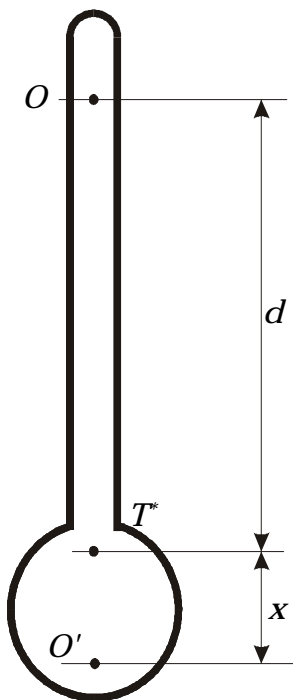


# MERANIE TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA REVERZNÝM KYVADLOM

Doc. Ing. Július Štelina, CSc.

## Teoretický úvod:

V tejto úlohe si ukážeme, ako sa dá využitím fyzikálneho kyvadla, ktoré je upravené určitým spôsobom, určiť tiažové zrýchlenie (zrýchlenie voľného pádu). Predstavme si fyzikálne kyvadlo schematicky znázornené na obr. 1. Položme si otázku, či takéto kyvadlo okrem toho, že môže kývať okolo osi  $O$  s periódou  $T$ , bude kývať okolo osi  $O'$ , ktorá sa nachádza na opačnej strane od ťažiska, s tou istou periódou ako okolo osi  $O$ . Označme túto periódou  $T'$ . Ukázali sme, že pre periódou fyzikálneho kyvadla platí vzťah (pozri úlohu „Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla“ vzťah (8)):



Obr. 1

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}, \quad (1)$$

kde  $I$  je moment zotrvačnosti vzhľadom na os  $O$ ,  $m$  je hmotnosť kyvadla,  $g$  je tiažové zrýchlenie a  $d$  vzdialenosť osi  $O$  od ťažiska  $T^*$ . Pre periódou  $T'$  kyvadla vzhľadom na os  $O'$  platí analogický vzťah:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{mgx}}. \quad (2)$$

V tomto vzťahu je  $I'$  moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os  $O'$  a  $x$  je vzdialenosť tejto osi od ťažiska  $T^*$  (viď Obr. 1).

Ak požadujeme, aby tietoperiódy boli rovnaké musí platiť

$$T = T'. \quad (3)$$

Po dosadení vzťahu (1) a (2) do vzťahu (3) po úprave dostaneme

$$\frac{I}{d} = \frac{I'}{x} \quad (4)$$

Použitím Steinerovej vety (pozri literatúru alebo úlohu „Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla“, vzťah (10)) pre momenty zotrvačnosti  $I$  a  $I'$  platí

$$I = I_0 + md^2; \quad I' = I_0 + mx^2. \quad (5a,b)$$

Po dosadení vzťahu (5a,b) do vzťahu (4) dostávame

$$\frac{I_0 + md^2}{d} = \frac{I_0 + mx^2}{x}. \quad (6)$$

odkiaľ po úprave dostávame kvadratickú rovnicu pre  $x$

$$mdx^2 - (I_0 + md^2)x + I_0d = 0. \quad (7)$$

Táto rovnica poskytuje nasledovné riešenia

$$x_1 = \frac{I_0}{md}; \quad x_2 = d \quad (8)$$

Z riešenia kvadratickej rovnice vidíme, že pre dané kyvadlo existujú na druhej strane ťažiska dve osi, okolo ktorých kyvadlo kýva s rovnakou periódou ako okolo osi  $O$ . Jedna je symetricky a druhá nesymetricky položená voči osi  $O$  vzhľadom na ťažisko. Riešenie  $x_2 = d$  určuje polohu symetricky položenej osi. Riešenie  $x_1 = I_0 / m \cdot d$  určuje polohu nesymetricky položenej osi. Vzájomnú vzdialenosť osi  $O$  a nesymetricky položenej osi  $O'$  (okolo ktorých sa kyvadlo kýva s rovnakou periódou) nazývame *redukovanou dĺžkou fyzikálneho kyvadla*. Pre ňu potom platí

$$l = d + \frac{I_0}{md} = \frac{md^2 + I_0}{md} = \frac{I}{md}. \quad (9)$$

Vzťah (9) dosadíme do vzťahu (1) a pre periódu fyzikálneho kyvadla dostaneme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}. \quad (10)$$

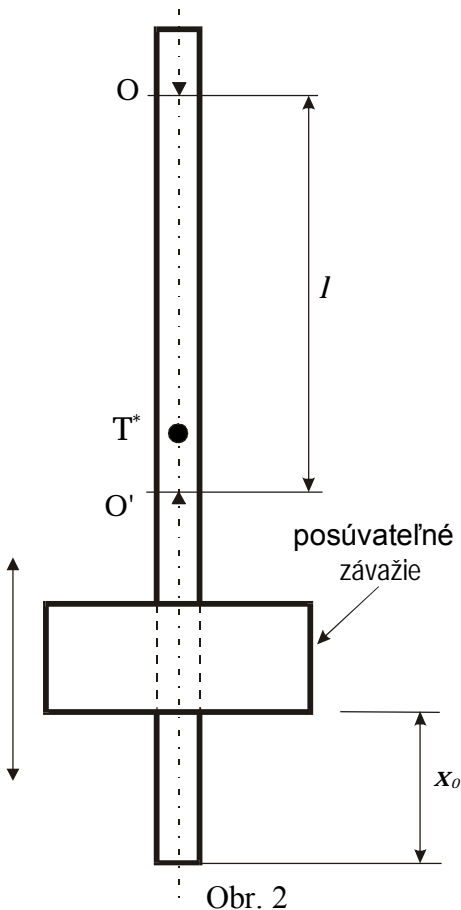
Po úprave vzťahu (10) dostaneme pre tiažové zrýchlenie vzťah

$$g = \frac{4\pi^2 I}{T^2}. \quad (11)$$

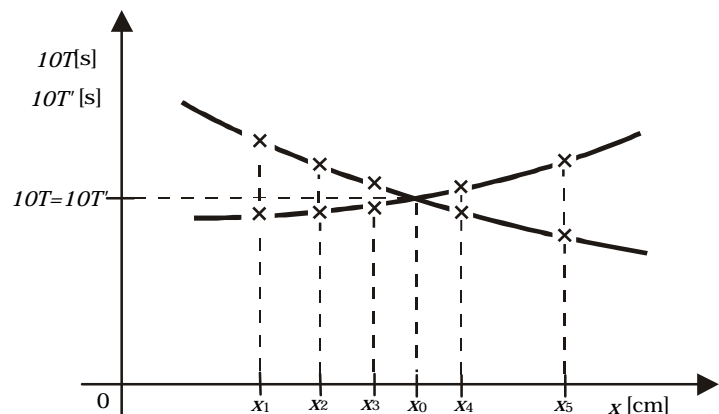
Vzťah (11) nám umožňuje určiť tiažové zrýchlenie, keď poznáme redukovanú dĺžku a periódu použitého kyvadla.

#### Náčrt a popis zariadenia:

Kyvadlo, ktoré má vyššie uvedené vlastnosti nazývame *reverzné kyvadlo*. Reverzné kyvadlo je tyč opatrená 2 osami s britmi obrátenými proti sebe (pozri obr. 2). Na jednom konci tyče je posúvateľné závažie, ktoré spôsobuje, že osi O a O' sú vzhľadom na ťažisko T\* nesymetricky položené. Posunutím tohoto závažia na vhodné miesto a jeho zafixovaním (fixačnou skrutkou) môžeme



Obr. 2



Obr. 3

dosiahnuť,

aby perióda kyvadla bola vzhľadom na osi O a O' rovnaká. Potom vzdialenosť  $\overline{OO'}$  (vzdialenosť britov) je redukovaná dĺžka  $l$  reverzného kyvadla.

#### Metóda merania a postup pri meraní:

Aby vyššie uvedené kyvadlo malo vlastnosti reverzného kyvadla postupujeme nasledovne.

Posúvateľné závažie dáme do polohy  $x_1$  (napr. 1 cm), potom zmeráme stopkami dobu desiatych periód  $10T$  okolo osi O. Po zavesení kyvadla na druhý brit podobne zmeráme dobu desiatych periód  $10T'$  (kyvadlo kýva okolo osi O'). Takto postupujeme pre polohy  $x_2$  (napr. 5 cm),  $x_3$  (napr. 9 cm),  $x_4$  (napr. 12 cm) atď. posúvateľného závažia. Získané hodnoty doby  $10T$  a  $10T'$  pre rôzne polohy  $x$  vynesieme do grafu, ktorý je schematicky znázornený na obr. 3.

Z takto zostrojeného grafu môžeme určiť polohu  $x_0$  posúvateľného závažia, ktorá zodpovedá prípadu, keď  $10T = 10T'$ , t. j. keď perióda okolo obidvoch osí O a O' je rovnaká. Po nastavení závažia na túto hodnotu experimentálne overíme súhlas  $10T$  a  $10T'$  okolo obidvoch osí. Ak je rozdiel týchto dvoch hodnôt väčší ako 0,09 s posúvateľné závažie s citom posunieme (cca 0,5 cm) na jednu alebo druhú stranu okolo  $x_0$ . Postup opakujeme. Po získaní rovnosti  $10T = 10T'$  vykonáme

meranie periódy okolo jednej z osí postupnou metódou (odporúčame vzdialenejšiu os O od ťažiska kyvadla – pozri obr. 2).

Hodnoty desiatich periód pri nastavovaní reverzného kyvadla zapíšeme do tabuľky:

$i$	1	2	3	4	..
$x_i$					
$10T_i$ [s]					
$10T_i'$ [s]					

Z tretieho a štvrtého riadku potom súčasne môžeme vidieť, kedy  $10T_i \doteq 10T_i'$ , t. j. aká hodnota  $x_0$  zodpovedá polohe posúvateľného závažia v zmysle vyššie uvedeného textu.

Hodnoty násobku periódy v zmysle postupnej metódy je výhodné zapísať do tabuľky

$i$	$i10T$ [s]	$i+5$	$(i+5)10T$ [s]	$T_{50}$ [s]	$T_i=T_{50}/50$	$\Delta_i = \bar{T} - T_i$	$\Delta_i^2$ [s <sup>2</sup> ]
1	$T_{10}$	6	$T_{60}$	$T_{60}-T_{10}=T_{50}$	$T_1$	$\bar{T}-T_1$	$(\bar{T}-T_1)^2$
2	$T_{20}$	7	$T_{70}$	$T_{70}-T_{20}=T_{50}$	$T_2$	.	
3	$T_{30}$	8	$T_{80}$	.	$T_3$	.	
4	$T_{40}$	9	$T_{90}$	.	$T_4$	.	
5	$T_{50}$	10	$T_{100}$	.	$T_5$	.	
				$\frac{\sum T_{50}}{i50} = \bar{T}$			$\sum \Delta_i^2$

**Poznámka:** Ak máme k dispozícii kyvadlo s prídavným závažím so závitom, jemnú korekciu robíme otáčaním tohoto závažia.

### Úlohy:

1. Posúvaním posúvateľného (vyvažovacieho) závažia pozdĺž tyče kyvadla nastavte kyvadlo tak, aby malo vlastnosti reverzného kyvadla, t. j., aby doby kmitu okolo oboch osí boli rovnaké.
2. Pre nastavené reverzné kyvadlo zmerajte postupnou metódou dobu kmitu a určite chybu merania.
3. Zmerajte vzdialenosť oboch osí a odhadnite chybu merania.
4. Vypočítajte hodnotu tiažového zrýchlenia podľa vzťahu (11)
5. Stanovte chybu výsledku s uvážením parciálnych chýb priamo meraných veličín.

### Spracovanie výsledkov:

Tiažové zrýchlenie určíme podľa vzťahu (11), do ktorého dosadíme nameranú hodnotu redukovanej dĺžky  $l$  (vzdialenosť britov) a priemernú hodnotu periódy  $\bar{T}$ , t. j.

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2} \quad [\text{ms}^{-2}] \quad (12)$$

Chybu  $\delta_T$  merania periódy určíme podľa vzťahu (11) z kapitoly „Vyhodnocovanie chyby merania“ a chybu  $\delta_l$  redukovanej dĺžky  $l$  určíme odhadom (viď citovanú kapitolu). Tiažové zrýchlenie ohodnotíme chybou podľa nasledovného vzťahu (viď kapitolu „Vyhodnocovanie chyby merania“ vzťah (17)):

$$\bar{\delta}_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 \bar{\delta}_T^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 \bar{\delta}_l^2}. \quad (13)$$

Výsledok merania tiažového zrýchlenia zapíšeme v tvare

$$g = \bar{g} \pm \bar{\delta}_g \quad (14)$$

**Kontrolné otázky:**

1. Čo je tiažové zrýchlenie?
2. Čo je to reverzné kyvadlo?
3. Čo je to redukovaná dĺžka reverzného kyvadla?
4. Vysvetlite, ako sa dá reverzným kyvadlom určiť tiažové zrýchlenie!
5. Ako určíme strednú kvadratickú chybu pri stanovení periódy reverzného kyvadla?
6. Ako určíme strednú kvadratickú chybu pre namerané tiažové zrýchlenie?