Vyšetrovanie pružnej deformácie

Teoretický úvod

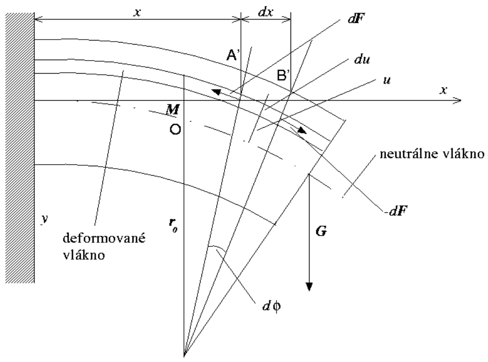
Jednoduché pružné deformácie sú *deformácia ťahom (tlakom)* a *deformácia šmykom*. Popisuje ich *Hookov zákon*: priame účinky pružnej deformácie sú priamo úmerné pôsobiacim silám a naopak. Matematicky je Hookov zákon formulovaný dvoma vzťahmi

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \tau = G\alpha \tag{1}$$

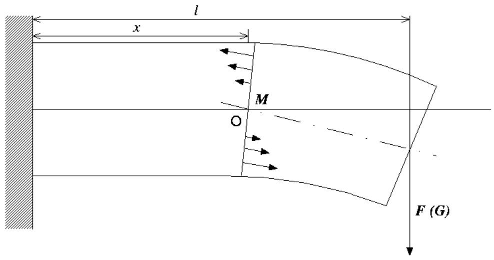
kde σ – normálové mechanické napätie, E – modul pružnosti v ťahu, ε – relatívne predĺženie, τ – tangenicálne mechanické napätie, α – relatívne šmykové posunutie, G – modul pružnosti v šmyku.

Deformácia ohybom

V tejto metóde sa využíva deformácia telies ohybom. Deformácia ohybom je zložitejšou formou deformácie ťahovej (tlakovej). Uvažujme rovnorodú tyč s konštantným prierezom po celej dĺžke, na jednom konci upevnenú a na druhom konci zaťaženú silou $\vec{F}$ (obr. 1).



obr. 1



obr. 2

Sila pôsobiaca na jej druhom konci vyvoláva jej priehyb. Prehnutie tyče vplyvom vlastnej váhy bude veľmi malé, a preto ho môžeme zanedbať. V ohnutej tyči bude jedno vlákno, ktorého dĺžka bude rovnaká, ako v nedeformovanej tyči. Toto vlákno nazveme neutrálne. Vlákna nad neutrálnym vláknom sa pri ohybe ťahom predĺžia, vlákna pod neutrálnym vláknom sa v dôsledku tlaku skrátia. Závislosť priehybu konca tyče od ohybovej sily stanovíme na základe rozboru podmienky statickej rovnováhy sústavy. Analyzujme koncový úsek tyče dĺžky $l - x$ (obr. 2). Výsledný moment síl vzhľadom na os O je nulový, takže platí

$$M - F(l - x) = 0 \tag{2}$$

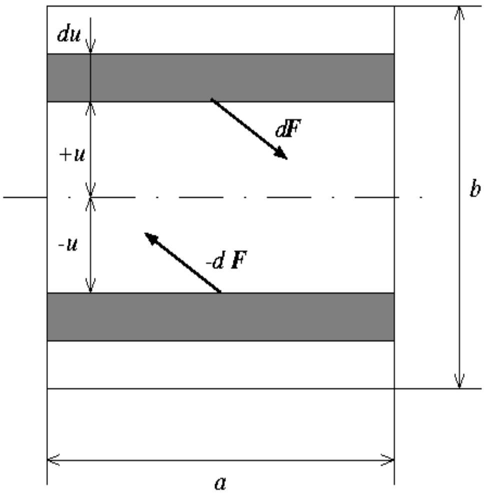
kde M je hodnota momentu elastických síl pôsobiacich v rovine rezu. Pre rozbor tohoto momentu skúmajme deformáciu dĺžkového elementutyče medzi rezom AA' a BB'. Element tyče rozdelíme na pozdĺžne vlákna s prierezom dS. V dôsledku ohybu sú vlákna zakrivené so spoločným stredom krivosti S. Ak je r_0 polomer krivosti neutrálneho vlákna, je polomer krivosti ľubovoľného vlákna $r = r_0 + u$, kde u je súradnica vlákna vzhľadom na vlákno neutrálne (obr. 1), ktorého tvar je popísaný funkciou $y = f(x)$, kde x, y sú pozdĺžna a priečna súradnica bodu neutrálneho vlákna. Potom v malom úseku tyče prislúchajúcom stredovému uhlu $\mathrm{d}\varphi$ má neutrálne vlákno dĺžku $r_0\mathrm{d}\varphi$. Vlákno, ktoré je vo vzdialenosti u nad neutrálnym vláknom, bude mať v úseku prislúchajúcom stredovému uhlu $\mathrm{d}\,\varphi$ dĺžku $(r_0 + u)\mathrm{d}\varphi$. Jeho relatívne predĺženie bude

$$\varepsilon = \frac{(r_0 + u)\mathrm{d}\varphi - r_0\mathrm{d}\varphi}{r_0\mathrm{d}\varphi} = \frac{u\mathrm{d}\varphi}{r_0\mathrm{d}\varphi} = \frac{u}{r_0}$$

a napätie vlákna bude

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{u}{r_0}$$

Pomocou tohoto napätia môžeme silu pôsobiacu na plôšku o veľkosti $a\mathrm{d}u$ vo vzdialenosti u od neutrálneho vlákna (obr. 3) vyjadriť vzťahom



obr. 3

$$\mathrm{d}F = \sigma a\mathrm{d}u = \frac{Ea}{r_0}u\mathrm{d}u$$

Vo vzdialenosti $-u$ bude pôsobiť na rovnakú plôšku rovnaká sila, ale opačného smeru. Výsledný otáčavý moment elementárnych síl pôsobiacich v reze A vzhľadom na pohybovú os je

$$M = \int_{-b/2}^{+b/2} u\mathrm{d}F = \frac{E}{r_0}\int_{-b/2}^{+b/2} au^2\mathrm{d}u = \frac{E}{r_0}I$$

kde

$$I = \int_{-b/2}^{+b/2} au^2\mathrm{d}u = \frac{1}{12}ab^3$$

je plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče vzhľadom na pohybovú os.

Nech sa prehnutím tyče zníži neutrálne vlákno o y vo vzdialenosti x od upevneného konca. Polomer krivosti r_0 tohoto prehnutia môžeme obecne vyjadriť pomocou y v tvare

$$r_0 = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

kde y' a y'' je prvá a druhá derivácia funkcie $y = f(x)$. V prípade, že uvažujeme malé prehnutie, môžeme y'^2 zanedbať voči 1. Pre polomer krivosti r_0 prehuntia tyče potom dostaneme vzťah

$$r_0 = \frac{1}{y''}$$

ktorý dosadením do rovnice (2) dáva diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{F}{El}(l - x)$$

Dvojitou integráciou tejto rovnice a uvážením, že v mieste upevnenia je $y = 0$, upravíme riešenie rovnice na tvar

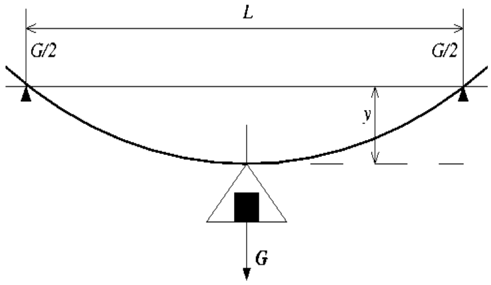
$$y = \frac{F}{El}\left(\frac{l - x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Zníženie tyče y_1 na konci záťažovou silou F bude ($x = l$)

$$y_1 = \frac{Fl^3}{3EI} \tag{3}$$

Meranie modulu pružnosti v ťahu z priehybu tyče

Zo vzťahu (3) platného pre priehyb vodorovnej tyče pevne votknutej kolmo do zvislej steny môžeme experimentálne určiť modul pružnosti v ťahu E. Keďže realizácia takéhoto experimentálneho zariadenia by prinášala isté ťažkosti (pevné votknutie do steny, upevnenie záťaže na koniec tyče,...), využijeme na zistenie hodnoty E jednoduchší spôsob. Položíme vyšetrovanú tyč na dva hroty v rovnakej výške, medzi ktorými je vzdialenosť L a v strede budeme zaťažovať závažím o hmotnosti m. V tomto bode budeme zisťovať hodnotu priehybu y_p (obr. 4).



obr. 4

Ak porovnáme toto usporiadanie s usporiadaním na obr. 1, vidíme, že ohyb tyče na obr. 1 silou F odpovedá ohybu polovice tyče silou $F_0/2$ na obr. 5. Pre takto postavené meracie zariadenie však musíme upraviť vzťah (3). Pre jednotlivé veličiny vo vzťahu (3) platí

$$l = \frac{L}{2} \qquad F = \frac{m\,g}{2} \tag{4}$$

Dosadením (4) do (3) dostaneme

$$y_p = \frac{m\,g\,L}{48I\,E}$$

Po osamostatnení veličiny E a dosadení výrazu pre I dostaneme výsledný vzťah pre hodnotu E

$$E = \frac{g\,L}{4a^3\,b}\frac{m}{y_p} \tag{5}$$

Zo vzťahu (5) vyplýva, že priehyb tyče je priamo úmerný hmotnosti (resp. sile), ktorou je tyč zaťažovaná (Hookov zákon).

Postup merania

1. Meranín určíme vzdialenosť L podperných hrotov desaťkrát. Desaťkrát určíme meraním priečne rozmery a, b vyšetrovanej tyče. Určíme aritmetické priemery a chyby týchto veličín.

2. Linearitu závislosti priehybu od hmotnosti záťaže overíme tak, že pre narastajúcu hmotnosť záťaže m meriame priehyb tyče y_p. Namerané hodnoty hodnoty vynesieme do grafu a metódou *lineárnej regresie* určíme smernicu priamky $y_p(m) = k\,m$. Podľa vypočítaných parametrov zakreslíme regresnú priamku do grafu nameraných hodnôt. Meriame tak, že k východiskovej hmotnosti m_1 pridávame závažia s rovnakou hmotnosťou $\Delta\, m$ a meriame príslušné priehyby $y_{p\,i}$ pre desať rôznych hmotností.

3. Aritmetické priemery rozmerov L, a, b dosadíme do vzťahu (5). Za podiel y_p/m dosadíme hodnotu $1/k$. Tým určíme hodnotu meranej veličiny E.

4. Určíme výslednú chybu meranej veličiny vyplývajúcu z parciálnych príspevkov chýb jednotlivých priamo meraných veličín.

5. Zisťovanú hodnotu modulu pružnosti E zapíšeme v tvare

$$E = \bar{E} \pm \bar{\delta}_E$$

porovnáme s tabuľkovou hodnotou a v závere analyzujeme príčiny prípadných odchýliek.