

Kmity a vlny

V. Černý

January 10, 2004

Abstract

Toto sú zatiaľ predbežné poznámky k prednáške Kmity a vlny. Heslovité, väčšinou budú chýbať podmety a prísudky.

1 Systém a jeho stavy

Úloha fyziky

- prírodopis
- predpovedanie budúcnosti

Presvedčenie západnej civilizácie, že okamih (stav) je možné zaznamenať na papier. Je to komplikované: vo fyzike sa zriekame holistic approach-u, vyberáme len nejakú vymedzenú oblasť "sveta okolo nás" a veríme že všetko relevantné pre túto vymedzenú oblasť vieme zachytiť na papier, tak, aby sme boli z toho záznamu schopní zrekonštruovať okamih. T.j. vedeli povedať všetko, čo sa týka meraní na vymedzenom systéme.

Predpovedanie budúcnosti je ambícia predpovedať budúci okamih na základe znalosti terajšieho okamihu. Tu je istým spôsobom dopovedané, čo sa myslí pojmom "všetko relevantné". Myslí sa tým aj všetko, čo je potrebné pre predpoveď budúceho okamihu. Pozoruhodné je, že sa zdá, že stačí všetko relevantné z hľadiska prírodopisu, teda výsledkov meraní v momentálnom okamihu a už je to dosť pre predpovedanie budúcnosti. Istý problém predstavujú systémy s deterministickým chaosom, kde predpovedanie budúcnosti sa zrejme musí obmedziť na istý (malý) časový interval nasledujúci po momentálnom okamihu, s predlžovaním toho okamihu narastá potreba väčšieho počtu zachytených "relevantných údajov".

Ďalšia predstava západnej civilizácie je, že sa "dá vkročiť dvakrát do tej istej rieky". O systémoch predpokladáme, že majú čosi ako v čase invariantnú identitu bytia, t.j. v čase ostávajú identifikované, hoci nie sú nemenné, nachádzajú sa v rozličných časových okamihoch v rozličných stavoch.

To je veľmi fuzzy povedané, ale lepšie neviem.

Fyzikálne veličiny potom delíme na

- systémové (ostávajú v čase nemenné, identifikujú systém)
- stavové (charakterizujú stav systému)

Hranice medzi systémovými a stavovými veličinami je relatívna a účelovo závislá, pre jednu úlohu môže byť napr. hmotnosť systémová veličina, pre inú úlohu to môže byť stavová veličina. Sú aj extrémnejšie príklady, napr. protón a neutrón ako dva systémy alebo ako dva stavy jedného systému – nukleónu.

2 Pohybová rovnica

Ambíciou fyziky je predpovedať budúcnosť. Rovnica

$$F = ma$$

má byť čítaná ako

$$a = \frac{F}{m}$$

a vnímaná ako pohybová rovnica. Riešenie pohybovej rovnice treba vidieť cez Eulerovu metódu (metódu Sovietskej armády) a pretože ide o rovnicu druhého

rádu vnímať ju ako rovnicu prvého rádu v priestore s dvojnásobným počtom dimenzií.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{F}{m}\end{aligned}$$

V jednom rozmere pohybová rovnicu

$$\ddot{x} = f$$

prepíšeme pomocou primitívnej funkcie k sile

$$f = -\frac{dU}{dx}$$

do tvaru

$$v\dot{v} + \frac{dU}{dx}v = 0$$

resp

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right)$$

čo predstavuje zákon zachovania energie.

Vo viac rozmeroch už to nie je také jednoduché, lebo silové pole možno zapísať ako gradient potenciálu len ak je bezvírové, vtedy

$$\vec{f} = -\text{grad}U$$

Častý prípad je taký, že sa systém nachádza blízko stabilnej rovnováhy. Vtedy potenciál je v okolí minima a možno ho aproximovať parabolou

$$U(x) = U_0 + \frac{1}{2}kx^2$$

odkiaľ dostaneme pohybovú rovnicu harmonického oscilátora

$$\ddot{x} = -kx$$

Všeobecné riešenie tej rovnice má tvar

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Počiatkové podmienky

$$x(0) = x_0$$

$$v(0) = v_0$$

splníme (jednoznačnou) voľbou

$$A = x_0$$

$$B = \frac{v_0}{\omega}$$

3 Malé kmity

Pod pojem malé kmity spadá vyšetřovanie dynamiky systémov neďaleko od stabilného rovnovážneho stavu v linearizovanom priblížení.

3.1 Harmonický oscilátor

Najjednoduchším systémom tohto typu je lineárny (jednorozmerný) harmonický netlmený oscilátor. Pohybová rovnica je

$$m\ddot{x} = -Kx$$

Typická úloha, ktorú treba riešiť, je počiatočná úloha. Zadaný je počiatočný stav

$$x(t) = x_0, \dot{x}(t) = v_0$$

a treba nájsť riešenie pohybovej rovnice $x(t)$ vyhovujúce tým počiatočným podmienkam. Ide o lineárnu diferenciálnu rovnicu s konštantnými koeficientmi, postup je štandardný. Všeobecné riešenie pohybovej rovnice má tvar

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

a A, B sú ľubovoľné konštanty. Ľahko vidno, že počiatočným podmienkam zodpovedá voľba konštant

$$A = x_0, B = \frac{v_0}{\omega}$$

Časový priebeh je harmonický pohyb s frekvenciou

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

resp. dobou kmitu

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Namiesto konštant A, B sa na špecifikáciu riešenia často používajú iné vhodné konštanty. Napr. riešenie zapisujeme v tvare

$$x(t) = X \cos(\omega t + \delta)$$

konštanta X sa nazýva amplitúda, konštanta δ fázový posun. (V literatúre panuje nejednotnosť, fázový posun sa niekedy definuje s opačným znamienkom, inokedy sa kmitavý pohyb vyjadruje nie pomocou funkcie $\cos()$ ale pomocou funkcie $\sin()$).

3.2 Tlmený harmonický oscilátor

Ďalším systémom je tlmený harmonický oscilátor, Pohybová rovnica je

$$m\ddot{x} = -Kx - \alpha\dot{x}$$

Dodatočná sila voči netlmenému oscilátoru predstavuje silu trenia úmernú rýchlosti. Pohybová rovnica sa častejšie zapisuje v tvare

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

kde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$b = \frac{\alpha}{2m}$$

Všimnime si, že v pohybovej rovnici sú dve časové škály: konštanty ω_0 i b majú rovnaký fyzikálny rozmer s^{-1} . Vyšetovanie obmedzíme na prípad malého trenia

$$\omega_0 \gg b$$

Riešenie pohybovej rovnice má v tomto prípade všeobecný tvar

$$x(t) = X e^{-bt} \cos(\omega t + \delta)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

a X a δ sú ľubovoľné konštanty určené počiatočnými podmienkami.

Z uvedeného tvaru riešenia je zrejмый význam dvoch časových škál v pohybovej rovnici. Riešenie vyzerá ako kmitavý pohyb s kruhovou frekvenciou ω , ktorého amplitúda postupne exponenciálne klesá. Za dobu

$$\tau = \frac{1}{b}$$

amplitúda poklesne o faktor $1/e$. Čas τ preto niekedy nazývame "doba života" alebo "doba útlmu" tlmených kmitov. Parameter ω_0 v pohybovej rovnici teda v zásade určuje frekvenciu tlmených kmitov, parameter b dobu útlmu.

Taká terminológia má naozaj zmysel, len ak je splnená nerovnosť

$$\omega_0 \gg b$$

hoci pre platnosť riešenia v uvedenom tvare stačí slabšia podmienka

$$\omega_0 > b$$

Ak však parameter b nie je malý, potom počas charakteristickej doby tlmenia oscilátor vykoná len málo alebo dokonca ani jeden úplný kmit a hovoriť o tlmenom "kmitavom pohybe" nemá dobrý zmysel.

Terminológia "tlmené kmitanie" nemá vlastne rigorózný zmysel nikdy. Tlmené kmitanie nie je striktné periodický pohyb, preto hovoriť o "kmitoch", "perióde", "frekvencii" a pod. nie je celkom korektné. Máme teda situáciu, v ktorej základné pojmy užitočné pre kvalitatívne chápanie a popisovanie skutočnosti nie sú dostatočne ostro definované.

Napríklad ak by sme chceli experimentálne definovať pojem "frekvencia tlmených kmitov", potom "počet opakovaní typickej štruktúry v tvare signálu za určitú dobu" je čosi ako praktická definícia frekvencie. Celková doba merania však nemôže byť rádovo väčšia ako doba života τ a nejednoznačnosť v určení "počtu opakovaní" je rádovo 1. Preto "experimentálna frekvencia" je definovaná s neurčitostou rádovo rovnou

$$\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau}$$

3.3 Budený tlmený harmonický oscilátor

Budeme teraz vyšetrovať situáciu, keď na tlmený harmonický oscilátor pôsobí navyše vonkajšia "vynucujúca" sila. Pohybová rovnica bude

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

kde $f(t)$ je vonkajšia sila so zadaným časovým priebehom. Podrobne vyšetríme iba prípad, keď priebeh vynucujúcej sily je harmonický. Nie je to podstatne obmedzenie, lebo v zásade ľubovoľný časový priebeh je možné chápať ako superpozíciu harmonických priebehov. Pretože pohybová rovnica je lineárna, bude riešenie vo všeobecnom prípade dané superpozíciou riešení pre harmonické vynucujúce sily.

Technicky sa riešenie značne zjednoduší ak namiesto reálnej harmonickej sily

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t)$$

budeme počítať s komplexnou silou

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$$

s tým, že fyzikálny význam má len reálna časť komplexného výrazu. Ak potom nájdeme komplexné riešenie pohybovej rovnice a vezmeme len jeho reálnu časť, nájdeme tak príslušné fyzikálne riešenie. Výhoda tohto postupu spočíva v značnom technickom zjednodušení výpočtov.

Pohybová rovnica je lineárna diferenciálna rovnica s pravou stranou. Všeobecné riešenie bude teda dané ako súčet partikulárneho riešenia rovnice s pravou stranou a všeobecného riešenia rovnice bez pravej strany.

Partikulárne riešenie s pravou stranou nájdeme pomocou fyzikálnej intuície: očakávame že pohyb vynútený harmonicou silou bude tiež harmonický s rovnakou frekvenciou ako frekvencia vynucujúcej sily.

Hľadáme teda riešenie pohybovej rovnice v tvare

$$x(t) = X_0 e^{-i\omega t}$$

kde X_0 je vo všeobecnosti komplexná amplitúda. Fáza komplexnej amplitúdy určuje fázový posun kmitov voči vynucujúcej sile. Dosadením predpokladaného tvaru riešenia do pohybovej rovnice dostaneme vyjadrenie

$$X_0 = \frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega b}$$

Ak komplexnú amplitúdu napíšeme v tvare

$$X_0 = A e^{-i\delta}$$

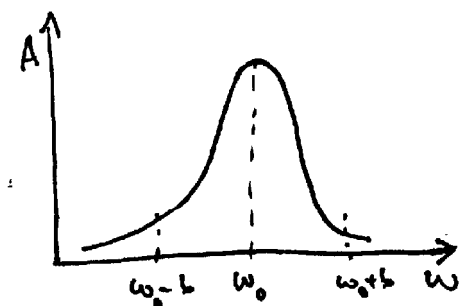
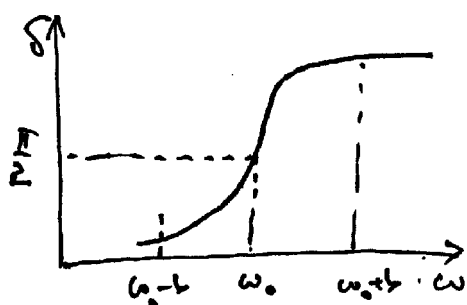
dostaneme

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + \omega^2 b^2}}$$
$$\tan(\delta) = \frac{\omega b}{-\omega^2 + \omega_0^2}$$

Ak tlmenie je malé, majú tak výraz pre amplitúdu ako aj výraz pre fázové posunutie výraznú štruktúru v okolí bodu

$$\omega \approx \omega_0$$

Amplitúda má v oblasti $(\omega_0 - b, \omega_0 + b)$ výrazné maximum, fázový posun δ prechádza v bode $\omega = \omega_0$ veľmi strmo hodnotou $\pi/2$: fázový posun sa z hodnôt rádovo $\delta \approx 0$ "prehupne" do hodnôt rádovo $\delta \approx \pi$ na intervale $(\omega_0 - b, \omega_0 + b)$



Tieto výrazné javy sa volajú rezonancia. Všimnime si, že rezonančné štruktúry sú tým výraznejšie, čím menšie je tlmenie. Frekvenčná šírka rezonančných javov je rádovo rovná b , a to je súčasne presnosť, s ktorou je definovaná frekvencia kmitov nebudeného tlmeného oscilátora.

4 Princíp príčinnosti a disperzné vzťahy

Budený harmonický oscilátor je systém, ktorý reaguje na vonkajšie silové pôsobenie: výchylka oscilátora $x(t)$ je odozva tohto systému na vonkajšie pôsobenie reprezentované silou $f(t)$. Harmonický oscilátor je pritom lineárny systém, odozva na lineárnu kombináciu podnetov je príslušná lineárna kombinácia odoziev.

Všeobecný lineárny systém takého typu môžeme symbolicky znázorniť čiernou skrinkou na obr.1.

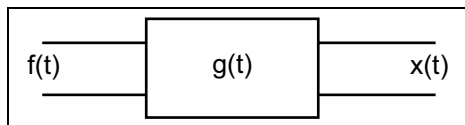


Figure 1: Lineárny systém ako čierna skrinka, $f(t)$ je podnet, $x(t)$ je odozva, $g(t)$ je jadro lineárnej transformácie charakterizujúce čiernu skrinku.

Lineárnu odozvu čiernej skrinky možno všeobecne vyjadriť v tvare konvolúcie

$$x(t) = \int g(t - t')f(t')dt'$$

Konvolúcia je napísaná tak, že predpokladá časovú translačnú invariantnosť skrinky: ak podnet len posunieme v čase, potom aj odozva sa len rovnakým spôsobom posunie v čase. Matematicky zapísané to znamená, že ak urobíme transformáciu

$$f(t) \rightarrow f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

potom funkcia odozvy sa transformuje rovnako

$$x(t) \rightarrow x_\tau(t) = x(t - \tau)$$

Vo všeobecnejšom prípade časovo translačne neinvariantnej skrinky by kernel integrálnej transformácie bola funkcia dvoch premenných t, t' a nie časového rozdielu $t - t'$.

Konvolúcia priam vyzýva urobiť Fourierovu transformáciu a prejsť od x -reprezentácie k ω -reprezentácii. Fourierov obraz \tilde{f} funkcie f definujeme vzťahom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}$$

a obdobne pre funkcie g, x . Inverzná Fourierova transformácie je

$$\tilde{f}(t) = \int dt f(t) e^{i\omega t}$$

Lahko vidno, že Fourier-obraz konvolúcie je súčin Fourier-obrazov, teda že platí

$$\tilde{x}(\omega) = \tilde{g}(\omega) \tilde{f}(\omega)$$

O čiernej skrinke predpokladáme, že sa chová príčinne, čo znamená, že odozvočná funkcia v nejakom čase nemôže závisieť na podnetovej funkcii v neskoršom čase. Stručne: odozva nemôže závisieť na podnete, ktorý ešte len má prísť. Matematicky to znamená, že v uvedenej konvolúcii sa bude integrovať len cez "časy v minulosti", teda časy $t' < t$. Znamená to teda, že jadro g spĺňa podmienku príčinnosti

$$g(t - t') = 0 \text{ pre } t' > t$$

resp. ekvivalentne

$$g(t) = 0 \text{ pre } t < 0$$

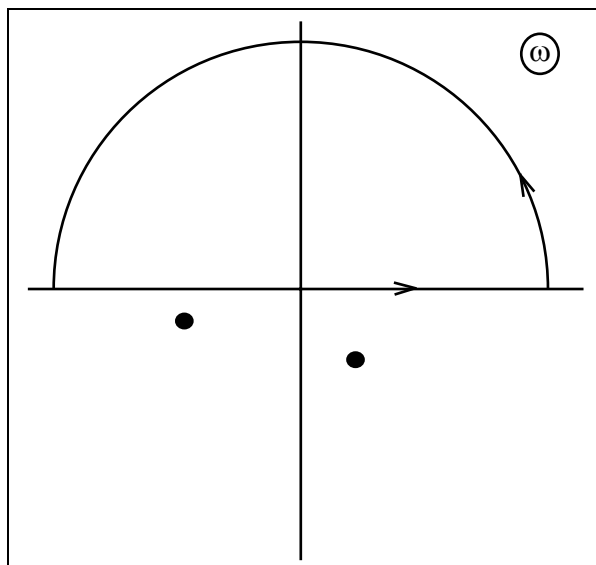


Figure 2: Integračn[ý] kont[ú]r v hornej polrovine

Pozrime sa teraz na Fourier-obraz \tilde{g} . Ukážeme si, že platí nasledovné tvrdenie: Ak funkcia $\tilde{g}(\omega)$ je analytická v hornej polrovine komplexnej roviny ω , potom funkcia g je príčinná.

Ak v integráli po reálnej osi ω

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}$$

uzatvoríme integračn[ý] kont[ú]r vzdialenou polkružnicou v hornej polrovine (ako na obr.2, bude podľa Cauchyho vety integrál po tej uzavretej krivke nulový, lebo integrovaná funkcia je vnútri kontúry analytická. Integrál po veľkej polkružnici je ale rovný nule ak $t < 0$. Skutočne, ak označíme

$$\omega = \omega_R + i\omega_I$$

potom pre $\omega_I > 0$ (teda hornú polrovinu) bude reálna časť výrazu v exponente $\exp(-i\omega t)$ záporná a podintegrálna funkcia na veľkej polkružnici bude exponenciálne potlačená (ak len samotná funkcia \tilde{g} príliš rýchlo v nekonečne nerastie).

Keďže integrál po celom uzavretom kontúre je nulový a aj integrál po hornej veľkej polkružnici je nulový, musí byť pre $t < 0$ nulový i integrál po reálnej osi, čo znamená, že funkcia $g(t)$ je príčinná.

Ak funkcia $\tilde{g}(\omega)$ je v hornej polrovine komplexnej roviny ω analytická a pritom pre veľké $|\omega|$ dostatočne rýchlo klesá, potom môžeme pre ňu napísať tzv. disperzný vzťah.

Pre integračn[ý] kont[ú]r podľa obr.2 platí podľa Cauchyho vety

$$\oint d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega + i\varepsilon} \tilde{g}(\omega') = 0$$

kde ω je reálny parameter a ε je (malé) kladné reálne číslo.

Integrál po veľkej polkružnici je pre dostatočne rýchlo klesajúce $\tilde{g}(\omega)$ nulový, a teda dostaneme pre integrál po reálnej osi

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega + i\varepsilon} \tilde{g}(\omega') = 0$$

Platí známa identita

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$$

kde P je symbol integrálu v zmysle hlavnej hodnoty a $\delta(x)$ je Diracova δ -funkcia. Limitu pritom chápeme v zmysle distribúcií. Symbolický dôkaz tejto identity je naznačený na obr.3

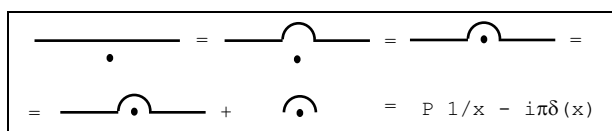


Figure 3: Symbolický dôkaz identity $1/(x + i\varepsilon) = P 1/x - i\pi\delta(x)$

Využívajúc túto identitu dostaneme

$$P \int d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega} \tilde{g}(\omega') - i\pi \int d\omega' \delta(\omega' - \omega) \tilde{g}(\omega') = 0$$

Tento vzťah viaže navzájom reálnu a imaginárnu časť funkcie $\tilde{g}(\omega)$.

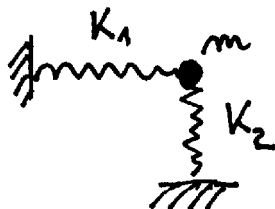
$$Im \tilde{g}(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega} Re \tilde{g}(\omega')$$

$$Re \tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega} Im \tilde{g}(\omega')$$

Z uvedených disperzných vzťahov je aspoň kvalitatívne zrejmé, že nie je náhodou že rezonančný jav sa prejavuje "dramatickou štruktúrou" v okolí rezonančnej frekvencie tak v amplitúde ako aj vo fáze odozvovej funkcie.

4.1 Dvojrozmerný harmonický oscilátor

Dvojrozmerný harmonický oscilátor je (v špeciálnom prípade) schematicky znázornený na obr.



Pohybová rovnica je

$$m\ddot{x} = -K_1x$$

$$m\ddot{y} = -K_2y$$

Ide o dve navzájom nezávislé diferenciálne rovnice, všeobecné riešenie teda bude

$$x(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)$$

$$y(t) = C \cos(\omega_2 t) + D \sin(\omega_2 t)$$

kde

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}}$$

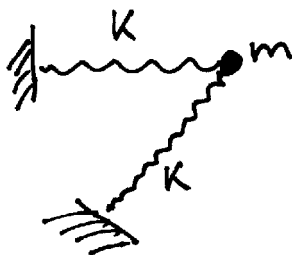
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m}}$$

a A, B, C, D sú ľubovoľné konštanty, ktoré treba určiť tak, aby boli splnené počiatočné podmienky.

Treba si uvedomiť, že vo všeobecnosti pohyb nebude periodický. Striktne periodický bude iba vtedy, ak pomer ω_1/ω_2 je racionálne číslo. Toto rigorózne matematické tvrdenie je fyzikálne málo zmysluplné, prakticky sa pohyb bude javiť ako periodický ak pomer ω_1/ω_2 bude (približne) rovný pomeru nejakých dvoch malých celých čísel, inak sa pohyb bude javiť ako prakticky neperiodický.

Dvojrozmerný oscilátor sa nazýva izotropný, ak $K_1 = K_2$, vtedy sú frekvencie ω_1, ω_2 rovnaké trajektória bude mať tvar elipsy, v špeciálnom pohybe tvar kružnice, v degenerovanom prípade tvar úsečky. Kruhový pohyb dostaneme ak kmitavé pohyby v smeroch x, y sú navzájom fázovo posunuté o $\pi/2$, napríklad v prípade $A = D \neq 0, B = C = 0$.

Všeobecnejší prípad dvojrozmerného harmonického oscilátora je znázornený na nasledujúcom obrázku



Aby sme mali technicky jednoduchšie výpočty, budeme predpokladať, že tuhosti oboch pružín sú rovnaké a pružiny zvierajú uhol $\pi/4$.

Aby sme našli pohybové rovnice, musíme najprv nájsť silu pôsobiacu na oscilátor pri výchylke x, y z rovnovážnej polohy. Sila od vodorovnej pružiny je jednoduchá

$$f_{1,x} = -Kx, \quad f_{1,y}$$

Silu od šikmej pružiny vypočítame prácnejšie. Ak rovnovážna dĺžka tej pružiny je l , potom pri vchyľke x, y bude jej predĺženie dané výrazom

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + x\right)^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{2}} + y\right)^2} - l$$

a s presnosťou do lineárnych členov v x, y dostaneme

$$\Delta l = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

a pre priemety sily od druhej pružiny do súradnicových osí teda dostaneme

$$f_{2,x} = -K\frac{1}{2}x - K\frac{1}{2}y$$

$$f_{2,y} = -K\frac{1}{2}x - K\frac{1}{2}y$$

Pohybové rovnice teda budú

$$m\ddot{x} = -Kx - K\frac{1}{2}x - K\frac{1}{2}y$$

$$m\ddot{y} = -K\frac{1}{2}x - K\frac{1}{2}y$$

Problém je v tom, že rovnice sú viazané, v obidvoch vystupujú obe premenné x, y . Štandardný postup je nasledovný. Treba nájsť vhodnú transformáciu súradníc tak, aby v nových súradniciach už rovnice boli navzájom nezávislé.

Hľadáme teda nové premenné x', y' definované vzťahmi

$$x = x' \cos \phi + y' \sin \phi$$

$$y = -x' \sin \phi + y' \cos \phi$$

kde ϕ je hľadaný uhol rotácie pri prechode k novým súradniciam. Poznamenajme, bez dôkazu, že fakt, že úloha dekoplovať rovnice sa dá vyriešiť transformáciou rotácie vyplýva z faktu, že silové koeficienty v pohybových rovniciach sú symetrické, t.j. že koeficient pri premennej y v pohybovej rovnici pre x je rovnaký ako koeficient pri premennej x v pohybovej rovnici pre y .

Pre skrátenie zápisu označme $\cos \phi = C$, $\sin \phi = S$ a dostaneme

$$mC\ddot{x}' + mS\ddot{y}' = -K\frac{3}{2}(Cx' + Sy') - K\frac{1}{2}(Cy' - Sx')$$

$$mC\ddot{y}' - mS\ddot{x}' = -K\frac{1}{2}(Cx' + Sy') - K\frac{1}{2}(Cy' - Sx')$$

Prvú rovnicu vynásobíme C , druhú $-S$ a sčítame a potom zasa prvú vynásobíme S a druhú C a opäť sčítame a dostaneme

$$m\ddot{x}' = -\frac{K}{2}x'(3C^2 - 2CS + S^2) - \frac{K}{2}y'(2CS + C^2 - S^2)$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{K}{2}y'(3S^2 + 2CS + C^2) - \frac{K}{2}x'(2CS + C^2 - S^2)$$

Rovnice sa dekuplujú, ak vyberieme uhol ϕ tak aby platilo

$$2CS + C^2 - S^2 = 0$$

ak táto podmienka bude splnená, potom môžeme rovnice ďalej zjednodušiť a dostaneme

$$m\ddot{x}' = -\frac{K}{2}x'(3C^2 - 2CS + S^2 + (2CS + C^2 - S^2))$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{K}{2}y'(3S^2 + 2CS + C^2 - (2CS + C^2 - S^2))$$

$$m\ddot{x}' = -\frac{K}{2}x'(4C^2)$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{K}{2}y'(4S^2)$$

Nájďme teraz S, C :

$$2CS + C^2 - S^2 = 0$$

$$2 + \frac{C}{S} - \frac{S}{C} = 0$$

a po substitúcii

$$t = \frac{S}{C}$$

dostaneme

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{2}$$

Odtiaľ

$$S^2 = \frac{S^2}{C^2 + S^2} = \frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$C^2 = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4}$$

Pohybové rovnice teda budú

$$m\ddot{x}' = -\frac{K}{2}(2 \mp \sqrt{2})x'$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{K}{2}(2 \pm \sqrt{2})y'$$

To sú rovnice dvoch lineárnych neviazaných oscilátorov. Dve rôzne substitúcie, ktoré vedú k cieľu sa líšia len výmenou pomenovania x' a y' . Vlastné frekvencie tých dvoch oscilátorov budú

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K(2 + \sqrt{2})}{2m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K(2 - \sqrt{2})}{2m}}$$

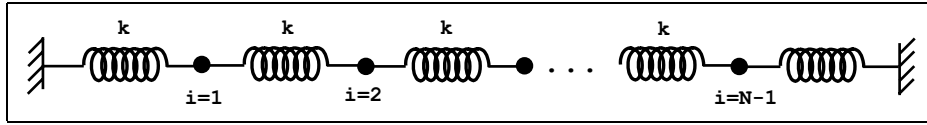


Figure 4: Jednorozmerná retiazka viazaných oscilátorov

5 Retiazka oscilátorov

Uvažujme jednorozmerný systém $N - 1$ častíc rovnakej hmotnosti m navzájom poprepájaných pružinami rovnakej tuhosti k . Krajné častice nech sú rovnakými pružinami spojené s pevnými stenami (Obr.4).

Napíšeme teraz pohybové rovnice pre tento systém. Označme výchylku i -tej častice z jej rovnovážnej polohy ako u_i , pre $i = 1, 2, \dots, (N - 1)$. A zavedme ešte pomocné konštanty $u_0 = 0$, $u_n = 0$. Potom pohybové rovnice sú (pre $i = 1, 2, \dots, (N - 1)$)

$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

Je to systém $n-1$ navzájom viazaných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu pre $N - 1$ neznámych funkcií $u_i(t)$.

Hľadáme najprv špeciálne riešenia, a to také, kde závislosť na čase a na indexe i sú faktorizované. Na základe intuície (ak takú dobrú intuíciu čitateľ nemá, treba to interpretovať ako intuíciu veľkých fyzikov) budeme hľadať tieto riešenia vo veľmi špeciálnom tvare

$$u_i^{(n)}(t) = \exp(-i\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi n}{N} i\right)$$

Poznamenanajme že používanie komplexných čísel je len pomocný trik, aby sme nemuseli používať priveľa goniometrických vzťahov, skutočné reálne fyzikálne riešenia skonštruujeme nakoniec z komplexných funkcií vhodnými lineárnymi kombináciami.

Pribudol nám tu ďalší index n , ktorý čísľuje rozličné lineárne nezávislé riešenia: proste takých riešení nájdeme viac, sú čísľované indexom n . Presnejšie, lineárne nezávislých riešení nájdeme $N - 1$ pre hodnoty indexu

$$n = 1, 2, \dots, N - 1$$

Po dosadení do sústavy rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} -m\omega_n^2 \sin\left(\frac{\pi n}{N} i\right) &= -2k \sin\left(\frac{\pi n}{N} i\right) + \\ &\quad + k\left(\sin\left(\frac{\pi n}{N} (i - 1)\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{N} (i + 1)\right)\right) \\ -m\omega_n^2 \sin\left(\frac{\pi n}{N} i\right) &= -2k \sin\left(\frac{\pi n}{N} i\right) + \\ &\quad + 2k \sin\left(\frac{\pi n}{N} i\right) \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) \\ \omega_n^2 &= 2\frac{k}{m}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right) \end{aligned}$$

Teda navrhnutý tvar je naozaj riešením, ak ω_n volíme podľa práve odvodeného vzťahu.

Hodnoty funkcií $u_i^{(n)}(t)$ pre $t = 0$ tvoria $N - 1$ lineárne nezávislých postupností

$$U_i^{(n)} \sin\left(\frac{\pi n}{N} i\right)$$

tieto postupnosti sú navzájom ortogonálne pre rôzne hodnoty indexu n , a to v nasledovnom zmysle

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi n}{N} i\right) \sin\left(\frac{\pi m}{N} i\right) = 0 \quad \text{pre } m \neq n$$

Okrem toho platí

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2\left(\frac{\pi n}{N} i\right) = \frac{N}{2}$$

Preto ľubovoľnú zadanú postupnosť U_i môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu

$$U_i = \sum_{n=1}^{N-1} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{N} i\right)$$

kde koeficienty rozvoja môžeme vyjadriť ako

$$c_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} U_i \sin\left(\frac{\pi n}{N} i\right)$$

Práve nájdené riešenia tvoria úplný systém riešení, pretože ak zvolíme ľubovoľné počiatočné podmienky

$$\begin{aligned} u_i(t=0) &= U_i \\ \dot{u}_i(t=0) &= V_i \end{aligned}$$

môžeme ľahko nájsť (komplexné) koeficienty C_n také, že riešenie spĺňajúce uvedené počiatočné podmienky môžeme vyjadriť v tvare

$$u_i(t) = \sum_{n=1}^{N-1} (c_n u_i^{(n)}(t) + \bar{c}_n \bar{u}_i^{(n)}(t))$$

Všimnime si ešte niekoľko význačných vlastností špeciálnych riešení, ktoré sme našli

- riešenia sú navzájom lineárne nezávislé a ortogonálne
- riešenia tvoria úplný systém
- riešenia sú stacionárne (čo znamená že charakter pohybu daného bodu sa s časom nemení)
- riešenia sú monofrekvenčné (všetky body vykonávajú periodický pohyb s tou istou frekvenciou)

6 Kontínium ako limitný prípad retiazky oscilátorov

Uvažujme jednorozmernú retiazku bodov viazaných pružinami a budeme ju vyšetrovať v limite kontínua. Za tým účelom budeme používať iné označenie, namiesto indexu i budeme používať index x ako diskretnú súradnicu rovnovážnej polohy uvažovaných bodov. Hmotné body teda sedia v polohách daných súradnicou x , ktorá nadobúda diskkrétne hodnoty z množiny

$$x \in i\Delta, i = 1, 2, \dots, N-1$$

V tomto označení majú pohybové rovnice tvar

$$m \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = -k(u(t, x) - u(t, x - \Delta)) - k(u(t, x) - u(t, x + \Delta))$$

s okrajovými podmienkami

$$u(t, x = 0) = u(t, x = N\Delta) = 0$$

Budeme teraz vyšetrovať limitu kontínua, teda limitu

$$\begin{aligned} N &\rightarrow \infty \\ \Delta &\rightarrow 0 \\ N\Delta &\rightarrow L \end{aligned}$$

Keď na pravej strane urobíme Taylorov rozvoj posunutí v premennej x do druhého rádu, dostaneme aproximáciu

$$m \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = k\Delta^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

Ak v limite kontínua budeme požadovať aby platilo

$$\frac{k\Delta^2}{m} \rightarrow c^2$$

dostaneme vlnovú rovnicu

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0$$

ktorá popisuje šírenie rýchlosťou c .

Naozaj, všeobecné riešenie tejto vlnovej rovnice má tvar

$$u(t, x) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$$

kde f a g sú funkcie jednej premennej také, aby bola splnená okrajová podmienka, inak sú ľubovoľné. Funkcia f zrejme popisuje šírenie sa vzruchov rýchlosťou c zľava doprava, funkcia g popisuje šírenie vzruchov sprava doľava.

Technika riešenia pre ľubovoľné počiatkové podmienky je celkom analogická diskretnému prípadu. Nájďme najprv normálne módy a riešenie konštruujeme ako ich lineárnu kombináciu.

Normálne módy hľadáme v tvare

$$u_n(x, t) = \exp(-i\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

odkiaľ po dosadení do vlnovej rovnice dostaneme

$$\omega_n^2 = c^2 \frac{\pi^2}{L^2} n^2$$

resp.

$$\omega_n = c \frac{\pi n}{L}$$

Normálne módy teda vyzerajú ako stojaté vlny s vlnovou dĺžkou

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Dostali sme teda diskkrétne vlnové dĺžky a k nim prislúkajúce diskkrétne hodnoty frekvencií ω_n . Mimovoľne sme vlastne použili techniku riešenia pomocou Fourierových transformácií, diskrétnosť frekvencií a vlnových dĺžok teda plynie z ohraničenosti priestoru premennej x .

Normálne módy sú ortogonálne v zmysle

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

a majú aj ďalšie vlastnosti obdobne ako v diskrétnom prípade reťazky oscilátorov, teda

- normálne módy sú navzájom lineárne nezávislé a ortogonálne
- normálne módy tvoria úplný systém
- normálne módy sú stacionárne (čo znamená že charakter pohybu daného bodu sa s časom nemení)
- normálne módy sú monofrekvenčné (všetky body vykonávajú periodický pohyb s tou istou frekvenciou)

7 Koaxiálny kábel

V tomto odseku si ukážeme konštrukciu jednoduchého modelu koaxiálneho kábla, odvodenie príslušnej diferenciálnej rovnice, a stanovenie fyzikálne motivovaných okrajových podmienok.

Koaxiálny kábel je tvorený dvoma vodičmi so starostlivo usporiadanou geometriou. Vodiče sú tvorené súosými valcami (Obr.5) navzájom oddelenými vhodným dielektrikom. Koaxiálny kábel sa používa na prenos vysokofrekvenčných signálov s frekvenciou rádovo stoviek MHz až niekoľko GHz.

Pri takých veľkých frekvenciách signálu si treba uvedomiť, že intuitívna predstava o "vedení prúdu" sústavou dvoch vodičov zlyháva. Pri frekvencii 1GHz a rýchlosti šírenia signálu rádovo rýchlosťou svetla je dĺžka príslušnej vlny približne 30 cm. Bežnú predstavu o vedení prúdu získavame skúsenosťou s jednoduchými elektrickými obvodmi typu "baterka, vypínač, žiarovka" (obr.6.

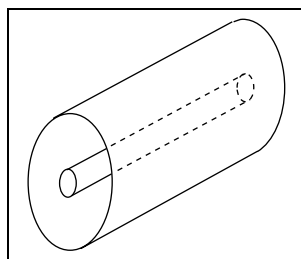


Figure 5: Koaxiálny kábel tvorený súosími valcovými vodičmi

Ak v takom jednosmernom obvode zapnem vypínač, všetky voľné elektróny vo vodičoch sa dajú naraz do pohybu podobne ako vojsko ktoré, hoci stojí v dlhom zástupe, na signál trúbky vykročí naraz ľavou nohou a celá masa vojska sa dá naraz do pohybu. Ak však zástup vojska bude prídlhý, zvukový signál potrebuje nejaký nezanedbateľný čas, kým dorazí na koniec zástupu a poslední vojaci vykročia viditeľne neskôr ako prví. Signálom pre "vykročenie" elektrónov vo vodiči je elektrické pole, ktoré sa šíri vo vodiči rádovo rýchlosťou svetla. Ak by som však zapínal a vypínal vypínač s frekvenciou 1GHz, potom elektróny vzdialené rádovo 10 cm by prvé zapnutie ešte ani nespoznali a vypínač by už bol vypnutý. Teda elektróny na začiatku vedenia už dostanú povel "stoj!" kým elektróny vo vzdialenosti okolo 10 cm ešte len dostávajú povel "v chod!". Vojsko, pochodujúce na povel takej "šialenej trúbky" sa nebude pohybovať ako jednotliata masa ale medzi jednotlivými radmi budú vznikať zhustenia a zriedenia.

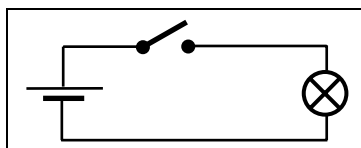


Figure 6: Jednoduchý elektrický obvod

Podobne budú reagovať elektróny vo vodiči ak elektrické pole v ňom bude budené striedavým zdrojom s vysokou frekvenciou. Prúd vo vodiči nebude homogénny, vo vodiči budú vznikať zhustenia a zriedenia nábojovej hustoty.¹ Ak v sústave vodičov vznikajú nábojové nehomogenity, potom nehomogenity v dvoch blízkyh vodičoch navzájom interagujú. Ak v jednom vodiči vznikne zriedenie elektrónovej hustoty, má toto miesto charakter kladne nabitých oblastí, ktorá má tendenciu v blízkom vodiči vyvolávať zhustenie elektrónov, priťahujúc k sebe záporne nabitých elektróny. Lokálne vzniká teda čosi ako malý nabitý kondenzátor: jeden vodič sa lokálne nabíja kladne, protiľahlý vodič sa nabíja záporne.

Okrem tohto efektu treba očakávať i efekt vzájomnej interakcie prúdov v blízkyh vodičoch v dôsledku elektromagnetickej indukcie. Všimnime si, že v koaxiálnom kábli vonkajší vodič sa nachádza v magnetickom poli budenom

¹Lasica so Satinským teda nemali pravdu, keď v jednom z dávnejších kabaretov si pochvaľovali, že slovenský elektrický prúd pekne plynie a nerobí hlúčky ani hrčky. Dakedy robí, keď ho nútime kmitať.

prúdom tečúcim vo vnútornom vodiči. Keďže ide o časovo rýchlo sa meniaci prúd bude sa i magnetické pole ním budené meniť s časom a teda v mieste vonkajšieho vodiča sa bude indukovať elektrické pole ovplyvňujúce pohyb náboja v tom vodiči.

Z hľadiska vedenia signálu vysokých frekvencií si teda koaxiálny kábel nemôžeme predstavovať ako dva paralelné ideálne vodiče. Adekvátnejší model je znázornený na obr.7. Kábel si môžeme predstaviť ako tzv. obvod s rozloženými parametrami. Ide o metódu, v ktorej namiesto toho, aby sme uvažovali reálne, navzájom sa ovplyvňujúce vodiče, uvažujeme obvod prepojený ideálnymi vodičmi, do ktorého pridáme súčiastky (cievky, kondenzátory), ktoré by mali modelovať vzájomnú interakciu skutočných vodičov.

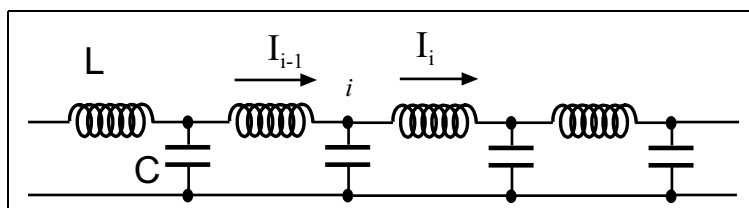


Figure 7: Model koaxiálneho kábla ako obvodu s rozloženými parametrami

V našom prípade každý kúsok vedenia sa javí, ako keby bol premostený malým kondenzátorom a súčasne bola do neho vložená malá indukčnosť. Pravda, počet súčiastok ani ich hodnoty nie sú jednoznačne určené. Mali by sme vlastne uvažovať limitný prípad nekonečného počtu nekonečne malých hodnôt parametrov, tak aby v limite bolo verne simulované skutočné vedenie.

Odvodíme teraz rovnicu určujúcu šírenie prúdového signálu v takom vedení s rozloženými parametrami.

Označme I_{i-1} prúd pritekajúci zľava do i -teho uzla a I_i prúd vytekajúci z toho uzla smerom doprava. Do kondenzátora v i -tom uzle teda priteká prúd $I_{i-1} - I_i$. Napätie na kondenzátore teda bude

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int (I_{i-1} - I_i) dt$$

Teraz napíšeme druhý Kirchhoffov zákon pre slučku na obr.8 Dostaneme

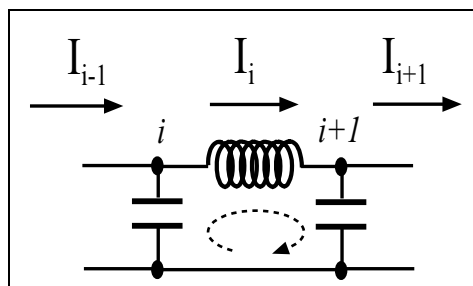


Figure 8: Kirchhoffov zákon: súčet napätí okolo uzatvorenej slučky je rovný nule

$$-\frac{1}{C} \int (I_{i-1} - I_i) dt + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int (I_i - I_{i+1}) dt = 0$$

a po derivovaní

$$-\frac{I_{i-1} - I_i}{C} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I_i - I_{i+1}}{C} = 0$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{1}{LC} (I_{i+1} - 2I_i + I_{i-1})$$

Teraz by sme radi urobili limitný prechod ku spojitým premenným. Zavedieme najprv premennú x ako súradnicu i -teho uzla. Súradnice susedných uzlov potom budú $x + \Delta$ a $x - \Delta$, kde Δ je vzdialenosť susedných uzlov. V novom označení bude

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} (I_{x+\Delta} - 2I_x + I_{x-\Delta})$$

Výraz na pravej strane je štandardnou numerickou aproximáciou druhej derivácie, približne teda možno písať

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{\Delta^2}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

Uvedomme si teraz, že L a C sú indukčnosť a kapacita pripadajúca na diskretnú bunku, ktorej veľkosť v smere osi x je Δ . Ak zavedieme označenie

$$\tilde{L} = \frac{L}{\Delta} \quad \text{a} \quad \tilde{C} = \frac{C}{\Delta}$$

majú \tilde{L} a \tilde{C} význam indukčnosti a kapacity vodiča pripadajúcich na jednotku dĺžky. Dostaneme nakoniec

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

kde

$$c^2 = \frac{1}{\tilde{L}\tilde{C}}$$

Dostali sme teda vlnovú rovnicu. Prúdový signál sa šíri koaxiálnym vedením ako vlna, ktorej fázová rýchlosť je c .

Ukážme si teraz na konkrétnom príklade, ako treba postupovať pri výbere okrajovej podmienky. Predstavme si, že modelujeme koaxiálny kábel používaný pre konštrukciu lokálnej počítačovej siete (tzv. tenký Ethernet). Podstatnou podmienkou pre správnu funkciu siete je, aby na koncoch kábla nedochádzalo k odrazom signálu: odrazený signál se šíri káblom naspäť, interferuje s priamym signálom a dochádza k skresleniu signálu a narušeniu chodu siete.² V prípade nekonečne dlhého kábla k odrazom nedochádza. Okrajové podmienky na koncoch kábla treba fyzikálne zabezpečiť tak, aby pre signál sa kábel javil ako efektívne nekonečný. Kľúčom k riešeniu je uvedomiť si fakt, že signál, ktorý dorazí na koniec kábla má určitú energiu. Ak má nastať situácia ako keby šírenie signálu pokračovalo ďalej, musí byť táto energia na konci kábla pohltená, inak nastane odraz. Pohltiť znamená presnejšie transformovať na inú formu energiu: zjavne na teplo, ktoré je potom disipované do okolia. Taká požiadavka priamo evokuje predstavu, že vhodným zakončením by mohol byť odpor (rezistor). Ide o to určiť jeho optimálnu veľkosť.

²V skutočnosti ide o vážnejší problém, bezodrazovosť je podstatná kvôli špecifickému spôsobu, ktorým protokol Ethernetu rieši otázku prístupu žiadateľov o vysielanie na sieť.

Predstavme si teda, že na konci vedenia sú vodiče koaxiálneho kábla premostené rezistorom R . Určme najprv okrajovú podmienku vlnovej rovnice, ktorá matematicky zodpovedá takému zapojeniu. Pri odvodení sa musíme vrátiť k diskretnému modelu. Posledná bunka na pravej strane je znázornená na obr.9. Podľa Kirchhoffovo zákona dostaneme, že napätie na kondenzátore je rovné napätiu na koncovom odpore, teda

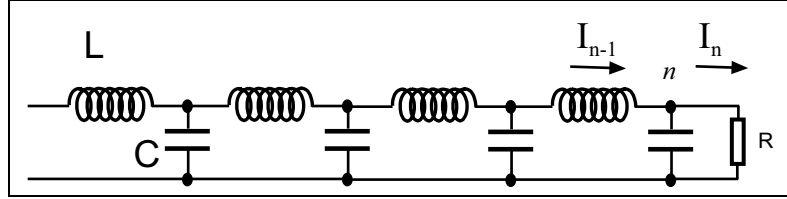


Figure 9: Koncový odpor na pravom konci kábla

$$\frac{1}{C} \int (I_{n-1} - I_n) dt = RI_n$$

$$\frac{1}{C} (I_{n-1} - I_n) = R \frac{\partial I_n}{\partial t}$$

Po prechode k spojitej premennej x a nahradení výrazu na ľavej strane deriváciou dostaneme

$$-\frac{1}{\bar{C}} \frac{\partial I}{\partial x} = R \frac{\partial I}{\partial t}$$

Dostávame teda zmiešanú okrajovú podmienku.

Vráťme sa teraz k otázke ako treba voliť veľkosť R , aby na pravom konci kábla nenastal odraz. Uvedomme si že ľubovoľné riešenie vlnovej rovnice môžeme napísať v tvare

$$I(t, x) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

kde f a g musia byť volené tak, aby boli splnené okrajové podmienky, inak majú ľubovoľný tvar. Je pritom zrejmé, že funkcia f popisuje vzruchy šíriace sa zľava doprava, funkcia g popisuje vzruchy šíriace sa sprava doľava. dosadíme teraz do tohto vyjadrenia okrajovú podmienku pravého konca kábla. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\bar{C}} f' - \frac{1}{c\bar{C}} g' &= R f' + R g' \\ \left(\frac{1}{c\bar{C}} - R\right) f' - \left(\frac{1}{c\bar{C}} + R\right) g' &= 0 \end{aligned}$$

Ak teraz zvolíme

$$R = \frac{1}{c\bar{C}} = \sqrt{\frac{\tilde{L}}{\bar{C}}}$$

potom okrajová podmienka nijako neobmedzuje tvar funkcie f , zato vynucuje, aby platilo

$$g = \text{const}$$

čo znamená nešírenie sa vzruchoch sprava doľava na pravom konci kábla, teda žiaden odraz.

8 Elektromagnetické pole v pravouhlom rezonátore

$$\begin{aligned}
 E_x(x, y, z, t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \sum_{m,n,l} \left(E_{x,mC} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + E_{x,mS} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) \\
 &\times \left(E_{x,nC} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + E_{x,nS} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right) \\
 &\times \left(E_{x,lC} \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right) + E_{x,lS} \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\Delta E_x(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(x, y, z, t) = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \omega^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 + n^2 + l^2)$$

$$\begin{aligned}
 E_x(x, y, z, t) &= \sum_{m,n,l} \exp(-i\omega_{m,n,l} t) \left(E_{x,mC} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + E_{x,mS} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) \\
 &\times \left(E_{x,nC} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + E_{x,nS} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right) \\
 &\times \left(E_{x,lC} \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right) + E_{x,lS} \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x(x, y, z, t) &= \sum_{m,n,l} \exp(-i\omega_{m,n,l} t) \left(E_{x,mC} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + E_{x,mS} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) \\
 &\times \left(E_{x,nS} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right) \\
 &\left(E_{x,yS} \sin\left(\frac{m\pi z}{a}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_x = \left(E_{x,mC} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + E_{x,mS} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\tilde{E}_y = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(E_{y,nC} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + E_{y,nS} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\tilde{E}_z = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \left(E_{z,lC} \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right) + E_{z,lS} \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right) \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{m\pi}{a} \left(-E_{x,mnC} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + E_{x,mnS} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right) + \\
 &+ \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(-E_{y,mnC} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + E_{y,mnS} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right) + \\
 &+ \frac{l\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \left(-E_{z,mnC} \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right) + E_{z,mnS} \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$E_{x,mnlS} = E_{y,mnlS} = E_{z,mnlS} = 0$$

$$\tilde{E}_x = E_{x,mnl} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\tilde{E}_y = E_{y,mnl} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\tilde{E}_z = E_{z,mnl} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\frac{m\pi}{a} E_{x,mnl} + \frac{n\pi}{a} E_{y,mnl} + \frac{l\pi}{a} E_{z,mnl} = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\begin{aligned} i\omega \tilde{B}_z &= \frac{m\pi}{a} E_{y,mnl} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right) + \\ &- \frac{n\pi}{a} E_{x,mnl} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_x = -i \left(\frac{n\pi}{a\omega} E_{z,mnl} - \frac{l\pi}{a\omega} E_{y,mnl} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\tilde{B}_y = -i \left(\frac{l\pi}{a\omega} E_{x,mnl} - \frac{m\pi}{a\omega} E_{z,mnl} \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\tilde{B}_z = -i \left(\frac{m\pi}{a\omega} E_{y,mnl} - \frac{n\pi}{a\omega} E_{x,mnl} \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$-i \frac{\omega}{c^2} \tilde{E}_z = \frac{m\pi}{a} (-i) \left(\frac{l\pi}{a\omega} E_{x,mnl} - \frac{m\pi}{a\omega} E_{z,mnl} \right) (-1) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right) +$$

$$- \frac{n\pi}{a} (-i) \left(\frac{n\pi}{a\omega} E_{z,mnl} - \frac{l\pi}{a\omega} E_{y,mnl} \right) (-1) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \tilde{E}_z = \left(\frac{m^2 + n^2}{a^2} E_{z,mnl} - \frac{l}{a} \left(\frac{m}{a} E_{x,mnl} + \frac{n}{a} E_{y,mnl} \right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \tilde{E}_z = \left(\frac{m^2 + n^2}{a^2} E_{z,mnl} - \frac{l}{a} \left(-\frac{l}{a} E_{z,mnl} \right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \tilde{E}_z = \left(\frac{m^2 + n^2 + l^2}{a^2} E_{z,mnl} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$\frac{1}{c^2} \omega^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 + n^2 + l^2)$$