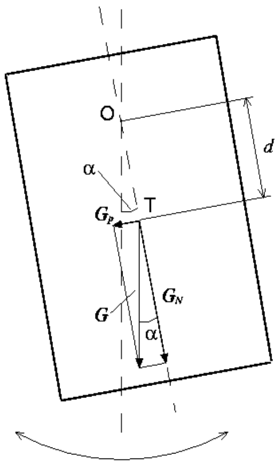
Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla

Teoretický úvod

Fyzikálnym kyvadlom rozumieme teleso (napr. dosku, tyč), ktoré vykonáva periodický kmitavý pohyb okolo osi, ktorá neprechádza ťažiskom. Schématicky je takéto kyvadlo znázornené na obr. 1. Príčinou jeho pohybu je tiažová sila $\vec{G}$ pôsobiaca v ťažisku telesa. Teleso vychýlené z rovnovážnej polohy o uhol α do rovnovážnej polohy vracia zložka sily $\vec{G}_p$



obr. 1

Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla je v tvare

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \tag{1}$$

kde $\vec{m}$ je vektor momentu sily, pričom jeho smer je totožný so smerom osi rotácie (kmitania), $\vec{\varepsilon}$ je uhlové zrýchlenie a I je moment zotrvačnosti. Moment zotrvačnosti je skalárna fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje zotrvačné účinky telesa alebo sústavy hmotných bodov pri rotačnom alebo kmitavom pohybe vzhľadom na os rotácie (kmitania). Pre sústavu hmotných bodov je definovaný vzťahom

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

kde m_i je hmotnosť i=teho hmotného bodu, r_i je vzdialenosť i-teho hmotného bodu od osi otáčania (kmitania). Pre teleso so spojite rozloženou hmotou je moment zotrvačnosti definovaný vzťahom

$$I = \int_{(M)} r^2 \mathrm{d}m \tag{2}$$

kde M je hmotnosť daného telesa, r je vzdialenosť hmotného elementu $\mathrm{d}m$ od osi rotácie (kmitania). Integrál (2) môžeme prepísať za využitia vzťahov d $m = \varrho\,\mathrm{d}\tau = \varrho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ na tvar

$$I = \int_{(V)} r^2 \varrho\,\mathrm{d}\tau = \iiint_{\dots}^{\dots} r^2(x,y,z)\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

kde $\mathrm{d}\tau$ je objemový element a $\varrho(x,y,z)$ je hustota materiálu telesa v bode (x,y,z) (v prípade homogénneho telesa je hustota konštantná, $\varrho(x,y,z) = \varrho$).

Kyvadlo znázornené na obr. 1 vykonáva kmity v rovine nákresne okolo osi O kolmej na nákresňu. Veľkosť momentu sily je podľa obrázku daná vzťahom

$$M = -G_p d = -G\sin\alpha\, d = -mgd\sin\alpha \tag{4}$$

kde m je hmotnosť telesa, g je tiažové zrýchlenie a d je vzdialenosť ťažiska od osi, okolo ktorej kyvadlo kmitá. Znamienko - vo vzťahu (4) vyjadruje tú skutočnosť, že sila G_p smeruje vždy do rovnovážnej polohy.

Veľkosť uhlového zrýchlenia je daná vzťahom

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} \tag{5}$$

Keď rovnicu (1) vyjadríme v skalárnom tvare, teda $M = I\varepsilon$, dosadíme do nej vzťahy (4) a (5) pričom nebudeme uvažovať tlmenie, dostaneme po úprave pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla v tvare

$$I\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + mgd\sin\alpha = 0 \tag{6}$$

Keď vezmeme do úvahy, že pre malé výchylky (do 10 °) platí $\sin\alpha \doteq \alpha$ a po vydelení momentom zotrvačnosti I, dostaneme rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgd}{I}\alpha = 0 \tag{7}$$

Rovnica (7) je diferenciálna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami. Jej riešenie je funkcia, ktorá popisuje časovú závislosť uhlovej výchylky a je v tvare

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{8}$$

kde $\alpha(t)$ je okamžitá uhlová výchylka v čase t, α_0 je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy – amplitúda, φ_0 je počiatočná fáza – začiatočná uhlová výchylka, ω je uhlová frekvencia kmitania. Ak (8) dosadíme do rovnice (7), zistíme, že (8) je riešením (7) vtedy, keď

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{9}$$

Odkiaľ pre periódu kmitania T s využitím vzťahu $\omega = 2\pi/T$ vyplýva

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{10}$$

Úpravou tohoto vzťahu môžeme pre moment zotrvačnosti písať

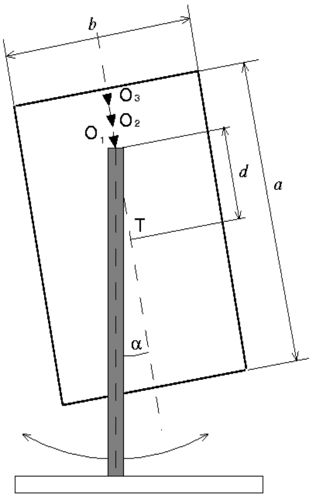
$$I = \frac{T^2 mgd}{4\pi} \tag{11}$$

Ako je známe z dynamiky tuhého telesa, ak poznáme moment zotrvačnosti rotujúceho telesa vzhľadom na určitú os, môžeme určiť moment zotrvačnosti vzhľadom na inú os, ktorá je s ňou rovnobežná, pomocou *Steinerovej vety*, ktorá hovorí: *Moment zotrvačnosti I telesa vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom sa rovná momentu zotrvačnosti I_0 vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, ktorá je s danou osou rovnobežná, zväčšenému o md^2, kde m je hmotnosť telesa a d je vzájomná vzdialenosť oboch spomínaných osí*. Matematicky zapísané

$$I = I_0 + md^2 \tag{12}$$

Postup merania

Fyzikálne kyvadlo tvorí homogénna kovová doska (najlepšie tvaru kvádra), ktorá môže vykonávať kmity okolo jednej zo zvolených osí vytvorených britom, ktorý sa dá zaskrutkovať do zvoleného otvoru. Os je vytvorená dotykovým miestom britu na opornej ploške stojanu. Toto usporiadanie umožňuje vychýlenie dosky o uhol α_0 z jej rovnovážnej polohy (obr. 2), ktorá po uvoľnení bude kmitať ako fyzikálne kyvadlo. Vložením britu do iného otvoru v doske máme možnosť voliť vzdialenosť osi otáčania dosky od jej ťažiska.



obr. 2

Úlohou v tomto meraní je zmerať moment zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, kolmou na zvislú stenu a rovnobežnou s osou kmitania. K určeniu hodnoty I_0 využijeme vzťahy (11) a (12). Pomocou nich dostaneme

$$I_0 = I - md^2 = \frac{T^2}{4\pi^2}mgd - md^2 \tag{13}$$

Vyberte os kmitania a zmerajte vzdialenosť d oskmitania–ťažisko 10 krát. Metódou postupných meraní určte periódu kmitu fyzikálneho kyvadla vzhľadom na túto vybratú os. Vážením zistíte hmotnosť kyvadla 10 krát. Namerané hodnoty spracujte ako priame merania. Práve uvedené fyzikálne veličiny budete mať vypracované v tvare

$$d = \bar{d} \pm \bar{\delta}_d$$
$$T = \bar{T} \pm \bar{\delta}_T$$
$$m = \bar{m} \pm \bar{\delta}_m$$

Pomocou týchto veličín a vzťahu (13) vypočítajte strednú hodnotu I_0 pre prvú os

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{T}^2}{4\pi^2}mg\bar{d} - m\bar{d}^2$$

Chybu merania vypočítajte ako chybu nepriameho merania pomocou parciálnych príspevkov chýb priamo meraných veličín

$$\bar{\delta}_{I_0} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial I_0(d,T,m)}{\partial d}\right|_{\bar{d},\bar{T},\bar{m}}\right)^2(\bar{\delta}_d)^2 + \left(\left.\frac{\partial I_0(d,T,m)}{\partial T}\right|_{\bar{d},\bar{T},\bar{m}}\right)^2(\bar{\delta}_T)^2 + \left(\left.\frac{\partial I_0(d,T,m)}{\partial m}\right|_{\bar{d},\bar{T},\bar{m}}\right)^2(\bar{\delta}_m)^2} \tag{14}$$

Hodnotu momentu zotrvačnosti pre danú os zapíšte v tvare

$$I_0 = \bar{I}_0 \pm \bar{\delta}_{I_0} \tag{15}$$

Získanú hodnotu momentu zotrvačnosti porovnajte s teoreticky vypočítanou hodnotou pre kyvadlo, na ktorom ste merali. Najprv však treba odvodiť vzťah pre moment zotrvačnosti homogénnej (kovovej) dosky obdĺžnikového tvaru (t.j. kváder) vzhľadom na os, ktorá prechádza ťažiskom a je na stenu tejto dosky kolmá. Využijeme na to vzťah (2), resp. (3). Uvažovanú dosku orientujme vzhľadom na súradnicovú sústavu podľa obr. 3. V našom prípade os, voči ktorej moment zotrvačnosti I_0 určujeme, je totožná s osou z (kolmá na nákresňu). Moment zotrvačnosti pre štvrť dosky (časť nachádzajúca sa v prvom kvadrante) vyjadríme podľa definície

$$\frac{I_0}{4} = \int_0^{a/2}\int_0^{b/2}(x^2+y^2)\frac{M}{S}\mathrm{d}S = \int_0^{a/2}\int_0^{b/2}(x^2+y^2)\frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{M}{ab}\int_0^{a/2}\int_0^{b/2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \ldots = \frac{1}{48}M(a^2+b^2)$$

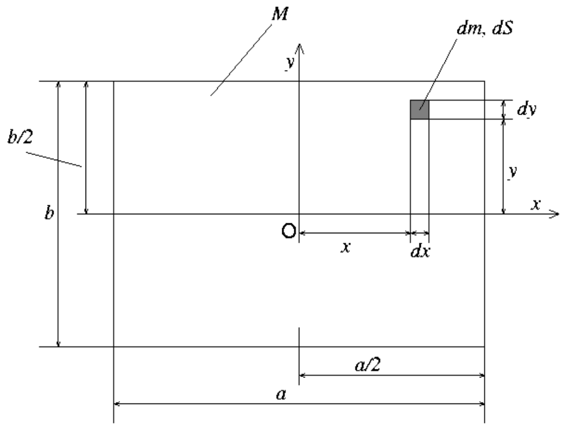
Pre plošnú hustotu sme použili vzťah

$$\varrho_S = \frac{M}{S} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

a z neho sme vyjadrili hmotnosť nekonečne malého elementu d m. Plocha tohoto elementu je dS=dxdy a jeho poloha vzhľadom na uvažovanú os je $r^2 = x^2 + y^2$. Rozmery celej dosky sú dané stranami a, b. Hľadaný moment zotrvačnosti potom bude

$$I_0 = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \tag{16}$$

kde M je hmotnosť dosky.



obr. 3

Úlohy

1. Vyberte tri osi, vzhľadom na ktoré bude kmitať fyzikálne kyvadlo
2. Zmerajte pre každú os vzdialenosť os–ťažisko.
3. Metódou postupných meraní určte periódu kmitu pre každú os.
4. Spracujte namerané hodnoty.
5. Pomocou vzťahu (13) vypočítajte moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom pre každú os.
6. Pomocou vzťahu (14) vypočítajte chybu merania pre moment zotrvačnosti.
7. Výsledok zapíšte v tvare 15 (získate tri hodnoty).
8. Pomocou vzťahu (16) vypočítajte teoretickú hodnotu momentu zotrvačnosti.
9. Každú hodnotu získanú meraním porovnajte s teoretickou hodnotou a zhodnoďte vznik a príčinu prípadných odchýliek.

Kontrolné otázky

1. Čo je to fyzikálne kyvadlo? Napíšte a vysvetlite jeho pohybovú rovnicu.
2. Definujte moment zotrvačnosti vzhľadom na danú os.
3. Napíšte a vysvetlite Steinerovu vetu.
4. Prečo požadujeme, aby fyzikálne kyvadlo kmitalo len pri malých uhlových výchylkách ($\alpha_0 < 10°$)?