# VYŠETROVANIE STOJATÉHO VLNENIA NA STRUNE

Doc. RNDr. Drahoslav Vajda, CSc.

***Teoretický úvod:***

Kmitaním rozumieme časovo premenné zmeny jednej alebo niekoľkých fyzikálnych veličín okolo istej strednej hodnoty. Kmitavý pohyb vykonáva každý hmotný bod vystavený pôsobeniu síl smerujúcich do jeho rovnovážnej polohy. Ak sa kmitavý pohyb opakuje po rovnako veľkom časovom intervale $T$ (perióde), nazývame ho periodickým kmitavým pohybom. Prevrátená hodnota periódy je frekvencia $\nu$, $[\nu] = s^{-1}$= Hz = hertz.

Proces, prostredníctvom ktorého sa z jedného miesta prostredia šíri kmitavý pohyb do celého prostredia nazývame vlnenie, presnejšie postupné vlnenie alebo postupná vlna. Vlnenie okrem periódy $T$ a frekvencie $\nu$ je ďalej charakterizované vlnovou dĺžkou $\lambda$. Je to vzdialenosť, ktorú vlnenie prejde za dobu jednej periódy, teda $\lambda = vT$ , kde $v$ je rýchlosť, ktorou sa vlnenie v danom prostredí šíri. Túto rýchlosť pomocou vlnovej dĺžky $\lambda$ a frekvencie $\nu$ môžeme vyjadriť nasledovným vzťahom

$$v = \nu\lambda \ . \tag{1}$$

Ak kmitá ohraničená sústava hmotných bodov, teleso konečných rozmerov alebo určitý objem tekutiny vymedzený nádobou, môže v takejto kmitajúcej sústave dôjsť k javu, ktorý nazývame rezonancia. Pri rezonancii všetky body sústavy kmitajú s jednou frekvenciou – rezonančnou frekvenciou – a v rôznych miestach sústavy majú rôznu amplitúdu, ktorá, ak neprihliadame k tlmeniu, je stála. K rezonancii dochádza napríklad aj v prípade šírenia vlnenia v strune. Podľa druhu kmitajúcej sústavy závisí rezonančná frekvencia od rôznych vplyvov, napr. od ich tvaru a pod. V prípade strún rezonančná frekvencia závisí od ich dĺžky, lineárnej hustoty a veľkosti napínacej sily.

V prostredí sa môžu súčasne šíriť viaceré kmity. V tej oblasti prostredia, v ktorej sa vlnenia prekrývajú nastáva *skladanie (interferencia) vĺn*, ktoré sa prejavuje v tom, že výsledný kmitavý pohyb hmotných elementov prostredia má v niektorých miestach väčšiu, v iných miestach menšiu amplitúdu, ktorá bude závisieť najmä od rozdielu fáz skladaných kmitov.

Osobitným prípadom vlnenia, ktoré vzniká interferenciou dvoch vlnení, je tzv. *stojaté vlnenie.* Vzniká zložením dvoch proti sebe postupujúcich vlnení s rovnakými amplitúdami a frekvenciami.

Vyšetrujme jednorozmerný prípad (vlnenie šíriace sa v bodovom rade) a majme dve takéto proti sebe postupujúce vlnenia šíriace sa rýchlosťou $v$. Položme počiatok súradnice $x$ ($x = 0$) do miesta, v ktorom sa obe proti sebe postupujúce vlnenia v okamžiku $t = 0$ stretávajú tak, že medzi kmitmi oboch vĺn nie je fázový rozdiel. Výchylka vlnenia šíriaceho sa vpravo (v kladnom smere osi $X$) je daná vzťahom

$$u_1(x,t) = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{2}$$

a vlnenia šíriaceho sa vľavo (v zápornom smere osy $X$) vzťahom

$$u_2(x,t) = A \sin \omega\left(t + \frac{x}{v}\right) . \tag{3}$$

Výchylka výsledného vlnenia je súčtom oboch výchyliek, $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$. Po dosadení a po úprave dostávame

$$u(x,t) = A_v \sin \omega t \tag{4}$$

kde amplitúda výsledného vlnenia $A_v$ je daná vzťahom

$$A_v = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \tag{5}$$

a vidíme, že je funkciou súradnice $x$.

Miestam, v ktorých $A_v$ nadobúda maximálnu hodnotu $A_v = 2A$, hovoríme *kmitne*. Kmitne sa vytvárajú v miestach, v ktorých súradnica $x$ nadobúda hodnotu rovnú párnemu násobku štvrtiny vlnovej dĺžky $\lambda$, teda

$$x = 2k\frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots \tag{6}$$

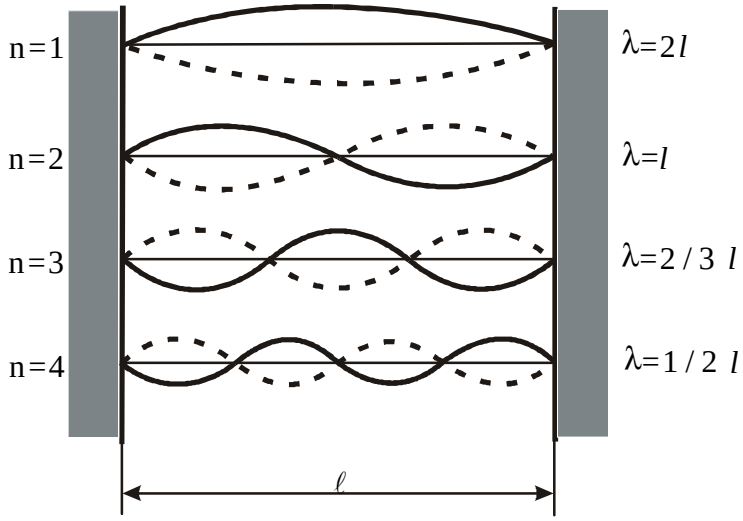
Miestam, v ktorých $A_v = 0$, hovoríme *uzly*. Tieto miesta sú trvale v kľude. Uzly sa vytvárajú v miestach, v ktorých súradnica $x$ nadobúda hodnotu rovnú nepárnemu násobku štvrť vlnovej dĺžky $\lambda$, teda

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots \tag{7}$$

Zo vzťahu (4) a (5) vidíme, že výsledné vlnenie, ktoré vzniklo superpozíciou proti sebe postupujúcich rovnakých (koherentných) vlnení, nepostupuje v smere a ani proti smeru osy $x$. To je stojaté vlnenie.

Pri stojatom vlnení kmitajú všetky body prostredia vzdialené od seba o vlnovú dĺžku s rovnakou fázou, ale s amplitúdou $A_v$ periodicky závislou od polohy bodu v priestore, vzťah (5).

Stojaté vlnenie sa vytvára v bodovom rade, ktorý je na oboch stranách obmedzený (napr. struna, tyč a pod.) odrazom postupného vlnenia na jeho koncoch. Nazývame ho tiež *chvenie*.



Obr. 1

Ak bodový rad (napr. struna) o dĺžke $l$ má oba konce pevné, môžu v ňom vznikať len stojaté vlny s uzlami na oboch koncoch, obr. 1. Pretože dva susedné uzly sú vzdialené o $\lambda/2$, musí byť vždy na celej dĺžke struny celočíselný počet polvĺn, teda

$$n\frac{\lambda_n}{2} = l; \quad n = 1, 2, 3,\ldots \tag{8}$$

Bodový rad (struna) sa teda môže chvieť s frekvenciami

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2l}v, \quad n = 1, 2, 3 \tag{9}$$

Základné chvenie, $n = 1$, vznikne, ak sa v strune vytvorí jedna polvlna, t. j. $\lambda_1 = 2l$. Jeho frekvencia, nazvaná základná frekvencia, je $\nu_1 = v/\lambda_1 = v/(2l)$. Vyššie frekvencie chvenia, ktoré sú celočíselným násobkom základnej frekvencie, $\nu_n = n\upsilon_1, n > 1$, sa nazývajú vyššími harmonickými.

**Poznámka:** Okrem základného chvenia vznikajú vždy i vyššie harmonické pričom o ich počte a ich amplitúde (intenzite) rozhoduje spôsob rozochvenia príslušného útvaru. Napr.: strunu môžeme rozochvieť sláčikom (husle), brnknutím (gitara), úderom (klavír) a pod.

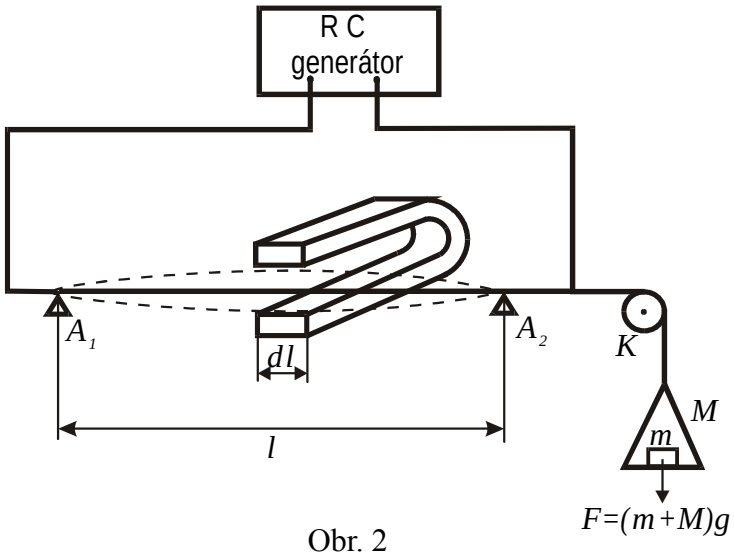
***Metóda vyšetrovania:***

Cieľom úlohy je vyšetriť vplyv vonkajších okolností a podmienky vzniku stojatej vlny v jednorozmernom ohraničenom prostredí. V ďalšom budeme vyšetrovať stojaté vlnenie (chvenie) vytvorené v strune. Struna je útvar, ktorého priečne rozmery voči dĺžke môžeme zanedbať.

V strune, ktorej jednotka dĺžky má hmotnosť $s[\mathrm{kg/m}]$ (lineárna hustota) a ktorá je napínaná silou $F$, sa šíri vlnenie rýchlosťou

$$v = \left(\frac{F}{s}\right)^{1/2}. \qquad (10)$$

Majme strunu z elektricky vodivého materiálu upnutú tak, ako je to znázornené na obr. 2.




Obr. 2

Dĺžka struny $l$ je určená vzdialenosťou bodov upevnenia (britov), t. j. bodmi $A_1$ a $A_2$. Napínacia sila $F$ je rovná tiaži závažia hmotnosti $m$ uloženého na miske a tiaži misky o hmotnosti $M$, $F = (m+M)g$. Závažie a misku je možné nahradiť regulovateľným posuvom s dynamometrom.

Zdroj striedavého elektrického napätia regulovateľnej frekvencie (RC-generátor) vytvára v strune striedavý (harmonický) elektrický prúd $I = I_0 \cos \omega t$.

Časť struny o dĺžke $dl$ sa nachádza v magnetickom poli medzi pólmi permanentného magnetu.

Predpokladajme, že magnetické pole o indukcii $B$ je na celom úseku $dl$ homogénne. Na úsek $dl$ pôsobí Lorentzova sila

$$d\vec{F}_L = Id\vec{l} \times \vec{B} \qquad (11)$$

a je zdrojom priečneho postupného vlnenia, ktoré sa v strune z tohoto miesta šíri napravo aj naľavo.

Z významu vektorového súčinu vzťahu (11) je zrejmé, že sila $d\vec{F}$ je kolmá na $d\vec{l}$ aj na $\vec{B}$ a jej veľkosť je

$$dF_L = I_0 dlB \cos \omega t. \qquad (12)$$

Zo vzťahu (12) je ďalej zrejmé, že sila $dF$ je harmonická a vlnenie, ktoré v strune vytvára, je tiež harmonické. Po odraze vlnenia na koncoch struny (v miestach $A_1$ a $A_2$) sa vytvoria dve vlny rovnakej frekvencie a amplitúdy šíriace sa proti sebe a zložením vytvoria stojaté vlnenie. Ak sú dosiahnuté také podmienky, že uzly stojatého vlnenia sa stotožnia s miestami upevnenia struny (s bodmi $A_1$ a $A_2$), dôjde k rezonancii a struna sa rozkmitá (chveje) na svojej rezonančnej frekvencii. Jej amplitúda bude výrazná a viditeľná voľným okom. Do rezonancie sa struna dostane vždy, keď na jej dĺžke sa vytvorí celočíselný násobok pol vlnovej dĺžky vlnenia, teda keď je splnená podmienka daná vzťahom (8). Pod dosadení vzťahu (10) do vzťahu (9) pre rezonančnú frekvenciu $\nu_n$ dostaneme vzťah

$$\nu_n = \frac{n}{2l}\left(\frac{F}{s}\right)^{1/2}. \qquad (13)$$

***Úloha:***

1. Pre rôzne hodnoty napínacej sily $F$ (meníme hmotnosť $m$ závažia) zistite základnú rezonančnú frekvenciu ($n = 1$) a aj vyššie harmonické frekvencie ($n > 1$). Výsledky zapíšte do tabuľky I., v ktorej $\nu$ je rezonančná frekvencia, ktorú odčítame z RC-generátora.

Tabuľka I

| Číslo merania | $m+M$ [kg] | ν[Hz] | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | n = 1 | n = 2 | n = 3 | ... |
| | | | | | |

***Postup merania:***

Strunu spojenú s miskou známej hmotnosti napneme medzi brity $A_1$ a $A_2$ a vodivo spojíme s RC generátorom. Zmeriame dĺžku $l$ a priemer $d$ struny. Výpočtom zo známej hustoty $\rho$ materiálu struny (tabuľková hodnota), určíme hmotnosť dĺžkovej jednotky (lineárnu hustotu) struny.

Misku zaťažíme závažím hmotnosti $m$ a prelaďovaním RC-generátora nájdeme rezonančné frekvencie pre toto zaťaženie. Takto pre dané zaťaženie struny nájdeme základnú frekvenciu ($n = 1$) a frekvencie vyšších harmonických ($n$ = 2, 3, ...).

Postupne zvyšujeme zaťaženie (zvyšujeme hmotnosť závažia na miske) a prelaďovaním RC-generátora zisťujeme odpovedajúce rezonančné frekvencie. Výsledky zapisujeme do Tab. I.

Pri meraní je vhodné magnet umiestniť do polohy predpokladanej kmitne. Pri výpočtoch je potrebné k hmotnosti závažia umiestneného na miske pripočítať aj hmotnosť samotnej misky a preto ju odvážime samostatne.

***Vyhodnotenie merania:***

Meranie môžeme vyhodnotiť dvoma spôsobmi.

Prvý spôsob spočíva v tom, že porovnávame súbory veličín získaných z merania so súbormi veličín očakávaných z teórie. Tento spôsob vyhodnotenia je málo vhodný práve preto, že sa provnávajú súbory veličín.

Druhý spôsob spočíva v tom, že porovnávame fyzikálne veličiny určené výpočtom z meraní s ich tabuľkovými hodnotami. Tento spôsob vyhodnotenia merania je vhodnejší, lebo porovnanie hodnoty fyzikálnej veličiny určenej z merania s jej tabuľkovou hodnotou je jednoduchšie, prehľadnejšie a jednoznačnejšie než porovnanie dvoch súborov.

V ďalšom uvedieme oba spôsoby vyhodnotenia.

1. Porovnávanie súborov.
   a. Experimentálne zistené hodnoty rezonančných frekvencií (odčítané z RC-generátora, Tab. I.) prorovnáme s rezonančnými frekvenciami vypočítanými podľa vzťahu (13). Pred použitím vzťahu (13) určíme lineárnu hustotu $s$ materiálu použitej struny.
   b. To isté by sme mohli urobiť aj tak, že by sme provnali dva súbory rýchlostí. Jeden súbor by boli rýchlosti vypočítané podľa vzťahu (10) pre rôzne zaťaženia struny a druhý súbor by boli rýchlosti určené podľa vzťahu (9), kde za $v_n$ by sme dosadzovali rezonančné frekvencie odčítané z RC-generátora.

      Porovnanie môžeme urobiť zapísaním súborov rýchlostí v tabuľkovej forme alebo zhotovením diagramov.
2. Porovnávanie hodnôt fyzikálnych veličín.

   Použitím vzťahu (13) vypočítame hustotu $\rho$ materiálu použitej struny. Pritom do vzťahu (13) dosadzujeme za $v_n$ hodnoty rezonančných frekvencií odčítaných z RC-generátora. Vypočítané výsledky hodnoty hustoty $\rho$ spracujeme štatisticky a porovnáme ju so známou tabuľkovou hodnotou.

   V oboch prípadoch vyhodnocovania urobte diskusiu dosiahnutých výsledkov a možných zdrojov chýb.

***Kontrolné otázky:***

1. Čo rozumieme pod kmitaním hmotného bodu a pod vlnením prostredia?
2. Ktorými fyzikálnymi veličinami charakterizujeme vlnenie?
3. Kedy hovoríme o postupnom vlnení a kedy o stojatom vlnení a aký je medzi nimi rozdiel?
4. Čo sú to kmitne a čo sú uzly a v ktorých miestach sa vytvárajú?
5. Napíšte vzťahy pre základnú frekvenciu a frekvencie vyšších harmonických chvení na strune!
6. Aká je súvislosť medzi rýchlosťou vlnenia v strune a napínacou silou?
7. Vysvetlite metódu a postup vyšetrovania stojatého vlnenia na strune!