

ELEKTŘINA A MAGNETISMUS – ZAJÍMAVÉ PROBLÉMY

Petr Kulhánek

KONDENZÁTOR - ENERGIE, SÍLA NA DESKY

Energie kondenzátoru

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{kapacita kondenzátoru}$$

Při dodání náboje se energie zvýší o:

$$dW = U dQ = \frac{Q dQ}{C} \quad \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

Síla působící na desky

Posuňme desku o zobecněnou souřadnici Δq , změna energie bude $\Delta W = F \Delta q$ a odpovídající síla

$$F = \frac{\partial W}{\partial q} = \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{C} \right)$$

Deskový kondenzátor:

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad \Rightarrow$$

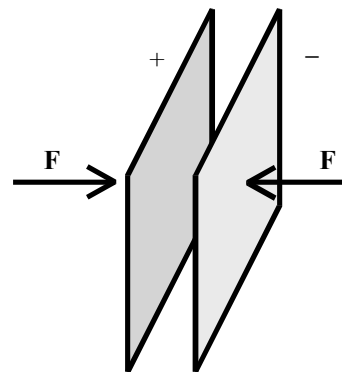
$$F = \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{d}{\epsilon S} \right) = \frac{Q^2}{2 \epsilon S}$$

Otočný kondenzátor:

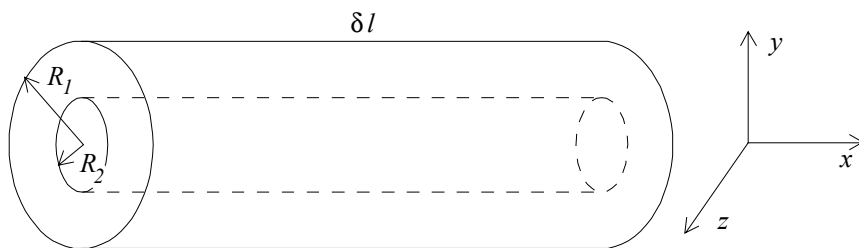
Totéž, jen nahradíme

$$q \rightarrow \varphi$$

$$F \rightarrow M_F$$



KOAXIÁLNÍ VEDENÍ



Kapacita: Jako válcový kondenzátor $\delta C = \frac{2\pi\epsilon_0\delta l}{\ln R_2/R_1}$. Odsud plyne délková hustota kapacity

$$\mathcal{C} \equiv \frac{\delta C}{\delta l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln R_2/R_1}$$

Indukčnost: Energie vázaná na indukčnost je energie magnetického pole:

$$\frac{1}{2}\delta L I^2 = \int \frac{B(r)^2}{2\mu_0} dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{(\mu_0 I / 2\pi r)^2}{2\mu_0} 2\pi r \delta l dr \Rightarrow \delta L = \frac{\mu_0}{2\pi} \delta l \ln \frac{R_2}{R_1}. \text{ Proto}$$

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\delta L}{\delta l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Úbytek napětí podél vedení: je způsoben úbytkem napětí na indukčnosti vedení $\delta U = -\delta L \frac{dI}{dt} \Rightarrow$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\mathcal{L} \frac{\partial I}{\partial t} \quad (1).$$

Úbytek proudu podél vedení: je způsoben nábojem vázaným na kapacitu vedení. $\delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{\delta C \Delta U}{\Delta t};$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\mathcal{C} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2).$$

Rovnice (1) a (2) jsou základní přenosové rovnice.

Rychlost šíření: Kombinací (1) a (2) máme:

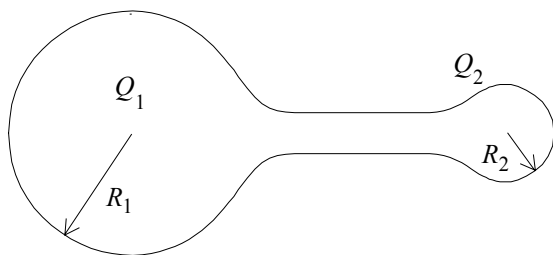
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathcal{L}\mathcal{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c \quad !!$$

Impedance vedení: (1), (2) \Rightarrow

$$\left. \begin{aligned} ikU &= -\mathcal{L} i\omega I \\ ikI &= -\mathcal{C} i\omega U \end{aligned} \right\} \Rightarrow U = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} I \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} = \frac{\ln R_2/R_1}{2\pi\epsilon_0 c} = 120\Omega \ln \frac{R_2}{R_1}$$

URČOVÁNÍ POLÍ

Pole hrotu



Jde o vodič, vše je spojené \Rightarrow vše je na stejném potenciálu:

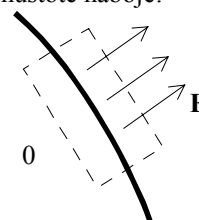
$$\phi_1 \approx \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}; \quad \phi_2 \approx \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

$$\boxed{\phi_1 = \phi_2} \Rightarrow \boxed{\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}} \quad (1)$$

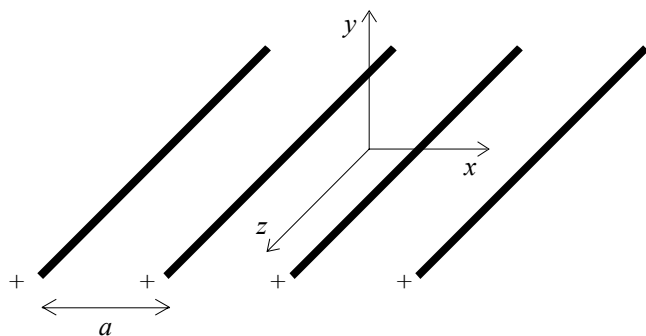
Elektrické pole je úměrné plošné hustotě náboje:

$$E \sim \sigma \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1/R_1^2}{Q_2/R_2^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \boxed{E \sim \frac{1}{R}}$$

$$\boxed{E \sim \frac{1}{R}}$$



Sít' z drátů



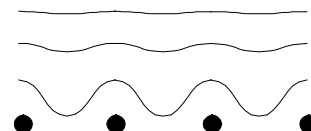
Celé pole bude součtem jednotlivých Fourierových komponent:

$$\phi_n(x, y) = F_n(y) \cos \frac{2\pi n x}{a}$$

Dosažením do Laplaceovy rovnice získáme diferenciální rovnici pro Fourierovy koeficienty F_n . Její řešení je:

$$F_n(y) = \begin{cases} A_0 y, & n = 0 \\ A_n \exp[-2\pi n y/a], & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Všechny harmonické řešení pro $n > 1$ jsou již ve vzdálenosti několika a silně utlumeny. Nejpomaleji klesá základní mod s $n = 1$. Pro $y > a$ se pole chová s dosti dobrou přesností jako homogenní s $n = 0$. Jediná složka je $\phi_0 = A_0 y = -E_0 y$. Sít' z drátů stíní stejně dobře jako kovová rovina.



2D pole - komplexní proměnná

$$f(z): \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy \rightarrow U(x, y) + iV(x, y)$$

Derivace podle $z = x + iy$ nesmí záviset na cestě, proto

$$\frac{\partial}{\partial x}(U + iV) \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial iy}(U + iV) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}} \Rightarrow \boxed{\Delta U = 0, \quad \Delta V = 0}$$

Jde o CR podmínky, ze kterých je snadné dokázat, že **reálná i imaginární část libovolné funkce komplexní proměnné splňují Laplaceovu rovnici.**

- $U(x, y) = \text{const.}$ mohou tedy představovat **ekvipotenciály** reálného systému. Z CR plyne, že $V(x, y) = \text{const.}$ jsou křivky kolmé k $U(x, y) = \text{const.}$, tj. **silokřivky elektrického pole!**

$$U = \text{const. ekvipotenciály} \Rightarrow V = \text{const. silokřivky}$$

$$V = \text{const. ekvipotenciály} \Rightarrow U = \text{const. silokřivky}$$

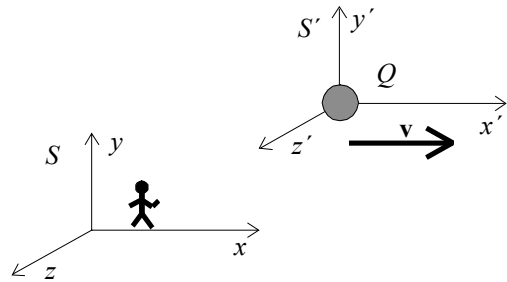
- Je-li na kterékoli ekvipotenciále kovový nabitý vodič, odpovídají ostatní ekvipotenciály a silokřivky skutečným ekvipotenciálám a silokřivkám kolem vodiče.

Heavisideovo pole (letící náboj); $c=1$

$$S': \quad \mathbf{E}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{\mathbf{r}'}{r'}, \quad \phi' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

$$\mathbf{B}' = 0 \quad \mathbf{A}' = 0$$

$$S: \quad \begin{pmatrix} \phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi' \\ A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

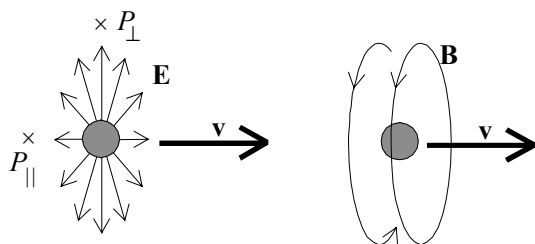


$$\phi = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\gamma^2 (x-vt)^2 + y^2 + z^2}}; \quad \mathbf{A} = \left(\frac{\gamma\beta Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\gamma^2 (x-vt)^2 + y^2 + z^2}}; 0; 0 \right)$$

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\gamma^2 (x-vt)^2 + y^2 + z^2}} (x-vt; y; z); \quad \mathbf{B} \equiv \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

$$E_{\perp} = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \Big|_{x=vt} = \gamma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2)}$$

$$E_{\parallel} = E_x \Big|_{y=0} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x-vt)^2}$$



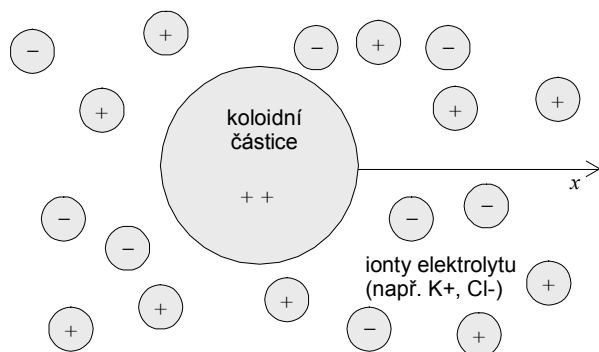
Koloidní částice v elektrolytu - Debyeův poloměr

Původní koncentrace iontů byla n_0 . Přítomnost koloidní částice ovlivní hustotu náboje iontů a tím výsledný potenciál pole v okolí koloidní částice:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_+ + \rho_-}{\epsilon_0} =$$

$$= -\frac{|Q_i| n_0}{\epsilon_0} \left(e^{-|Q_i|\phi(x)/kT} - e^{|Q_i|\phi(x)/kT} \right) \cong$$

$$\cong -\frac{|Q_i| n_0}{\epsilon_0} \left[\left(1 - \frac{|Q_i|\phi}{kT} \right) - \left(1 + \frac{|Q_i|\phi}{kT} \right) \right] \Rightarrow$$



$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{2n_0 Q_i^2}{kT} \phi \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = A \exp[-x/\lambda_D]; \quad \lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2n_0 Q_i^2}}$$

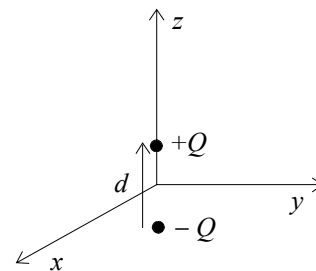
- $A = ?$: Při povrchu koloidní částice ($x \rightarrow 0$) platí $E = -\nabla\phi = \sigma/\epsilon_0 \Rightarrow A = \sigma\lambda_D/\epsilon_0$
- λ_D Debyeův poloměr. Ionty odstiňují koloidní částici od okolí i od ostatních částic. Přidání soli do roztoku \Rightarrow zmenšení $\lambda_D \Rightarrow$ koloidní částice lépe stíněny \Rightarrow mohou se srazit \Rightarrow vysrážení koloidu.

ELEKTRICKÝ DIPÓL

Potenciál dvojice nábojů

Pole budeme určovat daleko od zdrojů, tj. $r \gg d, r_a$

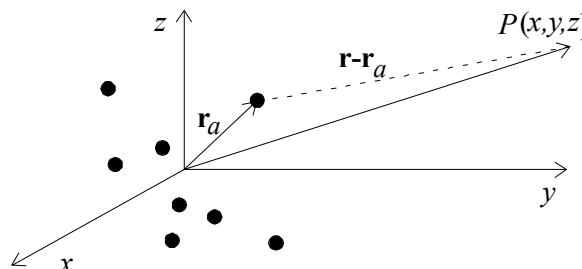
$$\begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left[(z-d/2)^2 + x^2 + y^2 \right]} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left[(z+d/2)^2 + x^2 + y^2 \right]} \approx \\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[(r^2 - zd)^{-1/2} - (r^2 + zd)^{-1/2} \right] \approx \\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right) \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} zd = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} ; \quad \mathbf{p} \equiv Q\mathbf{d} \quad . \quad \text{Dipólový moment označujeme } \mathbf{p}.$$

Potenciál lokalizované soustavy nábojů

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_a \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)^2}} \approx \\ &\approx \sum_a \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \left[(r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a)^{-1/2} - (r^2 + zd)^{-1/2} \right] \approx \\ &\approx \sum_a \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a}{r^2} + \dots \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\sum_a Q_a \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\sum_a Q_a \mathbf{r}_a \right) \cdot \mathbf{r} \Rightarrow \end{aligned}$$



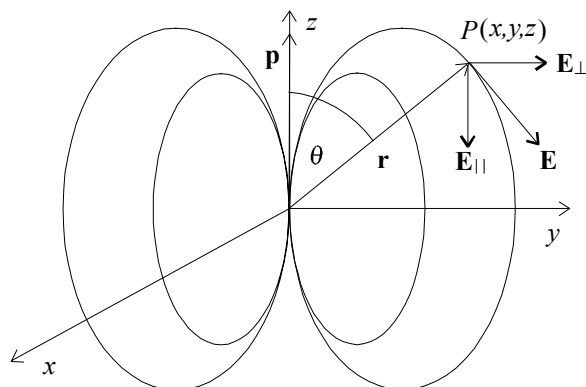
$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots ; \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} Q &\equiv \sum_a Q_a \\ \mathbf{p} &\equiv \sum_a Q_a \mathbf{r}_a \end{aligned}$$

Zápis pomocí gradientu

$$\phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{1}{r}$$

Elektrické pole dipólu



$$\phi = \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right)$$

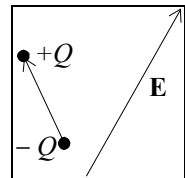
resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_{\perp}, E_{\parallel}) = \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos \theta \sin \theta, 3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

Moment síly působící na dipól ve vnějším poli

$$M_F = \mathbf{r}_+ \times Q\mathbf{E} - \mathbf{r}_- \times Q\mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{M_F = \mathbf{p} \times \mathbf{E}}$$



Energie dipólu ve vnějším poli

$$W = Q\phi(\mathbf{r}_+) - Q\phi(\mathbf{r}_-) \approx Q\mathbf{d} \cdot \nabla\phi = -Q\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}$$

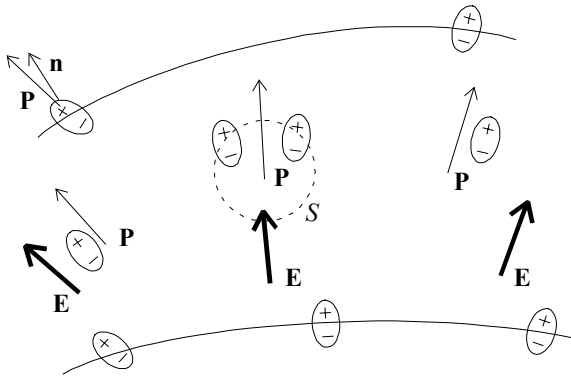
Vektor polarizace

$$\boxed{\mathbf{P} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_a \mathbf{p}_a}$$

hustota dipólového momentu

DIELEKTRIKA - VEKTOR POLARIZACE

Definice



Vektor polarizace definujeme jako hustotu elektrického dipólového momentu:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = q n \mathbf{d}$$

\mathbf{d} je vektor posunutí.

Plošný náboj na povrchu dielektrika

Je-li dielektrikum polarizováno, objeví se na povrchu plošný náboj, jehož velikost je zřejmá z definice \mathbf{P} :

$$\sigma_{pol} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

Hustota polarizačního náboje

Je-li vektor \mathbf{P} nehomogenní, může posunutím uniknout lokálně z malé uzavřené plochy polarizační náboj. V oblasti vzniká lokální prostorový vázaný náboj:

$$-\Delta Q = \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad -\int_V \rho_{pol} dV = \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow$$

$$\rho_{pol} = -\text{div} \mathbf{P}$$

Polarizační proudová hustota

Mění-li se vektor polarizace s časem, dochází ke vzniku polarizačního proudu:

$$\mathbf{j}_{pol} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Lineární prostředí

Při působení slabých polí je vektor polarizace úměrný elektrickému poli:

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E} = \epsilon_0 n \alpha_0 \mathbf{E}$$

α - polarizovatelnost, κ - susceptibilita, α_0 - polarizovatelnost atomu.

Kondenzátor

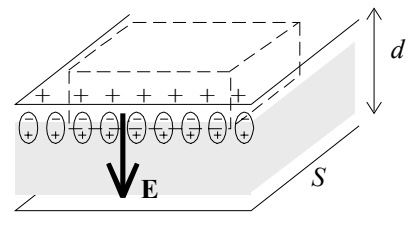
Pole mezi deskami určíme z Gaussovy věty integrací přes naznačenou plochu:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{free} - \sigma_{pol}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{free} - P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{free} - \epsilon_0 \kappa E}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\sigma_{free}}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + \kappa} = \frac{\sigma_{free}}{\epsilon}$$

$$U = E d = \frac{\sigma_{free} d}{\epsilon} = \frac{Q d}{S \epsilon}$$

$$C \equiv \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon S}{d}$$



Pole v dutině

- Dutina podél pole:

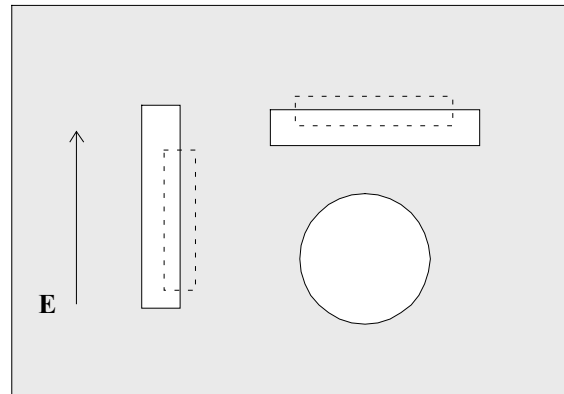
$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{dutiny}} = E$$

- Dutina napříč pole:

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho_{\text{pol}} / \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{dutiny}} = E + \frac{P}{\epsilon_0}$$

- Kulová dutina:

podobným výpočtem $E_{\text{dutiny}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$



V dutině podél pole je pole stejné jako průměrné pole v dielektriku. V dutině napříč pole je pole větší než průměrné pole v dielektriku. Tečná složka pole \mathbf{E} je na hranici spojitá, normálová složka má skok.

DIELEKTRIKA - TENZOR POLARIZOVATELNOSTI (SUSCEPTIBILITY)

Definice

Elektrické pole přiložené k materiálu způsobí posunutí nábojů a vznik elementárních dipólů. Předpokládáme, že vektor polarizace P (hustota dipólového momentu) je lineárně závislý na přiloženém elektrickém poli E :

$$P_i = \alpha_{ik} E_k = \varepsilon_0 \kappa_{ik} E_k$$

Veličina α se nazývá polarizovatelnost. Někdy se používá elektrická susceptibilita $\kappa \equiv \alpha/\varepsilon_0$. Jde o symetrický tenzor druhého řádu. Vlastní směry symetrických tenzorů jsou navzájem kolmé a tvoří souřadnicový systém, ve kterém je tenzor diagonální (s vlastními čísly na diagonále).

Poznámka: Někdy se také používá atomová (molekulová) polarizovatelnost α_0 definovaná vztahem $\kappa = n \alpha_0$, pro polarizaci je pak možné psát jeden z následujících výrazů: $P = \alpha E = \varepsilon_0 \kappa E = \varepsilon_0 n \alpha_0 E$

Elipsoid energie

Objemová hustota energie se posunutím nábojů ve vnějším elektrickém poli změní o

$$du = \sum \mathbf{f}_a d\mathbf{x}_a = \sum n_a q_a \mathbf{E} d\mathbf{x}_a = \mathbf{E} d\mathbf{P}.$$

Je-li vektor polarizace lineárně závislý na elektrickém poli můžeme výraz integrovat:

$$du = \mathbf{E} d\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2} \alpha_{ik} E_i E_k.$$

Jde o kvadratickou pozitivně definitní formu. Graf $u = \text{const}$ představuje graf koncových bodů vektoru pole \mathbf{E} v osách (E_x, E_y, E_z) , které způsobí stejnou polarizační energii materiálu. Grafem je rotační elipsoid s osami ve vlastních směrech tenzoru polarizovatelnosti.

DIELEKTRIKA - STATICKÁ POLARIZACE

Nepolární plyn

Atomy nemají vlastní dipólový moment. Vlivem vnějšího elektrického pole dochází k posunu elektronů v atomu plynu → vzniká dipólový moment.

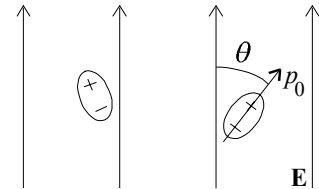
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE}{m_e} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{eE}{m_e \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad p = ex = \frac{e^2 E}{m_e \omega_0^2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{P = nex = \frac{ne^2 E}{m_e \omega_0^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\kappa = \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}, \quad \boxed{\epsilon = \epsilon_0 (1 + \kappa) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)}.$$

Úhlová frekvence ω_0 odpovídá tuhosti atomárního oscilátoru. V prvním přiblížení lze tuto frekvenci určit z ionizační energie atomu podle vztahu $W_{ion} = \hbar \omega$.

Polární plyn

Molekuly plynu mají vlastní dipólový moment p_0 . Ten se ve vnějším poli bude orientovat. Elektronová polarizace bude zanedbatelná. Rozdělení počtu dipólů orientovaných ve směru θ je dáno statisticky. Konstantu rozdělení lze snadno určit integrací rozdělení přes celý prostorový úhel.



$$n(\theta) = K \exp\left[\frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}}{kT}\right] \quad ; \quad \int n(\theta) d\Omega = n \quad \Rightarrow \quad K = \frac{n}{4\pi}$$

$$n(\theta) = \frac{n}{4\pi} \exp\left[\frac{p_0 E \cos\theta}{kT}\right]$$

Vektor polarizace bude

$$P = \langle P_{\parallel} \rangle = \int n(\theta) p_0 \cos\theta d\Omega \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{P = \frac{np_0^2 E}{3kT}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\kappa = \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 kT}}, \quad \boxed{\epsilon = \epsilon_0 (1 + \kappa) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 kT}\right)}.$$

Vztah pro permitivitu se nazývá Curieův zákon.

DIELEKTRIKA - DYNAMICKÁ POLARIZACE

Normální dielektrika

Elektrony v látce reagují na elektrickou komponentu elektromagnetické vlny a pohybují se podle rovnice

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m_e} e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{eE_0}{m_e(\omega_0^2 - 2i\delta\omega - \omega^2)} e^{-i\omega t}$$

Vlastní frekvence určuje vratnou harmonickou sílu vázaných elektronů, koeficient útlumu souvisí s tlumením pohybu elektronů zářivými procesy, srážkami, atd. Nyní snadno určíme vektor polarizace daný posunutím x :

$$P = en_e x = \frac{n_e e^2}{m_e(\omega_0^2 - 2i\delta\omega - \omega^2)} E = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - 2i\delta\omega - \omega^2} E; \quad \text{kde} \quad \omega_p^2 \equiv \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}$$

je kvadrát **plazmové frekvence**. Susceptibilitu určíme ze vztahu $P = \epsilon_0 \kappa E$

$$\kappa \equiv \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - 2i\delta\omega - \omega^2}$$

resp.

$$\kappa \equiv \omega_p^2 \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - 2i\delta_k \omega - \omega^2},$$

má-li vázaný elektron více vlastních frekvencí $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$. Čísla f_k se nazývají vazbové konstanty a jsou blízké jedné. Nyní snadno určíme dynamickou permitivitu $\epsilon = \epsilon_0(1 + \kappa)$ a z ní kvadrát indexu lomu N :

$$N^2 = \frac{c^2}{v_f^2} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \kappa \quad \Rightarrow$$

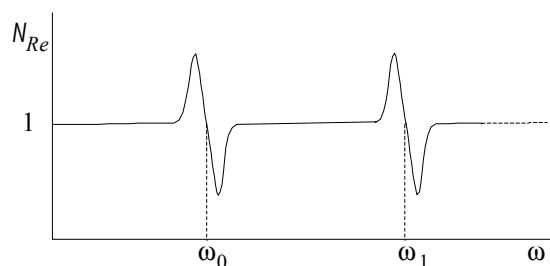
$$N^2 = 1 + \omega_p^2 \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - 2i\delta_k \omega - \omega^2}$$

Vzhledem k tomu, že $N = c/v_f = ck/\omega$, není výraz pro index lomu nic jiného než **disperzní** relace elektromagnetické vlny v daném prostředí.

Opticky řídké látky (plyny, sklo)

V opticky řídkých látkách se index lomu příliš neliší od jedné a výraz pro index lomu lze s přesností do prvního řádu odmocnit.

$$N = 1 + \frac{1}{2} \omega_p^2 \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - 2i\delta_k \omega - \omega^2}$$



- Pro běžné plyny je první vlastní frekvence z oblasti UV záření. Proto velikost indexu lomu i reálná část rostou v optické oblasti směrem k modrému konci spektra. **Modrá barva se láme více než červená.** Proto je obloha ve dne modrá.
- Imaginární část indexu lomu je velmi malá s výjimkou oblasti rezonance. Tam je index lomu komplexní a **dochází k absorpci vlny.**
- Pro RTG záření je $\omega \gg \omega_0$ a $N \approx 1 - \omega_p^2 / 2\omega^2$. **Fázová rychlost šíření RTG elektromagnetické vlny je větší než c .**

Opticky husté látky

V opticky hustých látkách působí na elementární dipóly nejen pole původní elektromagnetické vlny, ale i pole vyzářené ostatními náboji. Konkrétní náboj si můžeme představit jako vložený do kulové dutiny v dielektriku. V této dutině působí pole $E_0 = E + P/3\epsilon_0$. Indukovaný dipólový moment potom bude

$$P = \epsilon_0 \kappa E_0 = \epsilon_0 \kappa (E + P/3\epsilon_0) \quad \Rightarrow \quad P = \epsilon_0 \frac{\kappa}{1 - \kappa/3} E \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\kappa}{1 - \kappa/3} \right)$$

Odpovídající kvadrát indexu lomu je

$$N^2 = 1 + \frac{\kappa}{1 - \kappa/3}$$

resp.

$$3 \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} = \kappa$$

resp.

$$3 \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} = \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha}$$

Toto je **Clausiova-Mosottiho rovnice**. Poslední tvar platí pro směs více látek. Sama susceptibilita látky je součinem koncentrace a atomové (molekulární) polarizovatelnosti. Koncentrace látky je "schována" v plazmové frekvenci.

Kovy

U kovů jsou dominantní volné vodivostní elektrony, všechny vlastní frekvence jsou proto nulové:

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{2i\delta\omega + \omega^2}; \quad \sigma_e = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_e} \Rightarrow \nu_e = 2\delta = \frac{m_e \sigma_e}{n_e e^2}$$

Ze vztahu pro elektronovou vodivost určíme srážkovou frekvenci elektronů v kovu, která je rovna koeficientu útlumu 2δ v pohybové rovnici. Útlum dosadíme do vztahu pro index lomu:

$$N^2 = 1 - \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \frac{1}{i\omega + \frac{\omega_p^2 \sigma_e}{\omega^2 \epsilon_0}}$$

Nízké frekvence ($\omega \ll \sigma_e/\epsilon_0$): Pro měď jde o frekvence podstatně nižší než $6 \times 10^{18} \text{ s}^{-1}$ a vlnové délky elektromagnetického záření větší než 0.3 mm. Ze vztahu pro index lomu v nízkofrekvenční limitě zbudě

$$N^2 \approx 1 + \frac{i\sigma_e}{\epsilon_0 \omega} \approx \frac{i\sigma_e}{\epsilon_0 \omega} \Rightarrow$$

$$N = (1 + i) \sqrt{\frac{\sigma_e}{2\epsilon_0 \omega}}$$

Reálná a imaginární část indexu lomu jsou stejně veliké, dochází k silné absorpci, elmg. vlna neprochází.

$$\exp(ikx) = \exp(i\omega N x/c) = \exp(-x/d) \exp(i\omega N_{\text{Re}} x/c);$$

$$d \equiv \sqrt{\frac{2}{\sigma_e \mu_0 \omega}}$$

Veličinu d nazýváme **skinová hloubka**.

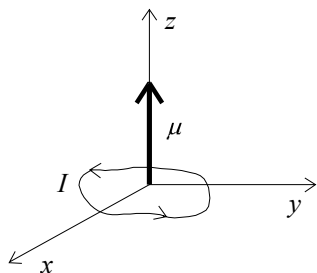
Vysoké frekvence ($\omega \gg \sigma_e/\epsilon_0$): Ze vztahu pro index lomu ve vysokofrekvenční limitě zbudě

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Pro $\omega < \omega_p$ je index lomu po odmocnění komplexní a dochází k útlumu vlny, vlnění neprochází. Pro $\omega > \omega_p$ je index lomu reálný a kov je pro elektromagnetické záření průhledný. Některé kovy jsou průhledné již pro UV obor, jiné až pro RTG obor záření.

MAGNETICKÝ DIPÓL

Definice



Jakákoli malá smyčka protékající proudem. Magnetický dipólový moment je definován vztahem

$$\mu \equiv IS$$

. Dipólový moment soustavy částic můžeme také definovat pomocí poloh a rychlostí jednotlivých nabitých částic:

$$\mu \equiv \frac{1}{2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a$$

. Pro náboj rotující po kružnici je to zřejmé:

$$\mu = IS = \frac{Q}{T} \pi r^2 = \frac{Q}{2\pi r/v} \pi r^2 = \frac{1}{2} Qrv$$

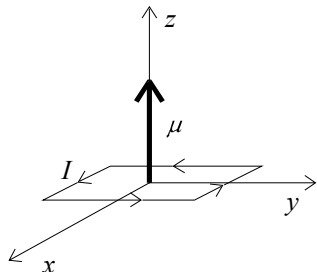
Je vidět, že dipólový moment částice souvisí s orbitálním momentem hybnosti vztahem $\mu = (Q/2m) \mathbf{L}$. Pro spinový moment elektronu je výsledek dvojnásobný. Důležitý je vztah magnetického momentu a celkového momentu hybnosti systému \mathbf{J} .

$$\mu = g \frac{|e| \hbar}{m} \mathbf{J}$$

$g = -2$	elektron
$g = +5.68$	proton
$g = -3.86$	neutron

Do Landého faktoru g zahrneme i znaménko náboje částice. Magnetický moment elektronu je orientován opačně než jeho moment hybnosti, protonu souhlasně. To souvisí s náboji těchto částic. Neutron je navenek neutrální částice složená ze tří kvarků. Ty jsou nabitě, celkový magnetický moment neutronu je proto nenulový. Pro celý atom je Landého faktor určen orbitálními a spinovými momenty elektronů a proto je $g \in \langle -1, -2 \rangle$. Magnetický moment atomových jader je naopak převážně určen orbitálními a spinovými momenty protonů. Za hmotnost je třeba v posledním vztahu dosadit hmotnost protonu.

Potenciál dipólu



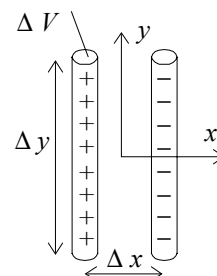
Pro odvození stačí obdélníková smyčka

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

Situace je stejná jako v elektrostatice se záměnou:

$$A_x \leftrightarrow \phi; \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}; \quad j_x \leftrightarrow \rho$$

Tomu ale odpovídá elektrický dipól tvaru na obrázku vpravo nahoře.



$$\phi = \frac{Q \Delta x}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{y}{r^3} \right) = -\frac{\rho \Delta V \Delta x}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{y}{r^3} \right) \Rightarrow$$

$$A_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \Delta y \Delta x \frac{y}{r^3}. \quad \text{Analogicky určíme } A_y. \text{ Máme tedy:}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu \left(-\frac{y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0 \right). \quad \text{Vektorově můžeme psát}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu \times \mathbf{r}}{r^3}$$

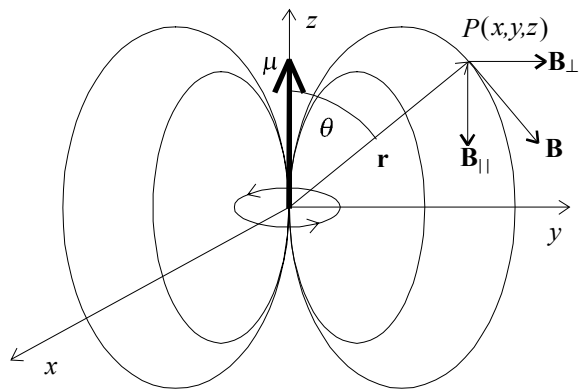
Magnetické pole dipólu

magnetické pole dipólu určíme ze vztahu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Pole má stejnou strukturu jako pole elektrického dipólu.

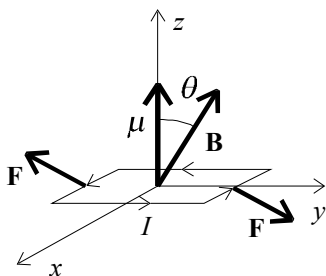
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu \left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right)$$

resp.

$$\mathbf{B} = (B_{\perp}, B_{\parallel}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu (3 \cos \theta \sin \theta, 3 \cos^2 \theta - 1)$$



Moment síly působící na dipól ve vnějším poli



$$M_x = F \Delta y \sin \theta = I \Delta x \Delta y B \sin \theta = \mu B \sin \theta \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}_F = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Energie dipólu ve vnějším poli

$$dW = -M_F d\theta = -\mu B \sin \theta d\theta \Rightarrow$$

$$W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

Tento vztah můžeme pomocí celkového spinu přepsat do kvantové podoby:

$$W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -g \frac{|e|\hbar}{2m} \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} = -g \frac{|e|\hbar}{2m} j_z B \Rightarrow$$

$$W = -g \mu_B j_z B$$

Veličina μ_B se nazývá Bohrov magneton. Energie je kvantována pomocí celkového magnetického spinového čísla $j_z = -j \dots j$. Původní energie se v magnetickém poli bude štěpit na $2j+1$ ekvidistantních podhladin.

Vektor magnetizace

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_a \boldsymbol{\mu}_a$$

hustota magnetického dipólového momentu

MAGNETIKA - VEKTOR MAGNETIZACE

Definice

Vektor magnetizace definujeme jako hustotu magnetického dipólového momentu:

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_a \boldsymbol{\mu}_a$$

Plošná hustota proudu na povrchu magnetika

$\mathbf{i} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$. Vektor normály k povrchu je označen \mathbf{n} , \mathbf{i} má jednotku A/m.

Magnetizační proud

Je-li magnetizace nehomogenní, nevyruší se proudy od elementárních dipólů a lokálně tečou magnetizační proudy

$$\mathbf{j}_{mag} = \text{rot } \mathbf{M}$$

Pole v dutině

- Dutina podél pole:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{vod} \Rightarrow$$

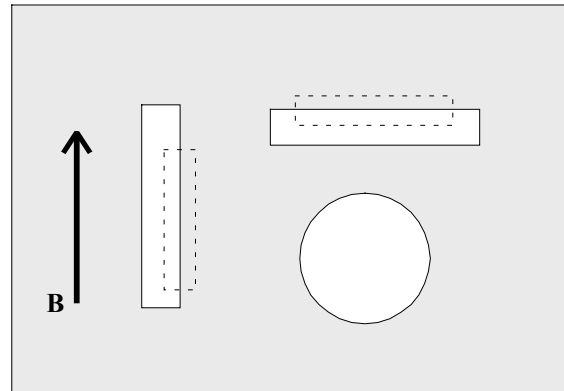
$$\begin{aligned} H_{dutiny} &= H \\ B_{dutiny} &= B - \mu_0 M \end{aligned}$$

- Dutina napříč pole:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \Rightarrow B_{dutiny} = B$$

- Kulová dutina:

podobným výpočtem $B_{dutiny} = B - \frac{2}{3} \mu_0 M$



V dutině napříč pole je pole stejné jako průměrné pole v dielektriku. V dutině podél pole je pole menší než průměrné pole v dielektriku.

MAGNETIKA - VLASTNOSTI

Diamagnetika

Diamagnetismus pozorujeme u atomů, jejichž elektrony v obalech jsou všechny spárovány a nevykazují žádný celkový magnetický moment. Jde o obdobu *nepolárních látek* v elektrostatice. Diamagnetismus nezávisí na teplotě látky nebo je závislost na teplotě nepatrná. Diamagnetismus se objevuje u všech látek, tedy i u paramagnetik a feromagnetik. Zde je ale vzhledem k ostatní magnetické aktivitě zanedbatelný.

Klasický popis: Elektron opisuje v atomárním obalu kruhovou dráhu. Při změně vnějšího magnetického pole dojde ke změně indukčního toku plochou dráhy \Rightarrow podél dráhy je generováno elektrické pole \Rightarrow elektrická síla Qe změní moment hybnosti elektronu \Rightarrow změní se magnetický moment. Výsledný magnetický moment působí proti změně, která ho vyvolala (Lenzovo pravidlo). Na látku bude působit síla vytlačující ji z oblastí silnějších polí.

Kvantový popis: V elektronovém obalu atomu je podstatnější spinový moment než orbitální. Celkový magnetický moment a jeho změny tedy souvisí více se spinem než s klasickou představou obíhajícího elektronu

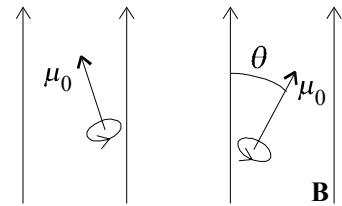
Paramagnetika

Atom má permanentní magnetický moment. Elektrony v atomovém obalu jsou nespárovány (obdoba *polárních látek* v elektrostatice). Výsledný spin atomu $j = 1/2$. Po zapnutí vnějšího pole se část magnetických dipólů orientuje do směru pole a vzniká nenulová magnetizace materiálu. Počet orientovaných spinů roste s klesající teplotou, paramagnetický jev je tedy silně závislý na teplotě.

Pseudoklasický popis: Rozdělení počtu dipólů orientovaných ve směru θ je dáno Boltzmannovou statistikou. Konstantu rozdělení lze snadno určit integrací rozdělení přes celý prostorový úhel.

$$n(\theta) = K \exp\left[\frac{\boldsymbol{\mu}_0 \cdot \mathbf{B}}{kT}\right] \quad ; \quad \int n(\theta) d\Omega = n \Rightarrow K = \frac{n}{4\pi}$$

$$n(\theta) = \frac{n}{4\pi} \exp\left[\frac{\mu_0 B \cos\theta}{kT}\right]$$



Vektor magnetizace bude

$$M = \langle M_{\parallel} \rangle = \int n(\theta) \mu_0 \cos\theta d\Omega \Rightarrow M = \frac{n\mu_0^2 B}{3kT} = \frac{n(g\mu_B J/\hbar)^2 B}{3kT} = \frac{ng^2 \mu_B^2 j(j+1) B}{3kT} \Rightarrow$$

$$M = \frac{ng^2 \mu_B^2}{4kT} B$$

Kvantový popis:

$$M = n \langle \mu \rangle = n \frac{\mu_{+1/2} \exp\left[\frac{\mu_{+1/2} B}{kT}\right] + \mu_{-1/2} \exp\left[\frac{\mu_{-1/2} B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu_{+1/2} B}{kT}\right] + \exp\left[\frac{\mu_{-1/2} B}{kT}\right]} = \frac{ng\mu_B}{2} \frac{\exp\left[\frac{g\mu_B B}{2kT}\right] - \exp\left[\frac{-g\mu_B B}{2kT}\right]}{\exp\left[\frac{g\mu_B B}{2kT}\right] + \exp\left[\frac{-g\mu_B B}{2kT}\right]} \Rightarrow$$

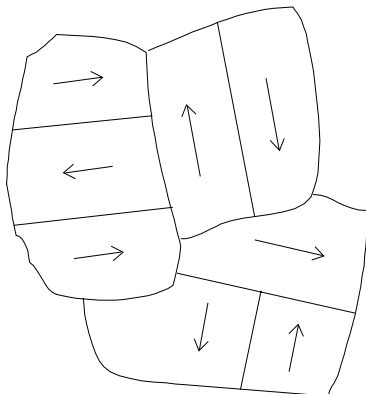
$$M = \frac{ng\mu_B}{2} \text{th}\left[\frac{g\mu_B B}{2kT}\right]$$

Při velkých polích a nízkých teplotách dochází k saturaci, všechny spiny jsou již orientovány a další zvyšování pole nepřináší zvětšení magnetizace. Saturační hodnota pole je $M \approx M_S = \frac{ng\mu_B}{2}$.

Při malých polích a vysokých teplotách lze nahradit $\text{th}[x] \approx x$ a pro vektor magnetizace platí

$$M \approx \frac{n g^2 \mu_B^2}{4 k T} B, \text{ což je právě pseudoklasický výraz.}$$

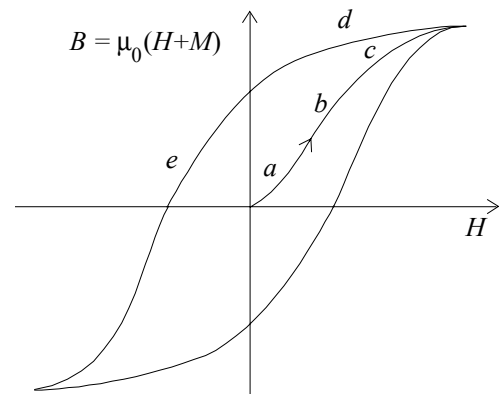
Feromagnetika



Jednotlivé elementární magnetické momenty neinteragují jen s vnějším polem, ale ovlivňují se i navzájem (analogii pro elektrické dipóly jsou opticky husté látky). Toto **ovlivnění má výhradně kvantovou povahu** a interakce mezi dipóly je mnohonásobně silnější než odpovídající klasická interakce elektromagnetické povahy. Klasický výpočet proto vede sice k podobným vztahům, ale velikost vzájemné interakce je o mnoho řádů podhodnocena. Při vysokých teplotách (nad **Curieovou teplotou** T_c) mají spiny tendenci vytvářet chaotické konfigurace a střední magnetizace je nulová. Při nízkých teplotách ($T < T_c$) mají spiny tendenci se orientovat **paralelně** a vytvářet **magnetické domény** shodně orientovaných spinů a to dokonce i bez přítomnosti magnetického pole (**spontánní magnetizace**). Vztah mezi magnetizací a magnetickým polem není

lineární, je závislý na historii procesu.

Popišme chování doposud nezmagetovaného feromagnetika polykrystalické struktury při teplotě $T < T_c$. Každý krystal je rozdělen do několika domén, které jsou spontánně zmagnetizované ve směrech přirozených pro krystal. Domény jsou odděleny **doménovými stěnami** a průměrná magnetizace je nulová. Po zapnutí slabého magnetického pole dochází k malému posunutí doménových stěn ve prospěch domén orientovaných ve směru pole (křivka a). Jde o vratný proces magnetizace je přibližně lineární funkcí magnetického pole. Při silnějších polích dochází k výraznějšímu posuvu stěn, který je zastavován na nepravidelnostech v krystalu. Při překonání nepravidelnosti dochází k uvolnění tepelné a zvukové energie (**Barkhausenův jev**). Děj je nevratný. Každý krystal se postupně stává jedinou doménou orientovanou v pro krystal výhodném směru (křivka b). Při dalším zvyšování pole jsou krystaly přemagnetovávány do směru vnějšího pole, s růstem pole již nedochází k podstatnému zvyšování magnetizace. Nedochází ani k posuvu doménových stěn (křivka c). Nakonec jsou všechny spiny orientovány ve směru pole a magnetizace je saturována. Při snižování magnetického pole probíhá obrácený proces, děl je však nevratný a při nulovém magnetickém poli zůstává zbytková magnetizace (křivka d). Feromagnet má trvalé magnetické vlastnosti. Odmagnetování je možné působením opačného pole (křivka d). Popsaný jev se nazývá **hystereze**.



Vzhledem k tomu, že změna hustoty vnitřní energie je dána vztahem $du = H dB$, je při nevratném ději přeměněna na tepelnou a zvukovou energii právě energie daná plochou hysterezní smyčky. Materiály pro výrobu transformátorových jader by měly proto mít co nejúžší hysterezní smyčku tak, aby nedocházelo k tepelným ztrátám mezi magnetizací a magnetickým polem pak přibližně platí lineární vztah. Naopak materiály určené k výrobě permanentních magnetů by měly mít hysterezní smyčku co nejširší.

Magnetické vlastnosti feromagnetik jsou určeny převážně spinem elektronů, orbitální momenty přispívají jen několika procenty.

Antiferomagnetika

Vazbová konstanta antiferomagnetik má opačné znaménko než u feromagnetik, spiny mají při nízkých teplotách tendenci se pravidelně střídat, při vysokých teplotách jsou neuspořádané. Při T_c dochází k fázovému přechodu s pikem měrného tepla c_V . Zvláštním případem jsou **ferity**. Jde o kysličníky obsahující dva kovové atomy, jejichž řetězce při nízkých teplotách vytvářejí antiferomagnetickou konfiguraci $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$. Vzhledem k rozdílnému momentu obou kovů je výsledná magnetizace nenulová a nevodivá látka má magnetické vlastnosti.

MAGNETIKA - MAGNETICKÁ REZONANCE

Přiložíme-li k látce proměnné magnetické pole může rezonovat s atomárními (elektronovými) i jadernými (protonovými) magnetickými momenty. V oblasti rezonance je z pole odnímána energie a snadno je možné experimentálně najít oblast rezonance.

Klasický výpočet: Magnetická látka je vložena do konstantního vnějšího pole B . Osa magnetických momentů podléhá precesi

$$\Delta J = M_F \Delta t \Rightarrow J \sin \theta \Delta \varphi = \mu B \sin \theta \Delta t \Rightarrow$$

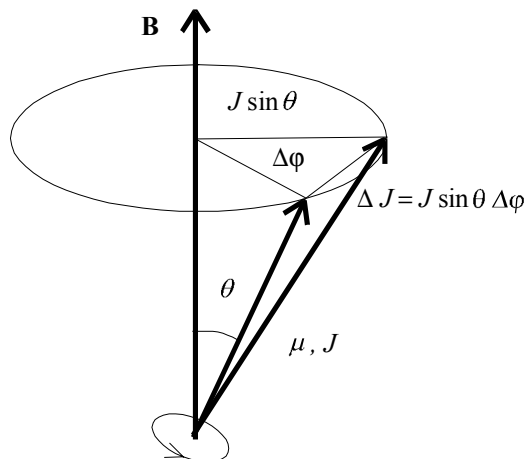
$$\omega_{prec} = \frac{\mu B}{J} = g \frac{|e|}{2m} B = \frac{g}{2} \omega_c \Rightarrow$$

$$\omega_{prec} = \omega_L \equiv \frac{g}{2} \omega_c \quad ; \quad \omega_c \equiv \frac{|e|B}{m}$$

Frekvence precese osy dipólu neboli Larmorova frekvence je $g/2$ násobkem cyklotronní frekvence.

Chceme-li změnit sklon osy precese musíme působit slabým přídatným pole B' kolmým na B . Toto pole

vytvoří moment síly $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}'$ ve směru B a změní sklon precesní osy. Pole B' musí být periodické s periodou ω_{prec} , aby „tahalo“ za elektron stále stejným směrem.



Kvantový výpočet: V magnetickém poli B je energie magnetického dipólu

$$W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -g \frac{|e|}{2m} \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} = -g \frac{|e| \hbar}{2m} j_z B.$$

Tato přídatná energie rozštěpí původní energetickou hladinu elektronu v obalu nebo protonu v jádře na ekvidistantní podhladiny se vzdáleností

$$\Delta W = g \frac{|e| \hbar}{2m} B.$$

Systém může mezi hladinami přeskakovat a absorbovat nebo emitovat odpovídající kvanta elektromagnetického záření $\hbar \omega_{rez} = \Delta W$. Příslušná rezonanční frekvence je

$$\omega_{rez} = g \frac{|e|}{2m} B = \frac{g}{2} \omega_c.$$

Snadno určíme rezonanční frekvenci pro elektrony (rezonance na atomech a molekulách) a pro protony (jaderná magnetická rezonance):

$$f_{rez} = \frac{\omega_{rez}}{2\pi} = \frac{e}{4\pi m} g B = K g B; K = \begin{cases} 1.44 \text{ MHz/T} & \text{atom} \\ 0.76 \text{ kHz/T} & \text{jádro} \end{cases}.$$

Měřením rezonance lze určovat Landého g faktory pro různé atomy a jádra.

MAGNETOSTATIKA - BIOT-SAVARTŮV ZÁKON

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}_{tot} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j}_{tot}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Rovnice pro vektorový potenciál mají stejný tvar jako rovnice elektrostatiky, zaměníme-li $\rho/\varepsilon_0 \rightarrow \mu_0 \mathbf{j}_i$; $\phi \rightarrow A_i$; $i=1,2,3$. Řešení proto je:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Z vektorového potenciálu snadno určíme magnetické pole $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \text{ Biot - Savartův zákon.}$$

Speciálně pro tenké vodiče je $\mathbf{j} dV = jS d\mathbf{l} = I d\mathbf{l}$ a Biot - Savartův zákon má tvar:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \text{ Biot - Savartův zákon pro obvody.}$$

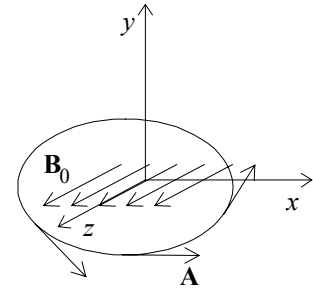
MAGNETOSTATIKA - VEKTOROVÉ POTENCIÁLY

Homogenní pole

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= B_0 (-y/2; x/2; 0), \\ \mathbf{A}' &= B_0 (0; x; 0), \\ \mathbf{A}'' &= B_0 (-y; 0; 0) \end{aligned}$$

nebo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}$$



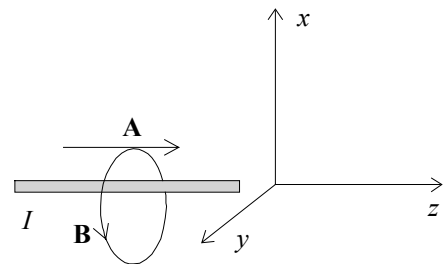
Velikost A:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \Rightarrow A 2\pi r_{\perp} = B_0 \pi r_{\perp}^2 \Rightarrow A = \frac{1}{2} B_0 r_{\perp} = \frac{1}{2} B_0 \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nekonečný přímý vodič

Řešení určíme z analogie v elektrostatice. Nabitý drát $\Rightarrow \mathbf{E} \Rightarrow \phi$. Z analogie A_z :

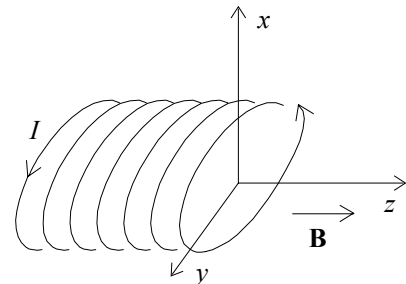
$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} B_0 (0; 0; -\ln r_{\perp}), \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{\perp}^2} (-y; x; 0) \end{aligned}$$



Nekonečný solenoid

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2} (-y; x; 0) & r_{\perp} < r \\ \frac{\mu_0 N I R^2}{2} (-y/r_{\perp}^2; x/r_{\perp}^2; 0) & r_{\perp} > r \end{cases},$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 N I (0; 0; 1) & r_{\perp} < r \\ (0; 0; 0) & r_{\perp} > r \end{cases},$$



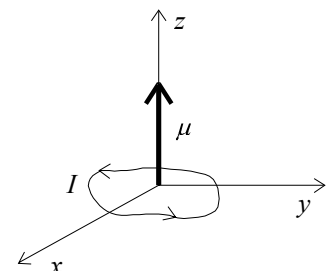
R poloměr solenoidu
 I proud
 N počet závitů na jednotku délky

řešení uvnitř plyne z řešení pro homogenní pole, jeho velikost určíme z Ampérova zákona. Řešení vně plyne například z $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \Rightarrow \oint_{\partial S} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$. Pole uvnitř známe, směr \mathbf{A} dán směrem proudu.

Magnetický dipól

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{\mu} \left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right)$$



MAXWELLOVY ROVNICE V PROSTŘEDÍ, PODMÍNKY NA ROZHRAŇÍ

Rovnice v prostředí

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho_{tot} / \epsilon_0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}_{tot} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{tot} &= \rho_{free} + \rho_{pol} \\ \mathbf{j}_{tot} &= \mathbf{j}_{free} + \mathbf{j}_{pol} + \mathbf{j}_{mag}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{pol} &= -\operatorname{div} \mathbf{P} \\ \mathbf{j}_{pol} &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \\ \mathbf{j}_{mag} &= \operatorname{rot} \mathbf{M}\end{aligned}$$

Polarizační hustota náboje, polarizační proud a magnetizační proud jsou dány vektory polarizace a magnetizace. V Maxwellových rovnicích můžeme ponechat jen volné náboje a proudy:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) &= \rho_{free} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}) &= \mathbf{j}_{free} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})\end{aligned}$$

Zkráceně lze také psát

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_{free} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{free} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

; kde

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &\equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &\equiv \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}\end{aligned}$$

Pole \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou tedy základní pole odpovídající všem zdrojům (všem nábojům a všem proudům). Pole \mathbf{D} a \mathbf{H} odpovídají jen volným nábojům a vodivostním proudům a jsou definovány pomocnými vztahy přes základní pole a vektory polarizace a magnetizace.

Podmínky na rozhraní

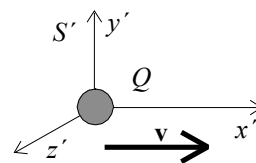
Z druhého tvaru zápisu Maxwellových rovnic plyne pro rozhraní bez volných nábojů a proudů spojitost těchto složek:

$$(\epsilon_0 E + P)_\perp ; B_\perp ; (B/\mu_0 - M)_\parallel ; E_\parallel$$

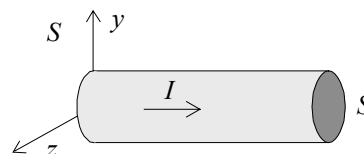
RELATIVNOST ELEKTRICKÉHO A MAGNETICKÉHO POLE

Z transformace proudové hustoty:

$$S: \begin{cases} \rho = 0 \\ j = I/S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = 0 \\ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} \end{cases} \Rightarrow \boxed{F = -QvB = -\frac{\mu_0 QIv}{2\pi r_\perp}}$$



S' : Náboj se nepohybuje, magnetické pole nepůsobí. Pohybuje se ale celý vodič. Elektronů se pohybují jinou rychlostí než ionty. (ty v S stojí). Kontrakce délek ve směru x je jiná pro elektrony a jiná pro ionty $\Rightarrow \rho'_+ \neq \rho'_- \Rightarrow \rho' \neq 0 \Rightarrow$ elektrické pole (určíme z Gaussovy věty) \Rightarrow elektrická síla!



$$\begin{pmatrix} c\rho' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho' = -\gamma \frac{v}{c^2} j \\ j' = \gamma j \end{cases} \Rightarrow \int E' dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E' = \frac{\rho' S}{2\pi r_\perp \epsilon_0} = -\gamma \frac{\mu_0 I v}{2\pi r_\perp}$$

$$\boxed{F' = QE' = -\gamma \frac{\mu_0 QIv}{2\pi r_\perp}}$$

Z transformace polí

$$S: \begin{cases} E = 0 \\ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} \end{cases}$$

$$S': \begin{cases} \mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ E' = -\gamma v B = -\gamma \frac{\mu_0 I v}{2\pi r_\perp} \end{cases} \Rightarrow \boxed{F' = -\gamma \frac{\mu_0 QIv}{2\pi r_\perp}}$$

Z transformace potenciálů

$$S: \begin{cases} \phi = 0 \\ \mathbf{A} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_\perp; 0; 0 \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = 0 \\ B = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} \end{cases} \Rightarrow \boxed{F = -QvB = -\frac{\mu_0 QIv}{2\pi r_\perp}}$$

$$S': \begin{pmatrix} \phi'/c' \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \phi' = \gamma v \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_\perp \\ E' = -\frac{\partial \phi'}{\partial r_\perp} = -\gamma \frac{\mu_0 I v}{2\pi r_\perp} \end{cases} \Rightarrow \boxed{F' = -\gamma \frac{\mu_0 QIv}{2\pi r_\perp}}$$

Neustále vychází totéž. Vždy je $F'/F = \gamma$. To je ale v pořádku, protože $\frac{F'}{F} = \frac{dp'_\perp/dt'}{dp_\perp/dt} = \frac{dp'_\perp}{dp_\perp} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{dt}{dt'} = \gamma$.