Teoretický úvod

Meranie-určovanie číselnej hodnoty fyzikálnej veličiny. Výsledkom merania je zaokrúhlené reálne číslo, počet desatinných miest zodpovedá presnosti údaja. Presnosť merania je ďalej určená chybou merania. Merania rozdeľujeme na *priame* a *nepriame*.
Chyby merania delíme na dva druhy.

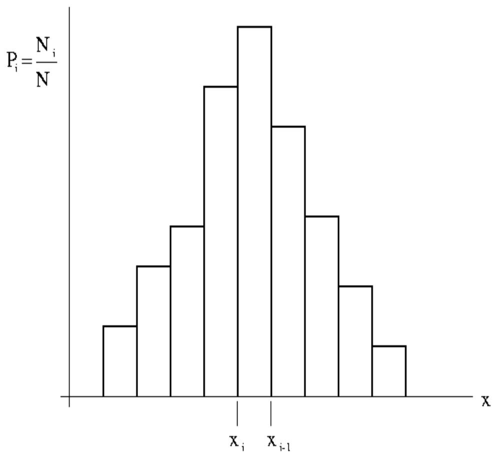
- *sústavná*-pri opakovanom meraní sa uplatní rovnakou mierou
- *náhodná*-pri opakovaní merania sa náhodne mení

Celková chyba merania je potom určená súčtom chyby sústavnej a náhodnej.

Sústavná chyba má príčinu v nepresnosti meracích prístrojov, náhodnú chybu môžeme zmenšiť opakovaním merania.

Štatistické spracovanie nameraných výsledkov

Nech x je fyzikálna veličina a n nech je počet jej meraní. S týchto hodnôt zostrojíme *histogram* (Obr. 1). Ten znázorňuje početnosť získaných výsledkov. Os **x** predstavuje hodnoty meranej veličiny x. Tú rozdelíme na malé intervaly a nad každým intervalom zostrojíme obdĺžnik o výške rovnej relatívnej početnosti výskytu výsledkov z daného intervalu. Je zrejmé, že skutočná hodnota meranej veličiny sa nachádza v blízkosti maxima histogramu, pričom pravdepodobnosť výskytu značne odlišných výsledkov rýchle klesá.

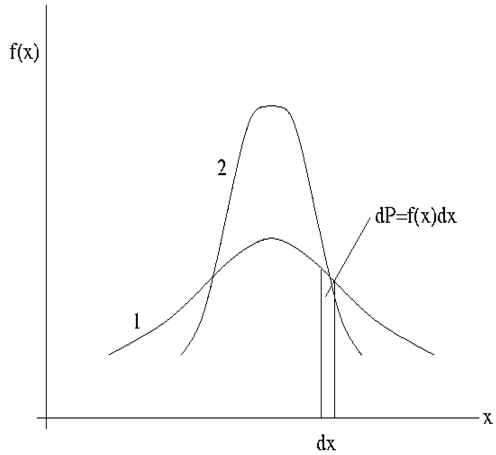


Obr. 1: Histogram zostavený z nameraných hodnôt veličniy x

Pri zväčšovaní počtu meraní n sa spresňuje informácia o hodnote meranej veličiny. Ak "zalimitíme" $n \to \infty$ a $\Delta x = x_i - x_{i-1} \to 0$, dostaneme namiesto histogramu spojitú krivku, nazývame ju *hustota pravdepodobnosti rozdelenia* $f(x)$. Integráciou funkcie $f(x)$ v rozsahu od x_1 po x_2 dostávame pravdepodobnosť toho, že meraná veličina bude ležať v intervale $\langle x_1, x_2 \rangle$ (Obr. 2). Väčšina merania odpovedá *Gaussovemu normálnemu rozdeleniu* pravdepodobnosti. Pre merania vtedy platí:

- výsledky merania môžu nadobúdať spojité spektrum hodnôt
- pri vysokom počte meraní majú chyby opačného znamienka rovnakú pravdepodobnosť

- s rastom chyby klesá pravdepodobnosť jej výskytu



Obr. 2: Funkcie normálneho rozdelenia pre rovnaké hodnoty strednej hodnoty a dve rôzne hodnoty disperzie

Funkcia hustoty pravdepodobnosti normálneho rozdelenia má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_x} e^{\frac{(\bar{\mathrm{X}}-x)^2}{2\delta_x^2}} \tag{1}$$

kde

$$\bar{\mathrm{X}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x \mathrm{d}x \tag{2}$$

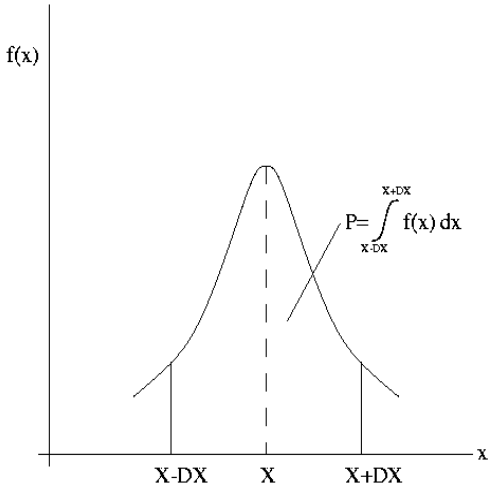
je *stredná hodnota* veličiny x a reprezentuje (správnu) hodnotu veličiny X a

$$\delta_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\mathrm{X}} - x)^2 f(x) \mathrm{d}x \tag{3}$$

je *disperzia* (rozptyl) meranej veličiny a súvisí so šírkou rozdeľovacej funkcie. Veličina δ_x je *stredná kvadratická chyba* a udáva, ako sú rozptýlené merané hodnoty veličiny okolo strednej hodnoty $\bar{\mathrm{X}}$. Ak vymedzíme interval $(\bar{\mathrm{X}} - \mathrm{D}x, \bar{\mathrm{X}} + \mathrm{D}x)$(Obr. 3), potom veličina $P(\mathrm{D}x)$ vyjadruje pravdepodobnosť, že náhodná veličina padne do tohoto intervalu. Veličina P sa nazýva *miera spoľahlivosti* (udáva sa ako číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ alebo v %), príslušný interval sa nazýva *interval spoľahlivosti* a hodnota Dx predstavuje náhodnú chybu merania pre danú mieru spoľahlivosti. Táto chyba súvisí s δ_x vzťahom

$$\mathrm{D}x = t_p \delta_x \tag{4}$$

kde koeficient t_p sa určí integráciou funkcie (1). Keďže výpočet tohoto integrálu je pomerne zložitý a zdĺhavý, pre praktické prípady možno nájsť hodnoty koeficientov v tabuľkách.



Obr. 3: K určeniu miery spoľahlivosti

Praktický postup pri meraniach

Ciele každého merania (aspoň na laboratórnych cvičeniach) môžeme rozložiť na

- čo najviac sa priblížiť k správnej hodnote $\bar{\mathrm{X}}$ meranej fyzikálnej veličiny X
- pre požadovanú mieru spoľahlivosti P určiť interval spoľahlivosti merania

Je zrejmé, že v pri realizácii merania nemôžeme dosiahnuť nekonečný počet meraní pre určenie hodnôt $\bar{\mathrm{X}}$ a δ_x. S použitím štatistiky môžeme však tieto hodnoty určiť s obmedzenou presnosťou so súboru pozostávajúceho z konečného počtu meraní.

Ak meraním fyzikálnej veličiny získame *súbor nameraných hodnôt* x_i, $i = 1, \ldots, n$ potom hodnote $\bar{\mathrm{X}}$ sa použitím tohoto súboru najviac blíži hodnota, ktorú nazývame *aritmetický priemer*, označíme ju X_n a vypočítame ju pomocou vzťahu

$$X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5}$$

Rozptyl merania chrakterizuje *stredná kvadratická ochýlka merania.* Tú určíme pomocou vzťahu

$$\sigma_{x,n} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_n - x_i)^2} \tag{6}$$

Hodnoty X_n a $\sigma_{x,n}$ závisia od konkrétneho súboru nameraných hodnôt a majú teda tiež náhodný charakter. Keby sme merali veľa takýchto súborov, pre každý určili túto dvojicu hodnôt, potom možno dokázať, že platí

$$\langle X_n \rangle \doteq \bar{\mathrm{X}} \tag{7}$$

$$\langle \sigma_{x,n} \rangle \doteq \sqrt{\frac{n-1}{n}}\, \delta_x \tag{8}$$

kde symbol $\langle . \rangle$ znamená strednú hodnotu. Vzhľadom na vzťah je účelné zaviesť *štandardnú odchýlku merania* vzťahom

$$S_{x,n} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_n - x_i)^2} \tag{9}$$

pre ktorú platí vzhľadom na vzťah (6) a (7) $\langle S_{x,n} \rangle \simeq \delta_x$.

Ak použijeme najpravdepodobnejšiu hodnotu X_n ako výsledok merania, zaujíma nás, ako presne táto hodnota vystihuje správnu hodnotu X. Keďže X_n je tiež náhodnou veličinou, zaujíma nás jej disperzia. Možno dokázať, že ak pre meranie veličiny x platí normálne rozdelenie s disperziou δ_n^2, potom pre hodnoty X_n platí tiež normálne rozdelenie, ale s n-krát menšou disperziou, takže *stredná kvadratická chyba aritmetického priemeru* je určená vzťahom

$$\delta(X_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\delta_x \quad \text{resp.} \quad \delta X_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\langle S_{x,n} \rangle \tag{10}$$

Aritmetický priemer tak oveľa lepšie vystihuje správnu hodnotu ako jednotlivé merania. Interval spoľahlivosti (resp. náhodnú chybu merania) určíme pre požadovanú spoľahlivosť P podľa vzťahu (4) s tým, že namiesto δ_x použijeme $\delta(X_n)$.

Pri reálnom meraní na laboratórnych cvičeniach však nemôžeme získať veľké množstvo opakovaných súborov (najmä kvôli časovej náročnosti). Uspokojíme sa teda s jedným súborom. Z toho dôvodu nemôžeme určiť stedné hodnoty (7) a (8). Vo vzťahu (10) použijeme namiesto strednej hodnoty štandardnej odchýlky hodnotu získanú z jediného súboru, takže

$$\delta(X_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,S_{x,n} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_n - x_i)^2} \tag{11}$$

s tým, že veličinu $\delta_(X_n)$ stanovujeme s obmedzenou presnosťou, ktorá súvisí s disperziou štandardnej odchýlky

$$\delta(S_{x,n}) \simeq \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\langle S_{x,n} \rangle \quad \text{pre} \quad n \gg 1 \tag{12}$$

Relatívna presnosť hodnoty $\delta(X_n)$ stanovenej podľa (11) odpovedá podľa (12) hodnote $1/\sqrt{2(n-1)}$, čo napríklad pre $n = 10$ znamená 24%, pre $n = 50$ 10%. Z toho vyplýva, že pri bežných počtoch opakovaných meraní $n < 100$ má zmysel udávať chybu iba na jedno desatinné miesto.

Nakoľko $\delta(X_n)$ stanovená podľa (11) je priaznivejšia (menšia) ako správna hodnota podľa (10), musíme túto skutočnosť rešpektovať pri určovaní intervalu spoľahlivosti (resp. náhodnej chyby merania). Pre danú mieru spoľahlivosti P a pre daný počet meraní n určíme pološírku intervalu spoľahlivosti zo vzťahu

$$\mathrm{D}x_n = t_{P,n}\sqrt{\frac{1}{n(n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_n - x_i)^2} \tag{13}$$

kde $t_{P,n}$ sa nazýva *Studentov koeficient.* Okrem normálneho rozdelenia rešpektuje aj konečný počet meraní a jeho hodnoty sú pre vybrané prípady s tabuľkované a možno ich nájsť v literatúre. My budeme pri meraniach počítať chybu merania pre mieru spoľahlivosti približne 0.67, teda tak, aby hodnota $t_{P,n} = 1$.

Výsledok merania uvádzame v tvare

$$X = X_n \pm (\mathrm{D}x_s + \mathrm{D}x_n) \tag{14}$$

pričom správne zaokrúhlime chybu merania a udáme rovnaký počet desatinných miest pre aritmetický priemer i chybu, napr. $L = (1.02 \pm 0.03)10^2$ m.

Vyhodnotenie nepriameho merania

Pri nepriamom meraní určujeme hodnotu požadovanej fyzikaálnej veličiny výpočtom z hodnôt meraných veličín.

Uvažujme veličinu **A** určenú funkciou $\mathbf{A}=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_1 = \bar{x}_1 \pm \delta x_1$, $x_2 = \bar{x}_2 \pm \delta x_2$, ... sú priamo merané a štatisticky vyhodnotené veličiny. Ak sú $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ najpravdepodobnejšie hodnoty (aritmetické priemery) priamo meraných veličín, potom najpravdepodobnejšia hodnota veličiny **A** je určená vzťahom

$$A = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) \tag{15}$$

Disperzia veličiny A je daná súčtom príspevkov od jednotlivých priamo meraných veličín

$$\delta A^2 = \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_1}\right]^2_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots} \delta^2_{x_1} + \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_2}\right]^2_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots} \delta^2_{x_2} + \ldots \tag{16}$$

kde parciálne derivácie sú vyčíslené dosadením aritmetických priemerov. Zo stanovenej disperzie, resp. strednej kvadratickej chyby δA určíme už známym spôsobom pre danú mieru spoľahlivosti P náhodnú chybu DA veličiny **A**.

Príklad: Ako príklad si teda vezmeme meranie objemu valčeka. Merať budeme dve nezávislé veličiny, *priemer* d a *výšku* h valčeka. Objem vypočítame pomocou vzťahu

$$V = \frac{\pi d^2}{4}\, h \tag{17}$$

Budeme sa snažiť určiť objem v tvare

$$V = \bar{V} \pm \mathrm{D}V$$

Dosaďme teda vzťah (17) do vzťahu (16). Dostaneme

$$\delta V = \sqrt{\left[\frac{\partial(\pi\ d^2 h/4)}{\partial d}\right]^2 (\delta d)^2 + \left[\frac{\partial(\pi\ d^2 h/4)}{\partial h}\right]^2 (\delta h)^2} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{\pi\ dh}{2}\right]^2 (\delta d)^2 + \left[\frac{\pi\ d^2}{4}\right]^2 (\delta h)^2} = V\sqrt{\frac{4}{d^2}(\delta d)^2 + \frac{1}{h^2}(\delta h)^2} \tag{18}$$

Teraz nám už stačí len výpočtom získať hodnoty $\bar{h}$, $\bar{d}$, δh a δd. Tie získame použitím vzťahov (5) a (11). Dosadením do (18) vyčíslime hodnotu chyby DV.

$$\mathrm{D}V = \bar{V}\sqrt{\frac{4}{\bar{d}^2}(\delta d)^2 + \frac{1}{\bar{h}^2}(\delta h)^2} \tag{19}$$

Predpokladajme, že meraním priemeru a výšky sme získali nasledujúce tabuľky hodnôt.

č. merania	d_i, mm	$\bar{d}-d_i$, mm	$(\bar{d}-d_i)^2$, 10^{-3} mm^2
1	36.125	-0.0417	1.74
2	35.954	0.1293	16.72
3	36.011	0.723	5.23
4	36.098	-0.0147	0.22
5	35.976	0.1073	11.51
6	36.284	-0.2007	40.28
7	35.900	0.1833	33.60
8	36.341	-0.2577	66.40
9	36.253	-0.1697	28.80
10	35.891	0.1923	37.00

Hodnota $\bar{d}$ vypočítame pomocou vzťahu (5). Dostaneme

$$\bar{d} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} d_i = 36.083 \text{ mm}$$

Hodnotu δd vypočítame pomocu vzťahu (11).

$$\delta d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(\bar{d}-d_i)^2}{10(10-1)}} \doteq 1.638\ 10^{-3} \text{ mm}$$

Po zaokrúhlení môžeme pre priemer valčeka písať

$$d = (36.083 \pm 0.002) \text{ mm}$$

Pre výšku nech sme namerali hodnoty uvedené v nasledujúcej tabuľke

č. merania	h_i, mm	$\bar{h}-h_i$, mm	$(\bar{h}-h_i)^2$, 10^{-3} mm^2
1	112.297	-0.2129	45.33
2	111.994	0.0901	8.12
3	112.204	-0.1199	14.38
4	111.998	0.0861	7.41
5	112.076	0.0081	0.07
6	112.184	-0.0999	10.00
7	112.003	0.0811	6.58
8	112.141	-0.569	3.24
9	112.053	0.0311	1.00
10	111.891	0.1931	37.30

Podobným postupom ako v prípade priemeru by sme určili

$$h = (112.084 \pm 0.001)\text{mm}$$

Pre $\bar{V}$ a DV získame po dosadení $\bar{h}$, $\bar{d}$, δh a δd do vzťahov (17) a (19)

$$V = (114614, 2931 \pm 0.0001) \text{ mm}^3$$