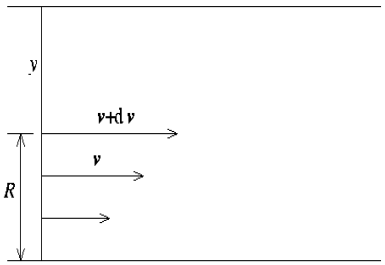
Určenie koeficientu dynamickej viskozity kvapaliny Stokesovou metódou

Teoretický úvod

Reálne kvapaliny sa vždy vyznačujú vnútorným trením - *viskozitou*, ktorá má podstatu priamo v kohéznych (resp. adhéznych) silách, pôsobiacimi medzi časticami samotnej kvapaliny (resp. časticami kvapaliny a časticami okolitého prostredia alebo telies nachádzajúcich sa a pohybujúcich sa v kvapaline). Viskozita konkrétnej kvapaliny je závislá najmä od jej hustoty a teploty. Najvýraznejšie sa viskozita prejavuje pri prúdení kvapaliny v ohraničenom prostredí alebo pri pohybe pevných telies v kvapaline. Predstavme si preto kvapalinu prúdiacu vo valcovom potrubí v smere jeho osi (obr. 1).

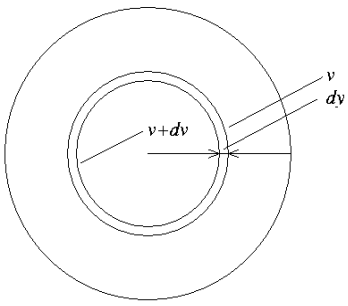


obr. 1

Vplyvom viskozity je rýchlosť prúdenia kvapaliny v potrubí rozdielna. Najmenšia je v mieste styku kvapaliny so stenami potrubia, najväčšia je v strede potrubia. Keď vyberieme konkrétnu hodnotu rýchlosti, označme ju v, a pospájame body, ktoré sa touto rýchlosťou vyznačujú, zistíme, že geometricky vytvárajú plášť valca s polomerom y. To isté bude platiť pre body, ktoré sa vyznačujú rýchlosťou $v+\mathrm{d}v$, tie vytvoria plášť valca s polomerom $y-\mathrm{d}y$ (obr. 2). Keďže tieto valcové plochy sa pohybujú vzhľadom na seba rýchlosťou $\mathrm{d}\,v$, vzniká medzi nimi trenie, ktoré vyvoláva silové účinky medzi týmito dvoma plochami. Tieto silové účinky môžeme charakterizovať vektorom tangenciálneho napätia $\vec{\tau}$, ktorého smer je totožný so smerom vektora rýchlosti prúdenia kvapaliny a pre jeho veľkosť platí vzťah

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \tag{1}$$

Vo vzťahu (1) vystupuje na pravej strane koeficient η, ktorý nazývame *koeficient dynamickej viskozity* a charakterizuje viskózne vlastnosti kvapaliny. Pre najbežnejšie kvapaliny je možné vyhľadať jeho hodnotu v tabuľkách, inak je potrebné jeho hodnotu zmerať.



obr. 2

Pripomíname, že pre mnohé kvapaliny je koeficient dynamickej viskozity funkciou teploty a aj pre neveľké teplotné rozdiely sa môžu jeho hodnoty výrazne líšiť. Jeho jednotkou je Pa.s (kg.m^{-1}.s^{-1}). Okrem koeficientu dynamickej viskozity je zavedený aj koeficient kinematickej viskozity vzťahom

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho}$$

kde ϱ je hustota kvapaliny. Jednotkou je m^{2}.s^{-1}.

Stokesova metóda merania koeficientu dynamickej viskozity pomocou telieskových viskozimetrov

Vplyv vnútorného trenia môžeme pozorovať pri pohybe telies v kvapaline. Práve na tomto jave je založená Stokesova metóda. Zariadenie, ktoré ja potrebné na jej realizáciu, pozostáva

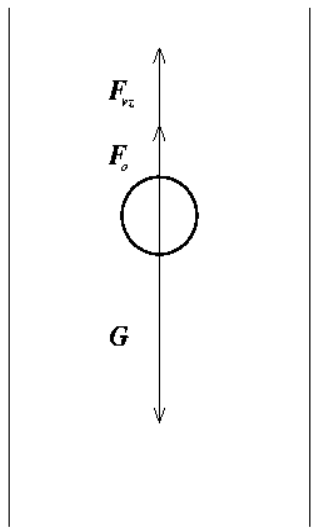
zo samotnej kvapaliny a tuhých homogénnych telies vyrobených z látky so známou hustotou. Princíp metódy spočíva v tom, že teleso vložené do kvapaliny v gravitačnom poli padá v smere pôsobenia gravitačnej sily a z analýzy pohybu takto padajúceho telesa odvodíme vzťah pre výpočet koeficientu dynamickej viskozity. Najjednoduchšie je použiť teleso guľovitého tvaru. Na takéto teleso padajúce v kvapaline pôsobia tri sily: Tiažová $\vec{G}$, vztlaková $\vec{F}_{\mathrm{vz}}$ a odporová sila $\vec{F}_{\mathrm{o}}$, ktorej pôvod je práve vo viskozite kvapaliny. Pre veľkosti síl môžeme písať

$$G = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g \tag{2}$$

$$F_{\mathrm{vz}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2 g \tag{3}$$

$$F_{\mathrm{o}} = 6\pi\eta r v \tag{4}$$

kde ϱ_1 je hustota látky, z ktorej je vyrobená guľôčka, ϱ_2 je hustota kvapaliny (pri konštantnej teplote), r je polomer guľôčky, v je okamžitá hodnota rýchlosť pohybujúcej sa guľôčky.



obr. 3

Sily $\vec{G}$ a $\vec{F}_{\mathrm{vz}}$ sú v čase konštantné, nezávislé od rýchlosti pohybu, veľkosť $\vec{F}_{\mathrm{o}}$ sa s narastajúcim časom mení (zväčšuje). Čo sa týka smerov daných síl, sú rovnobežné, avšak $\vec{F}_{\mathrm{vz}}$ a $\vec{F}_{\mathrm{o}}$ sú opačne orientované ako $\vec{G}$, ktorá má smer zvislo nadol (obr. 3). Keďže odporová sila sa s narastajúcim časom zväčšuje, pričom vztlaková sila a tiažová sú konštantné, v istom čase t_0 bude vektorový súčet týchto troch síl nulový. Vtedy sa rýchlosť guľôčku ustáli na výslednej konštantnej hodnote v_m a bude sa pohybovať rovnomerne priamočiaro. A práve tento stav nás bude zaujímať pri meraní koeficientu dynamickej viskozity. Pre uvedené tri sily môžeme písať

$$\vec{G} + \vec{F}_{\mathrm{vz}} + \vec{F}_{\mathrm{o}} = \vec{0} \tag{5}$$

$$F_{\mathrm{vz}} + F_{\mathrm{o}} = G \tag{6}$$

Pomocou týchto vzťahov môžeme odvodiť vzťah platný pre koeficient dynamickej viskozity. Využitím druhého Newtonovho zákona a vzťahu $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, kde a je zrýchlenie, dostaneme diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením je funkcia rýchlosti $v(t)$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = G - (F_{\mathrm{vz}} + F_{\mathrm{o}}) \tag{7}$$

Keď teraz dosadíme do rovnice (7) vzťahy (2), (3), (4) a riešíme, dostaneme vzťah pre rýchlosť v ako funkciu času v tvare

$$v = \frac{2}{9}\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)r^2 g}{\eta}(1 - e^{\frac{-6\pi\eta r t}{m}}) \tag{8}$$

Zo vzťahu (8) vidíme, že rýchlosť sa teoreticky ústáli na konštantnej hodnote až po uplynutí nekonečne dlhého časového úseku. Vzhľadom k tomu, že okamžitá rýchlosť sa exponenciálne limitne blíži k hodnote v_m, v istom čase t_1 bude druhý člen v zátvorke vo výraze (8)

veľmi malý oproti 1 a môžeme ho zanedbať. Preto pre konečnú rýchlosť pohybu guľôčky v_m bude platiť vzťah

$$v_m = \frac{2}{9}\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)r^2 g}{\eta} \tag{9}$$

Ak budeme sledovať pohyb guľôčky po vybranej dráhe L a zmeriame čas t jej pohybu po tejto dráhe, môžeme pre rýchlosť vo vzťahu (9) písať

$$v_m = \frac{L}{t} = \frac{2}{9}\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)r^2 g}{\eta} \tag{10}$$

Ak zo vzťahu (10) vyjadríme η, dostaneme

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)r^2 gt}{L} \tag{11}$$

To, po akom čase a prejdení akej veľkej dráhy guľôčka dosiahne konštantnú rýchlosť v_m, závisí od rozdielu hustoty kvapaliny a materiálu guľôčky. Pri malom rozdiele hustôt dosiahne guľôčka rýchlosť v_m pomerne rýchlo. Je preto dôležité pred meraním zistiť, od akej hĺbky môžeme považovať pohyb guľôčky v kvapaline za rovnomerný priamočiary.

Vzťah (11) platí pre prípad, že guľôčka padá v neohraničenej, nekonečne rozľahlej kvapaline. V našom meraní budeme používať zvislú trubicu naplnenú vyšetrovanou kvapalinou. Vtedy pre veľkosť odporovej sily platí vzťah

$$F_o = \frac{6\pi\eta r v}{1 + 2{,}4r/R}$$

kde R je polomer vnútorneho priemeru trubice. Táto korekcia spôsobí, že vzťah pre výpočet koeficientu dynamickej viskozity bude v tvare

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)r^2 gt}{L(1 + 2{,}4r/R)} \tag{12}$$

Metóda merania

Stokesov viskozimeter tvorí dlhá zvislá priehľadná valcová trubica s vnútorným polomerom R, ktorá je naplnená vyšetrovanou kvapalinou známej hustoty ϱ_2. Na hladinu kvapaliny v tejto trubici položíme do stredu guľôčku vyrobenú z materiálu známej hustoty ϱ_1, pričom pred vložením zmeriame jej polomer r (resp. priemer) a necháme voľne padať. V mieste, v ktorom má guľôčku už konštantnú rýchlosť umiestnime prvý prstenec, pod ním vo vzdialenosti L umiestnime druhý a budeme merať čas t pohybu guľôčky po tejto dráhe. Postup opakujeme 10×. Výsledky priebežne zapisujeme do tabuľky 1.

č. m.	r	t	v_m	η	$(\eta - \bar{\eta})^2$
1.					
2.					
...					

tab. 1

Pri meraní musíme najprv poznať dráhu, na ktorej sa už guľôčka pohybuje konštantnou rýchlosťou v_m. Určíme ju nasledujúcim postupom.

1. Nastavíme horný prstenec P_1 do polovice dráhy výšky trubice a druhý prstenec P_2 umiestnime na spodok trubice.

2. Horeopísaným spôsobom pustíme guľôčku do kvapaliny a zmeriame čas, za ktorý guľôčka prejde vzdialenosť medzi prstencami P_1 a P_2. Z týchto údajov vypočítame rýchlosť pohybu guľôčky.

3. Posunieme prstenec P_1 asi do 2/3 výšky valca a opäť určíme rýchlosť pádu guľôčky ako v bode 2. Ak táto rýchlosť sa od predchádzajúcej značne nelíši (len v rámci presnosti merania), opakujeme meranie 10-15 $\times$. Zmerané údaje pritom zapisujeme do tabuľky 1.

4. Ak rýchlosť guľôčky zmeraná v bode 3 bude menšia ako v bode 2, opakujeme postup určenia rýchlosti pre dve nižšie polohy prstenca P_1. Ak ani potom nedosiahneme rovnakých rýchlostí, volíme menšie guľôčky a postup opakujeme.

Úlohy

1. Určte dráhu L pre daný typ guľôčky, t.j. stanovte umiestnenie prstenca P_1.

2. Zmerajte čas pádu guľôčky po dráhe L.

3. Určte koeficient dynamickej viskozity η s použitím dvoch druhov guľôčok.

Kontrolné otázky

1. Čo je viskozita kvapaliny a v akých jednotkách sa meria?

2. Ktoré sily pôsobia na teleso padajúce v kvapaline?

3. Prečo a kedy sa guľôčka môže pohybovať v kvapaline rovnomerným pohybom?

4. Vypočítajte vzťah pre koeficient dynamickej viskozity.

5. Bolo by možné nejakým spôsobom realizovať experiment, pri ktorom by sme využili priamo vzťah (11), nie vzťah (12)?