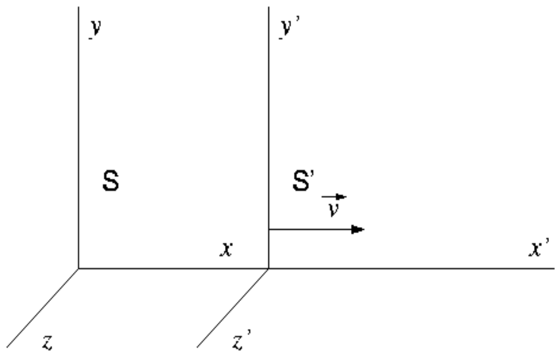
Popis pohybu z hľadiska dvoch rôznych vzťažných sústav

Inerciálne vzťažné sústavy

Vzťažné sústavy, ktoré sú viazané na systém telies pohybujúcich sa len zotrvačnosťou, nazývame *inerciálne vzťažné sústavy.* Rýchlosť vzájomného pohybu inerciálnych vzťažných sústav je konštantná čo do smeru aj veľkosti.

Nech existujú dve inerciálne vzťažné sústavy S a S', pričom S' sa voči S pohybuje rýchlosťou $\vec{v}$ v kladnom smere osi x (obr. 1). *Galileiho transformácie* prevádzajúce priestorové súradnice a čas medzi týmito súradnicovými sústavami sú v tvare

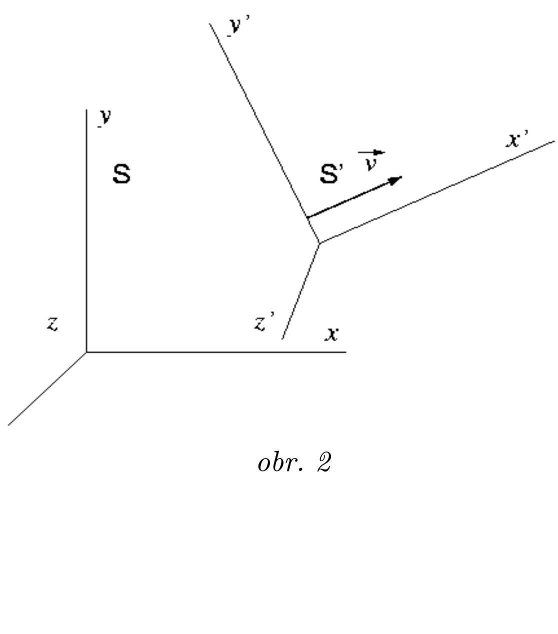


obr. 1

$$
\begin{aligned}
x &= x' + vt & \qquad x' &= x - vt \\
y &= y' & y' &= y \\
z &= z' & z' &= z \\
t &= t' & t' &= t
\end{aligned}
$$

Pre všeobecný prípad (obr. 2) platí

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}\,' + \vec{v}t & \qquad \vec{r}\,' &= \vec{r} - \vec{v}t \\
t &= t' & t' &= t
\end{aligned}
$$



obr. 2

Galileiho transformácia je však s vysokou presnosťou platná len pre malé hodnoty rýchlostí vzájomného pohybu dvoch inerciálnych sústav. Presnú transformáciu priestorových súradníc a času odvodil Lorentz, podľa neho sa nazývajú *Lorentzove transformácie.* V nej pre situáciu totožnú so situáciou na obr. 1 platia vzťahy

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \qquad x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
y &= y' & y' &= y \\
z &= z' & z' &= z \\
t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

Neinerciálne vzťažné sústavy

Sústavy, ktoré nie sú inerciálne, sa nazývajú neinercialne vzťažné sústavy. Deje v neinerciálnych vzťažných sústavach správne popisuje všeobecná teória relativity. V ďalšom bude analýza zloženého pohybu z hľadiska newtonovskej mechaniky.

Zložený pohyb

Zložený pohyb je definovaný ako pohyb z hľadiska dvoch vzťažných sústav. Každý vzájomný pohyb dvoch vzťažných sústav sa dá rozložiť na pohyb translačný (posuvný) a rotačný (otáčavý). Ďalšou dôležitou vecou je, že časovú derivácia ľubovoľného jednotkového vektora $\vec{\varrho}$ rotujúceho s uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ je možné napísať v tvare

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\varrho}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{\varrho}$$

Časová derivácia jednotkového rotujúceho vektora je kolmá na tento vektor.

Nech S, $\mathsf{S'}$ sú dve vzťažné sústavy, pričom $\mathsf{S'}$ sa pohybuje vzhľadom na fixnú sústavu S. V sústave $\mathsf{S'}$ nech sa pohybuje hmotný bod B. Polohový vektor hmotného bodu B v sústave S je $\vec{r}$, v sústave $\mathsf{S'}$ je $\vec{r}\,'$. Polohový vektor sústavy $\mathsf{S'}$ voči sústave S je $\vec{r}_0$. Potom pre vektor $\vec{r}$ platí

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$$

Pre absolútnu časovú deriváciu ľubovoľného vektora $\vec{b}$ vzhľadom na sústavu S platí

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S'}} + \vec{\omega} \times \vec{b}$$

Pre rýchlosť hmotného bodu B vzhľadom na sústavu S platí

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}} = \left(\frac{\mathrm{d}(\vec{r}_0 + \vec{r}\,')}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

Derivácia rýchlosti podľa času predstavuje zrýchlenie

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}} = \left(\frac{\mathrm{d}(\vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,')}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_0}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega} \times \vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S'}} + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \left(\frac{\mathrm{d}(\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S'}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Pre štvrtý člen na pravej strane platí formálne pravidlo pre deriváciu súčinu

$$\left(\frac{\mathrm{d}(\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S'}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S'}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S'}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$

pričom platí

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S'}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathsf{S}}$$

Pre rýchlosť a zrýchlenie hmotného bodu v sústave S bude platiť

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$
$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Vynásobením posledného vzťahu hmotnosťou m hmotného bodu sa získa vzťah pre sily pôsobiace na hmotný bod v sústave S pri zloženom pohybe

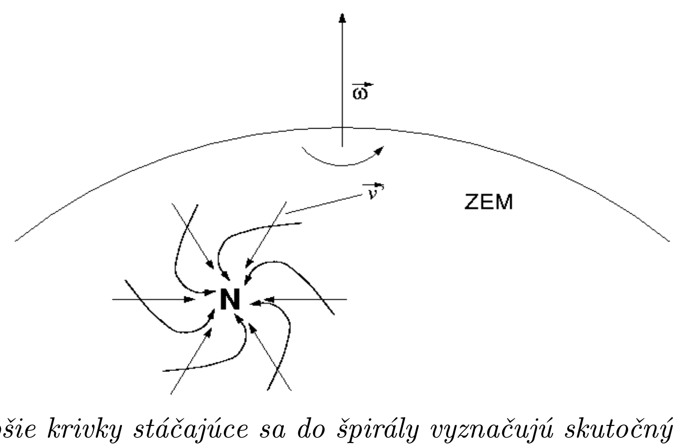
$$m\vec{a} = m\vec{a}_0 + m\vec{a}\,' + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

V praktických prípadoch je však situácia obrátená, t.j. je treba nájsť, ako sa bude javiť pohyb a aké sily budú pôsobiť na hmotný bod alebo teleso v prípade sústavy S'.

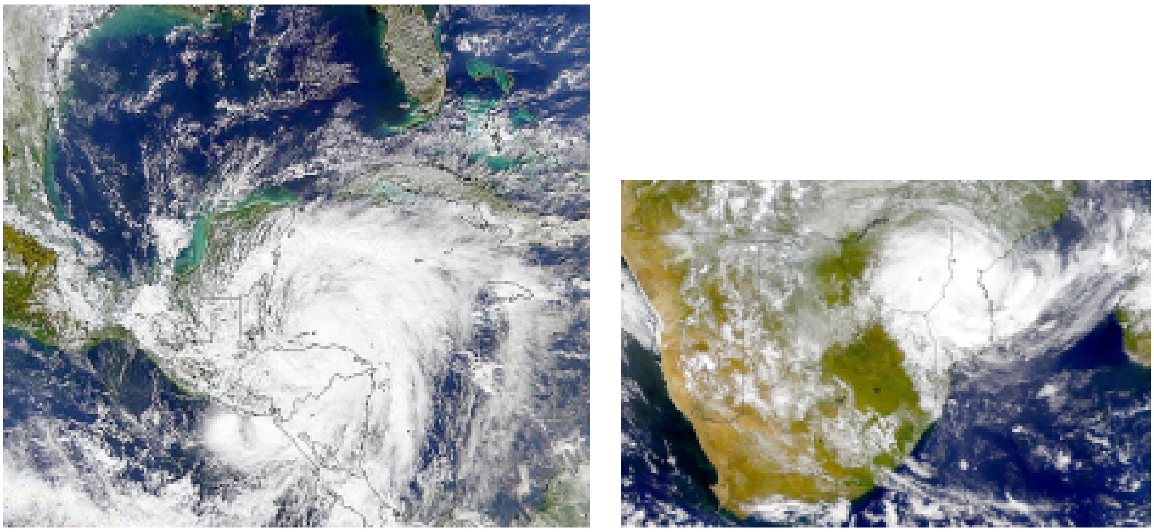
$$m\vec{a}\,' = m\vec{a} - m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Sila $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$ sa nazýva odstredivá, sila $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ sa nazýva Coriolisova.

Príkladom takýchto sústav je sústava Zem a okolitý priestor. Sústavou S je okolitý priestor a sústavou S' je rotujúca Zem. Významný a pozorovateľný efekt majú odstredivá a Coriolisova sila. Odstredivá sila spôsobuje, že na rovníku je hodnota tiažového zrýchlenia o niečo menšia ako na póloch Zeme. Príkladom pôsobenia Coriolisovej sily je stáčanie prúdenia vzduchu do centra tlakovej, resp. z centra tlakovej výše v atmosfére do špirály. Treba poznamenať, že na severnej pologuli je stáčanie sa prúdenia vzduchu do tlakovej níže v kladnom zmysle rotácie, stáčanie prúdenia vzduchu z centra tlakovej výše je v zápornom zmysle rotácie, na južnej pologuli je to naopak. Ak má nejaká železnica severojužný smer, tak nesmie byť využívaná na vlaky idúce len jedným smerom, pretože vplyvom pôsobenia Coriolisovej sily by sa jedna koľajnica opotrebovala rýchlejšie.



obr. 3 Hrubšie krivky stáčajúce sa do špirály vyznačujú skutočný pohyb vzduchu

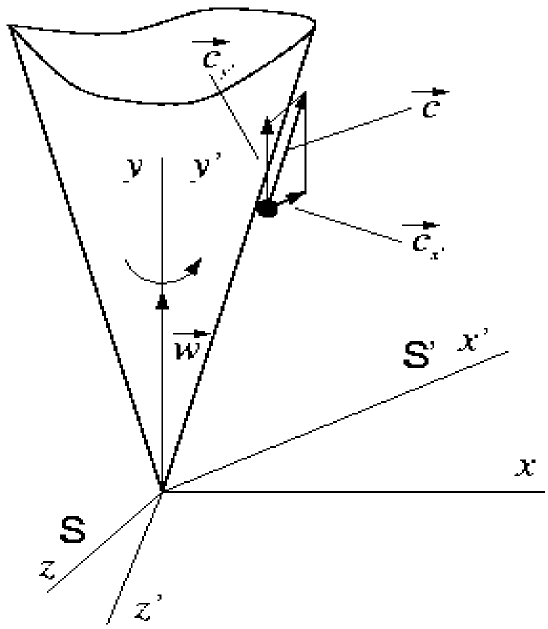


. *obr. 4 Hurikány – vľavo nad strednou Amerikou, vpravo nad južnou Afrikou*

Najvýraznejšie je efekt pôsobenia Coriolisovej sily pozorovateľný na satelitných záberoch veľkých tlakových atmosferických útvarov ako ukazuje obr. 4.

1. (61.) Bod M sa pohybuje z vrcholu kužeľa rovnomerne priamočiaro rýchlosťou veľkosti c po jeho povrchovej priamke. Kužeľ sa otáča okolo svojej osi stálou uhlovou rýchlosťou veľkosti ω. Vypočítajte absolútne zrýchlenie bodu M v čase t od začiatku pohybu, keď uhol medzi osou kužeľa a povrchovou priamkou je α.

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$



obr. 3

$$\vec{a}_0 = \vec{0}, \quad \vec{a}\,' = \vec{0}, \quad \vec{\varepsilon} = \vec{0}, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}, \quad \vec{r} = \vec{r}\,' = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' = ct\sin\alpha\vec{i}\,' + ct\cos\alpha\vec{j}\,',$$
$$\vec{v}\,' = v'_x\vec{i}\,' + v'_y\vec{j}\,' = c\sin\alpha\vec{i}\,' + c\cos\alpha\vec{j}\,'$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = 2\vec{\omega}\times(\vec{v}_x\,' + \vec{v}_y\,') + \vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times(\vec{x}\,' + \vec{y}\,')] = \\ &= 2\vec{\omega}\times\vec{v}_x\,' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_y\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{x}\,') + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{y}\,') = \\ &= 2\omega c\sin\alpha(\vec{j}\,'\times\vec{i}\,') + 2\omega c\cos\alpha(\vec{j}\,'\times\vec{j}\,') + \omega^2 ct\sin\alpha[\vec{j}\,'\times(\vec{j}\,'\times\vec{i}\,')] + \omega^2 ct\cos\alpha[\vec{j}\,'\times(\vec{j}\,'\times\vec{j}\,')]\end{aligned}$$

Druhý a posledný člen v poslednom výraze sa rovnajú nulovému vektoru, zostane teda

$$\vec{a} = 2\omega c\sin\alpha(\vec{j}\,'\times\vec{i}\,') + \omega^2 ct\sin\alpha[\vec{j}\,'\times(\vec{j}\,'\times\vec{i}\,')]$$

Výsledky vektorových súčinov jednotkových vektorov sú opäť jednotkové vektory

$$\vec{\varrho} = \vec{j}\,'\times\vec{i}\,' \qquad \vec{\nu} = \vec{j}\,'\times(\vec{j}\,'\times\vec{i})$$

Nie je ťažké ukázať, že tieto vektory sú na seba kolmé. Preto pre veľkosť absolútneho zrýchlenia a bude použitím pytagorovej vety vyplývať

$$a = \sqrt{4\omega^2c^2\sin^2\alpha + \omega^4t^2c^2\sin^2\alpha} = \omega c\sin\alpha\sqrt{4+\omega^2t^2}$$

2. (63.) Tyč OA sa otáča okolo osi kolmej na tyč a prechádzajúcej bodom O tyče konštantnou uhlovou rýchlosťou ω. Bod M sa pohybuje v smere tejto tyče konštantnou rýchlosťou v'. Vypočítajte veľkosť absolútneho zrýchlenia bodu M.

[$a = \omega\sqrt{r'^2\omega^2 + 4v'^2}$]

3. Tyč OA sa otáča okolo osi kolmej na tyč a prechádzajúcej bodom O tyče konštantným uhlovým zrýchlením ε. Bod M sa pohybuje v smere tejto tyče zrýchlene s konštantným zrýchlením a'. Vypočítajte veľkosť absolútneho zrýchlenia bodu M.

[$a = \sqrt{\frac{5}{2}}\varepsilon a' t^2$]

4. Ukážte, prečo oblačnosť v tlakových útvaroch prúdi spomínaným spôsobom. Ktorá koľajnica je viac zaťažovaná, keď vlak ide zo severu na juh?