta hélia $\kappa = 1,67$.

Riešenie:

Platí 1. termodynamická veta v tvare

$$dQ = \frac{m}{M} C_V dT + p dV$$

Pre konečnú stavovú zmenu, pri ktorej ostáva konštantný tlak $p = p_0$ a objem sa zväčší na dvojnásobný $V = 2V_0$, po integrácii dostaneme

$$Q = \frac{m}{M} C_V (T - T_0) + p_0 V_0$$

Podľa stavovej rovnice môžeme však vyjadriť, že

$$\frac{m}{M} T - \frac{m}{M} T_0 = \frac{p_0 2V_0}{R} - \frac{p_0 V_0}{R} = \frac{p_0 V_0}{R}$$

Po dosadení potom potrebné teplo

$$Q = \frac{C_V}{R} p_0 V_0 + p_0 V_0 = \frac{C_V + R}{R} p_0 V_0$$

Potom s využitím Mayerovho vzťahu $C_p - C_V = R$ a definície Poissonovho koeficientu $C_p / C_V = \kappa$ dostávame

$$Q = \frac{C_p}{R} p_0 V_0 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_0 V_0 = \frac{1,67}{1,67 - 1} 2,026 \cdot 10^5 3 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 1515 \text{ J}$$

ÚLOHY

1. Vo valci s pohyblivým piestom je 36 g vodíka s teplotou $27 \text{ } ^\circ\text{C}$ a tlakom $4,04 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Stlačením na $1/3$ pôvodného objemu sa vynaložila práca $1,5 \cdot 10^5 \text{ J}$ a súčasne chladením sa odvieďlo teplo $5,95 \cdot 10^4 \text{ J}$. Určte teplotu a tlak vodíka po stlačení, keď špecifická tepelná kapacita vodíka je $1,013 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

- [548 K; $2,226 \cdot 10^6$ Pa]
- Pri izotermickom deji klesol tlak 1 mólu plynu z hodnoty $10,01 \cdot 10^5$ Pa na $0,01 \cdot 10^5$ Pa. Akú prácu vykonal plyn pri teplote 200°C ?
[5200 J]
 - V uzatvorenej nádobe s objemom 20 l je 4 kg stlačeného kyslíka pri teplote 15°C . Vypočítajte jeho tlak. Plynová konštanta $R = 8314 \text{ J}\cdot\text{kmol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
[15 MPa]
 - Vypočítajte, pri akej teplote zaujíma plyn pri konštantnom tlaku $2/3$ objemu, aký mal pri teplote 0°C .
[$-91,05^\circ\text{C}$]
 - Vo valci s piestom je kyslík, ktorého počiatočný stav je určený veličinami $p = 10^5$ Pa, $V = 0,6 \text{ m}^3$, $t = 27^\circ\text{C}$. Vypočítajte hmotnosť plynu a počet kilomólov plynu.
[0,77 kg; 0,024]
 - Bomba obsahuje pri teplote 27°C a tlaku $4,12 \cdot 10^5$ Pa stlačený plyn. Vypočítajte, aký tlak bude mať plyn, ak polovičné množstvo plynu vypustíme a teplota pritom klesne o 15°C .
[196 kPa]
 - Ak ohrejeme o 150°C plyn v uzatvorenej nádobe, zvýši sa jeho tlak o 40 %. Vypočítajte počiatočnú a konečnú teplotu plynu.
[102°C ; 252°C]
 - Vzduchu s hmotnosťou 0,5 kg a s teplotou 35°C sme dodali pri stálom tlaku $9,8 \cdot 10^4$ J tepla. Vypočítajte, na akú teplotu sa vzduch ohrial. Špecifická tepelná kapacita vzduchu je $716 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, molárna hmotnosť $28,6 \text{ kg}\cdot\text{kmol}^{-1}$.
[231°C]
 - Koľko pary s teplotou 100°C treba priviesť do 800 l vody s teplotou 12°C , aby sa voda dostala do varu? Špecifická tepelná kapacita pary je $4186 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, skupenské teplo vyparovania je $2,25 \cdot 10^6 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$.
[6 kg]
 - Vypočítajte, aké množstvo ľadu s teplotou 0°C musíme zmiešať so 6 kg vody s teplotou 90°C , aby výsledná teplota vody v kalorimetri bola 5°C . Tepelnú kapacitu kalorimetra zanedbáme. Špecifická tepelná kapacita vody je $4186 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, skupenské teplo topenia je $3,3 \cdot 10^5 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$.
[6 kg]
 - Do pece sme vložili platinovú guľu o hmotnosti 100 g. Hneď po vybratí z pece sme guľu vložili do mosadzného kalorimetra o hmotnosti 200 g, ktorý obsahuje 1 kg vody teploty 10°C . Určte teplotu pece, ak sa teplota vody ustálila na 14°C . Špecifická tepelná kapacita platiny je $133,9 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, mosadze $0,4 \cdot 10^3 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
[$1288,4^\circ\text{C}$]
 - Vypočítajte, akou rýchlosťou musí naraziť olovená guľôčka na prekážku, aby sa ohriala o 100°C . Predpokladáme, že pri náraze sa polovica kinetickej energie zmenenej na teplo spotrebuje na ohriatie guľôčky. Špecifická tepelná kapacita olova je $0,1 \cdot 10^3 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
[$200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$]
 - Jeden mól plynu pri izotermickej expanzii pri teplote 27°C vykonal prácu 2,5 kJ. Koľkokrát sa zväčšil jeho objem?
[1000-krát]
 - Pomocou kinetickej teórie plynov určte špecifickú tepelnú kapacitu pri stálom objeme

- pre dusík ^{14}N . Plynová konštanta $R = 8314 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
 $[742,32 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}]$
15. Pri akej teplote je stredná kvadratická rýchlosť molekúl dusíka polovičná, ako je pri teplote 20°C ?
 $[-200^\circ\text{C}]$
 16. Vypočítajte prácu plynu pri izobarickom ohriatí $1,6 \text{ kg}$ kyslíka o 10°C .
 $[4,157 \text{ kJ}]$
 17. Vypočítajte, aká je stredná kvadratická rýchlosť a stredná kinetická energia molekúl dusíka pri teplote -200°C . Avogadrova konštanta $N_A = 6,02\cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$, plynová konštanta $R = 8314 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
 $[329,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}; 2,5\cdot 10^{-21} \text{ J}]$
 18. Hustota vzduchu pri teplote 27°C a tlaku $202,65 \text{ kPa}$ je $2,35 \text{ g/l}$. Aká je hustota vzduchu pri tlaku $101,32 \text{ kPa}$ a teplote 0°C ?
 $[1,29 \text{ g/l}]$
 19. Teplota vzduchu klesne na polovicu, keď sa vzduch adiabaticky rozpína na dvojnásobnú hodnotu svojho počiatočného objemu. Aká je počiatočná teplota vzduchu? (Poissonova konštanta $\kappa = 1,4$).
 $[256,36^\circ\text{C}]$
 20. 1 kg vzduchu pri teplote 30°C a tlaku $1,52\cdot 10^5 \text{ Pa}$ adiabaticky expanduje a jeho tlak klesne na $1,013\cdot 10^5 \text{ Pa}$. Určte výslednú teplotu vzduchu a veľkosť práce, ktorá sa vykoná v priebehu expanzie. Poissonova konštanta $\kappa = 1,4$; špecifická tepelná kapacita je $20930 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; molárna hmotnosť $28,96 \text{ kg/kmol}$.
 $[-4,2^\circ\text{C}; 2,47\cdot 10^4 \text{ J}]$
 21. Teplota pary, ktorá prichádza z parného kotla do valca tepelného motora, je 210°C a teplota chladiča je 40°C . Akú maximálnu prácu vykoná motor pri jednom obehu, ak privádzané teplo je 4186 J ?
 $[1473,47 \text{ J}]$
 22. 1 kg kyslíka s počiatočnou teplotou 20°C a tlakom 10^5 Pa je stlačený na tlak $2\cdot 10^6 \text{ Pa}$. Vypočítajte prácu vykonanú pri izotermickej a adiabetickej kompresii.
 $[-2,28\cdot 10^5 \text{ J}; -2,58\cdot 10^5 \text{ J}]$
 23. Vypočítajte, ako sa izobaricky a izochoricky zmení entropia 2 g dusíka, keď ho ohrejeme z teploty 0°C na 30°C (špecifická tepelná kapacita je $742 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, Poissonova konštanta $\kappa = 1,4$).
 $[0,154 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}; 0,2165 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}]$
 24. Dokážte, že celková zmena entropie ideálneho plynu v Carnotovom cykle je nulová.

MECHANIKA IDEÁLNYCH TEKUTÍN

Ideálna kvapalina je nestlačiteľná a nevzniká v nej vnútorné trenie.

Základná rovnica hydrostatiky – súčet hydrostatického tlaku a potenciálnej energie jednotkového objemu kvapaliny je konštantný

$$p + \rho V = \text{konšt.}$$

ρ je hustota kvapaliny a V je potenciál silového poľa.

Hydrostatický tlak p v kvapaline je sila, ktorá pôsobí na plochu kvapaliny

$$p = \frac{dF}{dS}$$

Pascalov zákon – tlak v kvapaline pôsobí vo všetkých smeroch rovnako

$$p = \text{konšt.}$$

Tlak p v hĺbke h pod povrchom kvapaliny (g je tiažové zrýchlenie)

$$p = \rho gh$$

Torricelliho vzťah určuje výtokovú rýchlosť kvapaliny v otvorom z nádoby v hĺbke h pod povrchom kvapaliny vplyvom vlastnej tiaže kvapaliny

$$v = \sqrt{2gh}$$

Rozdiel tlakov v dvoch rôznych miestach kvapaliny (V_1 a V_2 sú potenciály silového poľa v týchto miestach kvapaliny)

$$p_2 - p_1 = \rho(V_2 - V_1)$$

Rozdiel tlakov v dvoch rôznych miestach rotujúcej kvapaliny (r_1 , r_2 sú vzdialenosti týchto miest od osi rotácie, ω je uhlová rýchlosť rotácie)

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \omega^2 \rho (r_2^2 - r_1^2)$$

Ak kvapalina rotuje v gravitačnom poli, je celkový potenciál vo vzdialenosti r od osi rotácie a vo výške h rovný $V = hg - \frac{1}{2} r^2 \omega^2$. Rovnica rotačného paraboloidu, ktorý zaujme hladina rotujúcej kvapaliny je (h_0 je výška hladiny kvapaliny v osi rotácie)

$$h = h(r) = h_0 + \frac{1}{2g} r^2 \omega^2$$

Bernoulliho rovnica vyjadruje, že pri ustálenom nevírivom prúdení ideálnej kvapaliny je súčet kinetickej a potenciálnej energie objemovej jednotky kvapaliny a tlaku rovnaký

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho V + p = \text{konšt.}$$

Rovnica kontinuity

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

S_1 a S_2 sú dva rôzne prierezy trubice, v_1 a v_2 sú rýchlosti prúdenia kvapaliny v týchto prierezoch.

Stokesov zákon

$$F = 6\pi\eta rv$$

F je odpor, ktorý kladie kvapalina pohybu telesa, r je polomer telesa guľového tvaru, η je viskozita a v je rýchlosť pohybujúceho sa telesa.

Hydrostatická vztlaková sila F_{VZ}

$$F_{VZ} = \rho h_2 g S - \rho h_1 g S = \rho g S (h_2 - h_1) = \rho g S h$$

h je výška kvádra ponoreného do kvapaliny, $V = Sh$ je objem kvádra, $m = \rho Sh = \rho V$ je hmotnosť kvapaliny rovnakého objemu, ako je objem ponoreného telesa, $\rho Shg = \rho Vg = mg$ je tiaž kvapaliny tohto objemu.

Archimedov zákon

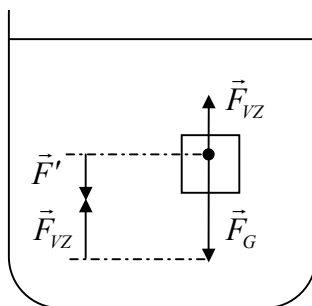
Na teleso ponorené do kvapaliny pôsobí hydrostatická vztlaková sila, ktorej veľkosť sa rovná tiaži kvapaliny rovnakého objemu, ako je objem ponorenej časti telesa.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Oceľová kocka s hustotou $\rho_1 = 7,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a dĺžkou hrany $l = 0,3 \text{ m}$ je zavesená na silomere a celá je ponorená do vody s hustotou $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Silomer je napínaný silou $F = 400 \text{ N}$. Určte, či je kocka plná, alebo má dutinu.

Riešenie:



Sila $F' = F_G - F_{VZ}$ je sila, ktorou by bol napínaný silomer. Tiaž $F_G = mg = \rho_1 Vg = \rho_1 l^3 g$ a vztlaková sila $F_{VZ} = \rho Vg = \rho l^3 g$. Potom

$$F' = \rho_1 l^3 g - \rho l^3 g = l^3 g (\rho_1 - \rho)$$

a číselne

$$F' = 0,03^2 \cdot 9,81 (7,7 \cdot 10^3 - 10^3) = 1770 \text{ N}$$

Pretože $F' > F$, musí mať oceľová kocka dutinu.

Príklad 2:

Akou rýchlosťou prúdi voda s hustotou $\rho = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ vodorovnou trubicou s plošným obsahom prierezu $S_1 = 15 \text{ cm}^2$, keď v zúženom mieste s plošným obsahom prierezu $S_2 = 5 \text{ cm}^2$ sa tlak zníži o $\Delta p = 5 \text{ kPa}$?

Riešenie:

Pri prúdení vody trubicou platí Bernoulliho rovnica a rovnica kontinuity

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Zmenu tlaku vyjadríme ako $\Delta p = p_1 - p_2$, z čoho pre tlak v širšej časti trubice platí

$$p_1 = \Delta p + p_2$$

Uplatnením Bernoulliho rovnice a rovnice kontinuity dostaneme

$$\Delta p + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} v_1^2 \right)$$

Z toho

$$v_1 = \frac{\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]}}}{\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]}}} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3}{10^3 \left[\left(\frac{15 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} \right)^2 - 1 \right]}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3}{10^3 \left[\left(\frac{15 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} \right)^2 - 1 \right]}}} = \sqrt{\frac{10}{8}} = \sqrt{1,25} = 1,12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Príklad 3:

Za aký čas vytečie polovica kvapaliny z valcovej nádoby s prierezom S malým kruhovým otvorom na dne s prierezom S_1 , keď výtokový koeficient $\varepsilon = 0,6$ a hladina kvapaliny vo valci je vo výške h ?

Riešenie:

Podľa Torricelliho vzťahu je výtoková rýchlosť v v čase, keď hladina klesla o hodnotu x

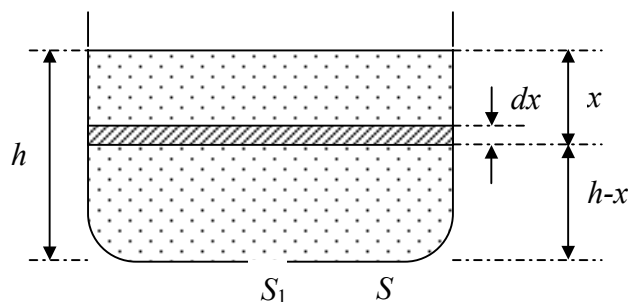
$$v = \sqrt{2g(h-x)}$$

Objemový element kvapaliny, ktorá v tomto okamžiku vytečie za elementárny čas dt , je $dV = \varepsilon S_1 v dt$ a súčasne platí $dV = S dx$.

Potom

$$\varepsilon S_1 v dt = \varepsilon S_1 \sqrt{2g(h-x)} = S dx$$

$$dt = \frac{S dx}{\varepsilon S_1 \sqrt{2g(h-x)}}$$



Hľadaný čas dostaneme integráciou

$$t = \frac{S}{\varepsilon S_1 \sqrt{2g}} \int_0^{h/2} \frac{dx}{\sqrt{h-x}} = \frac{S}{\varepsilon S_1 \sqrt{2g}} \left[-2\sqrt{h-x} \right]_0^{h/2} = \frac{S}{S_1 \varepsilon \sqrt{2g}} \left[-2\sqrt{\frac{h}{2}} + 2\sqrt{h} \right]$$

$$t = \frac{S}{S_1 \varepsilon} \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \frac{S}{S_1 \varepsilon} \sqrt{\frac{h}{g}} (\sqrt{2} - 1)$$

Príklad 4:

Vo výške h_1 nad zemským povrchom je tlak $p_1 = 50,6$ kPa. Určte výšku h_1 , keď pri zemskom povrchu je tlak $p_0 = 101,3$ kPa a hustota vzduchu $\rho_0 = 1,293$ kg·m⁻³. Predpokladáme, že teplota vzduchu je v každej výške rovnaká. Zmenu tiažového zrýchlenia so zmenou výšky nad zemským povrchom zanedbajte.

Riešenie:

Cieľom úlohy je odvodiť funkciu pre vyjadrenie závislosti medzi výškou nad povrchom a veľkosťou atmosferického tlaku.

Vychádzame zo zákona zachovania energie. Z neho vyjadríme, že súčet potenciálnej energie objemovej jednotky plynu a atmosferického tlaku je v každej výške nad zemským povrchom rovnaký

$$\rho gh + p = \text{konšt.}$$

Derivovaním tejto rovnice podľa premennej h dostaneme

$$\rho g + \frac{dp}{dh} = 0$$

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g$$

Závislosť hustoty plynu od tlaku pri konštantnej teplote určíme z Boyleovho - Mariottovho zákona

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{\frac{m}{\rho_0}}{\frac{m}{\rho}} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$$

Dosadením do rovnice $\frac{dp}{dh} = -\rho g$ dostaneme diferenciálnu rovnicu, ktorú riešime separáciou premenných a integráciou

$$\frac{dp}{dh} = -\rho_0 g \frac{p}{p_0}$$

$$\frac{dp}{p} = -g \frac{\rho_0}{p_0} dh$$

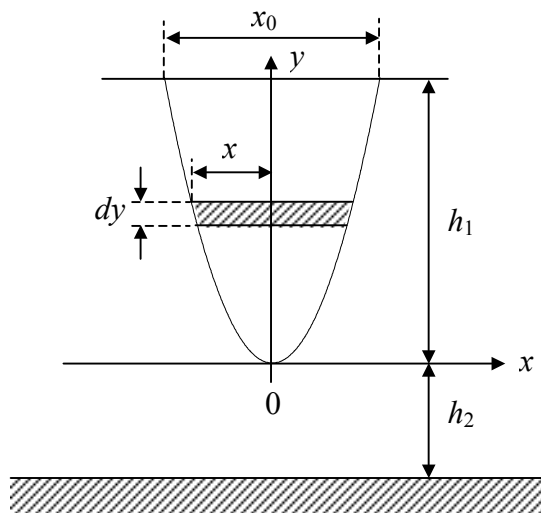
$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{1}{p} dp = -g \frac{\rho_0}{p_0} \int_0^{h_1} dh$$

$$\ln p_1 - \ln p_0 = -g \frac{\rho_0}{p_0} h_1$$

$$h_1 = -\frac{p_0}{g\rho_0} \ln \frac{p_1}{p_0} = \frac{p_0}{g\rho_0} \ln \frac{p_0}{p_1} = \frac{101,3 \cdot 10^3}{9,81 \cdot 1,293} \ln \frac{101,3}{50,6} = 5543,52 \text{ m}$$

ÚLOHY

1. V priehradnom múre je výpustný otvor tvaru paraboly, ktorej základňa je v hĺbke $h_1 = 7 \text{ m}$ a vrchol v hĺbke $h_2 = 3 \text{ m}$. Určte celkovú silu, ktorá tlačí na uzáver otvoru, keď šírka základne parabolického otvoru je $x_0 = 2 \text{ m}$.



[282,53 · 10³ N]

2. Do akej výšky treba naplniť trubicu ortuťou za atmosferického tlaku 10⁵ Pa, aby na jej dne bol tlak 9,81 MPa? Hustota ortuti 13,6 · 10³ kg/m³.
[72,8 m]
3. Zvisle postavená trubica tvaru U má obidva ramená s rovnakým prierezom s obsahom 5 cm² čiastočne naplnené ortuťou s hustotou 13,6 g/cm³. Určte, aký objem vody s hustotou 1 g/cm³ musíme naliať do jedného ramena, aby voľná hladina ortuti v druhom ramene bola 2 cm nad spoločným rozhraním.

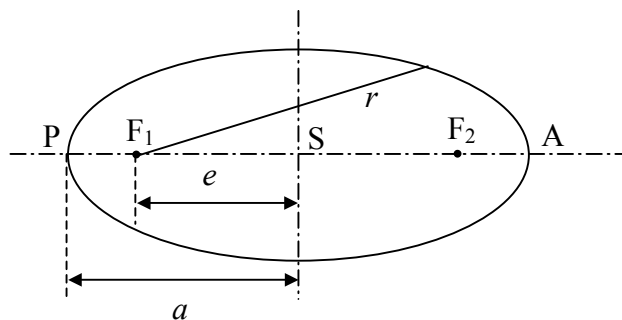
- [108,8 cm³]
4. Polomer kruhovej podstavy menšieho piesta hydraulického lisu je 4 cm. Aký polomer má kruhová podstava väčšieho piestu, ak sila 80 N vyvolá tlakovú silu 11520 N?
[0,48 m]
 5. Plošné obsahy prierezov valcov hydraulického lisu sú 0,0012 m² a 108 cm². Akou tlakovou silou pôsobí väčší piest, ak na menší piest pôsobí sila 100 N? O koľko sa posunie väčší piest, ak na malý piest pôsobí sila po dráhe 126 mm?
[900 N; 0,014 m]
 6. Nádobu tvaru valca s plošným obsahom prierezu 35 cm² a výškou 15 cm bola naplnená vodou, prikrytá papierom a obrátená dnom nahor do zvislej polohy. Vypočítajte, akou silou je pritláčaný papier k nádobe pri atmosferickom tlaku $1,013 \cdot 10^5$ Pa. Hustota vody je 10³ kg/m³.
[349 N]
 7. Vodorovnou trubicou v mieste s plošným obsahom prierezu 20 cm² prúdi voda rýchlosťou 8 m/s. Tlak vody je $1,08 \cdot 10^5$ Pa. Akú rýchlosť a tlak má voda v rozšírenom mieste trubice s plošným obsahom prierezu 50 cm²? Hustota vody 10³ kg/m³.
[4 m/s; $1,32 \cdot 10^5$ Pa]
 8. Vypočítajte, akou rýchlosťou prúdi voda vodorovnou trubicou v mieste s plošným obsahom prierezu 15 cm², keď v zúženom mieste, kde tlak sa zníži o 5 kPa, je plošný obsah prierezu trubice 5 cm². Hustota vody 10³ kg/m³.
[1,12 m/s]
 9. Do nádoby priteká voda tak, že za 1 s pritečie 0,2 l vody. Aký musí byť priemer otvoru na dne nádoby, aby sa výška voľnej hladiny vody v nádobe udržala na stálej hodnote 8,3 cm?
[$1,4 \cdot 10^{-2}$ m]
 10. V stene nádoby naplnenej vodou je otvor v hĺbke 45 cm pod voľnou hladinou. Nádobu stojí na okraji stola, takže otvor je vo výške 80 cm nad podlahou. V ktorom mieste dopadne vodný lúč na podlahu?
[1,2 m]
 11. Voda preteká potrubím s priemerom $d = 12$ cm rýchlosťou $v = 6$ m/s. Ako sa zmení rýchlosť vody v potrubí, ak sa priemer
 - a) zväčší na $d_1 = 24$ cm,
 - b) zmenší na $d_2 = 6$ cm?
 [1,5 m/s; 12 m/s]
 12. Vodný prúd s rýchlosťou $v = 2$ m/s v potrubí spôsobí, že voda v manometrickej trubici vystúpi do výšky $h = 60$ cm. Aká je celková energia 1 m³ prúdiacej vody?
[$7,866 \cdot 10^3$ J/m³]
 13. Voda preteká vodorovnou trubicou s priemerom $d_1 = 4$ cm rýchlosťou $v_1 = 1,41$ m/s. V jednom mieste sa trubica zužuje na priemer $d_2 = 1,5$ cm. Aký je tlak v zúženom mieste, ak v širšej trubici je tlak $1,212 \cdot 10^5$ Pa?
[$71,9 \cdot 10^3$ Pa]
 14. Tiaž bronzovej kocky vo vzduchu je 6300 N a vo vode 5540 N. Vypočítajte percentuálne zastúpenie medi a cínu v kocke. Hustota medi je $8,8 \cdot 10^3$ kg·m⁻³, hustota cínu $7,3 \cdot 10^3$ kg·m⁻³, hustota vody 10³ kg·m⁻³.
[70 % medi, 30 % cínu]
 15. Balón s hmotnosťou 600 kg a objemom 800 m³ stúpa nahor. Do akej výšky balón vystúpi za prvých 10 s pohybu? Hustota vzduchu je 1,29 kg·m⁻³.
[353 m]

FYZIKÁLNE POLIA

GRAVITAČNÉ POLE

Keplerove zákony popisujú planetárny pohyb:

1. Planéty sa pohybujú okolo Slnka po eliptických dráhach, v ktorých spoločnom ohnisku F_1 je Slnko.



S – stred elipsy

F_1, F_2 – ohniská

e – lineárna výstrednosť elipsy

$\varepsilon = \frac{e}{a}$ (numerická) výstrednosť

elipsy

a – dĺžka hlavnej poloosi

P – perihélium

A – afélium

2. Plochy opísané sprievodičom (spojnica planéta – Slnko r) za ten istý čas sú rovnaké.
 3. Druhé mocniny obežných dôb planét sú úmerné tretím mocninám ich hlavných poloosí.
- Newtonov gravitačný zákon** vyjadruje príťažlivé silové účinky hmotných objektov. Pre hmotné body s hmotnosťami m, m' platí

$$\vec{F} = -\kappa \frac{mm'}{r^2} \vec{r}_0$$

$\vec{r}_0$ je jednotkový vektor v smere vektora $\vec{F}$, κ je gravitačná konštanta, r je vzdialenosť hmotných bodov, ktoré pôsobia na seba silou $\vec{F}$.

Intenzita gravitačného poľa $\vec{E}$ sa číselne rovná sile pôsobiacej na teleso s jednotkovou hmotnosťou

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{m'} = -\kappa \frac{m}{r^2} \vec{r}_0$$

Intenzita gravitačného poľa prislúchajúca sústave hmotných bodov, resp. telesu spojite vyplnenému hmotou

$$\vec{E}(r) = -\kappa \int \frac{dm}{r^2} \vec{r}_0 = -\kappa \int \frac{1}{r^2} \rho dV \vec{r}_0$$

ρ je hustota telesa a dm (dV) je hmotnostný (objemový) element telesa.

Potenciál gravitačného poľa V predstavuje prácu, ktorú vykonáme, keď preniesieme jednotkovú hmotnosť z nekonečna na dané miesto ($V(\infty) = 0$)

$$V(r) = \frac{E_p}{m'} = -\kappa \frac{m}{r}$$

$$V(r) = -\kappa \int \frac{dm}{r} = -\kappa \int \frac{\rho}{r} dV$$

Vzťah medzi intenzitou $\vec{E}$ a potenciálom V gravitačného poľa

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Gravitačné zrýchlenie $\vec{a}_g$ v každom bode gravitačného poľa sa rovná intenzite gravitačného poľa v tomto mieste

$$\vec{a}_g = \vec{E} = -\kappa \frac{M}{R^2} \vec{r}_0$$

M je hmotnosť Zeme, R je polomer Zeme a $\vec{r}_0$ je jednotkový vektor v smere polomeru R .

Intenzita gravitačného poľa Zeme vo výške h nad jej povrchom

$$\vec{E} = -\kappa \frac{M}{(R+h)^2} \vec{r}_0 = \vec{a}_g$$

Tiaž $\vec{G} = m\vec{g}$ je výslednica gravitačnej a zotrvačnej odstredivej sily, $\vec{g}$ je tiažové zrýchlenie, ktoré závisí od zemepisnej šírky.

Prvá kozmická rýchlosť je počiatočná rýchlosť telesa pri vodorovnom vrhu zo Zeme, ktorá zabezpečí, že teleso sa už na Zem nevráti a zostane jeho obežnicou

$$v_1 = R \left(\frac{g}{R+h} \right)^{1/2}$$

$$v_1 \approx (Rg)^{1/2} \approx 7,912 \text{ km/s na povrchu Zeme.}$$

Druhá kozmická rýchlosť (úniková rýchlosť) je počiatočná rýchlosť telesa vystreleného zo Zeme, ktorá mu umožní vymaniť sa z gravitačného poľa Zeme

$$v_2 = \left(\frac{2\kappa M}{R} \right)^{1/2} \approx 11,2 \text{ km/s}$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Planéta obieha okolo Slnka po eliptickej dráhe s výstrednosťou $\varepsilon = 0,1$. Určte rýchlosť planéty v aféliu, ak poznáme jej rýchlosť v perihéliu $v_1 = 10 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Riešenie:

Ak považujeme planétu za hmotný bod obiehajúci okolo pevného bodu (Slnka), vplyvom centrálnej príťažlivej sily je jej moment hybnosti daný $b = mvr$. Ak moment hybnosti planéty v perihéliu je b_1 a v aféliu b_2 , potom platí

$$b_1 = mv_1(a - e) \quad b_2 = mv_2(a + e)$$

pričom e je lineárna výstrednosť (vzdialenosť ohniska eliptickej dráhy od stredu elipsy) a a je hlavná poloos elipsy.

Z rovnosti momentov hybnosti planéty v oboch stavoch vyplýva

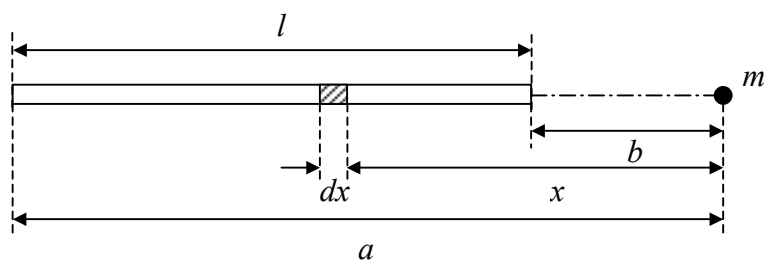
$$b_1 = b_2 \\ v_1(a - e) = v_2(a + e)$$

Z toho

$$v_2 = v_1 \frac{(a - e)}{(a + e)} = v_1 \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = 10 \frac{1 - 0,1}{1 + 0,1} = 10 \frac{0,9}{1,1} = 8,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Príklad 2:

Gulička s hmotnosťou m leží vo vzdialenosti a od vzdialenejšieho a vo vzdialenosti b od bližšieho konca tenkej homogénnej tyče dĺžky l a hmotnosti M . Stred guličky leží na predĺženej osi tyče. Určte silu, ktorou sa obe telesá navzájom priťahujú.

Riešenie:

Celkovú príťažlivú silu F dostaneme integráciou elementárnych síl dF , pričom podľa gravitačného zákona platí

$$dF = \kappa \frac{m \frac{M}{l} dx}{x^2} = \kappa \frac{mM dx}{l x^2}$$

kde $\frac{M dx}{l}$ je hmotnosť elementu tyče dx a x je vzdialenosť tohto elementu od stredu

guličky. Integráciou dostaneme hľadanú silu $F = \int_b^a dF$

$$F = \int_b^a \kappa \frac{mM dx}{l x^2} = \kappa \frac{mM}{l} \int_b^a x^{-2} dx = \kappa \frac{mM}{l} \left[-\frac{1}{x} \right]_b^a = \kappa \frac{mM}{l} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \kappa \frac{mM(a - b)}{lab}$$

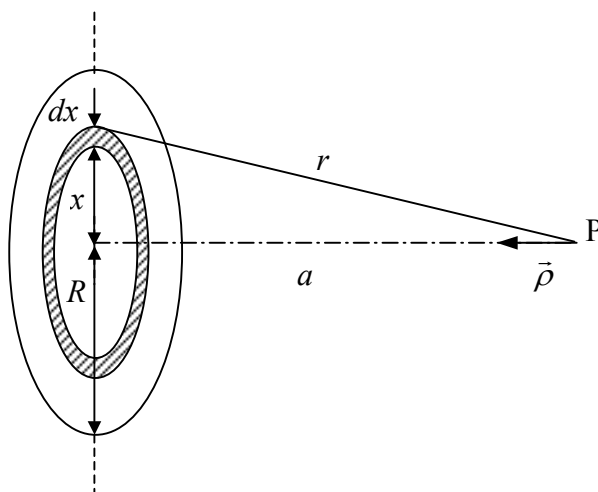
Pretože $a - b = l$, dostávame výsledok

$$F = \kappa \frac{mM}{ab}$$

Príklad 3:

Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa kruhovej dosky (so zanedbateľnou hrúbkou) s hmotnosťou m a polomerom R v bode P na osi kolmej na dosku, ktorá prechádza jej stredom, vo vzdialenosti a od stredu dosky.

Riešenie:



Príspevok elementu dm dosky, ktorý má tvar medzikružia so šírkou dx , k celkovému potenciálu v bode P je daný

$$dV = -\kappa \frac{dm}{r} = -\kappa \frac{\frac{m}{R^2} 2\pi x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Potenciál cez celú dosku dostaneme integráciou

$$V = -\kappa \frac{2m}{R^2} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = -\kappa \frac{2m}{R^2} \left[\sqrt{x^2 + a^2} \right]_0^R = -\kappa \frac{2m}{R^2} \sqrt{R^2 + a^2} - a$$

Pre intenzitu gravitačného poľa v bode P môžeme potom napísať

$$\vec{E} = -\text{grad} V = \frac{dV}{da} \vec{\rho} = -\kappa \frac{2m}{R^2} \left[\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} - 1 \right] \vec{\rho} = \kappa \frac{2m}{R^2} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right] \vec{\rho}$$

Príklad 4:

Vypočítajte, akou rýchlosťou vnikne do atmosféry, t.j. do vzdialenosti $R = 6400$ km od stredu Zeme, meteor, ktorý priletel z veľmi veľkej vzdialenosti $r \rightarrow \infty$, v ktorej mal rýchlosť $v_0 = 5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Gravitačné polia ostatných telies slnečnej sústavy zanedbajte.

Riešenie:

Podľa zákona zachovania energie platí pre vzdialenosti r a R

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \kappa \frac{mM}{r} = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM}{R}$$

Z toho

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\kappa M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)}$$

a pre $r \rightarrow \infty$

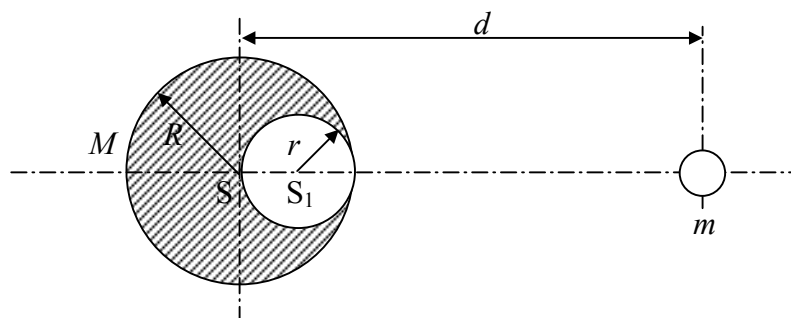
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\kappa \frac{M}{R}}$$

Pretože platí $\kappa \frac{M}{R} = gR$, môžeme vzťah upraviť

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR} = \sqrt{25 + 2 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} \cdot 6400} = 12,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

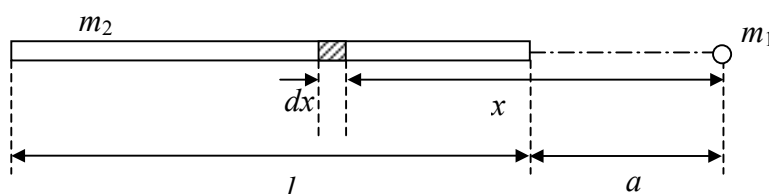
ÚLOHY

1. Planéta obiehajúca okolo Slnka s dobou obehu 365 dní je vzdialená od Slnka v perihéliu $1,47 \cdot 10^8$ km. Určte vzdialenosť planéty od Slnka v aféliu, ak hmotnosť Slnka je $M_S = 1,96 \cdot 10^{30}$ kg.
[$1,5 \cdot 10^8$ km]
2. Overte, že dostredivá sila kruhového pohybu Mesiaca je rovná príťažlivej sile Zeme. Hmotnosť Zeme je $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, vzdialenosť Zeme a Mesiaca je $3,84 \cdot 10^8$ m a obežná doba Mesiaca $2,36 \cdot 10^6$ s.
[$a_n = g = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$]
3. V ktorom mieste na spojnici Zem - Mesiac sa intenzita spoločného gravitačného poľa rovná nule, keď hmotnosť Mesiaca je $1/81$ hmotnosti Zeme? Vzdialenosť Zem – Mesiac je $d = 3,84 \cdot 10^8$ m.
[$0,9d$ od Zeme]
4. V kovovej guli s polomerom R je vytvorená dutina guľového tvaru s polomerom $r = R/2$. Určte, akou silou bude pôsobiť takto vzniknutý útvar na guľôčku s hmotnosťou m , ktorá je vo vzdialenosti d od stredu pôvodnej kovovej gule s hmotnosťou M .



$$\left[\kappa m M \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8(d - R/2)^2} \right) \right]$$

5. Akú rýchlosť treba udeliť telesu v rovníkovej rovine a vo výške 500 km nad zemským povrchom, aby sa pohybovalo ako umelá družica Zeme po kruhovej dráhe, keď polomer Zeme $R = 6378$ km?
[$7,6 \cdot 10^3$ m/s]
6. Teleso bolo vrhnuté zo zemského povrchu zvisle nahor. Do akej výšky vystúpi a aká by musela byť počiatočná rýchlosť v_0 , aby teleso nespadlo späť na Zem?
[$\frac{v_0^2}{2gR - v_0^2} R$; $11,2 \cdot 10^3$ m/s]
7. Akú výšku nad povrchom Zeme musí mať v rovníkovej rovine televízny stacionárny satelit, aby bol stále v rovnakej vzdialenosti od povrchu Zeme? Akou rýchlosťou sa musí pohybovať? Polomer Zeme $R = 6378$ km.
[$3,6 \cdot 10^4$ km; $3,07$ km/s]
8. Gulôčka s hmotnosťou m_1 leží vo vzdialenosti a od konca tenkej priamej homogénnej tyče s hmotnosťou m_2 a s dĺžkou l . Stred gulôčky leží na pozdĺžnej osi tyče. Určte silu, ktorou na seba telesá pôsobia.



$$\left[\kappa \frac{m_1 m_2}{a(a+l)} \right]$$

9. Aká by musela byť rotácia Zeme okolo svojej osi, aby sa človek stojaci na rovníku vznášal? Polomer Zeme $R = 6378$ km, hmotnosť Zeme $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg.
[1,4 h]
10. Čierna diera je definovaná ako astronomický útvar s únikovou rýchlosťou $v_2 \geq c$, kde $c = 3 \cdot 10^8$ m/s je rýchlosť svetla vo vákuu. Dokážte, že priestor s hmotnosťou $\approx 10^{54}$ kg a polomerom $\approx 10^{10}$ m dostupný našim astronomickým pozorovaniam sa navonok chová ako čierna diera.
11. Vypočítajte hmotnosť Slnka, ak viete, že Zem s hmotnosťou $6 \cdot 10^{24}$ kg obieha okolo Slnka po približne kruhovej dráhe s polomerom $1,5 \cdot 10^{11}$ m. Zem a Slnko považujte za hmotné body.
[$2 \cdot 10^{30}$ kg]

POHYB TELIES V GRAVITAČNOM POLI

Uvažujme pohyb telies v gravitačnom poli bez odporu prostredia.

Voľný pád je rovnomerne zrýchlený pohyb, ktorý vykonávajú všetky telesá voľne pustené v gravitačnom poli.

Rýchlosť v a dráha s voľného pádu (g je tiažové zrýchlenie)

$$v = gt + v_0$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

Šikmý vrh je pohyb, ktorý vzniká v gravitačnom poli pri nenulovej počiatočnej rýchlosti v_0 odlišnej čo do smeru od gravitačnej sily. Vektor $\vec{v}_0$ zvierá s osou x elevačný uhol α .

Karteziánske zložky rýchlosti a príslušné súradnice dráhy šikmého vrhu sú

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha & v_y &= v_0 \sin \alpha - gt \\ x &= v_0 t \cos \alpha & y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Čas potrebný na dosiahnutie maximálnej výšky h pri šikmom vrhu

$$t_h = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$$

Čas dopadu telesa na Zem pri šikmom vrhu

$$t_D = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha = 2t_h$$

Výška, ktorú dosiahne teleso pri šikmom vrhu

$$h = y_h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

Pre elevačný uhol $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je dosiahnutá výška maximálna a platí $y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Dolet telesa pri šikmom vrhu

$$x_D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Pre elevačný uhol $\alpha = \frac{\pi}{4}$ je dolet telesa maximálny a platí $x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$. Dolet telesa je

rovnaký pre elevačný uhol α a uhol $(90 - \alpha)$.

Vodorovný vrh je špeciálny prípad šikmého vrhu pre $\alpha = 0$. Karteziánske súradnice a zložky rýchlosti sú

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 & v_y &= -gt \\ x &= v_0 t & y &= -\frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Pre prípad, keď $y = 0$ je na povrchu zeme a vodorovný vrh začína vo výške h (napr. výtok kvapaliny z nádoby cez otvor v stene vo výške h od jej dna)

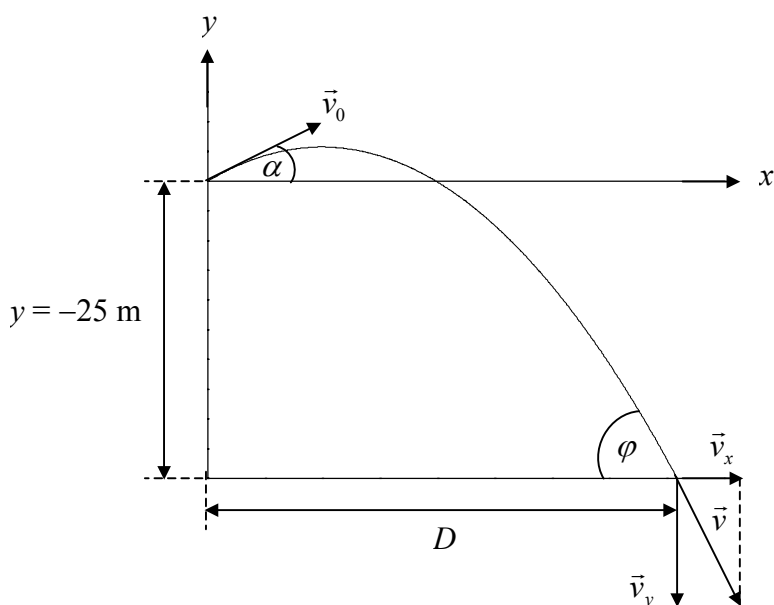
$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Z veže vysokej 25 m bol vrhnutý kameň s počiatočnou rýchlosťou $v_0 = 15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ pod uhlom 30° k vodorovnej hladine. Určte

- za aký čas a v akej vzdialenosti od veže padne na zem,
- aká bude rýchlosť dopadu,
- aký uhol φ zvierá dráha kameňa s vodorovnou rovinou v bode dopadu.



Riešenie:

Pre šikmý vrh platí

$$x = v_0 t \cos \alpha \qquad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Súradnicovú sústavu xy zvolíme tak, že vrchol veže je v počiatku. Potom súradnice miesta dopadu sú $(D, -25 \text{ m})$.

- Kameň pri dopade bude mať súradnicu $y = -25 \text{ m}$. Po dosadení do všeobecne platnej rovnice dostaneme kvadratickú rovnicu

$$4,905t^2 - 7,5t - 25 = 0$$

Riešením kvadratickej rovnice dostaneme $t_1 = 3,15 \text{ s}$, $t_2 = -1,62 \text{ s}$, z čoho má fyzikálny zmysel len koreň $t_1 = 3,15 \text{ s}$.

Súradnicu $x = D$ v mieste dopadu dostaneme

$$D = v_0 t_1 \cos \alpha = 15,3,15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 40,1 \text{ m}$$

b) Rýchlosť telesa pri šikmom vrhu určíme

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha = 15 \cdot \frac{3}{2} = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt = 15 \cdot \frac{1}{2} - 9,81 \cdot 3,15 = -23,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Potom celková rýchlosť sa rovná $v = \sqrt{13^2 + 23,4^2} = 26,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

c) Uhol, ktorý zvierá dráha kameňa s vodorovnou rovinou, je uhol, ktorý zvierajú vektory $\vec{v}_x$ a $\vec{v}$

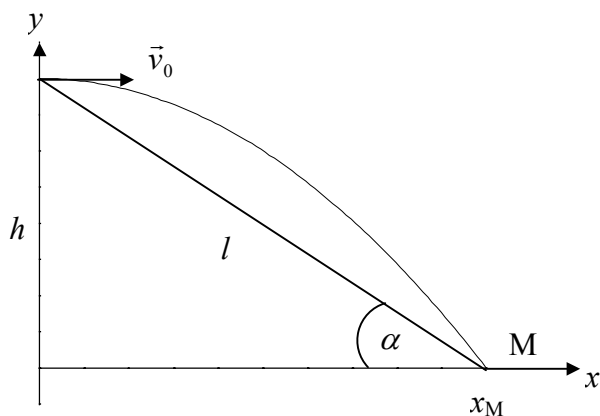
$$\cos \varphi = \frac{v_x}{v} = \frac{13}{26,8} = 0,485$$

$$\varphi = 61^\circ$$

Príklad 2:

Svah má dĺžku $l = 250 \text{ m}$ a uhol sklonu $\alpha = 30^\circ$. Akou rýchlosťou treba vrhnúť teleso z horného konca svahu vodorovne, aby dopadlo na dolný koniec?

Riešenie:



Pre súradnice zloženého pohybu telesa platí

$$x_M = v_0 t \cos \alpha$$

$$y_M = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Zároveň z obrázku vyplýva $h = l \sin \alpha$, $x = l \cos \alpha$.

Pri dopade telesa do bodu M platí $y_M = 0$, $\alpha = 0$. Ak $t = \frac{l \cos \alpha}{v_0}$, potom platí

$$0 = l \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{l^2 \cos^2 \alpha}{v_0^2} \right)$$

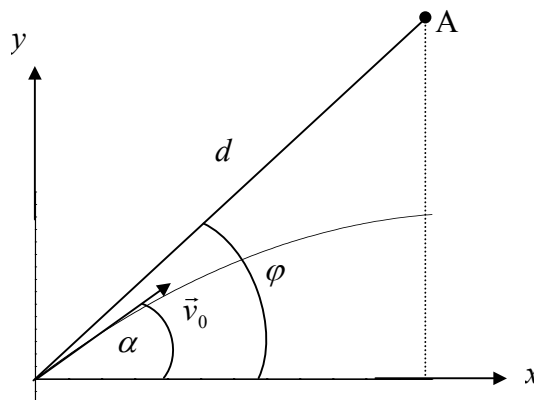
Z tejto rovnice dostaneme

$$v_0^2 = \frac{g l^2 \cos^2 \alpha}{2 l \sin \alpha}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g l}{2 \sin \alpha}} \cos \alpha = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 250}{2 \sin 30^\circ}} \cos 30^\circ = 42,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ÚLOHY

- Objekt A v priamej vzdušnej vzdialenosti d pozorujeme pod zorným uhlom $\varphi = 60^\circ$. Aký má byť elevačný uhol α výstrelu s počiatočnou rýchlosťou v_0 , aby sme zasiahli objekt, ktorý začne padať súčasne s výstrelom? Odpor vzduchu zanedbajte.



- $[\alpha = \varphi = 60^\circ]$
- Oštep bol vrhnutý do vzdialenosti 58,86 m, pričom jeho let trval 3 s. Akou rýchlosťou a pod akým uhlom bol oštep vrhnutý? Odpor vzduchu zanedbáme.
[24,5 m/s; $36^\circ 52'$]
 - Delová guľa opúšťa hlaveň dela rýchlosťou $1000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pod elevačným uhlom 55° . Určte teoretickú dĺžku dostrelu a dosiahnutú výšku, keby neexistoval odpor vzduchu.
[34,1 km; 95,7 km]
 - Lietadlo letí vo výške 4000 m nad zemou a má rýchlosť 500 km/h vo vodorovnom smere. V akej vzdialenosti od cieľa musí lietadlo pustiť bombu, aby zasiahla cieľ?
[3958 m]
 - Náboj zo samopalu bol vystrelený rýchlosťou 705 m/s. Smer hlavne zvierá s vodorovnou rovinou elevačný uhol 45° . Vypočítajte dostrel náboja v prostredí bez odporu vzduchu. Skutočný dostrel je 2800 m.
[50,665 · 10³ m]

6. Kameň bol vodorovne vrhnutý prakom s počiatočnou rýchlosťou 30 m/s. Určte jeho dotyčnicové a normálové zrýchlenie na konci 4. sekundy od počiatku pohybu. Odpor prostredia zanedbáme.
[7,79 m·s⁻² ; 5,95 m·s⁻²]
7. Aký sklon musí mať strecha domu voči vodorovnej rovine, aby voda po nej stekala čo najrýchlejšie? Odpor prostredia zanedbajte.
[45 °]
8. Akou počiatočnou rýchlosťou je potrebné vodorovne vrhnúť teleso vo výške 1 m nad horizontálnou rovinou, aby dĺžka vrhu bola 2 m? Odpor vzduchu zanedbajte.
[4,43 m/s]
9. Vypočítajte, pod akým elevačným uhlom musíme vrhnúť kameň v zemskom gravitačnom poli bez odporu prostredia, aby sa výška jeho výstupu nad horizontálnu rovinu rovnala dĺžke doletu.
[76 °]
10. Náboj s hmotnosťou 15 g bol vodorovne vystrelený vo výške 4 m nad vodorovnou rovinou rýchlosťou 200 m/s. Vypočítajte, akou rýchlosťou dopadne náboj na zem a akú prácu vykonali gravitačné sily. Odpor vzduchu zanedbajte.
[200,2 m/s; 0,6 J]

ELEKTROSTATICKÉ POLE

Elektrostatické pole je priestor silových účinkov v okolí nepohyblivých elektrických nábojov.

Coulombov zákon

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} \vec{r}_0$$

ϵ_0 je permitivita vákua, Q, Q' sú veľkosti bodových nábojov vo vzdialenosti r , $\vec{r}_0$ je jednotkový vektor medzi elektrickými nábojmi orientovaný v smere vektora sily $\vec{F}$.

Intenzita $\vec{E}$ elektrostatického poľa bodového elektrického náboja

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}}{Q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0$$

Elektrický potenciál V poľa bodového elektrického náboja Q v mieste vo vzdialenosti r

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Napätie U elektrostatického poľa bodového elektrického náboja Q

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Vzťah medzi intenzitou elektrického poľa $\vec{E}$ a elektrickým potenciálom V

$$\vec{E} = -\text{grad}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Gaussova veta určuje tok intenzity elektrického poľa cez uzavretú plochu

$$N = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Gaussova veta v diferenciálnom tvare pre spojitě rozložený elektrický náboj

$$\text{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Objemová hustota elektrického náboja je $\rho = \frac{dQ}{dV}$. Ďalej

$$\text{div}\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Intenzita elektrického poľa v okolí homogénne nabitej nekonečnej roviny s plošnou hustotou elektrického náboja $\sigma = \frac{dQ}{dS}$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Intenzita elektrického poľa medzi dvoma nekonečnými rovinami nabitými opačnými nábojmi s plošnou hustotou σ

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Elektrická indukcia $\vec{D}$ vo vákuu

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

Elektrická indukcia $\vec{D}$ v reálnom prostredí

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}$ je vektor elektrickej polarizácie, $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \kappa) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ je permitivita prostredia, ε_r je relatívna permitivita, κ je elektrická susceptibilita.

Elektrická kapacita vodiča C je definovaná podielom elektrického náboja na vodiči a potenciálom na jeho povrchu

$$C = \frac{Q}{V}$$

Elektrická kapacita guľového vodiča (R je polomer guľového vodiča)

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Elektrická kapacita sústavy dvoch vodičov (kondenzátora) je definovaná podielom náboja na jednom vodiči a rozdielom potenciálov oboch vodičov

$$C = \frac{Q}{U}$$

Elektrická kapacita doskového kondenzátora (S je plocha dosky, d je vzdialenosť dosák)

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$

Elektrická kapacita valcového kondenzátora (r_1, r_2 sú polomery valcov a h je ich výška)

$$C = \frac{2\pi\epsilon h}{\ln r_1 - \ln r_2}$$

Výsledná elektrická kapacita kondenzátorov zapojených

paralelne: $C = \sum_i C_i$ sériovo: $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

Energia W elektrického poľa a **objemová hustota energie** w elektrického poľa

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

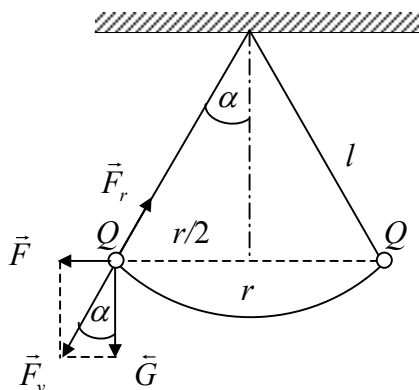
$$w = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Dve elektricky rovnako nabité guľôčky, každá s tiažou $G = 4,905 \cdot 10^{-4}$ N, boli vo vákuu zavesené v jednom bode na dvoch nitiach $l = 1$ m dlhých a odpudzovaním sa od seba vzdialili na vzdialenosť $r = 4$ cm. Určte veľkosť elektrických nábojov Q na guľôčkach.

Riešenie:



Podľa obrázka platí $\vec{F} + \vec{G} = \vec{F}_v$ pre výslednicu elektrickej sily $\vec{F}$ a tiaže $\vec{G}$, ktorá je kompenzovaná silou reakcie závesu $\vec{F}_r$. Za týchto podmienok platí $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G}$.

Pri malom vychýlení môžeme písať $\operatorname{tg} \alpha \cong \sin \alpha = \frac{r}{2l}$. Potom

$$\frac{F}{G} = \frac{r}{2l} = \frac{1}{G} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}$$

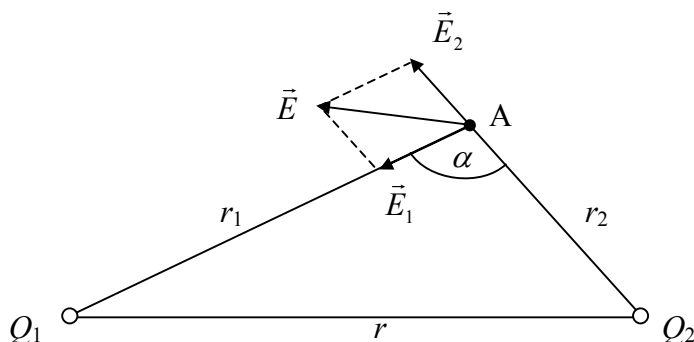
Odtiaľ pre veľkosť náboja jednej guľôčky dostaneme

$$Q = \sqrt{\frac{r^3 4\pi\epsilon_0 G}{2l}} = \sqrt{\frac{0,04^3 \cdot 4,3 \cdot 14,8859 \cdot 10^{-12} \cdot 4,905 \cdot 10^{-4}}{2,1}} = 4,177 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

Príklad 2:

Nájdite v mieste A vo vákuu intenzitu elektrostatického poľa budeného bodovými nábojmi $Q_1 = -4 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ a $Q_2 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, ktorých vzájomná poloha je $r = 50 \text{ cm}$ a vzdialenosti $Q_1 A = 40 \text{ cm}$, $Q_2 A = 30 \text{ cm}$.

Riešenie:



Pre celkovú intenzitu elektrostatického poľa v mieste A platí

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

kde E_1 a E_2 sú veľkosti intenzít elektrického poľa od jednotlivých elektrických nábojov. Veľkosť celkovej intenzity elektrického poľa E je potom

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos(180^\circ - \alpha)}$$

pričom

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1r_2} = \frac{40^2 + 30^2 - 50^2}{2 \cdot 40 \cdot 30} = 0$$

Za podmienky $\alpha = 90^\circ$ pre výslednú intenzitu elektrického poľa platí

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

Vypočítame intenzity elektrických polí od jednotlivých elektrických nábojov

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,859 \cdot 10^{-12}} \frac{4 \cdot 10^{-7}}{0,4^2} = 22457 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,859 \cdot 10^{-12}} \frac{5 \cdot 10^{-7}}{0,3^2} = 49905 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

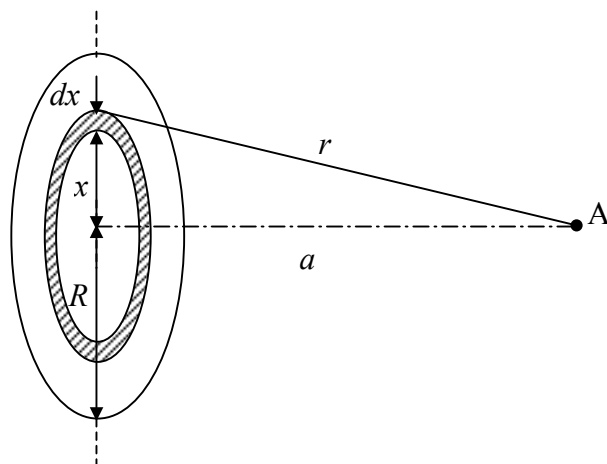
a výsledná intenzita elektrického poľa je

$$E = \sqrt{22457^2 + 49905^2} = 54725 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Príklad 3:

Vypočítajte potenciál elektrostatického poľa v kolmej vzdialenosti $a = 20 \text{ cm}$ od stredu vodivej kruhovej dosky s polomerom $R = 10 \text{ cm}$ umiestnenej vo vákuu a nabitej elektrickým nábojom $Q = 1 \mu\text{C}$.

Riešenie:



Ide o prípad elektrického poľa v okolí elektrického náboja, ktorý je spojitě rozložený na povrchu vodiča. Elektrický potenciál je určený rovnicou

$$V = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r}$$

kde σ je plošná hustota elektrického náboja a v našom prípade $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$.

Plošný element dS vyšrafovaný na obrázku predstavuje medzikružie so šírkou dx , takže $dS = 2\pi x dx$.

Pre elektrický potenciál v mieste A môžeme potom písať

$$V = \int \frac{\frac{Q}{\pi R^2} 2\pi x}{4\pi\epsilon_0 r} dx = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\sqrt{a^2 + x^2} \right]_0^R = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} (\sqrt{a^2 + R^2} - a)$$

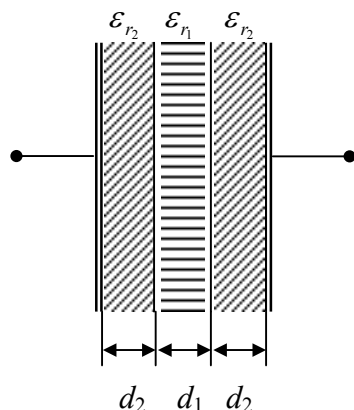
Po dosadení príslušných číselných hodnôt dostaneme

$$V = \frac{10^{-6}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1^2} (\sqrt{0,2^2 + 0,1^2} - 0,2) = 4,252 \text{ V}$$

Príklad 4:

Určte elektrickú kapacitu doskového kondenzátora s plochou polepov $S = 200 \text{ cm}^2$. Medzi polepmi je sklo s hrúbkou $d_1 = 1 \text{ mm}$ z oboch strán pokryté vrstvou parafrínu. Hrúbka každej vrstvy parafrínu je $d_2 = 0,2 \text{ mm}$. Sklo má relatívnu permitivitu $\epsilon_{r_1} = 7$ a parafrín $\epsilon_{r_2} = 2$.

Riešenie:



Elektrická indukcia je vo všetkých dielektrikách rovnaká, takže

$$D = D_1 = D_2$$

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon_0 \epsilon_{r_1} E_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r_2} E_2$$

Pre rozdiel potenciálov (napätie) medzi jednotlivými vrstvami platí

$$U_{01} = E_2 d_2 = E_1 \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}} d_2$$

$$U_{12} = E_1 d_1$$

$$U_{23} = E_2 d_2 = E_1 \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}} d_2$$

a pre výsledné napätie elektrického poľa potom môžeme písať

$$U = U_{01} + U_{12} + U_{23} = E_1 d_1 + 2E_2 d_2 = E_1 d_1 + 2E_1 \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}} d_2$$

$$U = E_1 \left(d_1 + 2 \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}} d_2 \right) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} \left(d_1 + 2 \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}} d_2 \right)$$

Elektrickú kapacitu doskového kondenzátora dostaneme

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{SD}{\frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} \left(d_1 + 2 \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}} d_2 \right)} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} S}{2 \varepsilon_{r_1} d_2 + \varepsilon_{r_2} d_1} = \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} + 2 \frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}}}$$

Keďže predchádzajúci vzťah môžeme písať aj v tvare

$$C = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} S} + 2 \frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + 2 \frac{1}{C_2}}$$

potom elektrickú kapacitu takého kondenzátora môžeme vypočítať ako celkovú elektrickú kapacitu troch doskových kondenzátorov s elektrickými kapacitami C_2 , C_1 , C_2 zapojených v sérii.

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} S}{2 \varepsilon_{r_1} d_2 + \varepsilon_{r_2} d_1} = \frac{8,859 \cdot 10^{-12} \cdot 7,2 \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 7,0 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 516,77 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

ÚLOHY

1. Dve rovnako veľké guľôčky majú elektrické náboje $Q_1 = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ a $Q_2 = -1,8 \cdot 10^{-5} \text{ C}$. Akou silou sa priťahujú na vzdialenosti $r = 6 \text{ cm}$ vo vákuu a akou silou sa budú z tejto istej vzdialenosti odpudzovať, keď sme ich predtým uviedli do vzájomného styku? [$1,078 \cdot 10^3 \text{ N}$; $22,46 \text{ N}$]
2. Vo vzdialenosti l od seba sú pevne uložené dva kladné elektrické náboje Q a $4Q$. Kde na spojnici medzi nábojmi treba umiestniť tretí náboj Q' , aby naň nepôsobila sila?

- [1/3]
3. Štyri voľné, rovnako veľké kladné bodové náboje e sú vo vákuu vo vrcholoch štvorca so stranou a . Aký elektrický náboj Q máme umiestniť v strede štvorca, aby sústava nábojov bola v rovnováhe?

$$\left[\frac{e}{4}(1+2\sqrt{2})\right]$$
 4. Aká je intenzita elektrického poľa v bode, ktorý leží uprostred medzi dvoma elektrickými nábojmi $50\text{ }\mu\text{C}$, $70\text{ }\mu\text{C}$, ktoré sú od seba vzdialené 20 cm ? Náboje sú v prostredí petroleja s permitivitou $\varepsilon = 2\varepsilon_0$.
 $[8,983 \cdot 10^6\text{ V/m}]$
 5. Medzi dvoma rovnobežnými doskami nabitými na napätie 400 V vzdialenými od seba $0,5\text{ cm}$ voľne padá elektricky nabitá kvapka s hmotnosťou 10^{-19} g pod uhlom $7^\circ 25'$ voči smeru tiažovej sily. Určte elektrický náboj kvapky.
 $[1,596 \cdot 10^{-17}\text{ C}]$
 6. S akým zrýchlením sa bude pohybovať guľôčka s hmotnosťou 10 g a elektrickým nábojom $\frac{5}{3} \cdot 10^{-9}\text{ C}$ v homogénnom elektrickom poli s intenzitou 300 V/cm ?
 $[5 \cdot 10^{-3}\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}]$
 7. Dva bodové elektrické náboje $8\text{ }\mu\text{C}$ a $5\text{ }\mu\text{C}$ sú vo vákuu vo vzdialenosti 20 cm .
 a) V ktorom mieste na ich spojnici sa intenzita elektrostatického poľa rovná nule?
 b) V ktorom mieste na ich spojnici sú potenciály budené oboma nábojmi rovnaké?
 $[11,17\text{ cm}; 12,38\text{ cm}]$
 8. Aké veľké elektrické náboje Q treba umiestniť na dve rovnaké guľôčky s hmotnosťou 10 g , aby elektrostatické sily, ktorými budú na seba pôsobiť, kompenzovali sily gravitačné?
 $[0,852 \cdot 10^{-12}\text{ C}]$
 9. Aké veľké je napätie medzi dvoma bodmi A, B, ktoré sú vo vákuu v elektrostatickom poli elektrického náboja $Q = 5 \cdot 10^{-7}\text{ C}$ tak, že bod A je od náboja Q vo vzdialenosti $r_1 = 2\text{ cm}$ a bod B od náboja Q vo vzdialenosti $r_2 = 10\text{ cm}$ v tom istom smere?
 $[1,79 \cdot 10^5\text{ V}]$
 10. Aká je intenzita elektrostatického poľa v blízkosti dvoch nekonečne veľkých vodivých, navzájom kolmých rovinných stien, keď jedna z nich je nabitá plošnou hustotou náboja σ a druhá 2σ ? Elektrostatické pole je vytvárané vo vákuu.
 $[\sqrt{5}\sigma/2\varepsilon_0]$
 11. Aká je tiaž vodivej gule s priemerom 1 m , ktorá je nabitá na potenciál 10^6 V a ktorá sa v určitom mieste elektrického poľa s intenzitou 10^4 V/m práve vznáša vo vákuu?
 $[0,555\text{ N}]$
 12. Vzduchový doskový kondenzátor je nabitý na napätie 10000 V . Vzdialenosť dosiek je 5 mm a ich plocha je 2 m^2 . Medzi dosky vložíme dielektrikum s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 5$. Vypočítajte:
 a) elektrickú indukciu v dielektriku,
 b) intenzitu elektrostatického poľa kondenzátora,
 c) napätie na kondenzátore,
 d) elektrickú kapacitu doskového kondenzátora.
 $[1,77 \cdot 10^{-5}\text{ C}\cdot\text{m}^{-2}; 4 \cdot 10^5\text{ V}\cdot\text{m}^{-1}; 2000\text{ V}; 1,77 \cdot 10^{-8}\text{ F}]$
 13. Vzduchový kondenzátor s rovinnými doskami má kapacitu 10 pF a vzdialenosť dosiek 1 cm . Do stredu medzi dosky vložíme plech s hrúbkou 1 mm . Aká bude nová

- elektrická kapacita celého zariadenia?
[11,11 pF]
14. Vypočítajte elektrickú kapacitu valcového kondenzátora s výškou 20 cm a s polomerami elektród 3 cm, 4 cm, keď dielektrikum je vákuum.
[38,721.10⁻¹² F]
15. Určte elektrickú kapacitu guľového kondenzátora, vytvoreného dvoma sústrednými vodivými plochami s polomerami r_1, r_2 , keď dielektrikum medzi nimi má permitivitu ε .
[$4\pi\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$]
16. Dve dosky rovinného kondenzátora s plošným obsahom 500 cm², ktoré sú vzdialené od seba 1 cm, sú nabité na napätie 5000 V. Akú prácu treba vykonať, ak chceme dosky oddialiť od seba na vzdialenosť 4 cm?
[1,661.10⁻³ J]
17. Kondenzátory s elektrickými kapacitami $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 10 \mu\text{F}$ sú napojené v sérii na svorky zdroja s napätím $U = 200 \text{ V}$. Aká je energia každého kondenzátora?
[1,653.10⁻² J; 1,653.10⁻³ J]
18. Rovinný kondenzátor s elektrickou kapacitou 500 pF je nabitý na napätie 5.10³ V. Dielektrikum kondenzátora tvorí doska z materiálu s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 5$. Aká práca je potrebná na odstránenie tejto dosky? Ako sa zmení napätie na doskách kondenzátora po odstránení izolačnej dosky z kondenzátora?
[2,5.10⁻² J; 25.10³ V]

ELEKTRICKÝ PRÚD

Elektrický prúd I je množstvo elektrického náboja, ktoré prejde prierezom vodiča za jednotku času

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Vektor hustoty elektrického prúdu $\vec{J}$ predstavuje množstvo elektrického prúdu tečúceho v smere jednotkového vektora $\vec{J}_0$, ktoré prejde elementárnou plochou vodiča dS orientovanou kolmo na smer elektrického prúdu

$$\vec{J} = \frac{dI}{dS} \vec{J}_0$$

Ohmov zákon v diferenciálnom tvare (σ je konduktivita, $\vec{E}$ intenzita elektrického poľa)

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Ohmov zákon v integrálnom tvare (U je napätie elektrického poľa, I elektrický prúd, R elektrický odpor)

$$U = RI$$

Elektrický odpor R závisí od geometrických rozmerov vodiča a jeho rezistivity. Pre homogénny vodič s konštantným prierezom S , dĺžkou l a rezistivitou ρ platí

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Zákon kontinuity elektrického prúdu je priamym dôsledkom zákona zachovania elektrického náboja. Hustota elektrického prúdu $\vec{J}$ a objemová hustota elektrického náboja ρ spĺňajú rovnicu kontinuity

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Pri ustálenom prúde platí $\operatorname{div} \vec{J} = 0$.

Elektrický prúd pretekajúci obvodom s elektrickým odporom R_v a so zdrojom elektromotorického napätia U_z s vnútorným odporom R_i

$$I = \frac{U_z}{R_v + R_i}$$

Svorkové napätie zdroja U je rozdiel potenciálov na svorkách zdroja udávajúci napätie vo vonkajšom obvode

$$U = U_z - R_i I$$

- 1. Kirchhoffov zákon** – v ustálenom stave sa algebraický súčet prúdov vstupujúcich do uzla rovná nule

$$\sum_i I_i = 0$$

- 2. Kirchhoffov zákon** – súčet elektromotorických napätí vo zvolenom elektrickom okruhu sa rovná súčtu ohmických úbytkov v jednotlivých vetvách

$$\sum_i U_i = \sum_j R_j I_j$$

Práca A elektrického prúdu

$$A = \int UI \, dt \quad (\text{Jouleov – Lenzov zákon v integrálnom tvare})$$

Výkon P elektrického prúdu

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R$$

Výsledný elektrický odpor pri zapojení vodičov

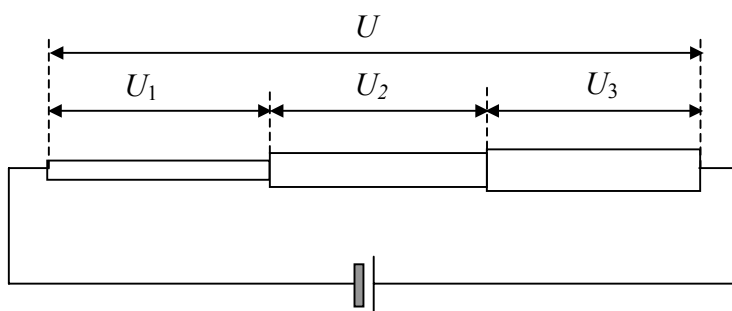
paralelne: $\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ sériovo: $R = \sum_i R_i$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Elektrický obvod sa skladá z troch vodičov z rovnakého materiálu a s rovnakou dĺžkou, ktoré sú zapojené za sebou, a z prívodov so zanedbateľným elektrickým odporom. Prierezy vodičov sú $S_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, $S_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ a $S_3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Rozdiel potenciálov na koncoch obvodu je $U = 12 \text{ V}$. Určte napätie na každom vodiči.

Riešenie:



Určíme najprv elektrický odpor jednotlivých vodičov

$$R_1 = \rho \frac{d}{S_1} \quad R_2 = \rho \frac{d}{S_2} \quad R_3 = \rho \frac{d}{S_3}$$

kde ρ je rezistivita vodičov. Celkový elektrický odpor vodičov zapojených v sérii je daný

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = \rho d \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right) = \rho d \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_1 S_2 S_3}$$

Každým vodičom preteká elektrický prúd

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U S_1 S_2 S_3}{\rho d (S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3)}$$

Úbytky napätia na jednotlivých vodičoch budú dané Ohmovým zákonom. Napr.

$$U_1 = R_1 I = \frac{\rho d}{S_1} \frac{U S_1 S_2 S_3}{\rho d (S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3)} = \frac{1}{S_1} \frac{U S_1 S_2 S_3}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}$$

Číselné vyjadrenie je

$$U_1 = \frac{12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3} = \frac{72}{11} = 6,545 \text{ V}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{72}{11} = \frac{36}{11} = 3,273 \text{ V}$$

$$U_3 = \frac{1}{3} \frac{72}{11} = \frac{24}{11} = 2,182 \text{ V}$$

Príklad 2:

Na doskách rovinného kondenzátora bol po odpojení napäťového zdroja elektrický náboj Q_0 . Za 10 minút poklesol tento náboj na desatinu pôvodnej hodnoty. Dielektrikum tvoril parafrínový papier s $\epsilon_r = 2$. Určte rezistivitu parafrínového papiera za predpokladu, že sa kondenzátor vybíjal len cez vlastné dielektrikum.

Riešenie:

Elektrický prúd, ktorý prechádza dielektrikom kondenzátora, môžeme vyjadriť vzťahom

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Q}{RC}$$

kde R je elektrický odpor dielektrika, C je elektrická kapacita kondenzátora a Q je elektrický náboj, ktorý sa s časom mení. Za čas dt poklesne náboj na kondenzátore o hodnotu

$$dQ = -Idt = -\frac{Q}{RC}dt$$

Integrovaním a úpravou dostaneme

$$\int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = -\int_0^t \frac{1}{RC} dt$$

Po integrácii platí

$$\ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

Ak uplatníme vzťahy pre rezistanciu a elektrickú kapacitu kondenzátora

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{l}$$

kde l je hrúbka dielektrika a S plocha dielektrika, dostaneme

$$RC = \rho \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

Po dosadení a vyjadrení rezistivity

$$\rho = \frac{t}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \ln \frac{Q_0}{Q}} = \frac{600}{8,859 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot \ln \frac{Q_0}{0,1 Q_0}} = 1,472 \cdot 10^{13} \Omega \cdot \text{m}$$

Príklad 3:

Vodičom s elektrickým odporom $R = 5 \Omega$ prešiel celkový elektrický náboj $Q = 40 \text{ C}$. Vypočítajte, aká veľká práca bola vykonaná, keď pretekajúci elektrický prúd klesal tak, že za každý časový interval $\Delta t = 16 \text{ s}$ sa zmenšil na polovicu.

Riešenie:

Prácu elektrického prúdu určíme vzťahom

$$A = \int U I dt = \int R I^2 dt$$

Zo zadania vyplýva, že časová závislosť elektrického prúdu je

$$I = I_0 \exp(-bt)$$

Po dosadení do vzťahu pre prácu elektrického prúdu dostaneme

$$A = R \int_0^{\infty} I_0^2 \exp(-2bt) dt = \frac{R I_0^2}{2b}$$

Konštanty I_0 a b určíme z podmienky, že za čas $\Delta t = 16 \text{ s}$ klesne pôvodný prúd I_0 na $I_0/2$. Po dosadení tejto podmienky dostávame

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \exp(-b\Delta t)$$

$$b = \frac{\ln 2}{\Delta t}$$

Počiatočný elektrický prúd I_0 určíme z celkového elektrického náboja Q , ktorý prešiel vodičom

$$Q = \int_0^{\infty} I dt = I_0 \int_0^{\infty} \exp(-bt) dt = \frac{I_0}{b}$$

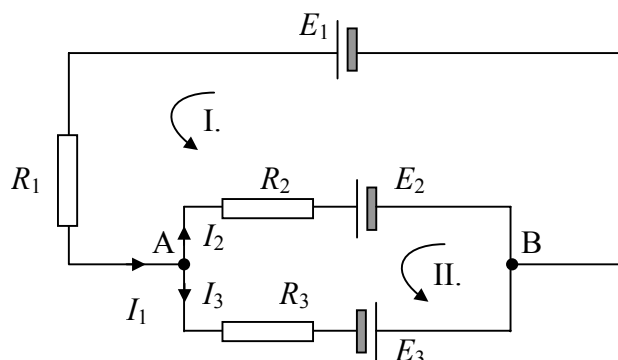
$$I_0 = \frac{Q \ln 2}{b}$$

Potom vykonaná práca elektrického prúdu

$$A = \frac{RQ^2 \ln 2}{2\Delta t} = \frac{5 \cdot 40^2 \cdot \ln 2}{2 \cdot 16} = 173,3 \text{ J}$$

Príklad 4:

Vypočítajte elektrické prúdy v jednotlivých vetvách elektrického obvodu podľa obrázku pre $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 4 \text{ V}$, $E_3 = 6 \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 12 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$.



Riešenie:

Zvolíme kladný smer obehu elektrického prúdu v slučkách I. a II. podľa obrázku. Tým je daný smer elektrických prúdov I_1 , I_2 a I_3 a ich znamienko vzhľadom na smer elektromotorických napätí v slučkách. Podľa 2. Kirchhoffovho zákona pre I. a II. slučku platí

$$\text{I.} \quad E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 \quad (1)$$

$$\text{II.} \quad E_2 + E_3 = -R_2 I_2 + R_3 I_3 \quad (2)$$

Pre uzol A podľa 1. Kirchhoffovho zákona platí

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (3)$$

Rovnice (1), (2) a (3) sú sústavou rovníc pre tri neznáme I_1 , I_2 a I_3 . Je možné riešenie dvomi spôsobmi:

1. Dosadíme číselné hodnoty do rovníc (1) a (2) a dostaneme

$$\text{I.} \quad 12 - 4 = 20I_1 + 12I_2$$

$$\text{II.} \quad 4 + 6 = 10I_3 - 12I_2$$

Z rovnice pre I. slučku vyjadríme prúd I_1 pomocou I_2 a z rovnice pre II. slučku vyjadríme I_3 pomocou I_2

$$I_1 = \frac{8 - 12I_2}{20} = 0,4 - 0,6I_2$$

$$I_3 = \frac{10 + 12I_2}{10} = 1 + 1,2I_2$$

a dosadením do rovnice (3) pre uzol A dostaneme

$$0,4 - 0,6I_2 - I_2 - (1 + 1,2I_2) = 0$$

$$I_2 = -0,214 \text{ A}$$

Záporné znamienko znamená, že prúd I_2 má v skutočnosti opačný smer, ako sme určili na začiatku. Prúdy I_1 a I_3 vypočítame

$$I_1 = 0,4 - 0,6(-0,214) = 0,529 \text{ A}$$

$$I_3 = 1 + 1,2(-0,214) = 0,743 \text{ A}$$

2. Zostavíme determinanty sústavy rovníc

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 20 & 12 & 0 \\ 0 & -12 & 10 \end{vmatrix} = 120 + 240 + 200 = 560$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 8 & 12 & 0 \\ 10 & -12 & 10 \end{vmatrix} = 96 + 120 + 80 = 296$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 20 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 80 - 200 = -120$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 20 & 12 & 8 \\ 0 & -12 & 10 \end{vmatrix} = 120 + 200 + 96 = 416$$

Potom

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{296}{560} = 0,529 \text{ A}$$

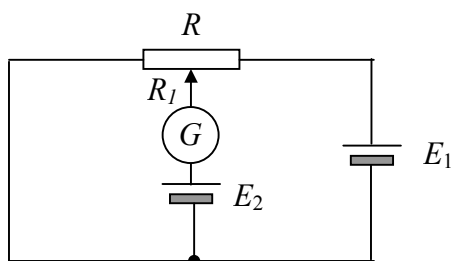
$$I_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{120}{560} = -0,214 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{416}{560} = 0,743 \text{ A}$$

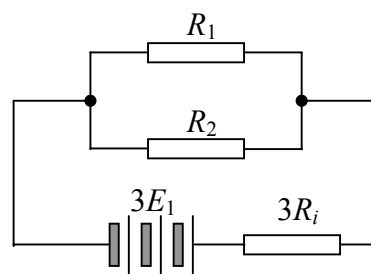
ÚLOHY

1. Ako treba zapojiť dva články, z ktorých každý má elektromotorické napätie 1,5 V a vnútorný odpor 1,4 Ω , aby obvodom, ktorého elektrický odpor je 0,2 Ω , pretekal čo najväčší elektrický prúd? Vypočítajte jeho hodnotu.
[paralelne; 1,66 A]
2. Na elektrickú sieť s napätím 220 V je pripojený odpor 100 Ω . Aký je potrebný výkon a koľko litrov vody s teplotou 18 °C by sa teoreticky priviedlo do varu za 1hodinu?
[484 W; 5,076 l]
3. Aký veľký elektrický odpor R_1 musíme nastaviť kontaktom na odpore $R = 10 \Omega$ v obvode na obrázku a), aby galvanometrom neprechádzal elektrický prúd?

Elektromotorické napätia sú $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$.



a)



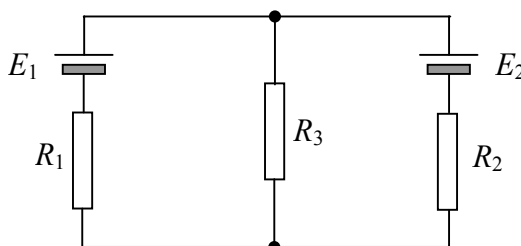
b)

[6 Ω]

4. Nájdite elektrické prúdy vo vetvách podľa obrázku b), ak elektromotorické napätie jedného článku $E_1 = 1,5 \text{ V}$ a v sérii sú zapojené tri články. Vnútorný odpor jedného článku $R_i = 0,5 \Omega$ a $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 12 \Omega$.

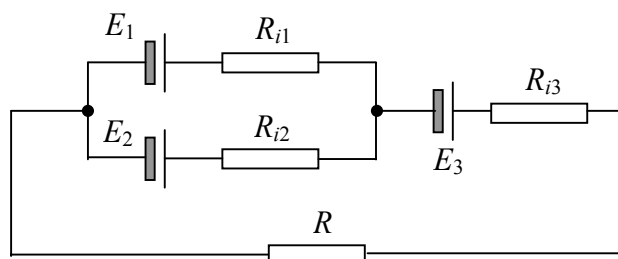
$[\frac{3}{4} \text{ A}; \frac{1}{4} \text{ A}]$

5. Vypočítajte elektrické prúdy vo vetvách podľa obrázku, ak $E_1 = 2,1 \text{ V}$, $E_2 = 1,9 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 45 \Omega$.



[0,03 A; 0,01 A; 0,04 A]

6. Tri galvanické články s elektromotorickým napätím $E_1 = 1,3 \text{ V}$, $E_2 = 1,5 \text{ V}$, $E_3 = 2 \text{ V}$ majú vnútorné odpory $R_{i1} = R_{i2} = R_{i3} = 0,2 \Omega$ a sú zapojené podľa nasledujúcej schémy.



Určte elektrické prúdy v jednotlivých vetvách a úbytok napätia na elektrickom odpore $R = 0,55 \Omega$.

[1,5 A; 2,5 A; 4 A; 2,2 V]

7. Merací prístroj s otočnou cievkou s vnútorným odporom $3\ \Omega$, ktorý má pri elektrickom prúde 30 mA plnú výchylku, sa má použiť ako voltmeter pre rozsahy 3 V , 10 V , 100 V . Akú hodnotu musí mať v týchto prípadoch predradný elektrický odpor?
[$97\ \Omega$; $330\ \Omega$; $3320\ \Omega$]
8. Sústava dvoch paralelne zapojených článkov s elektromotorickými napätiami $1,6\text{ V}$ a $1,3\text{ V}$ s vnútornými odpormi $1\ \Omega$ a $0,5\ \Omega$ je paralelne pripojená k odporu $0,6\ \Omega$. Vypočítajte elektrické prúdy vo všetkých vetvách obvodu.
[$0,7\text{ A}$; $0,8\text{ A}$; $1,5\text{ A}$]
9. Elektrický prúd vo vodiči sa mení v závislosti na čase podľa vzťahu $I = I_0 + kt$, kde $I_0 = 4\text{ A}$, $k = 2\text{ A}\cdot\text{s}^{-1}$. Vypočítajte
 - a) aký náboj prejde prierezom vodiča v časovom intervale od 2 s do 6 s ,
 - b) aký by musel byť stály elektrický prúd vo vodiči, aby ním za rovnaký čas prešiel rovnako veľký elektrický náboj.
 [48 C; 12 A]
10. Časový priebeh elektrického prúdu vo vodiči je určený rovnicou $I = I_0 \sin \frac{2\pi}{T}t$, kde $I_0 = 1\text{ A}$ a perióda $T = (1/50)\text{ s}$. Vypočítajte
 - a) aký elektrický náboj prejde vodičom za čas rovný $T/2$,
 - b) strednú hodnotu elektrického prúdu za čas od 0 po $T/2$.
 [$6,37\cdot 10^{-3}\text{ C}$; $0,637\text{ A}$]
11. Cievka z medeného drôtu s rezistivitou $1,72\cdot 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}$ má stredný priemer 6 cm a 1000 závitov. Vypočítajte, aké napätie možno pripojiť na konce cievky, ak cievkou môže prechádzať elektrický prúd s maximálnou prúdovou hustotou $2\text{ A}\cdot\text{mm}^{-2}$.
[6,48 V]

MAGNETICKÉ POLE

Magnetické pole vzniká následkom pohybu elektrického náboja (elektrického prúdu vo vodiči).

Magnetická (Lorentzova) sila $\vec{F}_m$ vyjadruje silové pôsobenie magnetického poľa s indukciou $\vec{B}$ na elektrický náboj Q pohybujúci sa rýchlosťou $\vec{v}$

$$\vec{F}_m = Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Veľkosť vektora magnetickej indukcie je $B = \frac{F_{m\perp}}{Qv}$, kde $F_{m\perp}$ je veľkosť magnetickej sily

v prípade $\vec{v} \perp \vec{B}$.

Biotov – Savartov – Laplaceov zákon určuje príspevok $d\vec{B}$ k magnetickej indukcii budenej úsekom vodiča $d\vec{l}$ s elektrickým prúdom I v mieste s polohovým vektorom $\vec{r}$ vo vákuu

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Magnetická indukcia v strede kruhového vodiča vo vákuu s polomerom r

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

Magnetická indukcia nekonečného priameho vodiča vo vákuu vo vzdialenosti a od neho

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Magnetická indukcia na osi solenoidu vo vákuu s dĺžkou l a s počtom závitov Z

$$B = \frac{\mu_0 I Z}{l}$$

Ampérov zákon umožňuje kvantitatívny popis silových účinkov magnetického poľa na vodič, ktorým preteká elektrický prúd

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

Magnetické silové pôsobenie medzi dvomi prúdovodičmi s elektrickými prúdmi I_1, I_2

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{l_2} \int_{l_1} \frac{\vec{r} \times d\vec{l}_1}{r^3} \times d\vec{l}_2$$

μ_0 je permeabilita vákua, $d\vec{l}_1, d\vec{l}_2$ sú elementy dĺžky prúdovodičov, $\vec{r}$ je polohový vektor prvého vodiča vzhľadom na element dĺžky druhého vodiča.

Intenzita magnetického poľa $\vec{H}$ vo vákuu

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Moment sily $\vec{M}$ pôsobiaci na uzavretý prúdovodič v magnetickom poli s indukciou $\vec{B}$

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$\vec{m}$ je magnetický moment prúdovodiča, $\vec{S}$ je vektor plochy S ohraničenej prúdovodičom.

Zákon celkového prúdu

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

Vektor magnetizácie prostredia $\vec{M}$ určuje hustotu magnetických momentov v jednotkovom objeme a v prostredí s magnetickou susceptibilitou κ platí

$$\vec{M} = \mu_0 \kappa \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \vec{M}}{\mu_0}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \kappa \vec{H} = \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \kappa) \vec{H}$$

Permeabilita prostredia (μ_r je relatívna permeabilita prostredia)

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

Magnetický tok Φ

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Energia W_m a **hustota energie** w_m magnetického poľa (dV je elementárny objem magnetického poľa)

$$W_m = \frac{1}{2} \int (\vec{B} \cdot \vec{H}) dV$$

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie – pre indukované elektromotorické napätie $U_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$ platí

$$U_i = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

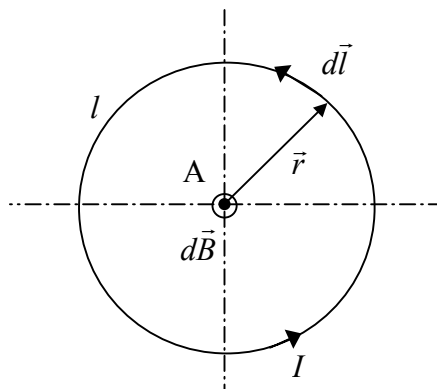
$$U_i = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint (d\vec{l} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} = -\frac{d}{dt} \int (\vec{v} dt \times d\vec{l}) \cdot \vec{B}$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Vypočítajte veľkosť a smer magnetickej indukcie v strede kruhového vodiča s polomerom $r = 5$ cm, ktorým preteká elektrický prúd $I = 5$ A. Vodič sa nachádza vo vákuu s permeabilitou $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ A}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Riešenie:



Podľa Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona je príspevok $d\vec{B}$ k magnetickej indukcii budenej elektrickým prúdom I úseku vodiča $d\vec{l}$ v mieste A s polohovým vektorom $\vec{r}$ vo vákuu

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Pre magnetickú indukciu od celého vodiča platí

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Keďže vektor $d\vec{l}$ a polohový vektor $\vec{r}$ zvierajú vždy uhol 90° , môžeme písať pre veľkosť magnetickej indukcie

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

Smer magnetickej indukcie určíme na základe vlastností vektorového súčinu alebo pravidlom pravej ruky a podľa neho v našom prípade magnetická indukcia v strede kruhového závitú smeruje kolmo pred nákresňu.

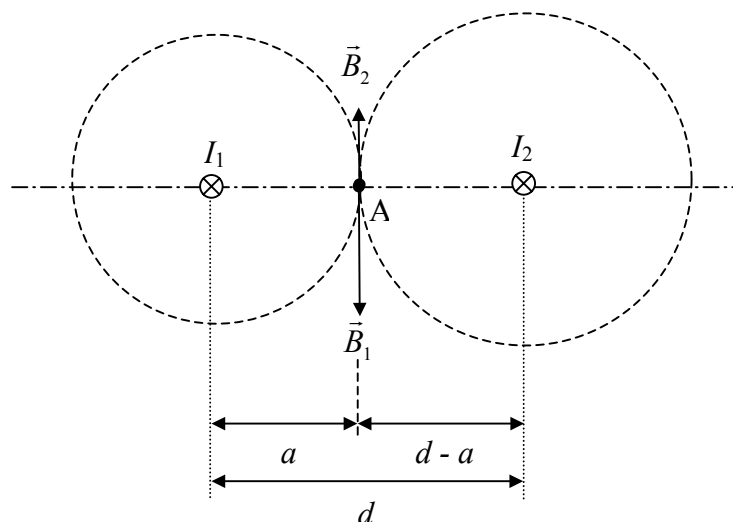
Po dosadení číselných hodnôt

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2 \cdot 0,05} = 0,2\pi \cdot 10^{-4} = 6,283 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Príklad 2:

Vypočítajte indukciu magnetického poľa budeneho dvoma priamymi rovnobežnými vodičmi s elektrickými prúdmi $I_1 = I_2 = I = 2 \text{ A}$. Vodiče s prúdmi rovnakého smeru sú vo vákuu vo vzdialenosti $d = 10 \text{ cm}$. Magnetickú indukciu vypočítajte v mieste vo vzdialenosti $a = 4 \text{ cm}$ od prvého vodiča na kolmej spojnice oboch vodičov.

Riešenie:



Magnetickú indukciu vo vákuu v okolí prvého priameho vodiča, ktorým preteká elektrický prúd I , vo vzdialenosti a od vodiča určíme pomocou Biotovho – Savartovho - Laplaceovho zákona. Platí

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Pre magnetickú indukciu od druhého vodiča s elektrickým prúdom I vo vzdialenosti $d - a$ platí

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d - a)}$$

Výsledná magnetická indukcia v mieste A je $\vec{B}_V = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, a keďže vektory $\vec{B}_1$ a $\vec{B}_2$ sú v tomto mieste opačne orientované, platí

$$B_V = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(d - a)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d - a} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d - 2a}{a(d - a)}$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$B_V = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi} \frac{0,2 - 2 \cdot 0,04}{0,04(0,1 - 0,04)} = 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Príklad 3:

Štvorcový rám z medeneho drôtu je v magnetickom poli s indukciou $B = 0,2 \text{ T}$. Prierez drôtu je $S_d = 2 \text{ mm}^2$, plocha štvorcového rámu $S_r = 25 \text{ cm}^2$. Normála k ploche rámu je rovnobežná s vektorom magnetickej indukcie. Aké množstvo elektrického náboja prejde vodičom rámu pri vypnutí poľa?

Riešenie:

Použijeme vzťah pre indukované elektromotorické napätie E_i , ktorý vyjadruje všeobecne zákon elektromagnetickej indukcie

$$E_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Keď túto rovnicu vydělíme elektrickým odporom R , dostaneme $\frac{E_i}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$.

Podiel $\frac{E_i}{R}$ je elektrický prúd I prechádzajúci vodičom

$$I = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

Pre element elektrického náboja dQ , ktorý prejde okruhom pri zmene magnetického toku o $d\Phi$, dostaneme

$$dQ = Idt = -\frac{d\Phi}{R}$$

a celkový náboj, ktorý pri zmene magnetického toku z hodnoty $\Phi = BS_r$ na hodnotu $\Phi = 0$ prejde vodičom, bude

$$Q = \int_{BS_r}^0 \left(-\frac{d\Phi}{R} \right) = \frac{BS_r}{R}$$

Pre elektrický odpor vodiča s dĺžkou $4a$ a s prierezom S_d (a je dĺžka strany štvorcového vodiča) platí

$$R = \frac{\rho_{Cu} l}{S_d} = \frac{\rho_{Cu} 4a}{S_d} = \frac{\rho_{Cu} 4\sqrt{S_r}}{S_d}$$

a potom pre hľadaný elektrický náboj číselne dostaneme

$$Q = \frac{BS_r}{\frac{\rho_{Cu} 4\sqrt{S_r}}{S_d}} = \frac{BS_d \sqrt{S_r}}{4\rho_{Cu}} = \frac{0,2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{25 \cdot 10^{-4}}}{4 \cdot 0,017 \cdot 10^{-6}} = 0,294 \text{ C}$$

ÚLOHY

- Elektrón vletel do magnetického poľa s magnetickou indukciou 10 T rýchlosťou $3 \cdot 10^7$ m/s kolmo na smer vektora $\vec{B}$. Vypočítajte silu, ktorou pôsobí pole na elektrón, a jeho dráhu.
[$4,8 \cdot 10^{-12}$ N; kružnica s polomerom $1,706 \cdot 10^{-5}$ m]
- Dva dlhé, priame, rovnobežné vodiče sú od seba vzdialené 10 cm. Vodičmi pretekajú elektrické prúdy 10 A a 20 A opačného smeru. Vypočítajte veľkosť a smer magnetickej indukcie a intenzitu magnetického poľa v rovine vodičov v strede medzi nimi.
[$1,2 \cdot 10^{-5}$ T]
- Kruhovité vodiče s polermi 10 cm a 15 cm, ktoré sú vo vákuu a majú spoločný stred, sú v jednej rovine a pretekajú nimi elektrické prúdy 2 A a 5 A súhlasným smerom. Vypočítajte magnetickú indukciu v strede týchto vodičov.
[$3,34 \cdot 10^{-5}$ T]
- Na obvode kotúča je rovnomerne rozložený elektrický náboj 10^{-8} C. Kotúč s polomerom 10 cm sa otáča s frekvenciou 100 s^{-1} okolo osi, ktorá prechádza jeho stredom. Vypočítajte magnetickú indukciu v strede kotúča.
[$2\pi \cdot 10^{-12}$ T]
- Vypočítajte magnetickú indukciu v strede a na konci solenoidu s dĺžkou 1 m, s počtom závitov 2000 a s polomerom 2 cm, ak ním preteká elektrický prúd 5 A.
[$2\pi \cdot 10^{-3}$ T; $4\pi \cdot 10^{-3}$ T]

6. Určte hodnotu magnetickej indukcie v strede štvorcového závitu so stranou 10 cm, ktorým preteká elektrický prúd 5 A.
[$5,6 \cdot 10^{-5}$ T]
7. Vodič tvaru kruhového závitu s polomerom 5 cm je uložený v magnetickom poli s magneticou indukciou 0,6 T kolmo na smer vektora magnetickej indukcie. Aké je elektromotorické napätie, ktoré sa v tomto vodiči indukuje, keď magnetické pole za čas 0,5 s rovnomerne vymizne?
[0,01884 V]
8. Určte, aké elektromotorické napätie sa indukuje za polovicu otáčky v obdĺžnikovom záвите s rozmermi $a = 25$ cm, $b = 30$ cm. Závit sa otáča s frekvenciou 1200 min^{-1} okolo strany a kolmej na vektor intenzity magnetického poľa s veľkosťou $\frac{6 \cdot 10^6}{4\pi} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.
[3,6 V]
9. Aká je energia magnetického poľa elektrického prúdu 2 mA, keď preteká cievkou s dĺžkou 50 cm, s 10000 závitmi a s priemerom 6 cm?
[$1,42 \cdot 10^{-6}$ J]
10. Určte magnetický odpor magnetického obvodu z liatiny s polomerom 15 cm a s prierezom 5 cm^2 , ak cievkou s 200 závitmi tečie elektrický prúd 3 A. Intenzite magnetického poľa na magnetizačnej krivke liatiny zodpovedá magnetická indukcia 0,46 T.
[$2,6089 \cdot 10^6$ A/Wb]
11. Obdĺžniková cievka s dĺžkou 40 cm, šírkou 30 cm a s 50 závitmi sa otáča s frekvenciou 3000 min^{-1} v homogénnom magnetickom poli s indukciou 1 T. Aká veľká je maximálna hodnota elektromotorického napätia?
[1884 V]
12. Vypočítajte elektrický prúd pretekajúci prstencovou cievkou bez železného jadra so stredným priemerom 10 cm. Cievka má 450 závitov s priemerom 2 cm. Magnetický tok vo vnútri cievky je $200 \cdot 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{s}$.
[3,54 A]
13. Na solenoide s dĺžkou 1 m, s prierezom 10 cm^2 , ktorá má 1000 závitov, je navinutá uprostred krátka cievka s 20 závitmi. Vypočítajte koeficient vzájomnej indukčnosti týchto dvoch cievok vo vákuu.
[$2,513 \cdot 10^{-5}$ H]

ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

Lorentzova sila $\vec{F}$ elektromagnetického poľa je výsledná sila, ktorá pôsobí na elektrický náboj v elektromagnetickom poli

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Energia W a hustota energie w elektromagnetického poľa

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV$$

$$w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

Maxwellove rovnice (hlavné)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Vedľajšie Maxwellove rovnice pre izotropné prostredia

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Samoindukované elektromotorické napätie U_i

$$U_i = -L \frac{dI}{dt}$$

Vlastná indukčnosť $L = \Phi/I$ je podiel magnetického toku Φ a elektrického prúdu I .

Vlastná indukčnosť cievky s počtom závitov Z , s dĺžkou l , s polomerom závitov r v prostredí s permeabilitou μ

$$L = \mu \frac{\pi Z^2 r^2}{l}$$

Elektromotorické napätie U_{12} vznikajúce vzájomnou indukciou

$$U_{12} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

Vzájomná indukčnosť $M = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$ je daná podielom magnetického toku Φ_{12} , ktorý

v dôsledku prúdu I_1 v prvom vodiči prechádza plochou ohraničenou druhým vodičom, a elektrického prúdu I_1 .

V prípade dvoch cievok s rovnakou dĺžkou a približne rovnakým polomerom závitov je pomer napätí na sekundárnej a primárnej cievke daný $\frac{U_1}{U_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$.

Striedavé elektromotorické napätie u_i vzniká otáčaním závitov (cievky) v konštantnom magnetickom poli

$$u_i = u_0 \sin \omega t$$

kde $u_0 = \Phi \omega = BS \omega$ je maximálna hodnota elektromotorického napätia (amplitúda), ω je uhlová rýchlosť otáčajúceho sa vodiča v magnetickom poli.

Striedavý elektrický prúd i

$$i = i_0 \sin \omega t$$

kde $i_0 = u_0 / R$ je maximálna hodnota striedavého prúdu, R je ohmická záťaž obvodu.

Efektívne hodnoty I_e , U_e striedavého elektrického prúdu a napätia

$$I_e = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = 0,707 i_0 \qquad U_e = \frac{u_0}{\sqrt{2}} = 0,707 u_0$$

Skutočný výkon P striedavého prúdu ($\cos \varphi$ je účinník, φ je fázový posun prúdu a napätia)

$$P = U_e I_e \cos \varphi$$

Impedancia Z je celkový odpor obvodu RLC

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Fázový posun φ elektrického prúdu za napätím v obvode RLC

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Ak platí

1. $\varphi = 0$, $Z = R$ ($L = 0, C \rightarrow \infty$), $i = \frac{u_0}{R} \sin \omega t$
2. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $Z = \omega L$, ($R = 0, C \rightarrow \infty$), $i = \frac{u_0}{\omega L} \sin(\omega t - \varphi)$
3. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $Z = \frac{1}{\omega C}$, ($R = 0, L = 0$), $i = u_0 \omega C \sin(\omega t + \varphi)$

Podmienky rezonancie

$$Z = R \qquad \varphi = 0 \qquad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Rezonančná frekvencia RLC obvodu – **Thomsonov vzťah**

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Periódá T elektrických kmitov v oscilačnom obvode RLC

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Vypočítajte vzájomný pomer energií magnetického poľa oscilačného obvodu a energie jeho elektrického poľa v časovom okamžiku $t = \frac{T}{8}$ s, ak T je periódá oscilácií.

Riešenie:

Napätie na kondenzátore vyjadríme rovnicou

$$U = U_0 \cos \omega t$$

Pomocou veličín Q , C a U vyjadríme elektrický prúd I na kondenzátore

$$I = C \frac{dU}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_0 \cos \omega t) = -CU_0 \omega \sin \omega t$$

Pre energiu magnetického a elektrického poľa platí

$$E_L = \frac{1}{2} LI^2 \qquad E_C = \frac{1}{2} CU^2$$

Potom vzájomný pomer týchto energií vyjadríme

$$\frac{E_L}{E_C} = \frac{LC^2 U_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{CU_0^2 \cos \omega t} = LC \omega^2 \tan^2 \omega t$$

$$\tan \omega t = \tan \frac{2\pi}{T} \frac{T}{8} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

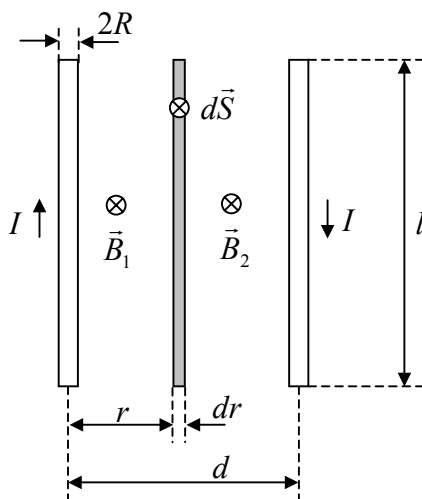
Pretože pre oscilačný obvod platí $T = 2\pi\sqrt{LC}$, dostaneme $LC = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2}$

Po dosadení

$$\frac{E_L}{E_C} = \frac{1}{\omega^2} \omega^2 = 1$$

Príklad 2:

Určte vlastnú indukčnosť na jednotku dĺžky dvoch dlhých rovnobežných vodičov, ktorými prechádza rovnako veľký elektrický prúd opačného smeru. Vodiče sú umiestnené vo vákuu, majú kruhový prierez rovnakého polomeru a ich vzájomná vzdialenosť je d .

Riešenie:

V priestore medzi vodičmi vzniká magnetické pole vplyvom elektrických prúdov I prechádzajúcich vodičmi. Magnetická indukcia B_1 buďená prúdom I v prvom vodiči vo vzdialenosti r je

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

V tom istom mieste je magnetická indukcia B_2 buďená prúdom I v druhom vodiči

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

Z Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona vyplýva, že obidva vektory $\vec{B}_1$ a $\vec{B}_2$ sú kolmé na nákresňu a smerujú za nákresňu, takže pre veľkosť výslednej magnetickej indukcie B platí

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right)$$

Magnetické pole je nehomogénne, takže keď zvolíme vo vzdialenosti r plôšku $dS = ldr$, ktorej vektor je súhlasne orientovaný s vektorom výslednej magnetickej indukcie $\vec{B}$, magnetický tok $d\Phi$ cez túto plôšku je

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Celkový indukčný tok Φ potom vyjadríme

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_R^{d-R} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right) dr = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}$$

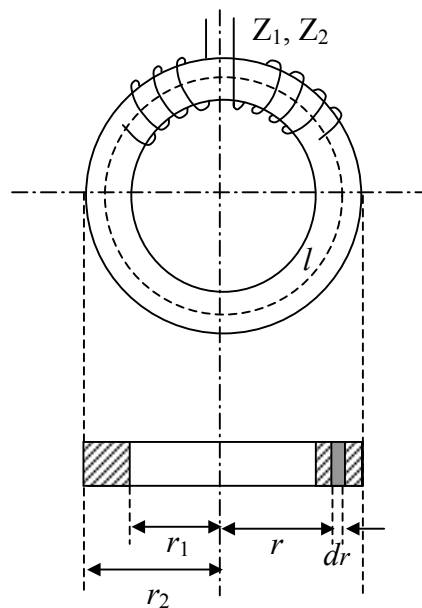
Po dosadení do vzťahu $L = \frac{\Phi}{I}$ a prepočítaní na jednotku dĺžky dostaneme pre vlastnú indukčnosť dvoch rovnobežných vodičov

$$L = \frac{\mu_0}{I} \ln \frac{d-R}{R}$$

Príklad 3:

Odvoďte vzťah pre vzájomnú indukčnosť dvoch cievok navinutých na jadro s obdĺžnikovým prierezom, ak na jadre je jedna cievka s počtom závitov Z_1 a tesne na nej druhá cievka s počtom závitov Z_2 .

Riešenie:



Vychádzame zo zákona celkového prúdu pre prípad, že cievkou so Z_1 závitmi prechádza elektrický prúd I_1

$$\int_l H dl = Z_1 I_1$$

Integrovaním pozdĺž celej strednej magnetickej indukčnej čiary, ktorá má tvar kružnice, dostávame

$$\int_l H dl = H 2\pi r = Z_1 I_1$$

$$H = \frac{Z_1 I_1}{2\pi r}$$

Indukčný tok, ktorý prechádza elementárnou ploškou prierezu jadra $dS = h dr$, môžeme považovať za homogénny, takže

$$d\Phi = B dS = \mu_0 \mu_r H h dr = \mu_0 \mu_r \frac{Z_1 I_1}{2\pi r} h dr$$

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} Z_1 I_1 h \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} Z_1 I_1 h \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Celkový indukčný tok pretína závitov druhej cievky Z_2 , takže celkový tok cez druhú cievku je

$$\Phi_{1,2} = \Phi Z_2 = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} h Z_1 Z_2 I_1 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Hľadaná vzájomná indukčnosť oboch cievok v zmysle definície je

$$M = \frac{\Phi_{1,2}}{I_1} = \frac{\Phi_{2,1}}{I_2} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} Z_1 Z_2 h \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Príklad 4:

Kruhová cievka C_1 s počtom závitov $Z_1 = 50$ má prierez $S_1 = 4 \text{ cm}^2$ a je umiestnená v strede kruhovej cievky C_2 s dĺžkou 20 cm a s počtom závitov $Z_2 = 100$. Osi oboch cievok splývajú. Určte vzájomnú indukčnosť cievok a indukované elektromotorické napätie v cievke C_1 , keď elektrický prúd v cievke C_2 klesne o $I = 40 \text{ A}$ za 1 sekundu .

Riešenie:

Ak prechádza závitmi cievky C_2 elektrický prúd I , je magnetická indukcia na osi cievky

$$B = \frac{\mu_0 Z_2 I}{l}$$

Magnetické pole v cievke C_2 je takmer homogénne, potom magnetický tok Φ_1 cez prierez cievky C_1 je

$$\Phi_1 = B S_1 = \frac{\mu_0 Z_2 I}{l} S_1$$

Je zrejmé, že magnetický tok stenami cievky C_1 je nulový, takže celkový magnetický tok Φ cez všetky jej závitov vyjadríme

$$\Phi = Z_1 \Phi_1 = \frac{\mu_0 Z_1 Z_2}{l} S_1 I$$

Potom vzájomná indukčnosť

$$M = \frac{\mu_0 Z_1 Z_2 S_1}{l} = 12,57 \cdot 10^{-7} \frac{50 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-1}} = 1,257 \cdot 10^{-5} \text{ H}$$

Príklad 5:

Dosky kondenzátora s elektrickou kapacitou $C = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ sú nabité na určitý potenciálový rozdiel. Za aký čas sa kondenzátor vybije na polovicu, keď dosky spojíme vodičom s elektrickým odporom $R = 2 \cdot 10^6 \Omega$?

Riešenie:

Pre elektrický obvod RC platí

$$\frac{Q}{C} - IR = 0$$

Elektrický prúd $I = -\frac{dQ}{dt}$, preto môžeme rovnicu prepísať do tvaru $\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{CR}Q$.

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{CR} dt$$

Integrovaním rovnice dostaneme $\ln Q = -\frac{1}{CR}t + \ln Q_0$.

Pre časovú závislosť elektrického náboja na elektródach kondenzátora vyplýva

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

kde Q_0 je maximálny elektrický náboj, t.j. elektrický náboj na kondenzátore v čase $t = 0$.

Pre hľadaný čas t^* , za ktorý sa kondenzátor vybije na polovicu, platí

$$Q = \frac{Q_0}{2}$$

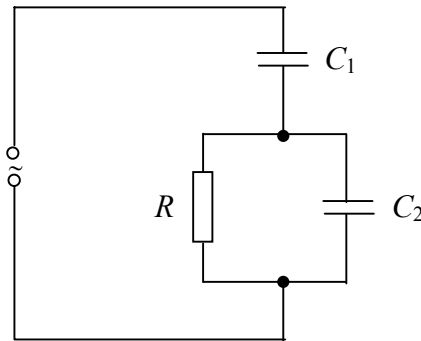
$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-\frac{t^*}{CR}}$$

$$t^* = CR \ln 2 = 0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^6 \ln 2 = 0,14 \text{ s}$$

Príklad 6:

Určte výkon elektrického obvodu, ktorý obsahuje zdroj striedavého elektrického prúdu s frekvenciou $f = 50 \text{ Hz}$ a s efektívnym napätím $U = 120 \text{ V}$. Elektrická kapacita kondenzátora $C_1 = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$, $C_2 = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ a rezistivita $R = 10 \text{ k}\Omega$.

Riešenie:



Výkon elektrického obvodu je daný vzťahom

$$P = UI \cos \varphi$$

Admitancia Y_2 kondenzátora s elektrickou kapacitou C_2 je daná

$$Y_2 = j\omega C_2 = 0,628 \cdot 10^{-4} \text{ j } \Omega^{-1}$$

Pre admitanciu Y_3 rezistencie R platí

$$Y_3 = 1/R = 10^{-4} \text{ } \Omega^{-1}$$

Celkovú admitanciu obvodu RC_2 vypočítame

$$Y_{23} = Y_2 + Y_3 = 10^{-4} (1 + 0,628 \text{ j}) \text{ } \Omega^{-1}$$

Impedancia obvodu RC_2

$$Z_{23} = \frac{1}{Y_{23}} = \frac{1}{10^{-4} (1 + 0,628 \text{ j})} = \frac{10^4 (1 - 0,628 \text{ j})}{1^2 + 0,628^2} = (7040 - 4423 \text{ j}) \text{ } \Omega$$

Impedancia kondenzátora C_1 je

$$Z_1 = \frac{j}{\omega C_1} = -\frac{j}{314,5 \cdot 10^{-4}} = (-6370 \text{ j}) \text{ } \Omega$$

Celkovú impedanciu Z elektrického obvodu

$$Z = Z_1 + Z_{23} = (7040 - 10793 \text{ j}) \text{ } \Omega$$

Pre elektrický prúd v obvode platí

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{120}{7040 - 10793 \text{ j}} = \frac{120(7040 + 10793 \text{ j})}{7040^2 + 10793^2} = (5,09 + 7,8 \text{ j}) \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$|I| = \sqrt{5,09^2 + 7,8^2 \cdot 10^{-3}} = 0,0093 \text{ A}$$

Fázový posun vyjadríme

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{7,8}{5,09} = 1,53$$

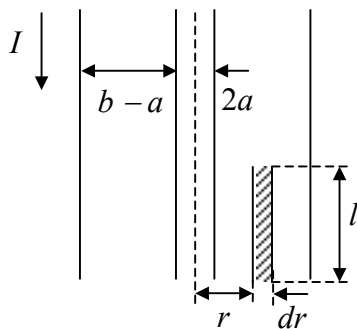
$$\varphi = -56^{\circ} 50'$$

Výkon P elektrického obvodu potom určíme

$$P = 120 \cdot 0,0093 \cdot \cos 56^{\circ} 50' = 0,6106 \text{ W}$$

ÚLOHY

1. Stanovte vlastnú indukčnosť dlhého kábla skladajúceho sa z centrálneho valcového vodiča s polomerom a a vonkajšieho dutého valca s polomerom b . Predpokladáme, že $(b-a) \gg a$, takže môžeme zanedbať magnetický tok vo vnútri vodiča.



$$\left[\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right]$$

2. Určte vlastnú indukčnosť toroidu s jadrom s prierezom 25 cm^2 a stredným priemerom 30 cm . Toroid má 1000 závitov a tečie ním elektrický prúd 1 A ($\mu_0 = 12,57 \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$; $\mu_r = 1200$).
[4 H]
3. Nájdite vlastnú indukčnosť uzavretej cievky prstencového tvaru s 1000 závitmi, ktoré sú navinuté na železné jadro s prierezom 25 cm^2 . Stredný priemer jadra je 20 cm , elektrický prúd tečúci cievkou je 1 A a permeabilita prostredia $\mu = 700\mu_0$.
[3,5 H]
4. Vypočítajte elektromotorické napätie, ktoré sa indukuje v cievke s vlastnou indukčnosťou $L = 0,06 \text{ H}$, keď v nej elektrický prúd rovnomerne rastie tak, že za každú sekundu sa zväčší o $\Delta I = 10 \text{ A}$.
[660 V]
5. Dokážte, že vzájomná indukčnosť $M \sim \sqrt{L_1 L_2}$, kde L_1, L_2 sú vlastné indukčnosti dvoch obvodov (1) a (2) v tesnej väzbe. Obvod (1) má zdroj elektrického prúdu a obvod (2) je uzavretý, pričom predpokladáme, že elektrický odpor je zanedbateľne malý, a teda nevzniká Jouleovo teplo.
[návod: odvodte zdanlivé zmenšenie indukčnosti L_1 a uvážte, že je vždy > 0]
6. Určte, aká je maximálna hodnota výsledného striedavého napätia v obvode, kde sú za sebou zapojené dva zdroje striedavého napätia s maximálnymi hodnotami $U_1 = 30 \text{ V}$,

- $U_2 = 40 \text{ V}$, ak U_1 predbieha U_2 o fázový posun 60° . Aká je hodnota napätia v okamihu, keď je U_1 maximálne?
[61 V; 50 V]
7. Určte fázový posun a amplitúdu elektrického prúdu, ktorý dodáva zdroj do obvodu dvoch paralelných vetiev, ak jednotlivé elektrické prúdy majú amplitúdy $I_1 = 3 \text{ A}$, $I_2 = 4 \text{ A}$ a príslušné fázové posuny sú $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$.
[12/11; 6,8 A]
8. V krátkej cievke s plošným obsahom prierezu $0,5 \text{ m}^2$ a so 60 závitmi sa v premenlivom magnetickom poli s frekvenciou 10^6 s^{-1} indukuje elektromotorické napätie s maximálnou hodnotou 30 mV . Aká je maximálna hodnota magnetickej indukcie v cievke?
[$1,59 \cdot 10^{-10} \text{ T}$]
9. Vypočítajte maximálnu hodnotu striedavého magnetického toku v jadre transformátora pri frekvencii 50 Hz , ak viete, že sa jeho zmenou v jednom závine sekundárnej cievky transformátora indukuje elektromotorické napätie s efektívnou hodnotou $0,35 \text{ V}$.
[$1,57 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$]
10. Kondenzátor s elektrickou kapacitou C má v čase $t = 0$ potenciál V_0 . Vybíjame ho cez rezistanciu R . Aký je časový priebeh elektrického prúdu?
[$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$; $I_0 = \frac{V_0}{R}$]
11. Elektrickým obvodom so zdrojom napätia 100 V preteká jednosmerný elektrický prúd 5 A . Aký elektrický prúd bude prechádzať obvodom pri striedavom napätí s frekvenciou 50 Hz , ak vlastná indukčnosť obvodu je $0,1 \text{ H}$? Aký veľký je fázový posun napätia a prúdu?
[2,8 A; $57^\circ 31'$]
12. Vypočítajte veľkosť elektrického prúdu v obvode s kondenzátorom s elektrickou kapacitou $C = 1 \text{ F}$, ak $R = 1 \Omega$, $f = 50 \text{ Hz}$, $U = 220 \text{ V}$.
[$6,9 \cdot 10^{-2} \text{ A}$]
13. V obvode striedavého elektrického prúdu s napätím $220 \text{ V}/50 \text{ Hz}$ je rezistencia 50Ω , cievka s vlastnou indukčnosťou 1 H a kondenzátor s elektrickou kapacitou $1 \mu\text{F}$. Určte napätie na cievke v rezonancii.
[4400 V]
14. Na zdroj striedavého napätia je pripojený otvorený kábel, ktorý predstavuje valcový kondenzátor s elektrickou kapacitou $1,5 \mu\text{F}$. Generátor predstavuje indukčnosť $\frac{2}{3} \text{ H}$, frekvencia elektrického prúdu je 50 Hz a celková rezistencia vedenia je 2Ω . Určte napätie pri rezonancii.
[$2 \cdot 10^6 \text{ V}$]
15. V elektrickom obvode so striedavým napätím $U = 500 \text{ V}/50 \text{ Hz}$ sú zaradené za sebou rezistencia $R = 300 \Omega$ a reaktancie $X_L = 400 \Omega$, $X_C = 500 \Omega$. Určte indukčnosť L , elektrickú kapacitu C a impedanciu obvodu, elektrický prúd v obvode, fázový posun medzi napätím a elektrickým prúdom. Aká veľká musí byť elektrická kapacita, aby nastala rezonancia? Aký elektrický prúd prechádza v tomto prípade obvodom?
[1,257 H, 6,35 μF ; 948 Ω ; 0,526 A; $71^\circ 35'$; 7,96 μF ; 1,66 A]
16. Solenoid s dĺžkou 50 cm , s prierezom 10 cm^2 , s počtom závitov 3000 a rezistanciou 20Ω je napojený na striedavé napätie 100 V . Vypočítajte hodnotu elektrického prúdu pre frekvencie 50 Hz , 250 Hz , 500 Hz .
[4,8 A; 2,4 A; 1,3 A]

KMITY A VLNY

KMITAVÝ POHYB

Kmitavý pohyb je periodický pohyb častíc alebo telies okolo rovnovážnej polohy.

Pohybová rovnica netlmeného harmonického pohybu

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r}$$

$\vec{r}$ je okamžitá výchylka hmotného bodu (telesa) z rovnovážnej polohy, k je konštanta charakterizujúca vlastnosti kmitajúceho systému, ktoré núti konať hmotný bod alebo teleso harmonický pohyb. Pre kmitajúci systém teleso zavesené na pružine je k tuhosť pružiny.

V jednorozmernom prípade je časová závislosť okamžitej výchylky netlmeného harmonického pohybu napr.

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad y = y_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

ω je uhlová frekvencia netlmeného harmonického pohybu, A , y_0 , φ_0 sú amplitúdy (maximálne okamžité výchylky) harmonického pohybu, φ je fázový posun, $(\omega t + \varphi)$ je fáza pohybu, m je hmotnosť telesa.

Periód T netlmeného harmonického pohybu $T = 2\pi/\omega$ a pre teleso na pružine

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Celková energia E_c netlmeného harmonického pohybu

$$E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Pohybová rovnica tlmeného kmitavého pohybu (r je koeficient odporu prostredia)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

Časová závislosť okamžitej výchylky x tlmeného kmitavého pohybu ($\beta = \frac{r}{2m}$ je koeficient útlmu)

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ je uhlová frekvencia tlmených kmitov a $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ je uhlová frekvencia netlmených kmitov

Amplitúda vynútených kmitov

$$A = \frac{F_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + 4\beta^2 \omega_v^2 \right]^{1/2}}$$

F_0 je amplitúda vonkajšej sily, m hmotnosť kmitajúceho telesa, ω_0 vlastná frekvencia netlmených kmitov, ω_v uhlová frekvencia vonkajšej sily, β koeficient útlmu.

Fázový posun φ_v medzi vonkajšou silou a vynútenými kmitmi

$$\operatorname{tg} \varphi_v = \frac{2\omega_v \beta}{\omega_0^2 - \omega_v^2}$$

Výsledná amplitúda A_v dvoch jednosmerných harmonických pohybov s rovnakou frekvenciou a rôznou amplitúdou

$$A_v^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Výsledná amplitúda A_v dvoch jednosmerných harmonických pohybov s rôznou frekvenciou a rovnakou amplitúdou – tzv. rázy uhlovou frekvenciou $\omega_r = |\omega_2 - \omega_1|$

$$A_v = \left| 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|$$

Periódna T kmitov matematického kyvadla (l je dĺžka závesu, g je gravitačné zrýchlenie)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Periódna T kmitov fyzikálneho kyvadla (J je moment zotrvačnosti kyvadla, a je vzdialenosť osi rotácie od ťažiska kyvadla)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Amplitúda kmitov netlmeného harmonického oscilátora s hmotnosťou $m = 10$ g je $y_0 = 5$ cm a jeho celková energia $E = 3,1 \cdot 10^{-5}$ J.

- Vyjadrite výchylku oscilátora ako funkciu času.
- Určte rýchlosť oscilátora v čase $t = 0$, ak počiatočná fáza $\varphi = \pi/3$.
- Vyšetrite, v ktorých okamžikoch bude kinetická energia oscilátora rovnaká ako jeho potenciálna energia.

Riešenie:

a) Časová závislosť výchylky netlmeného harmonického pohybu oscilátora je

$$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Pre jeho kinetickú energiu platí

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2$$

Keď z tohto vzťahu vyjadríme uhlovú frekvenciu

$$\omega = \sqrt{\frac{2E}{m y_0^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,1 \cdot 10^{-5}}{0,01 \cdot 0,05^2}} = 1,57 \text{ s}^{-1}$$

a dosadíme do vzťahu pre časovú závislosť okamžitej výchylky, dostaneme

$$y = 0,05 \sin\left(1,57t + \frac{\pi}{3}\right)$$

b) Pre rýchlosť harmonického netlmeného oscilátora platí

$$v = \frac{dy}{dt} = y_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Rýchlosť v čase $t = 0$ sa rovná

$$v = 0,05 \cdot 1,57 \cdot \cos 60^\circ = 0,039 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Vyjadríme kinetickú a potenciálnu energiu netlmeného harmonického oscilátora

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_P = \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Porovnaním týchto vzťahov dostaneme

$$\frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Táto rovnosť je splnená len vtedy, ak platí

$$(\omega t + \varphi) = \frac{\pi}{4}(2k + 1), \text{ kde } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Potom $t = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\pi}{4} (2k+1) - \varphi \right]$ a číselne pre $k = 1$ a $k = 2$

$$t_1 = \frac{1}{1,57} \left[\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right] = 0,834 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{1}{1,57} \left[\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right] = 1,834 \text{ s}$$

Príklad 2:

Teleso s hmotnosťou $m = 10 \text{ g}$ koná tlmené kmity s amplitúdou $y_0 = 7 \text{ cm}$, počiatkovou fázou rovnou nule a s koeficientom útlmu $\beta = 1,6 \text{ s}^{-1}$. Pôsobením vonkajšej periodickej sily začne teleso konať vynútené kmity, v ustálenom stave popísané rovnicou $y = 5 \sin(10\pi t + 0,75\pi)$. Vyjadrite časovú závislosť

- výchyľky tlmených kmitov,
- vonkajšej periodickej sily pôsobiacej na teleso.

Riešenie:

Časová závislosť výchyľky telesa konajúceho tlmené kmity je určená

$$y = y_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$$

Vonkajšia periodická sila s uhlovou frekvenciou ω_v zapríčiniť, že v ustálenom stave bude teleso konať vynútené kmity s uhlovou frekvenciou ω_v podľa rovnice

$$y_v = A \sin(\omega_v t - \varphi_v)$$

kde A je amplitúda vynútených kmitov a φ_v je fázový posun

$$A = \frac{F_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + 4\beta\omega_v^2 \right]^{1/2}}$$

$$\tan \varphi_v = \frac{2\omega_v \beta}{\omega_0^2 - \omega_v^2}$$

Zo zadaných rovníc a ich úpravou vyjadríme frekvenciu vlastných kmitov

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_v^2 + 2\beta\omega_v} = 32,98 \text{ s}^{-1}$$

Uhlová frekvencia tlmených kmitov telesa

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 32,95 \text{ s}^{-1}$$

Časovú závislosť výchylky tlmených kmitov po dosadení číselných hodnôt vyjadríme

$$y = 0,07e^{-1,6t} \sin 32,95t$$

Vonkajšia periodická sila a jej amplitúda sú dané vzťahmi

$$F = F_0 \sin \omega_v t$$

$$F_0 = Am \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + 4\omega_v^2 \beta^2} = 7,38 \text{ N}$$

Časová závislosť vonkajšej periodickej sily bude mať potom tvar

$$F = 7,38 \sin(10\pi t)$$

Príklad 3:

Náboj s hmotnosťou $m_1 = 1 \text{ g}$ narazil do gule s hmotnosťou $m_2 = 1,25 \text{ kg}$ zavesenej na vlákne s dĺžkou $l = 3,4 \text{ m}$. Nárazom sa guľa vychýlila z rovnovážnej polohy do vzdialenosti $x_0 = 0,21 \text{ m}$. Vypočítajte, aká je rýchlosť náboja.

Riešenie:

Podľa zákona zachovania hybnosti sa hybnosť pred nárazom rovná hybnosti po náraze

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

Pretože guľa sa pred nárazom nepohybuje, jej rýchlosť $v_2 = 0$. Potom platí zákon zachovania hybnosti v tvare

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

Z tejto rovnice vyjadríme rýchlosť náboja

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v$$

Guľu na vlákne považujeme za matematické kyvadlo s periódou $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ a uhlovou frekvenciou $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Porovnaním pre uhlovú frekvenciu kyvadla dostaneme $\omega = \sqrt{g/l}$. Okamžitú výchylku a rýchlosť harmonického pohybu kyvadla vyjadrujú rovnice

$$x = x_0 \sin \omega t$$

$$v = x_0 \omega \cos \omega t$$

V okamžiku nárazu má rýchlosť maximálnu hodnotu, ktorú vyjadríme

$$v_{\max} = x_0 \omega = x_0 \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Uplatnením príslušných vzťahov pre rýchlosť náboja platí

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} x_0 \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{10^{-3} + 1,25}{10^{-3}} \cdot 0,21 \cdot \sqrt{\frac{9,81}{3,4}} = 446 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ÚLOHY

- Teleso kmitá harmonicky s amplitúdou výchylky 0,12 m a frekvenciou 4 Hz. Určte:
 - maximálnu rýchlosť a zrýchlenie kmitavého pohybu,
 - rýchlosť a zrýchlenie pri výchylke 0,06 m,
 - čas potrebný k tomu, aby sa teleso dostalo z rovnovážnej polohy do bodu so súradnicou 0,06 m.

[3,02 m·s⁻¹; 75,8 m·s⁻²; 2,6 m·s⁻¹; 37,9 m·s⁻²; $\frac{1}{48}$ s]
- Teleso kmitá na pružine s periódou 0,5 s. O koľko sa pružina skráti, ak teleso odstránime?
[0,0633 m]
- Pružina má tuhosť 0,3 N/cm. Aká je hmotnosť zaveseného telesa, ktoré vykonáva kmity s amplitúdou 5 cm a rovnovážnou polohou prechádza rýchlosťou 80 cm/s?
[0,117 kg]
- Doska kmitá harmonicky vo vertikálnom smere s amplitúdou 0,05 m. Aká môže byť najväčšia frekvencia harmonického pohybu, pri ktorej teleso ešte od dosky neodskočí?
[2,24 Hz]
- Pri tlmenom kmitavom pohybe s periódou 0,5 s sa zistilo, že po dvoch po sebe nasledujúcich výchylkách na tú istú stranu sa amplitúda kmitov zmenšila o 6/10. Určte konštantu útlmu a uhlovú frekvenciu netlmených kmitov, ktoré by prebiehali pri rovnakých podmienkach.
[1,83; 12,7 s⁻¹]
- Dva jednosmerné kmitavé harmonické pohyby s rovnakou frekvenciou a amplitúdami $A_1 = 0,05$ m, $A_2 = 0,06$ m sa skladajú do výsledného harmonického pohybu o amplitúde $A_v = 0,08$ m. Určte fázový posun φ skladajúcich sa pohybov.
[87° 02']
- Pružina sa predĺži závažím s tiažou 0,2 N o 4 cm. Aké závažie je potrebné, aby pri kmitaní s amplitúdou 15 cm prechádzalo rovnovážnou polohou rýchlosťou 1 m/s?
[1,125 kg]
- Nájdite v čase $t = \frac{T}{4}$ s rýchlosť a zrýchlenie harmonického pohybu, ktorý popisuje rovnica $y = A \sin \omega t$.
[0; $A\omega^2$]
- Aká je frekvencia netlmeného pohybu hmotného bodu s hmotnosťou 2 g, ak je amplitúda pohybu 10 cm a celková energia 1 J?
[50,33 s⁻¹]
- Závažie s hmotnosťou $m = 15$ g zavesené na pružine vykonáva kmitavý pohyb daný rovnicou $y = A \sin\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}\right)$, kde $A = 1$ m. Určte maximálnu silu, ktorá pôsobí na teleso a celkovú energiu kmitajúceho závažia.

- [0,0533 N; 0,027 J]
11. Pružina, na ktorej je zavesené teleso s hmotnosťou 1500 g, vykonáva vplyvom sily 1,96 N harmonický pohyb s amplitúdou 3 cm. Akú dĺžku by muselo mať matematické kyvadlo, aby kmitalo s rovnakou periódou?
[0,226 m]
 12. Aká je perióda harmonického pohybu telesa s hmotnosťou 10 g, ak naň pôsobí sila 0,05 N pri výchylke 3 cm?
[0,48 s]
 13. Počiatočná amplitúda tlmeného kmitavého pohybu kyvadla je $u_0 = 4$ cm. Za čas $t_1 = 10$ s sa zmenší na hodnotu $u_1 = 1$ cm. Za aký čas bude jej hodnota $u_2 = 0,4$ cm?
[16,61 s]
 14. Tri po sebe nasledujúce výchylky ručičky galvanometra boli $u_1 = 20$ d, $u_2 = 5,6$ d, $u_3 = 12,8$ d. Predpokladáme, že ručička vykonáva tlmené kmity. Určte dielik u_0 , ktorý zodpovedá rovnovážnej polohe ručičky.
[1,04]
 15. Dva kmitavé pohyby s rovnakými amplitúdami a periódami $T_1 = 3$ s, $T_2 = 3,1$ s sa skladajú do výsledného pohybu. Nájdite periódu výsledného kmitavého pohybu a periódu rázov.
[3,05 s; 93 s]
 16. Homogénny kotúč s polomerom 30 cm sa kýva okolo osi, ktorá prechádza jeho okrajom a je kolmá na rovinu kotúča. Určte dobu kyvu a redukovanú dĺžku tohto kyvadla.
[0,673 s; 0,45 m]

VLNENIE

Vlnenie je šírenie rozruchu hmotným prostredím alebo fyzikálny periodický dej, v ktorom sa každému bodu spojitého prostredia jednoznačne priradí zmena skúmanej veličiny ako funkcia času.

Rýchlosť v šírenia vlnenia (fázová rýchlosť)

$$v = f \lambda = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

f je frekvencia udávajúca počet periód za jednotku času, λ je vlnová dĺžka, ktorá udáva vzdialenosť dvoch susedných miest, kde prebieha rovnaký proces, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je vlnové číslo,

resp. vektor $\vec{k}$, ktorý určuje smer šírenia vlny.

Jednorozmerná vlnová rovnica (y je okamžitá výchylka a v je rýchlosť šírenia vlnenia)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Grupová rýchlosť vlnenia v_g charakterizuje rýchlosť šírenia amplitúdy vln a rýchlosť prenosu energie vlnením

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Rovnica vlny, ktorá sa šíri v smere osi x (fázový posun $\varphi = 0$)

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \sin 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Rýchlosť v šírenia pozdĺžnej vlny v pevných látkach (M je modul pružnosti látky a ρ je jej hustota)

$$v = \sqrt{\frac{M}{\rho}}$$

Rýchlosť v šírenia pozdĺžnej vlny v kvapalinách a plynach (K je koeficient stlačiteľnosti látky, κ je Poissonova konštanta a p je tlak plynu)

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad v = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$$

Snelliov zákon - zákon lomu (α je uhol dopadu vlnenia na rozhranie dvoch prostredí, β je uhol lomu, v_1 a v_2 sú rýchlosti šírenia vlnenia v oboch prostrediach)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

Rovnica stojatého vlnenia

$$y = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi ft = A_v \cos 2\pi ft$$

Súradnica vzniku kmitne x_k a uzla x_u

$$x_k = k \frac{\lambda}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_u = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dopplerov jav vzniká, keď nastáva zmena frekvencie registrovaná pozorovateľom pri relatívnom pohybe zdroja vlnenia voči pozorovateľovi.

1. Frekvencia f prijímaná pozorovateľom pri jeho pohybe rýchlosťou u ku (od) zdroja vlnenia s frekvenciou f_0 , v je rýchlosť vlnenia (zvuku)

$$f = f_0 \frac{v + u}{v} \qquad f = f_0 \frac{v - u}{v}$$

2. Frekvencia f prijímaná pozorovateľom pri pohybe zdroja vlnenia (zvuku) rýchlosťou w a s frekvenciou f_0 ku(od) pozorovateľa, v je fázová rýchlosť vlnenia (zvuku)

$$f = f_0 \frac{v}{v - w} \qquad f = f_0 \frac{v}{v + w}$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Overte, že všeobecná rovnica postupnej vlny daná rovnicou

$$y = y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ vyhovuje diferenciálnej vlnovej rovnici } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Riešenie:

Určíme druhé parciálne derivácie funkcie y podľa t a podľa x

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= y_0 \frac{4\pi^2}{T^2} \left[-\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= y_0 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \left[-\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \end{aligned}$$

Vynásobením prvej rovnice T^2 a druhej rovnice $(-\lambda^2)$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} T^2 &= y_0 4\pi^2 \left[-\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (-\lambda^2) &= y_0 4\pi^2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Sčítaním rovníc dostaneme diferenciálnu vlnovú rovnicu, lebo platí $v = \frac{\lambda}{T}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\lambda^2}{T^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} v^2$$

Príklad 2:

Fázová rýchlosť vlnenia s vlnovou dĺžkou λ šíriaceho sa po vodnej hladine je daná

vzťahom $v_f = \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi}}$, kde $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Ukážte, že grupová rýchlosť vlny je rovná

polovičnej hodnote fázovej rýchlosti. Ďalej vypočítajte fázovú a grupovú rýchlosť vlnenia s vlnovou dĺžkou $\lambda = 1000 \text{ m}$.

Riešenie:

Fázová rýchlosť vlnenia je definovaná vzťahom

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

kde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je vlnové číslo. Potom vzťah pre fázovú rýchlosť môžeme prepísať

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

a uhlovú rýchlosť vyjadríme

$$\omega = v_f k = \sqrt{gk}$$

Grupovú rýchlosť vlnenia určíme z definície

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_f$$

Pre vlnenie s vlnovou dĺžkou $\lambda = 1000$ m bude fázová a grupová rýchlosť

$$v_f = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 1000}{2\pi}} = 39,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_g = \frac{1}{2} 39,5 = 19,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Príklad 3:

Určte frekvenciu základného tónu a prvých troch harmonických tónov píšťaly s dĺžkou $l = 1,2$ m, ak je píšťala

- na oboch koncoch otvorená,
- na jednom konci uzavretá.

Riešenie:

- V píšťale na oboch koncoch otvorenej vznikne stojaté vlnenie, pri ktorom na oboch koncoch píšťaly vzniknú kmitne a pre dovolené hodnoty frekvencie platí

$$f = n \frac{v}{2l} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Pre frekvenciu základného tónu ($n = 1$, $v = 340$ m/s je rýchlosť zvuku vo vzduchu) dostaneme

$$f_1 = \frac{v}{2l} = \frac{340}{2 \cdot 1,2} = 141,6 \text{ Hz}$$

Pre vyššie harmonické tóny ($n = 2, 3, 4$) platí

$$f_2 = n \frac{v}{2l} = 2 \cdot \frac{340}{2 \cdot 1,2} = 283,3 \text{ Hz} \quad f_3 = 425,2 \text{ Hz} \quad f_4 = 566,4 \text{ Hz}$$

2. V píšťale na jednom konci uzavretej vznikne stojaté vlnenie, pri ktorom na uzavretom konci vznikne uzol a na otvorenom konci kmitňa. Dovoľené hodnoty frekvencie sú

$$f = (2n-1) \frac{v}{4l} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Pre frekvenciu základného tónu ($n = 1$) a pre vyššie harmonické ($n = 2, 3, 4$) dostaneme

$$f_1 = \frac{v}{4l} = \frac{340}{4 \cdot 1,2} = 70,8 \text{ Hz} \quad f_2 = 212,5 \text{ Hz} \quad f_3 = 354,2 \text{ Hz} \quad f_4 = 495,8 \text{ Hz}$$

Príklad 4:

Akou rýchlosťou sa musí pohybovať pozorovateľ od jednej ladičky k druhej, aby počul rázy s frekvenciou $f_r = 2 \text{ Hz}$, keď ladičky majú frekvenciu $f_0 = 435 \text{ Hz}$?

Riešenie:

Pri pohybe pozorovateľa medzi dvoma ladičkami sa pozorovateľ vždy od jednej ladičky vzdáľuje a k druhej sa približuje. Vzniká Dopplerov jav, pri ktorom prijímané frekvencie pozorovateľom pri jeho pohybe vyjadríme

$$f_1 = \frac{v+u}{v} f_0 \text{ (približovanie)}$$

$$f_2 = \frac{v-u}{v} f_0 \text{ (vzdďalovanie)}$$

Rozdiel týchto frekvencií určuje frekvenciu rázov

$$f_r = |f_1 - f_2| = \frac{v+u}{v} f_0 - \frac{v-u}{v} f_0 = \frac{2u}{v} f_0$$

Potom pre rýchlosť pohybu pozorovateľa medzi dvoma ladičkami platí

$$u = \frac{f_r v}{2 f_0} = \frac{2 \cdot 340}{2 \cdot 435} = 0,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ÚLOHY

1. Určte vzdialenosť dvoch susedných uzlov stojatého vlnenia, ktoré vzniklo interferenciou dvoch vln s periódou $2,1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ a fázovou rýchlosťou vlnenia 1425 m/s .
[1,5 m]
2. Akou rýchlosťou sa pohybuje zdroj zvuku ku pozorovateľovi, ak počuje tón s frekvenciou 522 Hz ? Zdroj zvuku vysiela tón s frekvenciou 500 Hz a fázová rýchlosť zvuku vo vzduchu je 340 m/s .

- [14,33 m]
3. Akou rýchlosťou sa pohybuje pozorovateľ ku zdroju zvuku, ktorý sa k pozorovateľovi približuje rýchlosťou 5 m/s a počuje tón s frekvenciou 522 Hz? Zdroj zvuku vysiela tón s frekvenciou 500 Hz.
[9,74 m·s⁻¹]
 4. Postupná vlna sa šíri ideálnym hmotným prostredím rýchlosťou 3 km/s tak, že v mieste rozruchu má hmotný bod amplitúdu výchylky 2 cm pri frekvencii 30 Hz. Určte rovnicu pre túto vlnu ako funkciu $y = f(x, t)$, vlnovú dĺžku a periódu.
[$y = 2 \cdot 10^{-2} \sin 2\pi \left(30t - \frac{x}{10^2} \right)$; 10² m; $\frac{1}{30}$ s]
 5. Vypočítajte, pod akým najväčším uhlom môže dopadať zvuková vlna na rozhranie vzduchu a vody, aby ešte vnikla do vody, ak rýchlosť zvuku vo vode 1450 m/s a rýchlosť zvuku vo vzduchu 340 m/s.
[13° 33']
 6. Rýchlosť zvuku v kyslíku je za normálnych podmienok 317,2 m/s. Vypočítajte, aký je pomer špecifických tepelných kapacít c_p/c_v kyslíka, keď jeho hustota je 1,428 kg/m³.
[1,42]
 7. V tyči z materiálu, ktorého hustota je 8,6·10³ kg/m³, sa šíri pozdĺžne vlnenie v smere jej dĺžky rýchlosťou 3400 m/s. Určte modul pružnosti v ťahu pre materiál, z ktorého je tyč zhotovená.
[9,04·10¹⁰ N·m⁻²]
 8. Určte vlnovú dĺžku stojateho vlnenia na strune dĺžky 30 cm, ktorej frekvencia základného tónu je 435 Hz, a vypočítajte frekvenciu ďalších troch tónov, ktoré struna môže vydávať.
[0,6m; 870 Hz; 1305 Hz; 1740 Hz]
 9. Stojaté vlnenie, ktoré vzniká na strune, je popísané rovnicou $y = 0,5 \cos \frac{\pi x}{3} \sin 40\pi t$, kde x, y je vyjadrené v centimetroch, t v sekundách. Vypočítajte:
 - a) amplitúdu a rýchlosť postupných vĺn, zložením ktorých vzniká stojaté vlnenie na strune,
 - b) vzdialenosť medzi uzlami vlnenia na strune,
 - c) rýchlosť častice struny v mieste $x = 3$ cm v čase $t = \frac{9}{8}$ s.
 [0,25 cm; 120 cm/s; 3 cm; 62,83 cm/s]
 10. Bod, ktorý je vo vzdialenosti 4 cm od zdroja vlnenia, má v čase $T/6$ okamžitú hodnotu výchylky rovnú polovici amplitúdy. Vlnenie je popísané rovnicou $y = A \cos(\omega t - kx)$. Aká je vlnová dĺžka vlny?
[48 cm]
 11. Určte amplitúdu A a fázový posun φ harmonickej vlny $y = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$, ak v čase $t = 0$ je okamžitá výchylka bodu vo vzdialenosti $x_1 = 0$ od zdroja $y_1 = 10$ mm, bodu vo vzdialenosti $x_2 = \lambda/6$ od zdroja $y_2 = 20$ mm a bodu vo vzdialenosti $x_3 = 5\lambda/12$ od zdroja $y_3 = 0$.
[2·10⁻² m; $5\pi/6$]
 12. Vypočítajte rozdiel fáz dvoch kmitajúcich bodov, ktoré sú vo vzdialenostiach 10 m a 16 m od zdroja kmitov s periódou 0,04 s. Fázová rýchlosť vlnenia je 300 m·s⁻¹.
[π]

ELEKTROMAGNETICKÉ VLNENIE

Maxwellove rovnice

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \mu \operatorname{div} \vec{H} &= 0\end{aligned}$$

Vzťah medzi elektrickou indukciou $\vec{D}$ a intenzitou elektrického poľa $\vec{E}$ v nevodivom izotropnom prostredí ($\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ je permitivita prostredia, ε_0 permitivita vákua, ε_r relatívna permitivita)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Vzťah medzi magnetickou indukciou $\vec{B}$ a intenzitou magnetického poľa $\vec{H}$ v nevodivom izotropnom prostredí ($\mu = \mu_0 \mu_r$ permeabilita prostredia, μ_0 permeabilita vákua, μ_r relatívna permeabilita)

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Vlnové rovnice pre vektor intenzity elektrického poľa $\vec{E}$ a vektor intenzity magnetického poľa $\vec{H}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon\mu} \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right) &= \frac{1}{\varepsilon\mu} \Delta \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \frac{1}{\varepsilon\mu} \left(\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} \right) &= \frac{1}{\varepsilon\mu} \Delta \vec{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Rýchlosť šírenia v elektromagnetickom vlnení

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

Rýchlosť šírenia elektromagnetického vlnenia vo vákuu ($\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1$)

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,859 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

V nevodivých prostrediach (dielektrikách) platí $\mu_r = 1, \varepsilon_r > 1, \sigma = 0$. Potom

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Transverzálnosť elektromagnetického vlnenia - vektory $\vec{E}$, $\vec{H}$ sú kolmé na smer šírenia vlnenia. V homogénnom izotropnom a nevodivom prostredí tvoria spolu s jednotkovým vektorom $\vec{i}$ určujúcim smer šírenia vlnenia v poradí $(\vec{i}, \vec{E}, \vec{H})$ pravotočivú sústavu a platí

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H} = \vec{i} \times \vec{E} \qquad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E} = \vec{H} \times \vec{i}$$

Poyntingov vektor $\vec{P}$ určuje energiu prenášanú elektromagnetickým vlnením jednotkovým prierezom za jednotku času

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{P} = w\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \vec{i}$$

w je hustota energie elektromagnetického poľa, $\vec{v}$ je rýchlosť šírenia elektromagnetického vlnenia.

Intenzita vlnenia I je stredná hodnota veľkosti Poyntingovho vektora

$$I = \langle |\vec{P}| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{P}| dt = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{E} \times \vec{H}| dt$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Vektor intenzity elektrického poľa rovinatej elektromagnetickej vlny šíriacej sa vo vákuu je daný rovnicou $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}) \vec{j}$. Predpokladajte, že hodnotu amplitúdy E_0 a vlnového vektora $\vec{k}_\lambda$ poznáte. Určte vektor intenzity magnetického poľa $\vec{H}$ ako funkciu času v bode s polohovým vektorom $\vec{r} = x\vec{i}$.
Riešte pre hodnoty $E_0 = 160 \text{ mV} \cdot \text{m}^{-1}$, $k_\lambda = 0,51 \text{ m}^{-1}$, $x = 10 \text{ m}$.

Riešenie:

Vzájomná kolmosť vektorov intenzity elektrického poľa $\vec{E}$ a magnetickej indukcie $\vec{B}$ a ich kolmosť na smer šírenia vlny vyplýva z Maxwellových rovníc. Platí

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{i} \times \vec{E}$$

Platí $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ a rýchlosť šírenia elektromagnetickej vlny vo vákuu $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, potom

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{i} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos(\omega t - x k_\lambda \cdot \vec{i}) \vec{i} \times \vec{j}$$

Po dosadení číselných hodnôt s uvažovaním vzťahu $c = \frac{\omega}{k_\lambda}$ platí

$$H = \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 10^{-7}}} 0,16 \cdot \cos(0,51 \cdot 3 \cdot 10^8 t - 0,51 \cdot 10) \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\vec{H}(t) = 0,425 \cdot \cos(1,53 \cdot 10^8 t - 5,1) \vec{i} \times \vec{j}$$

Príklad 2:

Rovinná elektromagnetická vlna, ktorá sa šíri vo vákuu v kladnom smere osi x , v danom mieste je určená rovnicami $\vec{E} = (E_0 \cos \omega t) \vec{j}$ a $\vec{H} = (H_0 \cos \omega t) \vec{k}$.

- Vyjadrite Poyntingov vektor a určte jeho smer.
- Vypočítajte strednú hodnotu Poyntingovho vektora za čas jednej periódy v prípade, že $E_0 = 100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ a $H_0 = 0,39 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.

Riešenie:

- Poyntingov vektor je definovaný vzťahom

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Po dosadení

$$\vec{P} = (E_0 \cos \omega t) \vec{j} \times (H_0 \cos \omega t) \vec{k} = (E_0 H_0 \cos^2 \omega t) \vec{i}$$

Smer vektora $\vec{P}$ je totožný so smerom šírenia elektromagnetickej vlny.

- Okamžitá hodnota Poyntingovho vektora sa v elektromagnetickej vlne s časom mení a jej strednú hodnotu určíme

$$\langle |\vec{P}| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{E} \times \vec{H}| dt$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 H_0 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,39 = 19,5 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

Príklad 3:

Vodičom s kruhovým prierezom $S = \pi r^2$ preteká elektrický prúd, ktorý sa s časom mení. Vypočítajte veľkosť Poyntingovho vektora na povrchu vodiča a určte jeho smer.

Dokážte, že energia elektromagnetického poľa tečie do vodiča s výkonom $P' = \frac{I^2 l}{\sigma \pi r^2}$,

ktorý sa vo vodiči mení na teplo.

Riešenie:

Hustota elektrického prúdu vo vodiči je určená vzťahom

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi r^2} \vec{J}_0$$

kde $\vec{J}_0$ je jednotkový vektor v smere osi vodiča. Podľa Ohmovho zákona $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (σ je konduktivita) je intenzita elektrického poľa vo vodiči a na jeho povrchu daná vzťahom

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{\sigma \pi r^2} \vec{J}_0$$

Zo zákona celkového prúdu

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

vypočítame intenzitu magnetického poľa tesne pri povrchu vodiča, ak za integračnú cestu zvolíme kružnicu tesne obopínajúcu vodič. Dostaneme

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{k}_0$$

kde $\vec{k}_0$ je jednotkový vektor kolmý na os vodiča.

Poyntingov vektor určujúci množstvo energie prenášanej elektromagnetickou vlnou za jednotku času jednotkovou plochou vyjadríme vzťahom

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \left(\frac{I}{\sigma \pi r^2} \vec{J}_0 \right) \times \left(\frac{I}{2\pi r} \vec{k}_0 \right) = \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma r^3} (\vec{J}_0 \times \vec{k}_0)$$

Poyntingov vektor smeruje z povrchu vodiča do jeho vnútra, takže tok elektromagnetickej energie za jednotku času úseku dĺžky l s plochou plášťa $S = 2\pi r l$ je daný

$$P' = P 2\pi r l = \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma r^3} 2\pi r l = \frac{I^2 l}{\sigma \pi r^2} = I^2 R$$

Z výsledku vyplýva, že sa rovná vznikajúcemu teplu za jednotku času vo vodiči.

ÚLOHY

1. V homogénnom a izotropnom prostredí s $\epsilon_r = 3$ a $\mu_r = 1$ sa šíri rovinná elektromagnetická vlna. Amplitúda intenzity elektrického poľa $E_0 = 10 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$. Určte amplitúdu intenzity magnetického poľa H_0 a fázovú rýchlosť elektromagnetickej vlny. $[0,046 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}; 1,73 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}]$
2. Vo vákuu sa šíri rovinná elektromagnetická vlna. Amplitúda vektora intenzity magnetického poľa je $0,05 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$. Určte amplitúdu vektora intenzity elektrického poľa. $[18,8 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}]$

3. V určitom prostredí sa šíri elektromagnetická vlna s uhlovou rýchlosťou ω . Relatívna permitivita prostredia je $\varepsilon_r = 2$ a relatívna permeabilita $\mu_r = 1$. Určte Poyntingov vektor v bode, kde vektor intenzity elektrického poľa sa mení podľa vzťahu $\vec{E} = 10 \cos(\omega t + \varphi) \vec{k}$.
 $[\vec{P} = 0,38 \cos^2(\omega t + \varphi) \vec{j} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}]$
4. Radarový vysielateľ vysielá rovnomerný zväzok energie. Priestorový uhol kužeľového zväzku je 0,01 sr. Maximálna intenzita elektrického poľa vo vzdialenosti 1 km od vysielateľa je 10 V/m. Aká je maximálna intenzita magnetického poľa a výkon zväzku elektromagnetického vlnenia?
 $[2,65 \cdot 10^{-2} \text{ A/m}; 2,65 \cdot 10^3 \text{ W}]$
5. Vypočítajte amplitúdy vektorov $\vec{E}$ a $\vec{H}$ elektromagnetického poľa slnečného žiarenia na povrchu Zeme, ak hustota toku energie žiarenia je 1327 W/m^2 . Atmosféru považujte za homogénne izotropné dielektrikum s $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$.
 $[10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}; 2,6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}]$
6. Intenzita elektrického poľa elektromagnetickej vlny je daná vzťahom $E(x, t) = 10^3 \sin[\pi(9 \cdot 10^{14} t - 3 \cdot 10^6 x)] \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Určte amplitúdu, frekvenciu, rýchlosť, vlnovú dĺžku, periódu a veľkosť vlnového vektora.
 $[10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}; 4,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}; 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; 0,66 \cdot 10^{-7} \text{ m}; 0,22 \cdot 10^{-14} \text{ s}; 1,43 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}]$
7. Vypočítajte amplitúdy intenzít elektrického a magnetického poľa elektromagnetického vlnenia šíriaceho sa vo vzduchu, ktoré v danom mieste môžeme popísať rovnicami $\vec{E} = \vec{i} E_0 \cos \omega t$, $\vec{H} = \vec{j} H_0 \cos \omega t$, vo vzdialenosti 100 km od vysielateľa. Stredný vyžiarovaný výkon vysielateľa je 100 kW.
 $[2,45 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}; 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ A/m}]$
8. Zložky vektora elektrickej intenzity rovinatej elektromagnetickej vlny šíriacej sa vo vákuu sú dané rovnicami $E_x = 0$, $E_z = 0$, $E_y = 0,5 \cos\left[2\pi \cdot 10^8 \left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$. Určte vlnovú dĺžku vlny, vyjadrite vektor magnetickej indukcie vlny a vypočítajte strednú hodnotu energie prenášanej vlnou za jednotku času jednotkovou plochou.
 $[3 \text{ m}; 1,6 \cdot 10^{-9} \cos\left[2\pi \cdot 10^8 \left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \vec{k}; 3,32 \cdot 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}]$
9. Elektromagnetická vlna má frekvenciu $4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ a vlnovú dĺžku $5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Aká je rýchlosť šírenia tejto vlny? Aká je permitivita prostredia, v ktorom sa vlna šíri a jeho index lomu? Aká je vlnová dĺžka tejto vlny vo vákuu? Permeabilita prostredia je $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.
 $[2 \cdot 10^8 \text{ m/s}; 1,99 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}; 1,5; 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}]$
10. Dokážte, že vlna $E = E_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) + E_2 \sin(\omega t - kx + \varphi_2)$ vyhovuje vlnovej rovnici.
11. Rovinná vlna popísaná rovnicou $E = E_0(t) \cos(2\pi \nu t - kx)$ má od času závislú amplitúdu $E_0 = a(1 + \cos 2\pi \nu' t)$, kde $a = \text{konšt.}$, ν, ν' sú príslušné frekvencie. Dokážte, že takáto vlna vzniká superpozíciou niekoľkých monochromatických vln, a nájdite ich frekvencie.
 $[\nu; \nu' - \nu; \nu' + \nu]$

GEOMETRICKÁ OPTIKA

Geometrická optika sa zaoberá zobrazovaním predmetov. Opiera sa o pojem svetelného lúča, pričom netreba prihliadať na vlnovú podstatu svetla. V homogénnom a izotropnom prostredí sú svetelné lúče priamky.

Absolútny index lomu prostredia N (c je rýchlosť svetla vo vákuu a v je rýchlosť svetla v prostredí)

$$N = \frac{c}{v}$$

Zákon odrazu – uhol dopadu α sa rovná uhlu odrazu α' a zostáva v rovine dopadu

$$\alpha = \alpha'$$

Zákon lomu - α je uhol dopadu, β je uhol lomu

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{N_2}{N_1}$$

v_1, v_2 sú rýchlosti šírenia svetelných lúčov v prvom a druhom prostredí, n_{21} je relatívny index lomu prostredí, N_1, N_2 sú absolútne indexy lomu prostredí.

Gul'ové zrkadlo - zobrazovacia rovnica vo vrcholových súradniciach

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}$$

a je vzdialenosť predmetu k vrcholu zrkadla, b je vzdialenosť obrazu k vrcholu zrkadla, r je polomer krivosti zrkadla, f je ohnisková vzdialenosť zrkadla (vzdialenosť ohniska F k vrcholu zrkadla). Pre duté zrkadlo platí $r > 0$ a pre vypuklé zrkadlo $r < 0$.

Zobrazovacia rovnica gul'ového zrkadla v ohniskových súradniciach

$$xx' = f^2$$

x je vzdialenosť predmetu k ohnisku F a x' je vzdialenosť obrazu k ohnisku F'. Platí

$$a = x + f \qquad b = x' + f$$

Priečne zväčšenie m , kde y je veľkosť predmetu a y' je veľkosť obrazu

$$m = \frac{y'}{y}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{r-b}{a-r} = -\frac{f}{x} = -\frac{b-f}{f} = -\frac{f}{a-f}$$

Tenká šošovka - zobrazovacie rovnice vo vrcholových a ohniskových súradniciach

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

$$xx' = f^2$$

Optická mohutnosť M

$$M = \frac{1}{f}$$

Spojná šošovka: $f > 0$, $M > 0$, rozptylná šošovka: $f < 0$, $M < 0$

Priečne zväčšenie m šošoviek

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f} = -\frac{b-f}{f} = -\frac{b}{a} = -\frac{x'}{f}$$

Uhlové zväčšenie Z optickej sústavy (u je zorný uhol, pod ktorým vidíme predmet optickou sústavou, u_0 je zorný uhol, pod ktorým vidíme predmet voľným okom)

$$Z = \frac{u}{u_0}$$

Zväčšenie Z lupy (l je konvenčná zrková vzdialenosť, f je ohnisková vzdialenosť lupy)

$$Z = \frac{l}{f} \quad (\text{oko akomodované na nekonečno})$$

$$Z = \frac{l}{f} + 1 \quad (\text{oko akomodované na konvenčnú zrkovú vzdialenosť})$$

Zväčšenie Z mikroskopu a ďalekohľadu (hvezdársky ďalekohľad) v absolútnej hodnote

$$\text{mikroskop: } Z = \frac{\Delta l}{f_1 f_2} = Z_1 Z_2$$

$$\text{ďalekohľad: } Z = \frac{f_1}{f_2}$$

Δ je optický interval sústavy, f_1 je ohnisková vzdialenosť objektívu, f_2 je ohnisková vzdialenosť okuláru, Z_1 je zväčšenie objektívu a Z_2 je zväčšenie okuláru.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Predmet veľkosti $y = 2$ cm sa nachádza pred dutým guľovým zrkadlom vo vzdialenosti $a = 8$ cm. Určte polohu obrazu a priečne zväčšenie, ak polomer krivosti zrkadla $r = 6$ cm.

Riešenie:

Zo zobrazovacej rovnice vo vrcholových súradniciach pre guľové zrkadlo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}$$

určíme vzdialenosť obrazu od vrcholu zrkadla b

$$b = \frac{ar}{2a - r} = \frac{8 \cdot 6}{2 \cdot 8 - 6} = 4,8 \text{ cm}$$

Pre priečne zväčšenie platí

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} = -\frac{4,8}{8} = -0,6$$

Z výsledkov vidíme, že obraz je skutočný ($b > 0$), prevrátený ($Z < 0$) a zmenšený ($Z < 1$).

Výpočet môžeme urobiť aj s použitím zobrazovacej rovnice v ohniskových súradniciach

$$xx' = f^2$$

kde x je poloha predmetu vzhľadom na predmetové ohnisko, x' je poloha obrazu vzhľadom na obrazové ohnisko.

Pritom platí

$$x = a - f = a - \frac{r}{2} = 8 - \frac{6}{2} = 5 \text{ cm}$$

Polohu obrazu určíme zo vzťahu

$$x' = \frac{f^2}{x} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} = 1,8 \text{ cm}$$

a priečne zväčšenie

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{3}{5} = -0,6$$

Obraz je skutočný ($x' > 0$), prevrátený ($m < 0$) a zmenšený ($m < 1$).

Príklad 2:

Zdroj svetla je v konštantnej vzdialenosti L od tienidla. Vypočítajte do akej vzdialenosti a od zdroja musíme umiestniť spojku s ohniskovou vzdialenosťou f , aby sa na tienidle vytvoril reálny obraz zdroja.

Riešenie:

Pre šošovky platí zobrazovacia rovnica vo vrcholových súradniciach pre $b = L - a$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a} = \frac{1}{f}$$

Úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu $a^2 - La + fL = 0$, ktorej korene sú

$$a_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2}$$

Ak $L^2 > 4Lf$, existujú dve reálne polohy obrazu zdroja.

Ak $L^2 = 4Lf$, potom existuje jedna reálna poloha obrazu $a = L/2$.

Ak $L^2 < 4Lf$, neexistuje ani jedna reálna poloha obrazu zdroja.

Príklad 3:

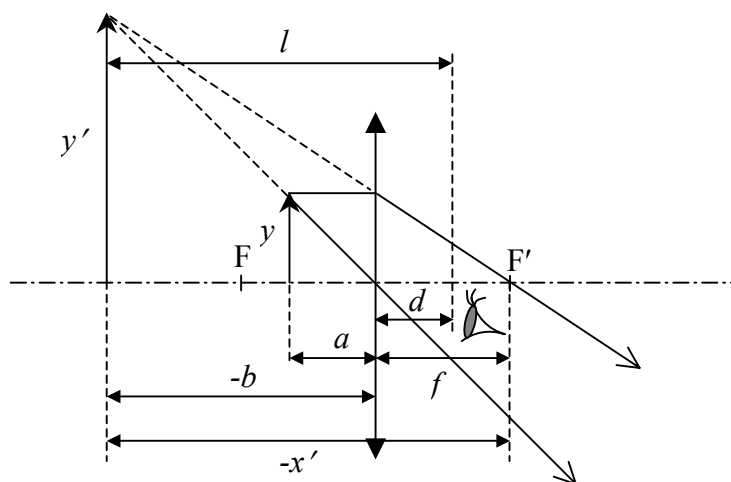
Predmet je pozorovaný lupou s ohniskovou vzdialenosťou $f = 100$ mm. Určte zväčšenie lupy v prípadoch, keď

- obraz je vo vzdialenosti 250 mm od oka, ktoré je 10 mm od lupy (akomodované oko),
- predmet je v predmetovej ohniskovej rovine lupy (neakomodované oko).

Určte teoretickú hodnotu maximálneho zväčšenia lupy pri akomodovanom oku.

Riešenie:

- V tomto prípade platí, že vzdialenosť predmetu od lupy je $a < f$. Zväčšenie lupy je

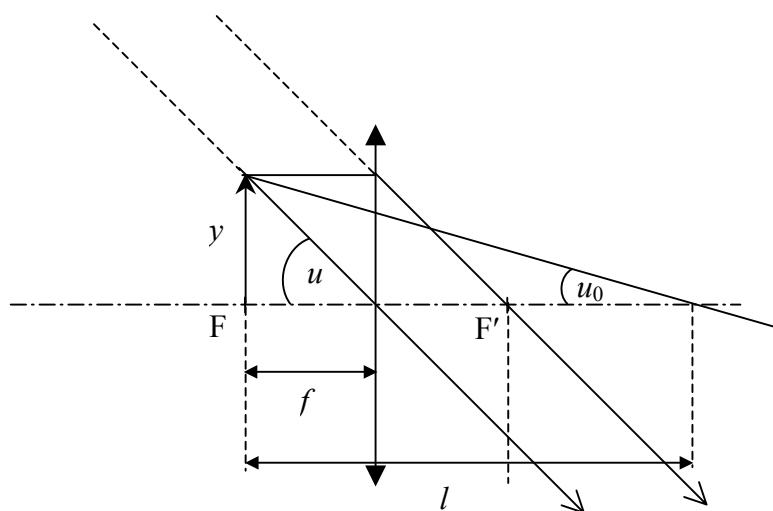


$$Z = \frac{y'}{y} = \frac{b}{a} = \frac{x'}{f} = \frac{b+f}{f} = \frac{b}{f} + 1 = \frac{l-d}{f} + 1 = \frac{0,25-0,01}{0,1} + 1 = 3,4$$

Optická mohutnosť lupy je

$$M = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ D}$$

- b) V prípade neakomodovaného oka platí pri zobrazovaní lupou, že vzdialenosť predmetu od lupy $a = f$. Potom pre zväčšenie lupy platí



$$Z_{\infty} = \frac{\text{tgu}}{\text{tgu}_0} = \frac{\frac{y}{f}}{\frac{y}{l}} = \frac{l}{f} = lM = 0,25 \cdot 10 = 2,5$$

Najväčšiu teoretickú hodnotu zväčšenia pri pozorovaní lupou v konvenčnej zrakovej vzdialenosti by sme dosiahli, keby mohlo oko splynúť s lupou ($d = 0$). Potom

$$Z_f = \frac{l}{f} + 1 = 0,25 \cdot 10 + 1 = 3,5$$

Príklad 4:

Ohnisková vzdialenosť objektívu mikroskopu $f_1 = 3 \text{ mm}$, okuláru $f_2 = 3 \text{ cm}$, dĺžka celého mikroskopu $s = 16 \text{ cm}$. Určte, do akej vzdialenosti pred objektív musíme umiestniť predmet, aby oko mohlo obraz v mikroskope jasne pozorovať v konvenčnej zrakovej vzdialenosti $l = 25 \text{ cm}$.

Riešenie:

Objektív vytvorí obraz predmetu, ktorý je pred ním vo vzdialenosti d a vo vzdialenosti b_1 od objektívu. Podľa zobrazovacej rovnice je splnený vzťah

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

Objektívom vytvorený obraz, ktorý je vo vzdialenosti $a_2 = s - b_1$ od okulára, zobrazí okulár tak, že ho oko priložené tesne k okuláru vidí ostro v konvenčnej zrakovej vzdialenosti l . Tento obraz je virtuálny a od okulára je vo vzdialenosti $b_2 = -l$. Potom zobrazovacia rovnica pre okulár má tvar

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$$

Po úprave a dosadení do zobrazovacej rovnice dostaneme

$$b_1 = s - \frac{lf_2}{l + f_2} = 13,32 \text{ cm}$$

Pre hľadanú vzdialenosť predmetu od objektívu dostávame vzťah

$$d = \frac{b_1 f_1}{b_1 - f_2} = \frac{13,32 \cdot 0,3}{13,32 - 0,3} = 1,307 \text{ cm}$$

ÚLOHY

1. Dve rôzne optické prostredia s indexami lomu n_1 a n_2 sú oddelené rovinným rozhraním. Určte, ktorým smerom má postupovať svetelný lúč, aby z daného bodu A v prvom prostredí dospel do bodu B v druhom prostredí v čo najkratšom čase.

$$\left[\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \right]$$

2. Na rovinné zrkadlo dopadá zo svetelného zdroja kolmo svetelný lúč tak, že po odraze vytvorí na tienidle, ktoré je vzdialené od zrkadla o 5 m a je rovnobežné so zrkadlom, svetelnú stopu. Zrkadlo uvedieme do rovnomerného otáčavého pohybu okolo zvislej osi tak, že za každú sekundu vykoná 10 otáčok. Vypočítajte, akou rýchlosťou sa bude pohybovať svetelná stopa na tienidle a aká bude táto rýchlosť v tom mieste tienidla, ktoré je k zrkadlu najbližšie?

$$\left[v = d \frac{2\omega}{\cos^2 2\omega t} ; 628 \text{ m/s} \right]$$

3. Sviečka stojí 60 cm pred dutým zrkadlom. Keď ju priblížime k zrkadlu o 10 cm, zväčší sa vzdialenosť obrazu od zrkadla o 80 cm. Aká je ohnisková vzdialenosť zrkadla?
[dve riešenia 40 cm; 85,7 cm]
4. Bodový predmet umiestnený na optickej osi spojnej šošovky sa približuje k šošovke stálou rýchlosťou v_1 . Akou rýchlosťou sa bude pritom pohybovať jeho obraz?

$$\left[v_2 = -\frac{x}{x'} v_1 \right]$$

5. Lupa s ohniskovou vzdialenosťou 5 cm vytvorí obraz predmetu vo vzdialenosti 40 cm od lupy. Aké zväčšenie lupa poskytuje, keď oko je od nej vo vzdialenosti 2 cm?

- [5,36]
6. Predmet sa zobrazí dutým zrkadlom s polomerom krivosti 60 cm. Aká je ohnisková vzdialenosť zrkadla a vzdialenosť predmetu a obrazu od zrkadla, ak priečne zväčšenie je rovné -3 ?
[30 cm; 40 cm; 120 cm]
7. Spojka vytvorí m -krát väčší skutočný obraz na tienidle. Vzdialenosť obrazu od predmetu je d . Vypočítajte ohniskovú vzdialenosť spojky. Aká je optická mohutnosť pre prípad, že $d = 53 \frac{1}{3}$ cm a $m = -\frac{1}{3}$?
[0,1 m; 10 D]
8. Vypuklé zrkadlo má polomer krivosti 16 cm. Predmet vysoký 2 cm stojí kolmo na optickej osi vo vzdialenosti 12 cm od vrcholu zrkadla. Určte polohu a vlastnosti obrazu.
[-4,8 cm; zdanlivý, priamy, zmenšený]
9. Valcová nádoba úplne naplnená vodou má výšku 75 mm. Uprostred dna je malý bodový predmet. Určte minimálny polomer kruhového disku plávajúceho na hladine, ktorý by zabránil tomu, aby bolo predmet na dne vidieť. Index lomu vody je 1,33.
[8,6 cm]
10. Ďalekohľad, ktorý sa skladá z objektívu s ohniskovou vzdialenosťou 250 mm a z okuláru s ohniskovou vzdialenosťou 25 mm, sa použije k pozorovaniu predmetu vzdialeného 30 m od objektívu. Určte zväčšenie prístroja, ak obraz predmetu vidíme v nekonečne.
[10,08]
11. Určte, aké okuliare potrebuje človek
a) krátkozraký so zrakovou vzdialenosťou 15 cm,
b) ďalekozraký so zrakovou vzdialenosťou 30 cm, keď konvenčná zraková vzdialenosť 25 cm.
 $[f = -37,5 \text{ cm}; M = -2 \frac{2}{3} \text{ D}; f = 1,5 \text{ cm}; M = \frac{2}{3} \text{ D}]$
12. Aké okuliare treba zvoliť pre oko so zrakovou vzdialenosťou 16 cm, aby mohlo čítať nápis vo vzdialenosti 2,4 m?
 $[f = 17,14 \text{ cm}; M = 5,83 \text{ D}]$
13. Určte zväčšenie lupy s $f = 2$ cm
a) pre normálne oko s konvenčnou zrakovou vzdialenosťou 25 cm,
b) pre krátkozraké oko so zrakovou vzdialenosťou 15 cm.
[12,5; 7,5]
14. Aký vysoký je smrek, ktorého obraz vytvorený fotografickým objektívom s ohniskovou vzdialenosťou 10,5 cm vo vzdialenosti 10,53 cm od objektívu má výšku 4,5 cm? V akej vzdialenosti je smrek od prístroja?
[15,75 m; 36,9 m]
15. Objektív a okulár mikroskopu tvoria centrovanú sústavu dvoch tenkých šošoviek s ohniskovými vzdialenosťami $f_1 = 10$ mm, $f_2 = 50$ mm. Vzdialenosť objektívu a okulára je $d = 200$ mm. Určte zväčšenie mikroskopu a vzdialenosť predmetu od objektívu v prípade, že pozorovanie sa deje neakomodovaným okom.
[70; 10,7 mm]
16. Vo vzdialenosti $a = 60$ cm od rozptylky s optickou mohutnosťou $M = -3$ D je predmet vysoký $y = 7$ cm. Kde vznikne jeho obraz a aké má vlastnosti?
[-21,4 cm; $m = 0,35$; $y' = 2,5$ cm]

VLNOVÁ OPTIKA

Vlnová optika skúma optické javy z hľadiska vlnového charakteru svetla.

Optická dráha δ (s je geometrická dráha svetla, N je absolútny index lomu)

$$\delta = Ns$$

Interferencia svetla - podmienky vzniku interferenčných maxím a miním ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$\Delta = k\lambda \quad \text{maximum}$$

$$\Delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{minimum}$$

Δ je rozdiel optických dráh svetla (vlnenia), λ je vlnová dĺžka vlnenia, k je rád spektra
Interferencia svetla na tenkej vrstve (v odrazenom smere)

$$\Delta = 2d\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad \text{maximum}$$

$$\Delta = 2d\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{minimum}$$

d je hrúbka tenkej vrstvy, N je absolútny index lomu prostredia, α je uhol dopadu svetla na rozhranie dvoch prostredí.

Interferencia svetla na tenkej vrstve (v prejdeňom smere)

$$\Delta = 2d\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha} = k\lambda \quad \text{maximum}$$

$$\Delta = 2d\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{minimum}$$

Interferencia z dvoch koherentných zdrojov (Youngov pokus)

$$\Delta = \frac{xs}{l} = k\lambda \quad \text{maximum}$$

$$\Delta = \frac{xs}{l} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{minimum}$$

s je vzdialenosť dvoch štrbín, l je vzdialenosť tienidla od štrbín, x je vzdialenosť polohy interferenčného maxima (minima) od roviny súmernosti oboch štrbín.

Difrakcia svetla (ohyb svetla) na jednej štrbine

$$\Delta = b \sin \alpha = k\lambda \quad \text{minimum}$$

$$\Delta = b \sin \alpha = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{maximum (približný vzťah)}$$

b je šírka štrbiny, α je uhol ohybu, $k = 1, 2, 3, \dots$ je rád spektra a λ je vlnová dĺžka svetla.

Difrakcia svetla na optickej mriežke

$$\Delta = d \sin \alpha = k\lambda \quad \text{maximum}$$

$$\Delta = d \sin \alpha = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{minimum}$$

d je mriežková konštanta, ktorá udáva vzdialenosť stredov susedných štrbín a rovná sa prevrátenej hodnote hustoty vrypov na 1mm ($k = 1, 2, 3, \dots$ je rád spektra).

Rozlišovacia schopnosť S optickej mriežky

$$S = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 2Nk$$

$\Delta\lambda$ je rozdiel vlnových dĺžok, ktorých interferenčné ohybové maximá môžeme ešte rozlíšiť, N je počet štrbín a k je rád spektra.

Polarizácia svetla odrazom - odrazené svetlo (s ohľadom na vektor elektrickej intenzity) je polarizované kolmo na rovinu dopadu.

Brewsterov zákon – určuje podmienku úplnej polarizácie odrazom

$$\operatorname{tg} \alpha = n_{21}$$

α je uhol dopadu a nazýva sa Brewsterov uhol, $n_{21} = N_2/N_1$ je relatívny index lomu.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Infrad'alekohľad je vybavený optikou zo skla s indexom lomu 1,52. Pre zníženie odrazivosti sa používa antireflexná vrstva s indexom lomu 1,38. Aká musí byť hrúbka vrstvy, aby žiarenie s vlnovou dĺžkou $\lambda = 900$ nm nebolo zoslabené? Predpokladáme, že žiarenie dopadá na vrstvu kolmo.

Riešenie:

Ak na rozhranie dvoch optických prostredí s indexami lomu N_1 a N_2 dopadá vlnenie a odrazí sa od opticky hustejšieho prostredia ($N_2 > N_1$), zmení sa jeho fáza o π , čo je ekvivalentné optickej dráhe $\lambda/2$.

V našom prípade platí podmienka maxima pre interferenciu na tenkej vrstve

$$2d\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ak uvažíme, že pre kolmý dopad je uhol dopadu $\alpha = 0^\circ$, potom platí pre $k = 0$

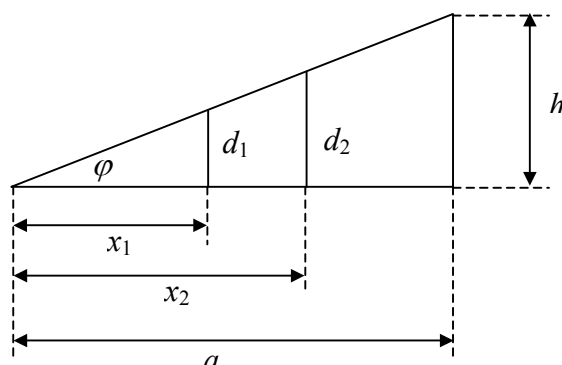
$$2dN = \frac{\lambda}{2}$$

$$d = \frac{\lambda}{4N} = \frac{900 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 1,3} = 173,07 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Príklad 2:

Dve vybrúsené rovinné doštičky sú položené na seba tak, že na jednom konci sa okraje dotýkajú, kým na druhom konci vo vzdialenosti $a = 10$ cm od miesta ich dotyku je medzi ne vložený staniolový lístok s hrúbkou $h = 0,02$ mm. Určte vzdialenosť dvoch susedných interferenčných maxim, ak na vrstvu dopadá monochromatické svetlo s vlnovou dĺžkou $\lambda = 589$ nm

- kolmo,
- pod uhlom dopadu $\alpha = 60^\circ$.

Riešenie:

Jedná sa interferenciu na tenkej vrstve, ktorej hrúbka sa mení. V našom prípade tenkú vrstvu tvorí vrstva vzduchu medzi oboma rovinnými doštičkami. Keby vzduchová vrstva bola dokonale planoparalelná, odrážala by svetlo najintenzívnejšie pri podmienke

$$2d\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Pre $N = 1$ (vzduch) platí

$$2d \cos \alpha = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Ak hrúbka vrstvy v tých miestach, v ktorých sa vytvoria dva susedné svetlé interferenčné pásy, je d_1 a d_2 , potom sú splnené vzťahy

$$2d_1 \cos \alpha = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$2d_2 \cos \alpha = [2(k+1)+1]\frac{\lambda}{2}$$

Z obrázku vyplýva, že $d_1 = x_1 \tan \varphi$ a $d_2 = x_2 \tan \varphi$, pričom $\tan \varphi = \frac{h}{a}$.

Pre vzdialenosť dvoch susedných pásov vychádza z rovníc

$$x_2 - x_1 = (d_2 - d_1) \cot \varphi = \frac{\lambda}{2 \cos \alpha} \frac{a}{h}$$

Po dosadení číselných hodnôt

a) $\alpha = 0^\circ$

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{h} \frac{\lambda}{2} = \frac{0,1}{0,002 \cdot 10^{-2}} \frac{589 \cdot 10^{-9}}{2} = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

b) $\alpha = 60^\circ$

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{h} \frac{\lambda}{2 \cdot \cos 60^\circ} = \frac{0,1}{0,002 \cdot 10^{-2}} \frac{589 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot \cos 60^\circ} = 2,94 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Príklad 3:

Na optickú mriežku, ktorá má na 1mm 100 vrypov, dopadá kolmo rovnobežný zväzok bieleho svetla. Pomocou spojky s ohniskovou vzdialenosťou $f = 30 \text{ cm}$, umiestnenou tesne za mriežkou, sa vytvorí na tienidle spektrum. Vypočítajte, v akej vzdialenosti od seba na tienidle je

- červená a fialová farba v spektre druhého rádu,
- koniec spektra prvého rádu a začiatok spektra druhého rádu, keď vlnová dĺžka červeného svetla $\lambda_{\text{č}} = 760 \text{ nm}$ a fialového svetla $\lambda_{\text{f}} = 400 \text{ nm}$.

Riešenie:

- a) Ostrý ohybový jav sa vytvorí v ohniskovej rovine šošovky vo vzdialenosti $l = 30 \text{ cm}$ od mriežky. Pre uhol ohybu v podmienke maxima v spektre druhého rádu červenej a fialovej farby platí

$$\sin \alpha_{\text{č}} = 2 \frac{\lambda_{\text{č}}}{d} \qquad \sin \alpha_{\text{f}} = 2 \frac{\lambda_{\text{f}}}{d}$$

Mriežková konštanta $d = 1/100 \text{ mm}$. Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\alpha_{\text{č}} = 8^\circ 45' \qquad \text{a} \qquad \alpha_{\text{f}} = 4^\circ 35'$$

Vzdialenosť červenej, resp. fialovej farby od maxima nultého rádu určíme

$$x_{\text{č}} = l \operatorname{tg} \alpha_{\text{č}} = 46,2 \text{ mm} \qquad x_{\text{f}} = l \operatorname{tg} \alpha_{\text{f}} = 24 \text{ mm}$$

- b) odchýlku červenej farby v spektre prvého rádu určíme z rovnice

$$\sin \alpha'_{\text{č}} = \frac{\lambda_{\text{č}}}{d} \Rightarrow \alpha'_{\text{č}} = 4^\circ 22'$$

Pre vzdialenosť červenej farby od maxima nultého rádu dostaneme

$$x'_{\text{č}} = l \operatorname{tg} \alpha'_{\text{č}} = 23 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Začiatok spektra druhého rádu, ktorý tvorí fialová farba je vzdialený od konca spektra prvého rádu červenej farby o

$$\Delta x' = x_f - x_{\text{č}}' = 24 \cdot 10^{-3} - 23 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Príklad 4:

Vypočítajte pod akým uhlom musí dopadnúť svetelný lúč na rovinné rozhranie medzi sklom a vodou, aby do skla odrazený lúč bol úplne polarizovaný. Index lomu vody je 1,33 a index lomu skla je 1,52.

Riešenie:

Ak na rozhranie dvoch prostredí s indexami lomu N_1 a N_2 dopadá svetelný lúč pod Brewsterovým uhlom α , ktorý vyhovuje rovnici

$$\operatorname{tg} \alpha = N_2 / N_1$$

odráža sa ako úplne polarizovaný v rovine dopadu. Lomený lúč je čiastočne polarizovaný v rovine kolmej na rovinu dopadu a s odrazeným lúčom zvierá uhol 90° .

V našom prípade

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,33 / 1,52$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1,33}{1,52} = 41^\circ 11'$$

ÚLOHY

1. Aká je vlnová dĺžka použitého svetla pri Youngovom pokuse, keď vzdialenosť štrbín, z ktorých vychádzajú koherentné interferujúce lúče, je 0,6 mm a keď interferenčné pásy na tienidle vzdialenom od štrbín 1 m sú od seba vzdialené 1 mm?
[600 nm]
2. Dva veľmi malé otvory clony od seba vzdialené 1 mm sú umiestnené pred monochromatickým zdrojom svetla s vlnovou dĺžkou 500 nm. Aká je vzájomná poloha tmavých interferenčných prúžkov na tienidle vzdialenom 2,5 m od clony s otvormi?
[1,25 mm]
3. Mydlová rovinná blana má pri pozorovaní v odrazenom svetle jasne zelenú farbu. Svetelné lúče vstupujú do oka pod uhlom $\alpha = 35^\circ$ meraným od normály. Vypočítajte:
 - a) aká je hrúbka blany,
 - b) akú farbu blany by sme pozorovali, ak by uhol $\alpha = 0^\circ$. Index lomu mydlovej blany je 1,33 a vlnová dĺžka zeleného svetla je 500 nm.
[$1,04 \cdot 10^{-7}$ m; žltozelenú]
4. Sklenená doštička s hrúbkou 0,3 μm a indexom lomu 1,52 je osvetlená rovnobežným zväzkom lúčov bieleho svetla, ktoré na doštičku dopadá kolmo. Určte vlnovú dĺžku monochromatického svetla vo viditeľnej oblasti spektra, ktoré je v odrazenom svetle najviac
 - a) zosilnené,
 - b) zoslabené.
[600 nm; 450 nm]
5. Tenká vrstva SiO_2 s indexom lomu 1,45 bola osvetlená zväzkom svetla sodíkovej výbojky s vlnovou dĺžkou 589 nm pod uhlom dopadu α . Odrazené lúče sú spojku

sústredené na tienidlo, ktoré leží v ohniskovej rovine spojky.

- Napište podmienky pre interferenčné maximum a minimum,
 - Vypočítajte hrúbku vrstvy SiO_2 , keď minimum nastalo pri uhle dopadu 37° a nasledujúce pri $52,5^\circ$,
 - Vypočítajte, koľko polovln $\lambda/2$ predstavuje rozdiel optických dráh svetelných lúčov pri zadaných uhloch dopadu.
 $[\Delta_{\max} = k\lambda; \Delta_{\min} = (2k+1)\lambda/2; 279 \text{ nm}; 25; 23]$
- Určte mriežkovú konštantu optickej mriežky, ak vzdialenosť maxima nultého a tretieho rádu je 40 cm a mriežka bola osvetlená červeným svetlom s vlnovou dĺžkou $0,7 \mu\text{m}$. Vzdialenosť tienidla od mriežky je 1,6 m.
 $[8,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}]$
 - Optická mriežka vytvára spektrálnu čiaru v spektre tretieho rádu pod uhlom $10^\circ 11'$ pri dopade svetla s vlnovou dĺžkou 589 nm. Určte vlnovú dĺžku svetla, ktorému prislúcha v spektre druhého rádu tej istej mriežky uhol $6^\circ 16'$.
 $[545,2 \text{ nm}]$
 - Na optickú mriežku, ktorá má 500 vrypov na 1 mm, dopadá kolmo zväzok rovnobežných lúčov bieleho svetla. Vypočítajte rozdiel medzi uhlovými odchýlkami pre koniec prvého a začiatok druhého spektra, keď vlnová dĺžka krajného červeného svetla je 760 nm a vlnová dĺžka krajného fialového svetla 400 nm.
 $[75']$
 - Ak na štrbinu dopadá kolmo rovnobežný zväzok lúčov modrého svetla s vlnovou dĺžkou 450 nm, vytvára sa na tienidlo stred druhého tmavého pásu pod uhlom $10^\circ 11'$ meraným od normály k rovine štrbiny. Pod akým uhlom vznikne stred štvrtého tmavého pásu, ak štrbinu osvetľujeme červeným svetlom s vlnovou dĺžkou 700 nm?
 $[16^\circ 29']$
 - Štrbina so šírkou 0,57 nm je postavená pred tienidlo vo vzdialenosti 1,5 m a je osvetlená zeleným svetlom. Určte jeho vlnovú dĺžku, ak na tej istej strane od hlavného maxima sú stredy dvoch tmavých pásov vzdialené o 1,5 m.
 $[570 \text{ nm}]$
 - Ďalekohľad má priemer objektívu 20 mm a uhlové zväčšenie 10. V akej vzdialenosti od ďalekohľadu musia byť predné svetlá blížiaceho sa auta, aby ich bolo možné rozlíšiť? Vlnová dĺžka svetla je 550 nm a svetlá na aute sú od seba vzdialené 1,5 m.
 $[44 \text{ } 709 \text{ m}]$
 - Koľkokrát sa zvýši rozlišovacia schopnosť mikroskopu pri pozorovaní obrazu v ultrafialovom svetle s vlnovou dĺžkou 270 nm v porovnaní s pozorovaním v zelenom svetle?
 $[\text{približne } 2\text{-krát}]$
 - Sklenená doštička bola použitá ako polarizátor. Pod akým uhlom dopadá svetlo a aký je uhol lomu? Index lomu skla je 1,5.
 $[56^\circ 20'; 33^\circ 40']$
 - Na planparalelnú sklenenú doštičku dopadá lúč zo vzduchu pod takým uhlom, že do vzduchu odrazený lúč je úplne polarizovaný. Dokážte, že je celkom polarizovaný aj lúč, ktorý sa po lome v doštičke na spodnom rovinnom rozhraní odráža do skla.

$$[\text{tg} \beta = \cot \alpha = \frac{1}{\text{tg} \alpha} = \frac{n_1}{n_2}]$$
 - Na doštičku z flintového skla dopadá svetlo pod uhlom $\alpha = 56^\circ 12'$ a odráža sa úplne polarizované. Určte index lomu skla.
 $[1,494]$

RELATIVISTICKÁ FYZIKA

Lorentzove transformácie

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Všetky čiarkované veličiny sú k inerciálnej sústave S' , ktorá sa voči sústave S pohybuje konštantnou rýchlosťou v v smere osi $x \equiv x'$. Ak $v/c \rightarrow 0$, Lorentzove transformácie prechádzajú na Galileove transformácie a pokiaľ $v \geq c$, stráca transformácia zmysel.

Relativitické skladanie rýchlostí – teleso sa pohybuje v sústave S rýchlosťou $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, pozorovateľ v sústave S' , ktorá sa voči S pohybuje rýchlosťou v , registruje rýchlosť telesa $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}$$

Kontrakcia dĺžky - v súradnicovom systéme, vzhľadom ku ktorému sa tyč pohybuje rýchlosťou v , bude dĺžka tyče kratšia

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Dilatácia času - časový interval deja v pohybujúcej sa sústave je pre pozorovateľa, vzhľadom ku ktorému sa sústava pohybuje, dlhší

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Relativistická hmotnosť m je hmotnosť častice určená v systéme, vzhľadom ku ktorému sa častica pohybuje rýchlosťou v porovnateľnou s rýchlosťou svetla vo vákuu c (m_0 je kludová hmotnosť častice)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Pohybová rovnica ($\vec{p}$ je vektor relativistickej hybnosti)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ekvivalencia relativistickej hmotnosti a energie

$$E = mc^2 = E_0 + \Delta E = m_0 c^2 + \Delta mc^2$$

E je celková energia častice, m je relativistická hmotnosť, E_0 je kludová energia zodpovedajúca kludovej hmotnosti m_0 častice a ΔE je prírastok energie zodpovedajúci prírastku hmotnosti Δm častice.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Intenzita elektrického poľa urýchľujúceho elektrón má hodnotu $E = 10^9$ V/m. Vypočítajte zrýchlenie elektrónu a jeho kinetickú energiu v čase, keď mal rýchlosť $v = 10^8$ m/s.

Riešenie:

Platí pohybová rovnica v tvare $F = \frac{d}{dt}(mv)$.

Uvážime, že hmotnosť pohybujúceho sa elektrónu $m = m_e$ je funkciou jeho rýchlosti

$$m_e = \frac{m_0}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}$$

Po príslušných matematických úpravách je relativistické vyjadrenie sily pôsobiacej na časticu

$$F = \frac{m_0}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{F \left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}}{m_0}$$

Častica sa pohybuje v elektrickom poli pôsobením jeho sily $F = eE$. Potom pre zrýchlenie elektrónu platí

$$a = \frac{eE \left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}}{m_0} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^9}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left[1 - \frac{(10^8)^2}{(3 \cdot 10^8)^2} \right]^{3/2} = 1,473 \cdot 10^{20} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Kinetickú energiu urýchleného elektrónu vypočítame zo vzťahu

$$E = m_e c^2 = m_0 c^2 + E_k$$

a použitím vzťahu závislosti hmotnosti od rýchlosti dostaneme

$$E_k = m_0 c^2 \left[\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - 1 \right]$$

Urýchlený elektrón bude mať v uvažovanom čase kinetickú energiu

$$E_k = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \left[\frac{1}{(1 - (10^8/3 \cdot 10^8)^2)^{1/2}} - 1 \right] = 4,97 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 31 \text{ keV}$$

Príklad 2:

Vo vrchných vrstvách atmosféry vzniká nestabilná častica μ -mezón pohybujúca sa rýchlosťou $v = 0,99c$, kde $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ je rýchlosť svetla. Pokiaľ sa táto častica rozpadne na elektrón a dve neutrína, stihne preletieť k Zemi dráhu $s = 5 \text{ km}$. Určte dobu života tejto častice vzhľadom na sústavu spojenú so Zemou a vzhľadom na sústavu spojenú s pohybujúcou sa časticou. Vypočítajte dráhu, ktorú preletí vzhľadom na jej vlastnú sústavu.

Riešenie:

Z hľadiska pozorovateľa na Zemi je doba života μ -mezónu taká, že počas nej prejde dráhu s rýchlosťou v . Platí

$$t = \frac{s}{v} = \frac{5 \cdot 10^3}{0,99 \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

Dobu života τ vzhľadom na sústavu spojenú s časticou vypočítame zo vzťahu pre dilatáciu času

$$\tau = t(1 - v^2/c^2)^{1/2} = 1,67 \cdot 10^{-5} \left[1 - \frac{(0,99 \cdot 3 \cdot 10^8)^2}{(3 \cdot 10^8)^2} \right]^{1/2} = 0,23 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

Dráha s' , ktorú častica preletí vzhľadom na sústavu s ňou spojenou, bude daná vzťahom

$$s' = \tau v = s(1 - v^2/c^2)^{1/2} = 0,7 \text{ km}$$

Dilatáciou času je teda možné vysvetliť detekcie mezónov na zemskom povrchu.

Príklad 3:

V nepohyblivej vzťažnej sústave S sa nachádza tyč s dĺžkou $l = 1 \text{ m}$, ktorá je orientovaná pod uhlom $\alpha = 45^\circ$ k osi x . Určte jej dĺžku l' a zodpovedajúci uhol α' v súradnicovej sústave S' , ktorá sa pohybuje konštantnou rýchlosťou $v = c/2$ pozdĺž osi x vzhľadom na sústavu S .

Riešenie:

Z Lorentzových transformácií pre kontrakciu dĺžky vyplýva

$$l_y = l'_y \quad l'_x = l_x \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

l_x je priemet tyče s dĺžkou l do osi x v sústave S a platí

$$l_x = l \sin \alpha = l \sin 45^\circ = l \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$l_y = l \cos \alpha = l \cos 45^\circ = l \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Z tohto vyplýva, že $l_x = l_y$.

Dĺžka tyče l' vzhľadom na sústavu S' je daná

$$l' = \sqrt{l_x'^2 + l_y'^2} = \sqrt{l_x^2 (1 - v^2/c^2) + l_y^2} = \sqrt{l_x^2 (1 - v^2/c^2) + l_x^2} = l_x \sqrt{2 - v^2/c^2}$$

$$l' = \frac{l}{2} \sqrt{2} \sqrt{2 - v^2/c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{7}{4}} = 0,935 \text{ m}$$

Prislúchajúci uhol α' určíme ako

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{l'_y}{l'_x} = \frac{l_y}{l_x} = \frac{l \sin \alpha}{l \sin \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{3/4}} = 1,154$$

$$\alpha' = 49^\circ 10'$$

ÚLOHY

1. V pohyblivej jednorozmernej inerciálnej sústave S' je tyč dlhá 1 m. Pozorovateľ v kludovej inerciálnej sústave S vidí tyč polovičnú. Určte rýchlosť pohybu sústavy S' .
[2,6.10⁸ m/s]
2. Pri akej relatívnej rýchlosti je skrátenie dĺžky pohybujúceho sa telesa 25 % pôvodnej dĺžky?
[1,98.10⁵ km/s]
3. Dve častice sa pohybujú v smere osi x v inerciálnej sústave s rýchlosťou 0,99c. Vzdialenosť medzi časticami v sústave S' spojenej s časticami je 120 m. Predpokladajme, že v určitom časovom okamžiku sa obe častice v sústave S' súčasne rozpadnú. Aký je časový interval medzi rozpadmi v sústave S ?
[2,8.10⁻⁶ s]
4. Určte dĺžku dráhy nestabilnej častice s vlastnou dobou života 2,2.10⁻⁶ s, ktorú nameria pozemský pozorovateľ. Doba života častice v jeho súradnicovej sústave je 3.10⁻⁶ s.
[6,1.10² m]
5. Pohybujúca sa častica má v laboratórnych podmienkach strednú dobu života 1,76.10⁻⁵ s a kinetickú energiu 7 $m_0 c^2$. Určte strednú dobu života častice v kludovej inerciálnej sústave.

$$\left[\frac{1}{8} \tau = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{s} \right]$$

6. Kinetická energia elektrónu je 0,08 MeV. Vypočítajte, akou rýchlosťou sa elektrón pohybuje.
[1,56.10⁸ m/s]
7. Uvažujme elementárnu časticu, ktorej kinetická energia sa rovná jej klúdovej energii. Aká musí byť rýchlosť častice?
[2,6.10⁸ m/s]
8. Koľkokrát je relativistická hmotnosť častice, ktorá sa pohybuje rýchlosťou 0,99c, väčšia ako jej klúdová hmotnosť?
[$m/m_0 \cong 7$]
9. Teleso s klúdovou hmotnosťou m_0 je v čase $t = 0$ v klúde a začne naň pôsobiť stála sila F za čas t . Vyjadrite rýchlosť telesa ako funkciu času.

$$\left[v = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{F^2 t^2}}} \right]$$

10. Na osi x inerciálnej sústavy S vznikli v bodoch so súradnicami $x_1 = 0$, $x_2 = 3 \cdot 10^8$ m súčasne dve udalosti. Aký je časový interval medzi udalosťami v sústave S' , ktorá sa pohybuje v kladnom smere osi x rýchlosťou 0,994c?
[9,09 s]
11. Energia deuterónov urýchľovaných synchrotrónom je 200 MeV. Stanovte pomer relativistickej hmotnosti m a klúdovej hmotnosti m_0 pre deuteróny a vypočítajte ich rýchlosť.
[$m/m_0 = 1,1066$; 1,28.10⁸ m/s]
12. Mezóny v kozmickom žiarení sa pohybujú rýchlosťou 0,95c. Aký časový interval na Zemi zodpovedá jednej sekunde vlastnej doby mezónov?
[3,2 s]
13. Akú prácu je potrebné vykonať na zväčšenie rýchlosti častice z 0,6c na 0,8c? Porovnajte výsledok s klasickou teóriou.
[0,42 $m_0 c^2$]
14. Elektrón, resp. protón letia prostredím s indexom lomu $n = 1,6$. Aká musí byť ich minimálna kinetická energia, aby sa stali zdrojom Čerenkovovho žiarenia? Čerenkovovo žiarenie vzniká pri pohybe častice rýchlosťou väčšou ako je rýchlosť svetla v danom prostredí.
[2,295.10⁻¹⁴ J = 143 keV; 4,21.10⁻¹¹ J = 263 MeV]
15. Raketa A sa pohybuje rýchlosťou 0,9c vzhľadom na nepohyblivú sústavu S a predbieha raketu B rýchlosťou 0,5c. Aká je rýchlosť rakety B vzhľadom na nepohyblivú sústavu S ?
[2,897.10⁸ m/s]
16. Teleso sa pohybuje v smere osi $x \equiv x'$ vzhľadom k sústave S' rýchlosťou $3c/4$. Rovnakou rýchlosťou sa pohybuje sústava S' voči sústave S . Určte rýchlosť telesa vzhľadom k sústave S .
[0,96c]

KVANTOVÁ FYZIKA

KORPUSKULÁRNE VLASTNOSTI ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN

Fotón je základným elementom elektromagnetického poľa a zaraďujeme ho medzi elementárne častice, t.j. základné častice, z ktorých pozostáva náš svet.

Energia fotónu ε ($h = 2\pi\hbar$ je Planckova konštanta, ν frekvencia žiarenia a ω uhlová frekvencia)

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$$

Hybnosť fotónu $\vec{p}$ ($\vec{k}$ je vlnový vektor, c rýchlosť svetla, $\lambda = c/\nu$ vlnová dĺžka žiarenia)

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \qquad p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Fotoelektrický jav – Einsteinova rovnica

$$h\nu = A + \frac{1}{2}m_e v^2 \qquad h(\nu - \nu_0) = eU_b$$

$A = h\nu_0$ je výstupná práca fotokatódy, ν_0 je charakteristická frekvencia, $\frac{1}{2}m_e v^2$ je kinetická energia elektrónov emitovaných z katódy, m_e, v, e je hmotnosť, rýchlosť a elektrický náboj elektrónu, U_b je brzdné napätie.

Podmienka vzniku fotoelektrického javu

$$h\nu \geq A \qquad \nu \geq \nu_0$$

Intenzita vyžarovania je podiel toku žiarenia $d\Phi_e$, ktorý vysiela plocha dS do celého polpriestoru, a tejto plochy

$$H_e = \frac{d\Phi_e}{dS}$$

Monochromatická (spektrálna) intenzita vyžarovania je časť z intenzity vyžarovania H_e , ktorá pripadá na interval vlnových dĺžok λ , $\lambda + d\lambda$

$$H_\lambda = \frac{dH_e}{d\lambda}$$
$$H_e = \int_0^\infty H_\lambda d\lambda$$

Planckov zákon určuje spektrálnu hustotu energie rovnovážneho tepelného žiarenia (T je teplota telesa, k je Boltzmanova konštanta)

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Pre nízke frekvencie platí Rayleighov – Jeansov zákon

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} d\nu$$

Wienov zákon posuvu vyžarovacej charakteristiky

$$\lambda_{\max} T = \text{konšt.}$$

$\lambda_{\max}$ je vlnová dĺžka, na ktorú pripadá maximum vyžiarenej energie.

Stefanov – Boltzmanov zákon (σ je Stefanova – Boltzmanova konštanta)

$$H_e = \sigma T^4$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Vo vzdialenosti $l = 1$ m od bodového monochromatického zdroja svetla s výkonom $P_0 = 10^{-3}$ W je umiestnená kovová doštička. Predpokladajte, že elektrón môže hromadiť energiu žiarenia dopadajúceho na plošku kruhu s polomerom $R = 10^{-10}$ m. Výstupná práca kovu $A = 5$ eV. Považujte svetlo za elektromagnetické vlnenie a vypočítajte, ako dlho by musel elektrón hromadiť energiu, aby nastalo uvoľnenie. Za aký čas sa v skutočnosti začnú uvoľňovať elektróny?

Riešenie:

Bodový zdroj svetla vysiela svetlo homogénne a izotropne do celého priestoru. Vo vzdialenosti l dopadne za jednu sekundu na jednotku plochy energia určená vzťahom

$$P = \frac{P_0}{4\pi l^2}$$

Elektrón hromadí energiu na ploške $S = \pi R^2$. Celkovú energiu, ktorú získal elektrón za jednotku času, určíme

$$P' = PS = \frac{P_0 R^2}{4l^2}$$

Výstupná práca elektrónu je $A = 5$ eV = $5,1,602 \cdot 10^{-19}$ J = $8,01 \cdot 10^{-19}$ J.

Čas t , ktorý potrebuje elektrón na to, aby nahromadil energiu rovnú výstupnej práci, je

$$t = \frac{A}{P'} = \frac{4l^2 A}{P_0 R^2} = \frac{4 \cdot 1^2 \cdot 8,01 \cdot 10^{-19}}{10^{-3} \cdot (10^{-10})^2} = 3,204 \cdot 10^5 \text{ s}$$

Fotoelektróny sa v skutočnosti začnú uvoľňovať okamžite, ak fotóny majú vhodnú energiu.

Príklad 2:

Meraním bolo zistené, že maximum intenzity vyžarovania wolfrámového vlákna s priemerom $d = 0,2 \text{ mm}$ a s dĺžkou $l = 1 \text{ cm}$ pripadá na vlnovú dĺžku $\lambda_{\max} = 966 \text{ nm}$. Predpokladajme, že vlákno vyžaruje ako čierne teleso. Vypočítajte

- energiu vyžiarenú vláknom za jednotku času,
- čas, za ktorý po vypnutí elektrického prúdu poklesne teplota vlákna na izbovú teplotu $T_0 = 293 \text{ K}$, pričom všetky tepelné výmeny s okolím zanedbáme. Hustota vlákna $\rho = 19 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ a špecifická tepelná kapacita wolfrámu $c = 154,88 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Riešenie:

- Celkové množstvo energie vyžiarenej za jednotku času jednotkovou plochou čierneho telesa s teplotou T určuje Stefanov-Boltzmanov zákon

$$H_{e0} = \sigma(T^4 - T_0^4)$$

kde Stefanova – Boltzmannova konštanta $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

Energia, ktorú vyžiari vlákno s priemerom d a dĺžkou l za jednotku času, je

$$E = H_{e0} S t = \sigma(T^4 - T_0^4) \pi d l t$$

Na určenie teploty vlákna T použijeme Wienov zákon ($b = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$)

$$T = b / \lambda_{\max}$$

Dosadením do vzťahu pre energiu vyžiarenú povrchom vlákna za jednotku času dostaneme

$$E = \sigma \left[\frac{b^4}{\lambda_{\max}^4} - T_0^4 \right] \pi d l t$$

$$E = 5,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{(2,897 \cdot 10^{-3})^4}{(9,66 \cdot 10^{-7})^4} - (293)^4 \right) \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} \cdot 1 = 28,854 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

- Ak vlákno stráca energiu len vyžarovaním, pokles teploty vlákna o dT nastane za časový interval dt , pričom zo zákona zachovania energie vyplýva

$$Edt = -mcdT$$

Po dosadení za E a hmotnosť vlákna m dostaneme

$$\pi d l \sigma T^4 dt = -\rho \pi \frac{d^2}{4} l c dT$$

Po úprave a integrovaní dostaneme

$$t = \frac{dc\rho}{12\sigma} \left(\frac{1}{T_0^3} - \frac{\lambda_{max}^3}{b^3} \right) = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 19 \cdot 10^3 \cdot 154,88}{12,5,67 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{1}{(293)^3} - \frac{(9,66 \cdot 10^{-7})^3}{(2,897 \cdot 10^{-3})^3} \right) = 34,35 \text{ s}$$

Príklad 3:

Aká je rýchlosť fotoelektrónov vyletujúcich z povrchu striebra osvetleného monochromatickým žiarením s vlnovou dĺžkou $\lambda = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, keď vlnová dĺžka žiarenia, pri ktorej sa začína prejavovať fotoelektrický jav je $\lambda_0 = 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Riešenie:

Vychádzame z Einsteinovej fotoelektrickej rovnice

$$h\nu = A + \frac{1}{2}m_e v^2$$

kde $A = h\nu_0$ je výstupná práca elektrónov z kovu, ν_0 je charakteristická frekvencia, pre ktorú musí byť splnená podmienka $\nu_0 \leq \nu$, aby fotoelektrický jav prebiehal. Uplatnením vzťahov $\nu = c/\lambda$ a $\nu_0 = c/\lambda_0$ môžeme písať

$$h \frac{c}{\lambda} = h \frac{c}{\lambda_0} + \frac{1}{2}m_e v^2$$

Pre hľadajú rýchlosť fotoelektrónov dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{9,109 \cdot 10^{-31}} \left(\frac{1}{1,5 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{2,6 \cdot 10^{-7}} \right)} = 1,109 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ÚLOHY

1. Na 1 cm^2 zemského povrchu dopadá zo Slnka asi $8,121 \text{ J}$ energie za 60 s . Vypočítajte, aká je povrchová teplota Slnka za predpokladu, že Slnko žiari ako čierne teleso. Vzdialenosť Slnka od Zeme je $149,5 \cdot 10^6 \text{ km}$ a polomer Slnka je $695\,550 \text{ km}$.
[5684 K]
2. Vypočítajte, aký elektrický prúd by mal prechádzať kovovým vláknom s priemerom $0,1 \text{ mm}$, ktoré je vo vyčerpanej banke, aby sa jeho teplota udržala na stálej hodnote 2500 K . Predpokladajte, že vlákno žiari ako čierne teleso, a tepelné straty vedením tepla zanedbajte. Rezistivita vlákna $\rho = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega \cdot \text{cm}$.
[1,47 A]
3. Kovové vlákno s priemerom $0,2 \text{ mm}$ sa elektrickým prúdom zohreje na teplotu 3000 K . Vypočítajte, za aký čas po vypnutí prúdu klesne teplota vlákna na hodnotu 800 K . Predpokladajte, že vlákno žiari ako čierne teleso a výmena energie s okolím nenastáva. Hustota vlákna $\rho = 19 \text{ g/cm}^3$ a špecifická tepelná kapacita $c = 154,8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
[1,65 s]

4. Čierne teleso sme zohriali na teplotu 10^6 K. Vypočítajte, na ktorú vlnovú dĺžku v spektre žiarenia tohto telesa pripadá relatívne najviac energie.
[$2,89 \cdot 10^{-9}$ m]
5. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa rovinnej monochromatickej vlny, ktorá pri kolmom dopade na tenkú čiernu dosičku ju ohreje na teplotu T . Teplota okolia je T_0 .
[$E_0 = \sqrt{\frac{2\sigma(T^4 - T_0^4)}{\epsilon_0 c}}$]
6. Výstupná práca elektrónov z fotokatódy je 1,6 eV. Vypočítajte, aké záporné anódové napätie je potrebné na zabrzdenie najrýchlejších z emitovaných elektrónov, ak vlnová dĺžka dopadajúceho svetla je 400 nm. Aká je charakteristická frekvencia fotoefektu?
[1,5 V; $3,868 \cdot 10^{14}$ Hz]
7. Vlákno s priemerom 0,2 mm a s dĺžkou 10 cm nachádzajúce sa vo vákuu sa rozžeraví elektrickým prúdom na 3000 K. Aká je energia vyžiarená vláknom za 1 minútu, ak predpokladáme, že žiari ako čierne teleso?
[17 400 J]
8. Aká je teplota pece, ak jej otvor (2×3) cm² vyžiari za 1 s 34,66 J tepla? Predpokladajte, že pec žiari ako čierne teleso.
[1000 K]
9. Výstupná práca wolfrámu je 4,5 eV. Určte vlnovú dĺžku žiarenia, ktorým sa pri wolfráme spustí fotoelektrický jav. Aká je maximálna rýchlosť emitovaných elektrónov pri osvetlení žiarením s vlnovou dĺžkou 180 nm?
[275 nm; $9,1 \cdot 10^5$ m/s]
10. Fotokatóda má výstupnú prácu 2 eV.
 - a) Určte maximálnu vlnovú dĺžku elektromagnetického žiarenia, ktorá z tejto fotokatódy môže ešte emitovať elektróny.
 - b) Akou maximálnou rýchlosťou sú emitované elektróny, ak na katódu dopadá žiarenie s vlnovou dĺžkou 300 nm?
[620 nm; $8,66 \cdot 10^5$ m/s]
11. Ak na katódu fotočlánku dopadá svetlo s vlnovou dĺžkou 546,1 nm, je na potlačenie fotoelektrického prúdu potrebné brzdné napätie 1,563 V. Ak na katódu dopadá svetlo s vlnovou dĺžkou 404,7 nm, je na dosiahnutie rovnakého brzdiaceho účinku potrebné napätie 2,356 V. Vypočítajte Planckovu konštantu.
[$6,624 \cdot 10^{-34}$ J·s]
12. Výstupná práca sodíka je 2,3 eV. Aká je maximálna vlnová dĺžka žiarenia, ktoré spôsobí emisiu fotoelektrónov zo sodíka? Aká bude maximálna kinetická energia fotoelektrónov, ak na povrch sodíka dopadá žiarenie s vlnovou dĺžkou 200 nm?
[$5,4 \cdot 10^{-7}$ m; $6,25 \cdot 10^{-19}$ J = 3,9 eV]

VLNOVÉ VLASTNOSTI ČASTÍC

De Broglieho vlna sa priradzuje každej častici a popisuje jej vlnovú povahu

$$\psi = \psi_0 e^{-(i/\hbar)(Et - px)}$$

ψ je vlnová funkcia, ktorú interpretujeme tak, že jej druhá mocnina určuje hustotu pravdepodobnosti výskytu častice v elementárnom objeme dV . Pre pravdepodobnosť platí

$$dP = \psi \psi^* dV$$

Normovacia podmienka určuje pravdepodobnosť, že častica sa vôbec niekde v priestore vyskytuje

$$\int \psi^* \psi dV = 1$$

Frekvencia ν de Broglieho vlny (E je celková energia častice s hybnosťou $p = mv$, $h = 2\pi\hbar$ je Planckova konštanta)

$$\nu = \frac{E}{h}$$

Vlnová dĺžka λ de Broglieho vlny (m je hmotnosť častice a v je jej rýchlosť)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Heisenbergove relácie neurčitosti (Δp a Δx je neurčitosť hybnosti a neurčitosť polohy častice v priestore, ΔE je neurčitosť jej celkovej energie a Δt je neurčitosť trvania deja)

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Posun vlnovej dĺžky pri **Comptonovom jave** (pružná zrážka fotónu s elektrónom)

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2 \frac{h}{m_e c} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

m_e je hmotnosť elektrónu, ϑ je uhol, ktorý zvierá odchýlený lúč žiarenia s pôvodným smerom.

Ionizačný potenciál V_i určitého atómu (prvku) je mierou ionizačnej energie $A_i = eV_i$, ktorá je potrebná na odstránenie jedného elektrónu z atómu.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Elektrón s počiatočnou rýchlosťou $v_0 = 6 \cdot 10^6$ m/s vstupuje do pozdĺžneho urýchľujúceho homogénneho elektrického poľa s intenzitou $E = 500$ V/m. Určte vlnovú dĺžku elektrónu pri vstupe do tohto poľa a vzdialenosť, ktorú musí urýchľujúcim poľom preletieť, aby sa jeho vlnová dĺžka zmenšila o 10 %.

Riešenie:

Podľa de Broglieho vzťahu elektrónu pohybujúcemu sa rýchlosťou v_0 priradíme vlnovú dĺžku

$$\lambda_0 = \frac{h}{m_e v_0} = \frac{h}{p_0}$$

Ak považujeme elektrón pri danej rýchlosti za nerelativistickú časticu, dostaneme

$$\lambda_0 = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6 \cdot 10^6} = 1,213 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Po preletení urýchľujúcim poľom má byť jeho vlnová dĺžka zmenšená o 10 %, čiže pre novú vlnovú dĺžku musí platiť

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = 1,092 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Zmenu rýchlosti elektrónu vyjadríme na základe energetickej bilancie na vstupe a na výstupe z urýchľujúceho poľa

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e v_0^2 + eEl$$

čo môžeme pomocou hybnosti $p = h/\lambda$ upraviť do tvaru

$$p^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} = m_e^2 v_0^2 + 2m_e E l e$$

Pre hľadajú dĺžku l dostaneme

$$l = \frac{h^2 - (m_e v_0 \lambda)^2}{2m_e e E \lambda^2}$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$l = \frac{(6,625 \cdot 10^{-34})^2 - (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot 1,092 \cdot 10^{-10})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 500 \cdot (1,092 \cdot 10^{-10})^2} = 0,048 \text{ m}$$

Príklad 2:

Fotón röntgenového žiarenia s vlnovou dĺžkou $\lambda = 10^{-10} \text{ m}$ dopadne na slabo viazaný elektrón atómu ľahkého prvku a odchýli sa od pôvodného smeru o uhol $\alpha = 90^\circ$. Vypočítajte, akú energiu získal elektrón pri tejto zrážke.

Riešenie:

Elektrón slabo viazaný k jadru považujeme za voľný. Pri zrážke fotónu s elektrónom odovzdá fotón časť svojej energie elektrónu a sám sa bude pohybovať v smere odchýlenom

od pôvodného smeru o uhol α . Keď energia fotónu pred zrážkou bola $\varepsilon_f = h\nu$ a po zrážke $\varepsilon'_f = h\nu'$, bude platiť $h\nu' < h\nu$ alebo $\nu' < \nu$.

Frekvenciu žiarenia vyjadríme vzťahom $\nu = c/\lambda$, pričom bude platiť, že $\lambda' > \lambda$. Vlnová dĺžka odchýleného žiarenia je väčšia ako vlnová dĺžka dopadajúceho žiarenia.

Z teórie Comptonovho javu pre posun $\Delta\lambda$ vyplýva

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2A \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad A = \frac{h}{m_e c} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Ak zrážku fotónu s elektrónom považujeme za pružnú, elektrón získa pri zrážke energiu

$$\varepsilon_e = \varepsilon_f - \varepsilon'_f = h(\nu - \nu') = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)$$

Úpravami dostávame

$$\varepsilon_e = hc \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2A \sin^2(\alpha/2) + \lambda} \right] = \frac{hc}{\lambda} \left(\frac{2A \sin^2(\alpha/2)}{\lambda + 2A \sin^2(\alpha/2)} \right)$$

$$\varepsilon_e = \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-10}} \cdot \frac{2 \cdot 2,426 \cdot 10^{-12} \cdot \sin^2 45^\circ}{10^{-10} + 2 \cdot 2,426 \cdot 10^{-12} \cdot \sin^2 45^\circ} = 4,8 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 300 \text{ eV}$$

Príklad 3:

Aká je vlnová dĺžka de Broglieho vlny, ktorá prislúcha elektrónu s kinetickou energiou $2 \cdot 10^5 \text{ eV}$.

Riešenie:

Pre vlnovú dĺžku de Broglieho vln platí vzťah

$$\lambda = \frac{h}{m_e v}$$

kde h je Planckova konštanta, m_e je kludová hmotnosť elektrónu a v je jeho rýchlosť. Ďalej platí $E_k = \frac{1}{2} m_e v^2$. Potom $v = \sqrt{2E_k/m_e}$

$$\lambda = \frac{h}{m_e \sqrt{2E_k/m_e}} = \frac{h}{\sqrt{2E_k m_e}} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}} = 2,744 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Ak uvážime špeciálnu teóriu relativity pri výpočte vlnovej dĺžky de Broglieho vlny, potom pri určení hmotnosti elektrónu m_e použijeme vzťah

$$m_e = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

kde m_0 je kludová hmotnosť elektrónu pri rýchlosti $v = 0$. Tento vzťah upravíme

$$\frac{m_0}{m_e} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Pre kinetickú energiu elektrónu pri rýchlosti v vyplýva vzťah

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = (m_e - m_0) c^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ eV} = 2 \cdot 10^5 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Potom

$$m_e = m_0 + \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} = 9,1 \cdot 10^{-31} + 3,56 \cdot 10^{-31} = 12,669 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Pre vlnovú dĺžku de Broglieho vln elektrónu platí

$$\lambda = \frac{h}{m_e \sqrt{2E_k/m_e}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 12,669 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}} = 2,325 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

ÚLOHY

1. Aká je vlnová dĺžka de Broglieho vln prislúchajúcich elektrónu s kinetickou energiou 10^5 eV ?
[$0,39 \cdot 10^{-11} \text{ m}$; s uvažovaním relativistickej hmotnosti $1,232 \cdot 10^{-14} \text{ m}$]
2. Vypočítajte vlnovú dĺžku, akú musí mať fotón, ak má ionizovať atóm cézia s ionizačným potenciálom $V_i = 3,88 \text{ V}$?
[$3,19 \cdot 10^{-7} \text{ m}$]
3. Určte energiu, hybnosť a hmotnosť fotónu žiarenia s vlnovou dĺžkou 10^{-10} m .
[$12,7 \text{ keV}$; $6,624 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $2,21 \cdot 10^{-32} \text{ kg}$]
4. Aké napätie by bolo podľa klasickej teórie potrebné na to, aby urýchlením v elektrostatickom poli s týmto napätím získal elektrón rýchlosť svetla? Akú rýchlosť získa elektrón v tomto poli podľa relativistickej mechaniky?
[256 kV ; $\approx 0,75c$]
5. Ionizačný potenciál atómu ortuti $V_i = 10,4 \text{ V}$. Akú najmenšiu rýchlosť musí mať elektrón, aby ionizoval atóm ortuti nárazom?
[1912 km/s]
6. Aký je ionizačný potenciál sodíkových pár, keď ich ionizácia sa začína objavovať pri osvetlení monochromatickým žiarením s vlnovou dĺžkou $242 \cdot 10^{-9} \text{ m}$?
[$5,12 \text{ V}$]
7. Určte vlnovú dĺžku žiarenia rozptýleného pri Comptonovom jave pod uhlom 90° voči smeru dopadajúceho zväzku röntgenových lúčov s vlnovou dĺžkou $0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.
[$0,5243 \cdot 10^{-10} \text{ m}$]
8. Na voľný elektrón narazí fotón, ktorému prislúcha vlnová dĺžka $0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Po náraze sa fotón odchyli od pôvodného smeru svojho pohybu o uhol 30° . Vypočítajte, aký uhol bude zvierat smer pohybu odrazeného elektrónu so smerom dopadajúceho fotónu.
[$74^\circ 15'$]

9. Vypočítajte, aká má byť vlnová dĺžka žiarenia, ktoré by mohlo vyvolať tvorenie elektrón - pozitronového páru.
[1,2.10⁻¹² m]
10. Pozitron a elektrón zanikajú, pričom vzniknú 2 fotóny. Určte vlnovú dĺžku týchto fotónov.
[2,4.10⁻¹² m]
11. Akú rýchlosť musí mať elektrón, aby jeho hybnosť bola rovnaká ako hybnosť fotónu s vlnovou dĺžkou 520 nm?
[1400 m/s]
12. Poloha stredu guľičky s hmotnosťou 10⁻³ kg a poloha elektrónu sú známe s neurčitou 0,1 mm. Určte najmenšiu neurčitosť, s ktorou môžeme určiť rýchlosť guľičky a rýchlosť elektrónu.
[5,36.10⁻²⁸ m/s; 0,588 m/s]
13. Predpokladajme, že elektróny sa pohybujú v smere osi x rýchlosťou 10⁶ m.s⁻¹. Táto rýchlosť je stanovená s presnosťou 0,01 %. S akou presnosťou môžeme určiť polohu elektrónu?
[7.10⁻⁶ m]

SCHRÖDINGEROVA FORMULÁCIA KVANTOVEJ MECHANIKY

Stredná hodnota funkcie priestorových súradníc

$$G_s(x, y, z) = \int \psi^* G(x, y, z) \psi dV$$

ψ^* je komplexne združená vlnová funkcia a dV je elementárny objem priestoru.

Stredná hodnota funkcie hybnosti

$$P_s(p_x, p_y, p_z) = \int \psi^* \hat{P}(\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) \psi dV$$

$\hat{P}$ je operátor príslušnej veličiny, ktorý dostaneme z jej klasického vyjadrenia tak, že jednotlivé zložky hybnosti nahradíme v ňom ich operátormi:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

Keďže pre vektorové operátory platí napr. $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \vec{i}$, operátor hybnosti je potom

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \text{grad}$$

Bezčasová Schrödingerova rovnica v operátorovej podobe

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{U}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = E\psi$$

$\hat{H}$ je operátor súčtu kinetickej a potenciálnej energie (hamiltonián), E je vlastná hodnota energie a vlnová funkcia ψ je vlastná funkcia.

Časová Schrödingerova rovnica

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - U\psi$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ je Laplaceov operátor, ψ je vlnová funkcia, U je potenciálna energia a m je hmotnosť častice.

Vlnová funkcia, ktorá je riešením Schrödingerovej rovnice, musí

- byť konečná
- byť jednoznačná
- byť spojitá
- spĺňať normovaciu podmienku $\int_V |\psi(x, y, z)|^2 dV = 1$

Kvantovomechanické riešenie lineárneho harmonického oscilátora:

Operátor potenciálnej energie harmonického oscilátora

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = 2\pi^2 m \nu^2 x^2$$

Schrödingerova rovnica

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - 2\pi^2 m \nu^2 x^2)\psi = 0$$

Kvantovanie energie harmonického oscilátora

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Kvantovomechanické riešenie pre časticu v nekonečne hlbokoj potenciálovej jame:

Matematická definícia nekonečne hlbokoj potenciálovej jamy (a je šírka potenciálovej jamy)

$$\begin{array}{ll} -\infty < x < 0 & U \rightarrow \infty \\ 0 \leq x \leq a & U = 0 \end{array}$$

$$a < x < \infty \quad U \rightarrow \infty$$

Schrödingerova rovnica

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

Kvantovanie energie častice v nekonečne hlbkej potenciálovej jame

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2} n^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Hustota pravdepodobnosti výskytu častice v potenciálovej jame

$$\psi_n \psi_n^* = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a} n\right)$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Častica je viazaná na konečný interval $0 \leq x \leq a$. Formálne môžeme povedať, že sa pohybuje v poli s potenciálnou energiou $V(x) = 0$ pri $0 \leq x \leq a$ a $V(x) \rightarrow \infty$, ak platí $x \notin \langle 0, a \rangle$. Riešte Schrödingerovu rovnicu a určte energie stacionárnych stavov a príslušné vlastné funkcie.

Riešenie:

Riešenie bezčasovej Schrödingerovej rovnice

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

hľadáme nezávisle pre $x \in \langle 0, a \rangle$ a pre $x \notin \langle 0, a \rangle$. Pretože pre $x \notin \langle 0, a \rangle$ sa $V(x) = \infty$, rovnica bude splnená vtedy, ak $\psi(x) = 0$ a $x \notin \langle 0, a \rangle$.

V oblasti $x \in \langle 0, a \rangle$ môžeme rovnicu zapísať v tvare

$$\psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0$$

kde $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Riešením poslednej rovnice je vlnová funkcia

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

Pretože vlnová funkcia musí byť spojitá, musí platiť

$$\psi(0) = \psi(a) = 0$$

Z okrajovej podmienky v bode $x = 0$ vyplýva $B = 0$, kým z podmienky v bode $x = a$ dostaneme

$$k = k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{kde } n \text{ je celé číslo}$$

Prípustné hodnoty energie teda sú

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2, \quad \text{kde } n = 1, 2, 3, \dots$$

Stačí uvažovať n prirodzené, pretože $n = 0$ je nefyzikálne a pri zmene znamienka n sa zmení znamienko vlastnej funkcie.

Príklad 2:

Vlnová funkcia základného stavu lineárneho harmonického oscilátora je určená rovnicou

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(\pi x_0^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \quad \text{kde } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \text{ Vlastnú frekvenciu oscilátora sme označili } \omega$$

a jeho hmotnosť m . Vypočítajte, s akou pravdepodobnosťou bude v tomto stave výchylka oscilátora z rovnovážnej polohy väčšia ako maximálna výchylka, ktorú by mal klasický oscilátor kmitajúci s tou istou energiou $E_0 = \hbar\omega/2$. Pri numerickom

$$\text{odhade využite vzťah } \int_1^\infty e^{-x^2} dx \approx 0,16 \cdot \sqrt{2\pi}.$$

Riešenie:

Najskôr určíme maximálnu výchylku klasického oscilátora kmitajúceho s energiou $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. V maximálnej výchylke je jeho kinetická energia nulová a pre potenciálnu energiu teda platí

$$\frac{1}{2} m \omega^2 x_{\max}^2 = E_0$$

Ďalej pre výchylku danú vlnovou funkciou základného stavu lineárneho harmonického oscilátora platí

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \equiv x_0$$

Pravdepodobnosť toho, že v základnom stave bude výchylka väčšia ako $x_{\max}$, je

$$P = \int_{-\infty}^{-x_{\max}} |\psi_0(x)|^2 dx + \int_{x_{\max}}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx$$

$$P = 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi x_0^2}} e^{-\frac{x^2}{x_0^2}} dx = 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2\pi} \cdot 0,16 \approx 0,45$$

V základnom stave nájdeme teda výchylku väčšiu ako maximálna výchylka klasického oscilátora s pravdepodobnosťou asi 45 %.

Príklad 3:

Odhadnite energiu základného stavu lineárneho harmonického oscilátora zo vzťahu neurčitosti.

Riešenie:

Lineárny harmonický oscilátor je sústava, v ktorej sila pôsobiaca na časticu je priamo úmerná výchylke častice z rovnovážnej polohy a má opačné znamienko $F_x = -kx$. Celková energia častice je daná súčtom potenciálnej a kinetickej energie. Platí

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Pri kvantovomechanickom riešení dostaneme základný stav oscilátora ako istú stojatú vlnu. Nech x je absolútna hodnota veľkosti tejto stojatej vlny v intervale $-L \leq x \leq L$, takže neurčitost' v súradnici bude $\Delta x \approx L$.

Podľa vzťahu neurčitosti

$$\Delta p \Delta x \approx \frac{\hbar}{2}$$

kde Δp je neurčitost' hybnosti, Δx je neurčitost' polohy (súradnice). Preto ďalej platí

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{2L}$$

Predpokladáme, že stredná hodnota hybnosti je nulová. Hybnosti budú rozložené v intervale $(-p, p)$, kde rádovo $p \approx \frac{\hbar}{2L}$. Potom platí $x^2 \approx L^2$, $p^2 \approx \left(\frac{\hbar}{2L}\right)^2$.

Po dosadení do vzťahu pre celkovú energiu dostaneme

$$E \approx \frac{m\omega^2}{2} L^2 + \frac{\hbar^2}{8mL^2}$$

V základnom stave je energia minimálna. Presvedčíme sa, že pravá strana predchádzajúcej rovnice má minimum pri $L = \sqrt{\hbar/2m\omega}$. Stačí len prepísať pravú stranu rovnice do tvaru

$$\frac{m\omega^2}{2} L^2 + \frac{\hbar^2}{8mL^2} = \frac{m\omega^2}{2} \left(L - \frac{\hbar}{2m\omega L} \right)^2 + \frac{\hbar\omega}{2}$$

Odtiaľ vidíme, že minimálna hodnota energie ako funkcia rozmeru stojatej vlny je $E_0 = \hbar\omega/2$, čo skutočne zodpovedá energii v základnom stave.

ÚLOHY

1. Preverte nasledujúce operátorové rovnosti:

a) $\frac{d}{dx}x = 1 + x\frac{d}{dx}$

b) $x^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = x\frac{d}{dx} - 1$

c) $\left(1 + \frac{d}{dx}\right)^2 = 1 + 2\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$

d) $\left(x + \frac{d}{dx}\right)^2 = 1 + x^2 + 2x\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$

e) $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}$

f) $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

2. Nájdite vlastné hodnoty operátora $\hat{A}$ prislúchajúce vlastnej funkcii ψ_A , ak

a) $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$, $\psi_A = \sin 2x$

b) $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, $\psi_A = e^{-x^2/2}$

c) $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}$, $\psi_A = \frac{\sin \alpha x}{x}$

[4; 1; $-\alpha^2$]

3. Dokážte, že funkcia $u = \sin kx$ je vlastnou funkciou operátora $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}$, a vypočítajte

vlastné hodnoty operátora $\hat{A}$. Zistite, ako sa zmenia vlastné funkcie a vlastné hodnoty operátora $\hat{A}$, ak funkcia u spĺňa okrajové podmienky $u(0) = 0$, $u(l) = 0$.

$[-k^2; u_m = \sin \frac{m\pi x}{l}; A_m = -\frac{m^2\pi^2}{l^2}, m = 1, 2, \dots]$

4. Určte vlastné funkcie operátorov hybnosti $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$.

[napr. pre operátor $\hat{p}_x$ platí $\varphi_x = \varphi_0 \exp(\frac{ip_x}{\hbar}x)$]

5. Uzemnenou kovovou trubicou letí zväzok elektrónov s kinetickou energiou 80 eV. Elektróny potom vletia do druhej trubice s potenciálom -50 V voči zemi. Vypočítajte, koľko percent elektrónov sa odrazí späť. Odrazia sa niektoré elektróny aj vtedy, keď má druhá trubica potenciál $+50$ V?

[5,8 %; 1,5 %]

6. Elektrón sa pohybuje vnútri vrstvy s hrúbkou $5 \cdot 10^{-9}$ m. Jeho energia v smere pozdĺž vrstvy sa môže spojiť meniť, zatiaľ čo energia pohybu v smere kolmom na vrstvu je konštantná. Odhadnite povolené energie elektrónu prislúchajúce pohybu kolmému na rovinu vrstvy. Aproximujte tento pohyb tak, že elektrón uvažujeme v jednorozmernej potenciálovej jame s nekonečne vysokými stenami.

$$[E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2a^2 m_e} n^2 = 1,5 \cdot 10^{-2} n^2 \text{ eV}]$$

7. Určte tlak, ktorým pôsobí elektrón uzavretý v kocke s hranou L na steny kocky. Pokúste sa o rádový odhad tlaku v prípade tuhej látky, keď môžeme predpokladať $L = 2 \cdot 10^{-10}$ m (hmotnosť elektrónu $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg).

$$[p = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m_e L^3}; 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}]$$

8. Pre lineárny harmonický oscilátor existuje v klasickej mechanike vzťah medzi energiou E a amplitúdou A . Nájdite tento vzťah pre kvantový oscilátor a potom pomocou neho zaveďte pojem amplitúdy pre kvantový oscilátor v základnom stave s energiou $E_0 = \hbar \omega / 2$.

$$[A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}; A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}]$$

9. Dokážte, že vlnová funkcia $\psi(x,t) = Ce^{i(kx - \omega t)}$ vyhovuje Schrödingerovej rovnici pre $V(x) = 0$.

10. Častica viazaná na úsečku danú intervalom $(0,L)$ sa v čase t nachádza v stave s vlnovou funkciou $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\sin \frac{\pi x}{L} e^{-i\frac{E_1}{\hbar} t} + \sin \frac{2\pi x}{L} e^{-i\frac{E_2}{\hbar} t} \right)$, pričom ide o superpozíciu

stacionárnych stavov zodpovedajúcich energiám $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$, resp. $E_2 = 4E_1$. Určte

pravdepodobnosť, že táto častica sa nachádza v intervale $(0, L/2)$ v čase $t = 0$.
[0,924]

11. Zistite vlastné hodnoty energie častice s hmotnosťou m , ktorá sa nachádza v dvojrozmernej nekonečne hlbkej jame s pravouhlým tvarom a rozmermi a (v smere osi x), b (v smere osi y), $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

$$[E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right), n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots]$$

12. Vlnová funkcia základného stavu harmonického oscilátora má tvar

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{d}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2\right), \text{ kde } \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}. \text{ Energia oscilátora v tomto stave je}$$

$E_0 = \hbar \omega / 2$. Vypočítajte strednú hodnotu veľkosti súradnice $\langle |x| \rangle$ vyjadrenú pomocou klasickej amplitúdy A , ktorá súvisí s energiou oscilátora vzťahom $E = m\omega^2 A^2 / 2$.

$$[\langle |x| \rangle = A / \sqrt{\pi} = 0,564A]$$

13. Elektrón s hmotnosťou $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg a s energiou 1 MeV sa nachádza v jednorozmernej potenciálovej jame s nasledovnou štruktúrou: $U(x) \rightarrow \infty$ pre $x < a$, $U(x) = 0$ pre $0 \leq x \leq a$, $U(x) = U_0$ pre $x > a$. Predpokladajte, že $E < U_0$ a $a = 10^{-12}$ m. Vypočítajte U_0 .

$$[1,2 \text{ MeV}]$$

ATÓMOVÁ A JADROVÁ FYZIKA

ELEKTRÓNOVÝ OBAL ATÓMU

Bohrove postuláty

1. Elektrón môže obiehať okolo jadra atómu len po takých dráhach s polomerom r , pre ktoré je splnená podmienka

$$m_e v r = n \hbar$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ je hlavné kvantové číslo, v je jeho rýchlosť.

2. Ak sa elektrón pohybuje len po jednej dráhe, nevyžaruje ani neprijíma žiadnu energiu.
3. Elektrón vyžaruje energiu len vtedy, keď prechádza z kvantovej dráhy s väčšou energiou E_n na dráhu s menšou energiou E_m . Vtedy sa vyžiari fotón s energiou

$$h \nu = E_n - E_m$$

Kvantový polomer r_n dráhy pohybujúceho sa elektrónu (n je hlavné kvantové číslo)

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} n^2 = r_1 n^2 = 0,53 \cdot 10^{-10} n^2 \text{ [m]}$$

r_1 je polomer 1. kruhovej dráhy (Bohrov polomer), $\hbar$ je Planckova konštanta, e je elektrický náboj elektrónu, m_e je hmotnosť elektrónu a ε_0 je permitivita vákua.

Rýchlosť v_n elektrónu na n – tej dráhe (v_1 je rýchlosť elektrónu prislúchajúca dráhe s polomerom r_1)

$$v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{n} = v_1 \frac{1}{n^2}$$

Kinetická energia E_k elektrónu na n – tej dráhe

$$E_k = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = \frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Potenciálna energia E_p na n – tej dráhe

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^4}{4\varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Celková energia E_n elektrónu na n – tej dráhe ($N = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ je Rydbergova frekvencia)

$$E_n = E_k + E_p = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{N \hbar}{n^2}$$

Frekvencia ν žiarenia, ktoré vysiela atóm pri preskoku elektrónu z vyššej kvantovej dráhy n do nižšej kvantovej dráhy m

$$\nu = N \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Vlnočet spektrálnej čiary $\bar{\nu}$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{N}{c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ je Rydbergov vlnočet, m a n sú hlavné kvantové čísla.

$m = 1$ Lymanova séria (oblasť ultrafialového žiarenia)

$m = 2$ Balmerova séria (oblasť viditeľného žiarenia)

$m = 3$ Paschenova séria (oblasť infračerveného žiarenia)

$m = 4$ Brackettova séria (oblasť infračerveného žiarenia)

$m = 5$ Pfundtova séria (oblasť infračerveného žiarenia)

Magnetický moment $\vec{M}$ elektrónu obiehajúceho okolo jadra atómu

$$\vec{M} = \mu_0 I \vec{S} = -\mu_0 v e \pi r^2 \vec{v}_0 = -\frac{1}{2} \mu_0 e \omega r^2 \vec{v}_0 = -\frac{1}{2} \mu_0 e v r \vec{v}_0$$

$\vec{v}_0$ je jednotkový vektor v smere vektora plochy $\vec{S}$, μ_0 je permeabilita vákua, e je náboj elektrónu, r je polomer dráhy elektrónu, $I = v e$ je elektrický prúd a v je frekvencia obehu elektrónu okolo jadra.

Energia ΔE , ktorú získa elektrón po vložení atómu do vonkajšieho magnetického poľa v smere osi z

$$\Delta E = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{M} = -\frac{1}{\mu_0} B_z M_0 m_l$$

m_l je magnetické kvantové číslo, ktoré môže nadobúdať hodnoty $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$,

l je vedľajšie (orbitálne) kvantové číslo, ktoré nadobúda hodnoty $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Bohrov magnetón

$$M_0 = \mu_0 \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Vypočítajte polomer prvej a tretej kvantovej dráhy elektrónu obiehajúceho okolo jadra v Bohrovom modeli atómu vodíka. Vypočítajte rýchlosti elektrónu na týchto dráhach.

Riešenie:

Pri pohybe elektrónu okolo jadra po kruhovej dráhe v Bohrovom modeli atómu vodíka úlohu dostredivej sily má Coulombova príťažlivá sila. Platí

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Podľa prvého Bohrovho postulátu musí platiť, že elektrón sa pohybuje len po určitej dráhe, pre ktorú musí byť splnená podmienka

$$2\pi m_e v r = n h$$

kde $n = 1, 2, 3, \dots$ je hlavné kvantové číslo a $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ je Planckova konštanta. Pre polomer n -tej dráhy elektrónu z uvedených dvoch rovníc vyplýva

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2$$

Polomer prvej ($n = 1$) a tretej ($n = 3$) kvantovej dráhy je

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = \frac{8,859 \cdot 10^{-12} (6,625 \cdot 10^{-34})^2}{3,14 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} (1,602 \cdot 10^{-19})^2} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$r_3 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2 = r_1 n^2 = 0,53 \cdot 10^{-10} \cdot 3^2 = 4,77 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Rýchlosť elektrónu z uvedených podmienok určíme

$$v_n = \frac{n h}{2\pi r_n m_e} = \frac{n h}{2\pi \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2 m_e} = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h n}$$

Pre rýchlosť elektrónu na prvej a na tretej kvantovej dráhe platí

$$v_1 = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} = \frac{(1,602 \cdot 10^{-19})^2}{2,8859 \cdot 10^{-12} \cdot 6,625 \cdot 10^{-34}} = 2,188 \cdot 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_3 = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h n} = v_1 \frac{1}{n} = 2,188 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{3} = 0,73 \cdot 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Príklad 2:

Vypočítajte frekvenciu žiarenia potrebnú na excitovanie elektrónu vo vodíkovom atóme zo základného do najbližšieho excitovaného stavu a ionizáciu atómu vodíka. Akú „farbu“ budú mať tieto fotóny?

Riešenie:

Aby sme mohli určiť príslušnú frekvenciu žiarenia, potrebujeme poznať energiu zodpovedajúcich stavov. Pre diskrétné spektrum energie elektrónu vo vodíkovom atóme platí

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

kde n je hlavné kvantové číslo a môže nadobúdať hodnoty 1,2,3,...

Pre energiu elektrónu v základnom ($n = 1$) a v najbližšom excitovanom ($n = 2$) stave platí

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,602 \cdot 10^{-19})^4}{8 (8,859 \cdot 10^{-12})^2 (6,625 \cdot 10^{-34})^2} = -2,179 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}$$

$$E_2 = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = E_1 \frac{1}{2^2} = -2,179 \cdot 10^{-18} \frac{1}{4} = -5,448 \cdot 10^{-19} \text{ J} = -3,4 \text{ eV}$$

Frekvenciu žiarenia, ktorá má vyvolať požadovanú excitáciu, vypočítame

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{1}{h} \left[\left(-\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{2^2} \right) - \left(-\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{1^2} \right) \right] = \frac{3m_e e^4}{32\varepsilon_0^2 h^3}$$

$$\nu = \frac{3 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} (1,602 \cdot 10^{-19})^4}{32 (8,859 \cdot 10^{-12})^2 (6,625 \cdot 10^{-34})^3} = 2,466 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Aby došlo k ionizácii atómu vodíka, musíme elektrónu v základnom stave dodať minimálne energiu $|E_1| = 13,6 \text{ eV}$.

Frekvenciu žiarenia zodpovedajúcu ionizácii určuje vzťah

$$\nu_i = \frac{|E_1|}{h} = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,602 \cdot 10^{-19})^4}{8 (8,859 \cdot 10^{-12})^2 (6,625 \cdot 10^{-34})^3} = 3,288 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Pomocou nasledujúcich vzťahov určíme vlnové dĺžky, ktoré prislúchajú vypočítaným frekvenciám

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,466 \cdot 10^{15}} = 1,216 \cdot 10^{-7} \text{ nm}$$

$$\lambda_i = \frac{c}{\nu_i} = \frac{3 \cdot 10^8}{3,288 \cdot 10^{15}} = 9,124 \cdot 10^{-8} \text{ nm}$$

Z výsledkov vyplýva, že sa jedná o ultrafialovú oblasť žiarenia.

Príklad 3:

Vypočítajte, aký je dráhový magnetický moment elektrónu vodíkového atómu v základnom stave podľa Bohrovej teórie.

Riešenie:

Magnetický moment prúdovej slučky s plošným obsahom S , cez ktorú preteká elektrický prúd I , je určený vzťahom

$$M = \mu_0 IS$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$ je permeabilita vákua a $S = \pi r_1^2$, r_1 je polomer kvantovej dráhy elektrónu v základnom stave.

Ak elektrón obieha po dráhe v základnom stave n -krát za jednotku času, potom platí

$$I = ne$$

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$$

$$v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}$$

Pre magnetický moment elektrónu potom platí

$$M = \mu_0 ne \pi r_1^2 = \mu_0 \frac{v_1}{2\pi r_1} e \pi r_1^2 = \mu_0 \frac{v_1 r_1 e}{2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{he}{m_e}$$

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 1,166 \cdot 10^{-29} \text{ V} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

Príklad 4:

Vyjadrite zmenu frekvencie a vlnovej dĺžky spektrálnej čiary s frekvenciou ν , spôsobenú vložením atómu do magnetického poľa s indukciou B (tzv. normálny Zeemanov jav). Vypočítajte hodnoty pre vlnovú dĺžku $\lambda_0 = 184,9 \text{ nm}$ v magnetickom poli s magnetickou indukciou $B = 0,2 \text{ T}$.

Riešenie:

Vložením atómu do vonkajšieho magnetického poľa s indukciou $\vec{B}$ získa elektrón príspevok energie

$$\Delta E = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{M}$$

kde $\vec{M}$ je magnetický moment elektrónu, μ_0 je permeabilita vákua. Ak vonkajšie magnetické pole má smer osi z , potom platí $B \equiv B_z$.

Zmenu energie môžeme ďalej vyjadriť

$$\Delta E = -\frac{1}{\mu_0} B_z M_0 m_l$$

kde $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ je magnetické kvantové číslo a $M_0 = \frac{\mu_0 e \hbar}{2m_e}$ je tzv. Bohrov magnetón.

Pre základný stav, keď $n = 1, l = 0, m_l = 0$, je zmena frekvencie $\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h} = 0$.

Pre stav $l = 1$ magnetické kvantové číslo môže nadobúdať hodnoty $m_l = 0, +1, -1$. Z tohto vyplýva, že namiesto jednej čiary dostaneme tri spektrálne čiary. Jedna bude mať nezmenenú frekvenciu (vlnovú dĺžku), ostatné sa budú líšiť o frekvenciu $\Delta \nu$ a o vlnovú dĺžku $\Delta \lambda$. Platí

$$\Delta \nu = \pm \frac{\Delta E}{h} = \pm \frac{M_0 B_z}{\mu_0 h} = \pm \frac{e B_z}{4\pi m_e} = \pm \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2}{4\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = \pm 2,802 \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

$$|\Delta \lambda| = \frac{\lambda_0^2}{c} |\Delta \nu| = \frac{e B_z \lambda_0^2}{4\pi m_e c} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2 \cdot (1,849 \cdot 10^{-7})^2}{4\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 3,193 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

Hľadané vlnové dĺžky budú mať hodnoty

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \Delta \lambda = 184,8997 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$\lambda_2 = \lambda_0 = 184,9 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$\lambda_3 = \lambda_0 + \Delta \lambda = 184,9003 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

ÚLOHY

1. Aká je vlnová dĺžka fotónu, ktorý sa vyžiari pri preskoku elektrónu vo vodíkovom atóme zo štvrtej kvantovej dráhy na druhú kvantovú dráhu?
[485 nm]
2. Aká je perióda obiehania elektrónu na tretej kvantovej dráhe v Bohrovom modeli vodíkového atómu?
[4,132 · 10⁻¹⁵ s]
3. Vypočítajte vlnové dĺžky prvých troch čiar Balmerovej série vodíkového spektra.
[0,656 μm; 0,486 μm; 0,434 μm]
4. Vypočítajte obvodovú rýchlosť elektrónu na druhej kvantovej dráhe v Bohrovom modeli vodíkového atómu.
[1,09 · 10⁶ m/s]
5. Určte celkovú energiu elektrónu na druhej kvantovej dráhe v Bohrovom modeli atómu vodíka.
[5,45 · 10⁻¹⁹ J]
6. Akú vlnovú dĺžku musí mať fotón, ktorý má ionizovať atóm cézia, ak jeho ionizačný potenciál $V_i = 3,88 \text{ V}$?
[3,19 · 10⁻⁷ m]

7. Nájdite najmenšiu a najväčšiu vlnovú dĺžku spektrálnych čiar vodíka vo viditeľnej oblasti spektra.
[410 nm; 656 nm]
8. Atóm vodíka v základnom stave absorbuje fotón s energiou 12,09 eV. Určte, koľkokrát sa zväčší polomer dráhy elektrónu.
[9]
9. Určte kinetickú, potenciálnu a celkovú energiu elektrónu v atóme vodíka na prvej kvantovej dráhe.
[13,56 eV; -27,12 eV; -13,56 eV]
10. Dokážte, že žiarenie, ktoré vyžiari atóm vodíka pri prechode elektrónu zo šiestej na druhú kvantovú dráhu, nemôže vyvolať fotoelektrický jav zo zinku. Výstupná práca zinku je 3,3 eV.
[3,03 eV]
11. Atóm vodíka v základnom stave pohltí žiarenie s vlnovou dĺžkou 121,5 nm. Určte polomer kvantovej dráhy elektrónu excitovaného atómu.
[2,12.10⁻¹⁰ m]

ATÓMOVÉ JADRO

Atómové číslo Z udáva počet protónov v jadre atómu a súčasne určuje poradie atómu v Mendelejevovej periodickej sústave prvkov.

Hmotnostné číslo A (nukleónové číslo) udáva počet protónov a neutrónov v jadre atómu. Predstavuje atómovú hmotnosť prvku zaokrúhlenú na celé číslo.

Izotopy sú prvky vyznačujúce sa rovnakým atómovým číslom, ale rozdielnym nukleónovým číslom. Jedná sa teda o rovnaké prvky s rôznym počtom neutrónov v ich atómovom jadre.

Väzbová energia E_v atómového jadra je práca, ktorú musíme vynaložiť na rozdelenie atómového jadra na jednotlivé nukleóny

$$E_v = \Delta m_j c^2$$

$$\Delta m_j = Zm_p + (A - Z)m_n - m_j$$

Úbytok hmotnosti jadra Δm_j je rozdiel súčtu hmotností častíc do jadrovej reakcie vstupujúcich a súčtu hmotností častíc reakciou vznikajúcich, m_p je hmotnosť protónov, m_n je hmotnosť neutrónov, m_j je skutočná hmotnosť príslušného jadra atómu, c je rýchlosť svetla vo vákuu.

Atómová hmotnostná jednotka u je definovaná ako 1/12 klúdovej hmotnosti atómu uhlíka $^{12}_6\text{C}$

$$1 u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Úbytku hmotnosti $\Delta m_j = 1 u$ zodpovedá podľa Einsteinovej rovnice uvoľnená energia

$$\Delta E = \Delta m_j c^2 = 931,8 \text{ MeV}$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Vypočítajte, aké množstvo energie sa uvoľní pri reakcii $^{10}_5\text{B} + ^2_1\text{d} \rightarrow ^{11}_5\text{B} + ^1_1\text{p}$, kde ^2_1d je jadro deutéria (deuterón) a ^1_1p je protón. Atómová hmotnosť izotopu bóru $^{10}_5\text{B}$ je 10,0168u, izotopu bóru $^{11}_5\text{B}$ je 11,01284u, deuterónu je 2,01472u, protónu je 1,00813u.

Riešenie:

Súčet kludových hmotností častíc vstupujúcich do reakcie je

$$m_1 + m_2 = 10,01618\text{u} + 2,01472\text{u} = 12,03090\text{u}$$

Súčet kludových hmotností častíc, ktoré reakciou vznikli, je

$$m_3 + m_4 = 11,01284\text{u} + 1,00813\text{u} = 12,02097\text{u}$$

V priebehu reakcie dochádza teda k úbytku energie úmernej $\Delta m = 0,00993\text{u}$, pričom ide o úbytok hmotnosti jadra, lebo celkový počet elektrónov v atómovom obale sa nezmenil. Pri reakcii sa uvoľní energia ΔE , ktorá súvisí s úbytkom hmotnosti Δm podľa vzťahu

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

Úbytok hmotnosti Δm ľahko vyjadríme v jednotkách hmotnosti, ak uvážime, že atómová hmotnostná jednotka $1\text{u} = 1,66 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$. Potom

$$\Delta m = 0,00993 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} = 1,64839 \cdot 10^{-29}\text{ kg}$$

Pre energiu uvoľnenú pri reakcii dostaneme

$$\Delta E = \Delta mc^2 = 1,64839 \cdot 10^{-29} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 1,4843 \cdot 10^{-12}\text{ J} = 9,28\text{ MeV}$$

Príklad 2:

γ -žiarenie, ktoré vzniká pri prirodzenom rádioaktívnom rozpade, zapríčiňuje rozpad deuterónu na protón a neutrón podľa reakcie $^2_1\text{d} + \gamma \rightarrow ^1_1\text{p} + ^1_0\text{n}$. Vypočítajte hmotnosť neutrónu, keď kinetická energia protónu $\Delta E_1 = 0,217\text{ MeV}$ a energia dopadajúceho γ -žiarenia $\Delta E_2 = 2,62\text{ MeV}$. Hmotnosť deuterónu $m_d = 2,01472\text{u}$, hmotnosť protónu $m_p = 1,00813\text{u}$.

Riešenie:

V priebehu reakcie dochádza k úbytku hmotnosti

$$\Delta m = m_d - (m_p + m_n)$$

z čoho vyjadríme hmotnosť neutrónu

$$m_n = m_d - m_p - \Delta m$$

Vzhľadom na to, že hmotnosť protónu a neutrónu, a teda aj ich energie sa len nepatrne líšia, pri reakcii sa uvoľní energia

$$\Delta E = \Delta mc^2 = 2\Delta E_1 - \Delta E_2$$

Potom pre hmotnosť neutrónu dostaneme

$$m_n = m_d - m_p - \frac{2\Delta E_1 - \Delta E_2}{c^2}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$m_n = 2,01472u - 1,00813u + \frac{2,186.1,602.10^{-13}}{9.10^{16}} \text{ kg}$$

$$m_n = 1,00659.1,66.10^{-27} + 0,389.10^{-29} = 1,6748.10^{-27} \text{ kg}$$

Príklad 3:

Rádioaktívnym rozpadom rádia na radón podľa reakcie ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^4_2\alpha$ sa uvoľní energia $\Delta E = 4,9 \text{ MeV}$. Vypočítajte, aký je rozdiel medzi úbytkom hmotnosti jadra rádia a radónu, keď je známy len úbytok hmotnosti α -častice $\Delta m_\alpha = 0,0303u$.

Riešenie:

Pretože jadro rádia ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ obsahuje 88 protónov a 138 neutrónov, pri jeho vzniku dochádza k úbytku hmotnosti

$$\Delta m_{\text{Ra}} = 88m_p + 138m_n - m_{\text{Ra}}$$

Pri vzniku jadra radónu ${}^{222}_{86}\text{Rn}$, ktoré obsahuje 86 protónov a 136 neutrónov dochádza k úbytku hmotnosti

$$\Delta m_{\text{Rn}} = 86m_p + 136m_n - m_{\text{Rn}}$$

Rozdiel týchto hmotnostných úbytkov je

$$\Delta m = \Delta m_{\text{Ra}} - \Delta m_{\text{Rn}} = 2m_p + 2m_n - (m_{\text{Ra}} - m_{\text{Rn}})$$

Zmene energie $\Delta E = 4,9 \text{ MeV}$ prislúcha úbytok hmotnosti

$$\Delta m' = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4,9}{931,8} = 0,00526u$$

Z rovnice rozpadu pre tento úbytok hmotnosti vyplýva

$$\Delta m' = m_{\text{Ra}} - (m_{\text{Rn}} + m_{\alpha})$$

Ak z tejto rovnice vyjadríme rozdiel $m_{\text{Ra}} - m_{\text{Rn}}$ a dosadíme do rovnice, ktorá vyjadruje rozdiel hmotnostných úbytkov, dostaneme

$$\Delta m = 2m_p + 2m_n - m_{\alpha} - \Delta m'$$

Výraz $2m_p + 2m_n - m_{\alpha}$ predstavuje úbytok hmotnosti Δm_{α} , ku ktorému dochádza pri vzniku α -častice. Potom platí

$$\begin{aligned} \Delta m &= \Delta m_{\alpha} - \Delta m' = \\ &= 0,0303\text{u} - 0,00526\text{u} = 0,025\text{u} = 0,025 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} = 0,0415 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

ÚLOHY

1. V obale, ktorý neprepúšťa α -žiarenie, je 1 g rádia. Vypočítajte, aké je celkové množstvo energie, ktoré sa v obale získa za jednu hodinu, keď energia, ktorú so sebou α -častica odnáša je, 4,7 MeV.
[102,5 J/h]
2. Výsledkom jadrovej reakcie ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^4_2\text{He}$, pri ktorej majú protóny bombardujúce lítium energiu 600 keV, sú dve α -častice letiace s kinetickou energiou 8,94 MeV. Určte hmotnosť izotopu ${}^7_3\text{Li}$, ak hmotnosť protónu $m_p = 1,008134\text{u}$ a hmotnosť α -častice 4,003864u.
[11,653 $\cdot 10^{-27}$ kg]
3. Vypočítajte, aká je väzbová energia deuterónu a α -častice.
[2,19 MeV; 28,2 MeV]
4. Kinetická energia α -častice vyletujúcej z jadra atómu polónia ${}^{214}_{84}\text{Po}$ pri rádioaktívnom rozpade je 7,68 MeV. Určte rýchlosť α -častice a celkovú energiu vznikajúcu pri úniku α -častice, keď jej hmotnosť je $6,646 \cdot 10^{-27}$ kg.
[0,15 $\cdot 10^8$ m/s; 4,87 MeV]
5. Nepohybujúci sa neutrálny π -mezón sa rozpadá na dva fotóny. Nájdite energiu každého fotónu, keď kludová hmotnosť π -mezónu je $254,2m_e$, kde m_e je kludová hmotnosť elektrónu.
[1,081 $\cdot 10^{-11}$ J]
6. Vypočítajte, aká energia sa uvoľní pri reakcii ${}^7_3\text{Li} + {}^2_1\text{d} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + {}^1_0\text{n}$, keď prislúchajúce hmotnosti sú: $m_{\text{Li}} = 7,0164\text{u}$, $m_{\text{d}} = 2,01414\text{u}$, $m_{\text{Be}} = 8,005314\text{u}$, $m_{\text{n}} = 1,008984\text{u}$.
[2,385 $\cdot 10^{-12}$ J = 14,88 MeV]
7. Elektrón-pozitrónový pár vzniká z fotónu s energiou 2,62 MeV. Vypočítajte kinetickú energiu vzniknutého elektrón-pozitrónového páru.
[1,6 MeV]
8. Pri jadrovej syntéze dvoch deuterónov vznikne jadro izotopu hélia ${}^3_2\text{He}$, jeden neutrón

${}^1_0\text{n}$ a uvoľní sa 3,26 MeV energie. Vypočítajte hmotnosť izotopu ${}^3_2\text{He}$, keď $m_d = 2,01418\text{u}$ a $m_n = 1,008974\text{u}$.

[3,015u]

9. Rádioaktívne jadro izotopu horčíka ${}^{23}_{12}\text{Mg}$ vysiela pozitronové žiarenie β^+ (0_1e). Zapište reakciu, ktorá prebieha, a vypočítajte energiu, ktorá sa uvoľní pri jednom rozpade. Hmotnosť atómu Mg je 22,99414u, hmotnosť vzniknutého atómu je 22,98977u. Kľudová hmotnosť elektrónu je $9,1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$.

[3,06 MeV]

10. V druhom štádiu syntézy jadier vo hviezdach dochádza ku spojeniu troch jadier ${}^4_2\text{He}$ do jedného jadra ${}^{12}_6\text{C}$. Vypočítajte, aká energia sa pri tejto jadrovej syntéze uvoľní. Hmotnosť hélia je 4,0026u.

[7,29 MeV]

11. Určte hmotnosť neutrálneho atómu s väzbovou energiou 7,72 MeV, ak je jeho jadro tvorené dvoma protónmi a jedným neutrónom. Hmotnosť protónu je 1,008134u a hmotnosť neutrónu 1,008984u.

[3,01604u]

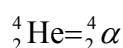
RÁDIOAKTIVITA

Rádioaktivita je jav, pri ktorom sa nestabilný izotop určitého prvku (rádionuklid) mení na izotop iného prvku, pričom sa z jadra rádionuklidu uvoľňujú určité častice (α -častice, neutróny ${}^1_0\text{n}$, elektróny ${}^0_{-1}e$, pozitrony 0_1e , protóny 1_1p , atď.).

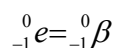
Prirodzená rádioaktivita je samovoľný rozpad jadier s väčším atómovým číslom ako 82 na iné jadro, ktorý je sprevádzaný emisiou α -častíc, β -častíc a spravidla aj vznikom γ -žiarenia.

Umelá rádioaktivita je proces, pri ktorom sa jadro pôsobením elementárnych častíc alebo fotónov premení na iné jadro.

Žiarenie α je tvorené jadrami atómov hélia

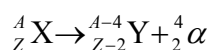


Žiarenie β je tvorené elektrónmi

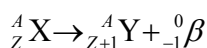


Žiarenie γ je elektromagnetické žiarenie s veľmi krátkou vlnovou dĺžkou.

Rozpad α je jadrová premena, pri ktorej jadro vyžaruje žiarenie α a vznikajúci izotop Y leží v periodickej sústave prvkov o 2 miesta vľavo od pôvodného rádionuklidu X



Rozpad β je jadrová premena, pri ktorej jadro vyžaruje žiarenie β a vznikajúci izotop Y leží v periodickej sústave prvkov o 1 miesto vpravo od pôvodného rádionuklidu X



Rozpadový zákon vyjadruje časovú závislosť počtu nerozpadnutých atómov rádioaktívnej látky

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

N_0 je počet jadier v čase $t = 0$, N je počet nerozpadnutých jadier v čase t a λ je rozpadová konštanta.

Rozpadová konštanta λ

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{T_{1/2}}$$

Polčas rozpadu $T_{1/2}$ je čas, za ktorý sa rozpadne polovica jadier.

Ak N' je počet rozpadnutých jadier, potom

$$N' = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

Aktivita A určuje počet rozpadov atómov za jednotku času

$$A = -\frac{dN}{dt} = N\lambda$$

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1:

Bombardovaním stabilného izotopu fosforu ${}_{15}^{31}\text{P}$ deuterónmi vzniká rádioaktívny izotop fosforu ${}_{15}^{32}\text{P}^*$ s polčasom rozpadu $T_{1/2} = 14,3$ dní. Reakcia prebieha podľa rovnice ${}_{15}^{31}\text{P} + {}_1^2\text{d} \rightarrow {}_{15}^{32}\text{P}^* + {}_1^1\text{p}$. Vypočítajte, aká časť z pôvodného množstva rádioaktívneho izotopu ostane po uplynutí 12 hodín od okamžiku, keď prerušíme bombardovanie stabilného izotopu fosforu deuterónmi.

Riešenie:

Pre rozpad rádioaktívneho izotopu ${}_{15}^{32}\text{P}^*$ platia rovnaké zákonitosti ako pre rozpad prirodzené rádioaktívnych prvkov. Po uplynutí času t ostáva z pôvodného počtu atómov N_0 rádioaktívneho izotopu nerozpadnutých N atómov, pričom platí

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

kde λ je rozpadová konštanta vyjadrená vzťahom $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$.

Úpravou dostaneme rozpadový zákon v tvare

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t\right)$$

Pre relatívne množstvo nerozpadnutých atómov dostaneme

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t\right) = \exp\left(-\frac{0,693}{343,2} 12\right) = 0,98 = 98 \%$$

Príklad 2:

Vypočítajte, koľko atómov sa rozpadne za sekundu v 1 kg izotopu uránu $^{238}_{92}\text{U}$, ktorého polčas rozpadu $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ rokov.

Riešenie:

Nech v čase t látka obsahuje N nerozpadnutých atómov. Z tohto počtu sa za čas dt rozpadne $dN = -N\lambda dt$ atómov. Za jednotku času sa rozpadne

$$Z = -\frac{dN}{dt} = N\lambda \text{ atómov}$$

Jeden kilomól uránu $^{238}_{92}\text{U}$ obsahuje $N_A = 6,03 \cdot 10^{26}$ atómov a má hmotnosť 238 kg. 1 kg uránu v čase $t = 0$ obsahuje $N_0 = \frac{6,03 \cdot 10^{26}}{238}$ atómov. Za jednotku času sa z nich rozpadne $Z = N_0\lambda$ atómov.

Keď uvažíme súvislosť medzi rozpadovou konštantou λ a polčasom rozpadu $T_{1/2}$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{T_{1/2}}$$

dostaneme pre počet rozpadnutých atómov v 1kg uránu $^{238}_{92}\text{U}$

$$Z = N_0\lambda = \frac{6,03 \cdot 10^{26}}{238} \cdot \frac{0,693}{1,4 \cdot 10^{17}} = 1,25 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$$

Príklad 3:

Vypočítajte, za aký čas ubudne $\Delta m = 10 \text{ } \mu\text{g}$ rádioaktívnej látky, ktorej celkové množstvo bolo $m_0 = 50 \text{ } \mu\text{g}$ a polčas rozpadu rádioaktívnej látky je $T_{1/2} = 3 \text{ min}$.

Riešenie:

Podľa zákona rádioaktívnej premeny pre počet nerozpadnutých jadier N po uplynutí času t platí

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Pretože hmotnosť určitého množstva rádioaktívnej látky je úmerná počtu v nej sa nachádzajúcich atómov, môžeme rovnicu písať v tvare

$$m = m_0 e^{-\lambda t}$$

kde m_0 je pôvodné množstvo látky a m je hmotnosť ešte nerozpadnutých jadier po uplynutí času t . Rozpadová konštanta $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$.

Ďalej platí

$$m = m_0 - \Delta m$$

Z rovnice vyplýva

$$\frac{m_0 - \Delta m}{m_0} = \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t\right)$$

$$t = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{m_0 - \Delta m}{m_0}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme $t = -\frac{180}{0,693} (\ln 40 - \ln 50) = 58 \text{ s}$.

ÚLOHY

1. Určte zloženie jadra izotopu prvku, ktorý vznikne z uránu $^{238}_{92}\text{U}$ po štyroch rozpadoch α a dvoch rozpadoch β .
[$^{222}_{86}\text{Rn}$]
2. 1 g rádia vysiela za 1 s $3,7 \cdot 10^{10}$ α -častíc. Nájdite hodnotu Avogadrovej konštanty, keď polčas rozpadu rádia je 1590 rokov a molárna hmotnosť rádia je 226,05 kg/kmol.
[$6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$]
3. Počiatočné množstvo rádioaktívneho stroncia ^{90}Sr je 1 g a polčas rozpadu 30 rokov. Vypočítajte aktivitu stroncia a určte, za aký čas sa rozpadne 5 % pôvodného počtu atómov. Molárna hmotnosť stroncia je $M = 89,9 \text{ kg/kmol}$.
[$4,907 \cdot 10^{12} \text{ Bq}$; $7,0 \cdot 10^7 \text{ s} = 2,22 \text{ rokov}$]
4. Z kobaltu ^{59}Co môžeme získať bombardovaním deuterónmi rádioaktívny kobalt ^{60}Co . Je to β -žiarič s polčasom rozpadu 5,3 rokov. Vypočítajte, koľko rádioaktívnych jadier sa nahromadí za čas 24 hodín, ak viete, že 10^4 rádioaktívnych jadier vznikne za každú sekundu.
[$8,638 \cdot 10^8$]
5. Vypočítajte, aké množstvo rádia $^{226}_{88}\text{Ra}$ je v rádioaktívnej rovnováhe s jedným gramom uránu $^{238}_{92}\text{U}$. Polčas rozpadu uránu je $4,4 \cdot 10^9$ rokov, polčas rozpadu rádia 1590 rokov. Rádioaktívna rovnováha znamená rovnosť počtu rozpadnutých atómov za jednotku času. Vypočítajte to isté pre rovnováhu množstva rádia $^{226}_{88}\text{Ra}$ a radónu $^{222}_{86}\text{Rn}$ s

- polčasom rozpadu 3,825 dní.
[$3,3 \cdot 10^{-6}$ g; $2,2 \cdot 10^{-12}$ g]
6. Polčas rozpadu umelo vyrobeného rádioaktívneho izotopu $^{45}_{20}\text{Ca}$ je 164 dní. Určte aktivitu 1 μg tohto izotopu.
[$6,546 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$]
 7. Rádioaktívny preparát má rozpadovú konštantu $1,44 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$. Za aký čas sa rozpadne 75 % z pôvodného počtu atómov?
[40 dní = $3,46 \cdot 10^6 \text{ s}$]
 8. Koľko atómov radónu sa rozpadne za 24 hodín z pôvodného počtu 10^6 atómov, keď polčas rozpadu je 3,82 dní?
[$1,66 \cdot 10^5$]
 9. Vypočítajte, koľko percent určitého množstva rádioaktívneho polónia s polčasom rozpadu 40 minút sa rozpadne za 5 minút.
[8,3 %]
 10. Určte polčas rozpadu rádioaktívnej látky, ak viete, že sa v priebehu 2 minút zmenší rozpadom jej množstvo o 20 %.
[371 s]
 11. Vypočítajte koľko α -častíc vyšle 1 g rádia za 1 s. Jeho polčas rozpadu je 1590 rokov a molárna hmotnosť 226,05 kg/kmol.
[$3,68 \cdot 10^{10}$]
 12. Vypočítajte, aká hrubá hliníková doska zníži intenzitu žiarenia kobaltového žiariča $^{60}_{27}\text{Co}$ na polovicu, keď absorpčný koeficient $\alpha = 0,153 \text{ cm}^{-1}$. Zmenšenie intenzity žiarenia dI na vzdialenosti dx v materiáli s absorpčným koeficientom α je $dI = -I\alpha dx$.
[4,53 cm]

DODATKY

NIEKTORÉ FYZIKÁLNE KONŠTANTY

Veličina	Značka	Hodnota *	Jednotka v sústave SI
Rýchlosť svetla vo vákuu	c	$2,99792458 \cdot 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Gravitačná konštanta	κ	$6,673 \cdot 10^{-11}$	$\text{N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$
Planckova konštanta	h	$6,62606876 \cdot 10^{-34}$	$\text{J} \cdot \text{s}$
Permitivita vákua	ε_0	$8,854187187 \cdot 10^{-12}$	$\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$
Permeabilita vákua	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} = 1,256637 \cdot 10^{-6}$	$\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$
Boltzmannova konštanta	k	$1,3806503 \cdot 10^{-23}$	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
Elementárny elektrický náboj	e	$1,602176462 \cdot 10^{-19}$	C
Kľudová hmotnosť elektrónu	m_e	$9,10938188 \cdot 10^{-31}$	kg
Kľudová hmotnosť protónu	m_p	$1,67262158 \cdot 10^{-27}$	kg
Kľudová hmotnosť neutrónu	m_n	$1,67492716 \cdot 10^{-27}$	kg
Atómová hmotnostná jednotka	u	$1,66053873 \cdot 10^{-27}$	kg
Avogadrova konštanta	N_A	$6,02214199 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Faradayova konštanta	F	$9,64853415 \cdot 10^4$	$\text{C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Molárna plynová konštanta	R	$8,314472$	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefanova-Boltzmanova konštanta	σ	$5,6704 \cdot 10^{-8}$	$\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Bohrov magnetón	μ_B	$9,27400899 \cdot 10^{-24}$	$\text{A} \cdot \text{m}^2$
Rydbergova konštanta	R	$1,097373 \cdot 10^7$	m^{-1}

* Hodnoty prevzaté z:

MOHR, P.J. – TAYLOR, B.N.: CODATA *Recommended Values of the Fundamental Physical Constants*: 1998. Reviews of Modern Physics, Vol. 72, No. 2, s. 351-495.

Gaithersburg, USA : National Institute of Standards and Technology (NIST), 2000.

ĎALŠIE KONŠTANTY A ÚDAJE K FYZIKÁLNYM VÝPOČTOM:

Veličina	Značka	Hodnota	Jednotka SI
Gravitačné zrýchlenie	g	$9,80665$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Polomer Zeme	R_Z	$6,378 \cdot 10^6$	m
Hmotnosť Zeme	M_Z	$5,98 \cdot 10^{24}$	kg
Vzdialenosť Zem – Mesiac		$3,844 \cdot 10^8$	m
Vzdialenosť Zem - Slnko		$1,49598 \cdot 10^{11}$	m
Rýchlosť zvuku vo vzduchu pri 20 °C		343	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Normálny atmosferický tlak	p_a	$1,01325 \cdot 10^5$	Pa
Termodynamická teplota pri 0 °C		$273,15$	K
Konštanta vo Wienovom zákone	b	$2,897756 \cdot 10^{-3}$	$\text{m} \cdot \text{K}$
Poissonova konštanta (jednoatómový ideálny plyn)	κ	$1,67$	
Poissonova konštanta (dvojitómový ideálny plyn)	κ	$1,4$	
Elektrónvolt	eV	$1,602176462 \cdot 10^{-19}$	J
Hmotnosť α - častice	m_α	$6,646 \cdot 10^{-27}$	kg
Konvenčná zraková vzdialenosť	l	$0,25$	m

HUSTOTA [kg·m⁻³]:

Látka	Hodnota
Hustota vzduchu pri 0 °C	1,2759
Dusík pri 0 °C	1,234
Oxid uhličitý	1,951
Vodík pri 0 °C	0,008895
Petrolej pri 20 °C	760 – 860
Hustota vody pri 20 °C	998
Hustota ortuti pri 20 °C	13 546
Mosadz	8,6.10 ³
Volfrám	19,3.10 ³
Oceľ	7,7.10 ³
Drevo	(0,5 – 0,8).10 ³
Meď	8,9.10 ³

ŠPECIFICKÁ TEPELNÁ KAPACITA [J·K⁻¹·kg⁻¹]:

Látka	Hodnota
Olovo	0,1.10 ³
Mosadz	0,4.10 ³
Platina	0,1339.10 ³
Ľad	2,1.10 ³
Voda	4,19.10 ³
Dusík	742
Vzduch	716
Vodík	10,13.10 ³

RELATÍVNA PERMITIVITA:

Látka	Hodnota
Vzduch	1,0006
Vodík	1,00026
Parafín	2
Porcelán	6
Sklo obyčajné	5 – 7

ABSOLÚTNY INDEX LOMU:

Látka	Hodnota
Voda	1,333
Vzduch	1,00029
Sklo flintové	1,61 – 1,75
Sklo korunové	1,52 – 1,62
Plexisklo	1,5

SPEKTRUM ELEKTROMAGNETICKÉHO ŽIARENIA:

Názov	Frekvencia	Vlnová dĺžka
Striedavé elektrické prúdy	16 – 10 ⁴	18 km – 30 km
Rádiové vlny	10 ⁴ – 10 ¹³	30 km – 0,03 mm
Dlhé vlny	1,5.10 ⁵ – 3.10 ⁵	2000 m – 1000 m
Stredné vlny	0,5.10 ⁶ – 2.10 ⁶	600 m – 150 m
Krátke vlny	0,6.10 ⁷ – 2.10 ⁷	50 m – 15 m
Veľmi krátke vlny	0,2.10 ⁸ – 3.10 ⁸	15 m – 1 m
Mikrovlny	3.10 ⁸ – 10 ¹³	1 m – 0,3 mm
Optické žiarenie	10 ¹² – 3.10 ¹⁶	0,3 mm – 10 nm
Infračervené žiarenie	10 ¹² – 3,8.10 ¹⁴	0,3 mm – 790 nm
Viditeľné žiarenie	3,8.10 ¹⁴ – 7,7.10 ¹⁴	790 nm – 390 nm
Stredná červená	4,6.10 ¹⁴	650 nm
Stredná oranžová	5.10 ¹⁴	600 nm
Stredná žltá	5,2.10 ¹⁴	580 nm
Stredná zelená	5,75.10 ¹⁴	525 nm
Stredná modrá	6,7.10 ¹⁴	450 nm
Stredná fialová	7,5.10 ¹⁴	400 nm
Ultrafialové žiarenie	7,7.10 ¹⁴ – 3.10 ¹⁶	390 nm – 10 nm
Röntgenové žiarenie	3.10 ¹⁶ – 3.10 ²⁰	10 nm – 1 pm
Žiarenie gama	>10 ¹⁸	< 300 pm

GRÉCKA ABECEDA:

Názov	Značka				Názov	Značka			
	stojaté		kurzíva			stojaté		kurzíva	
alfa	α	A	α	$\mathcal{A}$	ní	ν	N	ν	$\mathcal{N}$
beta	β	B	β	$\mathcal{B}$	ksí	ξ	Ξ	ξ	$\mathcal{X}$
gamma	γ	Γ	γ	$\mathcal{G}$	omikron	$\omicron$	O	$\omicron$	$\mathcal{O}$
delta	δ	Δ	δ	$\mathcal{A}$	pí	π	Π	π	$\mathcal{P}$
epsilon	ε	E	ε	$\mathcal{E}$	ró	ρ	P	ρ	$\mathcal{P}$
dzéta	ζ	Z	ζ	$\mathcal{Z}$	sigma	σ	Σ	σ	$\mathcal{S}$
éta	η	H	η	$\mathcal{H}$	tau	τ	T	τ	$\mathcal{T}$
théta	ϑ	Θ	ϑ	$\mathcal{\Theta}$	ypsilon	υ	Y	υ	$\mathcal{Y}$
jota	ι	I	ι	$\mathcal{I}$	fi	φ	Φ	φ	$\mathcal{\Phi}$
kappa	κ	K	κ	$\mathcal{K}$	chí	χ	X	χ	$\mathcal{X}$
lambda	λ	Λ	λ	$\mathcal{A}$	psí	ψ	Ψ	ψ	$\mathcal{\Psi}$
mí	μ	M	μ	$\mathcal{M}$	omega	ω	Ω	ω	$\mathcal{\Omega}$

NÁSOBKY A DIELY JEDNOTIEK:

Predpona		Násobky	Predpona		Diely
Názov	Značka		Názov	Značka	
yotta	Y	10^{24}	deci	d	10^{-1}
zetta	Z	10^{21}	centi	c	10^{-2}
exa	E	10^{18}	mili	m	10^{-3}
peta	P	10^{15}	mikro	μ	10^{-6}
tera	T	10^{12}	nano	n	10^{-9}
giga	G	10^9	piko	p	10^{-12}
mega	M	10^6	femto	f	10^{-15}
kilo	k	10^3	atto	a	10^{-18}
hekto	h	10^2	zepto	z	10^{-21}
deka	da	10^1	yokto	y	10^{-24}

GONIOMETRICKÉ FUNKCIE PRE NIEKTORÉ UHLY:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °	180 °	270 °	360 °
$\sin\alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\operatorname{cotg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	∞	0	∞

LITERATÚRA

1. KREMPASKÝ, J.: *Fyzika*. 3. vyd. Bratislava : ALFA, 1992. 504 s. ISBN 80-05-01063-X
2. HAJKO, V.: *Fyzika v príkladoch*. 4. vyd. Bratislava : ALFA, 1971. 480 s.
3. KREMPASKÝ, J., et al.: *Fyzika : Príklady a úlohy*. 1. vyd. Bratislava : FEI STU, 1994. 262 s.
4. ZEMAN, V., et al.: *Sbírka řešených úloh z fyziky pro pedagogické fakulty*. 1. vyd. Praha : SPN, 1971. 357 s.
5. SYROVÝ, A.: *Sbírka příkladů z fyziky*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1971. 476 s.
6. WILFERT, O. – JANDOVÁ, I.: *Cvičení z fyziky*. 1. vyd. Liptovský Mikuláš : VVTŠ, 1978. 138 s.
7. BANÍK, I., et al.: *Fyzika : Zbierka úloh 1*. 2. vyd. Bratislava : SF STU, 1996. 224 s. ISBN 80-227-0821-6
8. VAGNER, J.: *Příklady z fyziky*. 2. vyd. Liberec : VŠST, 1988. 144 s.
9. HANZELÍK, F., et al.: *Zbierka riešených úloh z fyziky*. 1. vyd. Bratislava : ALFA, 1989. 480 s. ISBN 80-05-00050-2
10. FUKA, J. – HAVELKA, B.: *Elektřina a magnetismus*. 3. vyd. Praha : SPN, 1979. 656 s.
11. BEISER, A.: *Úvod do moderní fyziky*. 1. vyd. Praha : ACADEMIA, 1978. 632 s.
12. TIRPÁK, A.: *Elektřina a magnetizmus : Úlohy k cvičeniam*. 1. vyd. Bratislava : MFF UK, 1993. 352 s. ISBN 80-223-0733-5
13. PIŠÚT, J. – ČERNÝ, V. – PREŠNAJDER, P.: *Zbierka úloh z kvantovej mechaniky*. 1. vyd. Bratislava : ALFA, 1985. 368 s.
14. GARAJ, J.: *Základy vektorového počtu*. 2. vyd. Bratislava : Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1963. 216 s.
15. BROŽ, J. – ROSKOVEC, V. – VALOUCH, M.: *Fyzikální a matematické tabulky*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1980. 308 s.

Názov: Fyzika v príkladoch

Autori: RNDr. Alena Kučerová
RNDr. Jarmila Müllerová, CSc.

Vydal: Vojenská akadémia v Liptovskom Mikuláši

Náklad: 100

Počet strán: 166

Vydanie: prvé

Formát: A4

Rok vydania: 2002

ISBN 80-8040-183-7