

II. MERANIE MODULU PRUŽNOSTI V ŠMYKU.

Teoretický úvod:

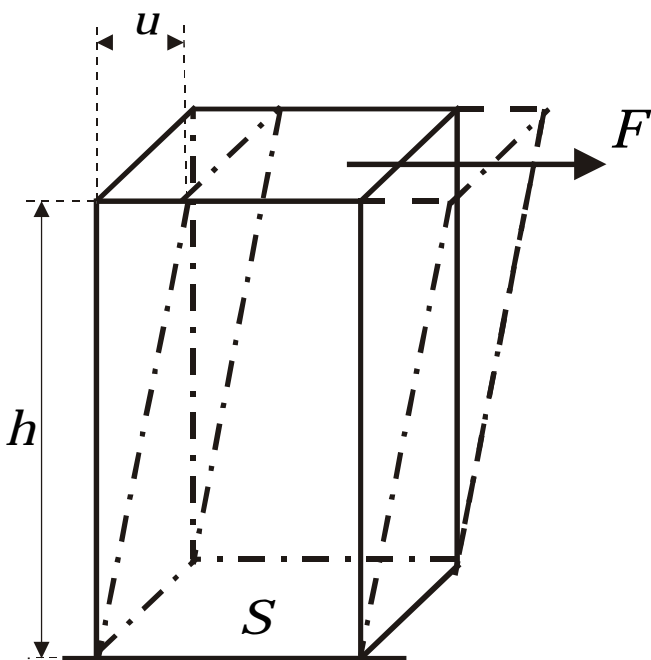
Modul pružnosti v šmyku (niekedy ho nazývame modul torzie), by sme mohli určiť z konkretizácie Hookovho zákona pre deformáciu v šmyku

$$\frac{u}{h} = \frac{1}{G} \frac{F}{S}, \quad (9)$$

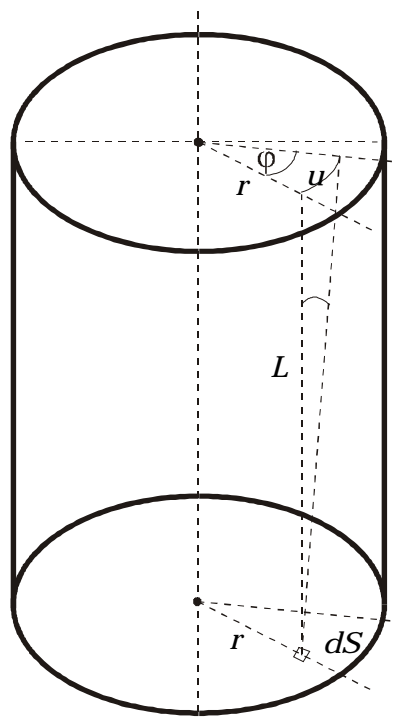
kde význam jednotlivých členov najlepšie ukáže obr. 8. Podiel $F/S = \tau$ predstavuje tangenciálne napätie, u – posunutie hornej základne kvádra voči dolnej základni, $u/h = tg\gamma \doteq \gamma$ predstavuje relatívne posunutie hornej základne voči dolnej. Hookov zákon je možné písať v tvare

$$\tau = G\gamma \quad (10)$$

G – modul pružnosti v šmyku. Zo vzťahov (9), (10) vidieť, že má rozmer napätia ($N/m^2=Pa$) a predstavuje také napätie, pri ktorom by absolútne posunutie u bolo rovné výške hranola h , alebo pri ktorom by relatívne posunutie $tg\gamma = 1$ (teda, aby uhol $\gamma=45^\circ$). Priame využitie Hookovho zákona na určenie modulu pružnosti v šmyku je pomerne málo praktické a príslušná metóda aj málo presná.



Obr. 8



Obr. 9

Preto sa modul v šmyku najčastejšie určuje z torzie tyčí alebo drôtov. Pri torzii je totiž každá časť vzorky namáhaná iba šmykom a pritom i keď šmyk v každej časti vzorky je pomerne malý (leží hlboko pod mierou úmernosti deformácie a napätia), výsledný uhol stočenia vzorky môže byť veľký a teda dobre merateľný.

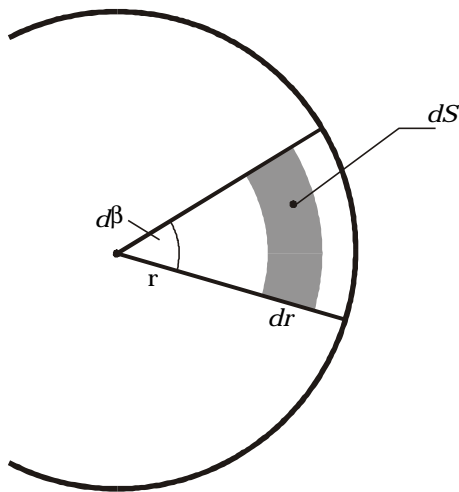
Torzna deformácia je zložitejším prípadom deformácie šmykovej. Jednotlivé priečne vrstvy telesa sa krútením vzájomne natáčajú.

Uvažujme tyč v tvare valca o dĺžke L a priemere d na jednom konci upevnenú. Na druhý koniec pôsobíme krútiacim momentom sily, ktorý vyvoláva šmykovú deformáciu každého

pozdlžneho vlákna dĺžky L a prierezu dS (obr. 9). Sledované vlákno je vo vzdialenosti r od torznej osi, predstavovanej neutrálnym vláknom, ktoré sa pri krútení nedeformuje. Pri natočení voľného konca tyče (vplyvom krútiaceho momentu) o uhol φ sa posunie voľný koniec vlákna po kružnici polomeru r o úsek $u = r\varphi$. Šmykový deformačný uhol $\alpha = u/L = r\varphi/L$ súvisí podľa Hookovho zákona s tangenciálnym napätím $\tau = dF/dS = G\alpha$. Sila pripadajúca na elementárnu plošku dS sledovaného vlákna pôsobí vzhľadom na torznú os momentom sily $dM = r dF = rG\alpha dS = rG(r\varphi/L)dS = (G/L)r^2\varphi dS$. Celkový torzný moment sily dostaneme integráciou elementárnych momentov sily po celej ploche voľnej podstavy

$$M = \int_{(S)} dM = \frac{G\varphi}{L} \int_{(S)} r^2 dS = \frac{GI}{L} \varphi, \quad (11)$$

kde $I = \int_{(S)} r^2 dS$ je plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče vzhľadom na torznú os. Pre tyč



s kruhovým prierezom postupujeme pri výpočte I tak, že plochu kruhu rozdelíme na elementy (obr.10), ktoré v polárnych súradniciach nadobúdajú vyjadrenie

$$dS = r \cdot d\beta \cdot dr$$

a vypočítame príslušný integrál

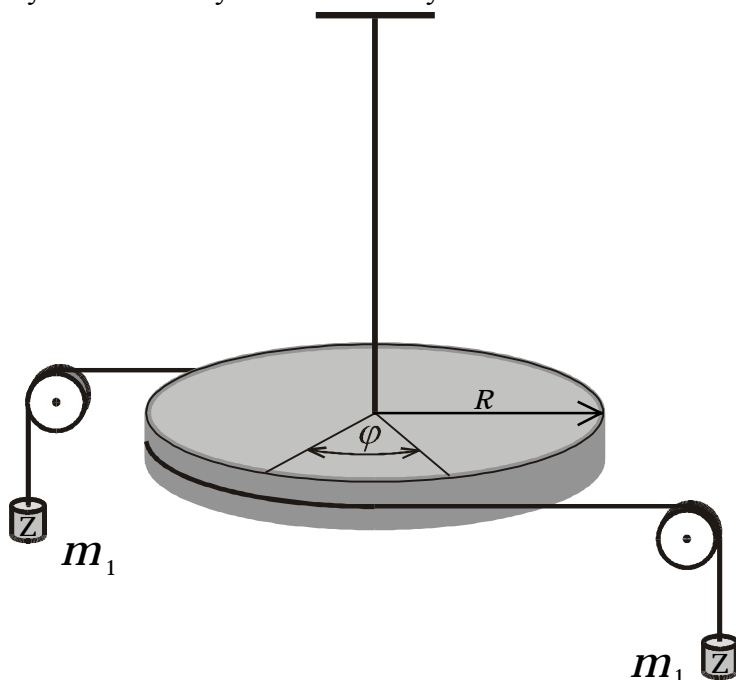
$$I = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{d/2} r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (12)$$

Zo vzťahu (11) vidíme, že torzný uhol φ je priamo úmerný torznému momentu M . Konštantu

$$M_o = \frac{GI}{L} \quad (13)$$

Obr. 10

nazývame direkčným momentom tyče.



Obr. 11

Metódy merania modulu pružnosti v šmyku:

A. STATICKÁ METÓDA MERANIA MODULU PRUŽNOSTI V ŠMYKU.

Statická metóda merania modulu pružnosti v šmyku využíva torziu tenkej tyče (drôtu) zo skúmaného materiálu. Tyč je zavesená tak, že horný koniec je upevnený v držiaku a k dolnému koncu tyče je pripojený kotúč s uhlovou stupnicou (obr. 11). Na obvode kotúča pôsobia sily kolmé na torznú os, vyvolané cez kladky

tiažou závaží o hmotnostiach m_1 a m_2 . Výsledný torzný moment týchto síl je $(m_1+m_2)gR$, kde R je polomer kotúča. Aby nevznikla sila vychýľujúca os kotúča volíme závažia tak, aby $m_1=m_2$. Uvedený moment sily dosadíme do vzťahu (11) spolu so vzťahom (12) a pre modul pružnosti G dostaneme vzťah

$$G = \frac{32gRL}{\pi d^4} \cdot \frac{m_1 + m_2}{\varphi} \quad (14)$$

Úlohy:

1. Zmerať modul pružnosti v šmyku pre dva rôzne materiály (ocel, meď).
2. Stanoviť chybu merania pre daný modul.

Postup merania a spracovanie výsledkov:

1. Po upevnení tyče (drôtu) do príslušného zariadenia určíme priamym meraním hodnoty veličín R , L , d . Dané veličiny meriame viackrát (aspoň 10-krát) a určíme ich aritmetické priemery \bar{R} , \bar{L} , \bar{d} a k nim príslušné náhodné chyby $\bar{\delta}_R$, $\bar{\delta}_L$, $\bar{\delta}_d$.
2. Zmeriame teplotu miestnosti.
3. Danú tyč postupne zaťažujeme prikladaním závaží a meriame jej uhol skrútenia φ .
4. Opäť zmeriame teplotu miestnosti.
5. Hodnoty zapisujeme do tabuľky III.

Tabuľka III.

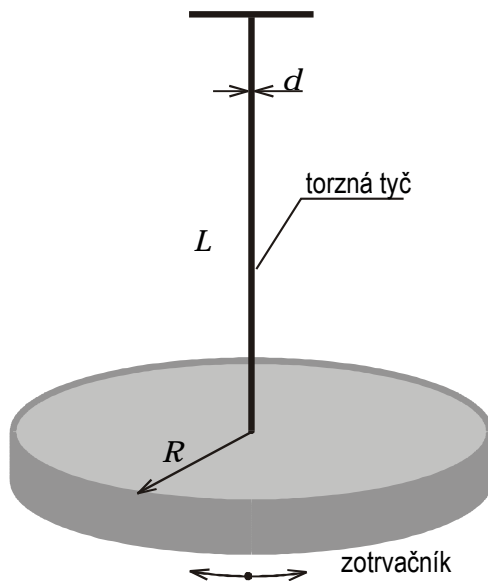
Č. m.	m_1+m_2 [g]	φ [rad]	$k_i = \frac{\varphi}{m_1 + m_2}$	$(k_i - \bar{k})^2$

6. Overíme linearitu torznej deformácie tak, že namerané hodnoty φ vynesieme do grafu $\varphi = f(m)$. Pre každé zaťaženie určíme konštantu $k = \frac{d\varphi}{dm}$, jej aritmetický priemer \bar{k} a k nej príslušnú náhodnú chybu $\bar{\delta}_k$. Výsledky merané dosadíme do vzťahu (14), v ktorom pomer $(m_1 + m_2)/\varphi$ nahradíme konštantou $1/k$.
7. Určíme chybu merania veličiny G vyplývajúcu z parciálnych chýb jednotlivých priamo meraných veličín resp. chyby vypočítanej konštanty k . Danú chybu stanovíme zo vzťahu

$$\bar{\delta}_G^2 = \bar{G}^2 \left[\left(\frac{\bar{\delta}_R}{\bar{R}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_L}{\bar{L}} \right)^2 + \left(4 \frac{\bar{\delta}_d}{\bar{d}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_k}{\bar{k}} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

B. DYNAMICKÁ METÓDA MERANIA MODULU PRUŽNOSTI V ŠMYKU S POUŽITÍM TORZNÉHO KYVADLA.

Experiment usporiadajme podobne ako v predchádzajúcej metóde, len namiesto uhlomerného



Obr. 12

kotúča upevníme na dolný koniec tyče vhodné teleso (zotrvačník), ktorého moment zotrvačnosti I_T voči pozdĺžnej osi tyče je mnohonásobne väčší ako moment zotrvačnosti tyče samotnej. Tak dostaneme dynamickú kmitavú sústavu, ktorá je schopná konať torzné kmity okolo torznej osi (obr. 12) – torzné kyvadlo. Pri otáčaní telesa okolo torznej osi pôsobí deformovaná tyč na teleso momentom sily podľa (11), ale opačného znamienka. Potom pohybová rovnica rotačného pohybu okolo torznej osi bude

$$I_T \varepsilon = -M,$$

kde I_T je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania $\varepsilon = d^2 \varphi / dt^2$ je uhlové zrýchlenie. Po dosadení za M zo vzťahu (10) a úprave dostane pohybová rovnica tvar

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{GI}{LI_T} \varphi = 0. \quad (16)$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice je harmonická funkcia tvaru

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \psi),$$

o čom sa môžeme presvedčiť jej priamym dosadením do rovnice (16), kde $\omega = \sqrt{GI/LI_T}$ je uhlová frekvencia kmitavého pohybu a súvisí s periódou vzťahom $\omega = 2\pi/T$. Modul pružnosti v šmyku potom vyjadríme vzťahom

$$G = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{LI_T}{I} \quad (17)$$

do ktorého za I dosadíme vzťah (12) a za I_T moment zotrvačnosti zaveseného telesa (ak je telesom valec, potom $I_T = mR^2/2$, kde m je hmotnosť valca a R jeho polomer).

Úlohy:

1. Zmerať modul pružnosti v torzii pre rôzne materiály.
2. Stanoviť náhodilú chybu výsledku.

Postup merania a spracovanie výsledkov:

1. Zostavíme torzné kyvadlo a určíme priamym meraním hodnoty jeho parametrov (dĺžku tyče, priečne rozmery tyče, rozmery a hmotnosť zaveseného telesa). Dané parametre meriame viackrát (aspoň 10-krát) stanovíme ich priemerné hodnoty a príslušné náhodilé chyby.
2. Zmeriame teplotu miestnosti.

3. Kyvadlo slabo rozkmitáme a postupnou metódou určíme periódu kmitov vrátane chyby merania. Meriame aspoň 100 periód. Údaje zapisujeme do tabuľky IV.

Tabuľka IV.

Počet per. n	$n T$ [s]	Počet per. $(n+50)$	$(n+50) T$ [s]	$\tau = (n+50) T - nT = 50 T$	$(\tau - \bar{\tau})^2$

kde $\bar{\tau}$ je aritmetický priemer. Periódu určíme aspoň pre dve rôzne dĺžky kyvadla.

4. Opäť zmeriame teplotu miestnosti.
 5. Dosadením hodnôt priamo meraných veličín do vzťahu (17) vypočítame hodnotu meranej veličiny G . Určíme chybu merania (výsledku) s uvážením parciálnych príspevkov chýb jednotlivých priamo meraných veličín podľa vzťahu

$$\bar{\delta}_G^2 = G^2 \left[\left(2 \frac{\bar{\delta}_T}{\bar{T}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_L}{\bar{L}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_{I_T}}{\bar{I}_T} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_I}{\bar{I}} \right)^2 \right], \quad (18)$$

v ktorom relatívne chyby momentov zotrvačnosti I_T a I určíme zo vzťahov

$$\left(\frac{\bar{\delta}_{I_T}}{\bar{I}_T} \right)^2 = \left(\frac{\bar{\delta}_m}{\bar{m}} \right)^2 + \left(2 \frac{\bar{\delta}_R}{\bar{R}} \right)^2; \quad \left(\frac{\bar{\delta}_I}{\bar{I}} \right)^2 = \left(4 \frac{\bar{\delta}_d}{\bar{d}} \right)^2. \quad (19)$$

Výsledok uvedieme v tvare $G = \bar{G} \pm \bar{\delta}_G$.

Kontrolné otázky:

1. Napíšte Hookov zákon pre deformáciu v šmyku.
2. Napíšte vzťahy pre relatívne posunutie a mechanické napätie pri deformácii šmykom.
3. Objasnite fyzikálny význam modulu pružnosti v šmyku.
4. Prečo je možné merať modul pružnosti v šmyku z torzie drôtu (tyče)?
5. Čo je neutrálne vlákno a kadiaľ prechádza?
6. Popíšte metódu postupných meraní.
7. Odvodte vzťahy pre výpočet chyby výsledku (15), (18), (19).