

# Meranie poissonovej konštanty vzduchu

## Teoretický úvod

V súčasnej vede, technickej praxi, ale i skúmaní javov v prírode sa vo veľmi širokej miere využívajú deje platné pre ideálne plyny. Ide o deje *izotermický*, *izochorický*, *izobarický* a *adiabatický*. Práve posledný z nich má asi najväčšie zastúpenie. Využívame ho pri konštrukcii chladničiek, pri skvapalňovaní plynov, pri behu spaľovacieho piestového motora tiež prebieha adiabatický dej, nezanedbateľný je jeho význam v meteorológii, na jeho princípe možno vysvetliť napríklad vznik búrok alebo vetra známeho pod názvom alpský fén. Oboznámenie sa s týmto dejom patrí teda k základným fyzikálnym a technickým vedomostiam.

Plyn je jedným z troch (resp. štyroch) skupenstiev látky. Stav plynu v rovnováhe určujeme súborom stavových veličín. Tieto veličiny sú *tlak*  $p$ , *objem*  $V$  a (*termodynamická*) *teplota*  $T$ . Ďalšie dve dôležité veličiny charakterizujúce energetické a tepelné vlastnosti plynu sú *tepelná kapacita za konštantného objemu*  $C_V$  a *tepelná kapacita za konštantného tlaku*  $C_p$ . Tepelná kapacita za konštantného objemu je množstvo tepla, ktoré musíme dodať danému množstvu plynu na to, aby sme za konštantného objemu zvýšili jeho teplotu o jednotku teploty. Podobná definícia je aj pre tepelnú kapacitu pri konštantnom tlaku. Jednotkou tepelnej kapacity je  $\text{J K}^{-1}$  ( $\text{J}^\circ\text{C}^{-1}$ ).

Zaoberajme sa teraz energetickými zmenami v plyne pri jeho zohrievaní. Pri zohrievaní plynu sa mení objem, tlak a teplota plynu. Zohrievajme plyn za stáleho objemu. Dodávaním tepla zvyšujeme kinetickú energiu molekúl plynu a tým jeho vnútornú enrgiu. Dodané teplo  $(dQ)_V$  sa teda v plyne zaberajúcom konštantný objem premení na prírastok jeho vnútornej energie

$$(dQ)_V = (dU)_V = C_V dT \quad (1)$$

Zohrievajme teraz plyn za podmienky konštantného tlaku. Dodané teplo  $(dQ)_p$  sa premení na prírastok jeho vnútornej energie  $(dU)_p$  a na prácu, ktorú bude plyn konať proti vonkajším silám, plyn sa bude rozpínať. Pre tieto energetické zmeny môžeme písať

$$(dQ)_p = (dU)_p + p dV \quad (2)$$

Zvýšenie vnútornej energie  $(dU)_p$  môžeme zapísať podobne ako v rovnici (1) pomocou  $C_V$

$$(dU)_p = C_V dT$$

a dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$(dQ)_p = C_V dT + p dV \quad (3)$$

Zo stavovej rovnice pre jeden mól ideálneho plynu

$$pV = RT \quad (4)$$

kde  $R$  je molová plyná konštantna, dostaneme jej diferencovaním za podmienky konštantného tlaku rovnosť

$$p dV = R dT \quad (5)$$

Využitím (5) dostaneme z rovnice (3)

$$(dQ)_p = C_V dT + R dT \quad (6)$$

Delením rovnice (6) přírastkom teploty  $dT$  dostaneme

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = C_p = C_V + R \quad (7)$$

Vzťah (7) sa nazýva *Mayerov vzťah* a dáva do súvisu tepelnú kapacitu ideálneho plynu za stáleho tlaku  $C_p$  s tepelnou kapacitou ideálneho plynu za stáleho objemu  $C_V$ . Zo vzťahu (7) vidno, že hodnota  $C_p$  je vždy väčšia ako hodnota  $C_V$ .

Zaoberajme sa teraz adiabatickým dejom v ideálnom plyne, pri ktorom je tento plyn tepelne izolovaný od okolia. Potom sa teplo neprijíma ani nevydáva a všetky energetické zmeny v plyne sa dejú na úkor jeho vnútornej energie. Platí teda

$$dQ = 0$$

Zo vzťahu (3) potom dostaneme

$$0 = C_V dT + p dV \quad (8)$$

Diferencujme opäť stavovú rovnicu (4) tentoraz už za neplatnosti podmienky konštantného tlaku. Dostaneme

$$p dV + V dp = R dT$$

Osamostatnením prírastku teploty  $dT$  a dosadením prejde vzťah (8) na tvar

$$\frac{1}{R} C_V (p dV + V dp) + p dV = 0$$

Odtiaľ úpravou

$$(C_V + R) \frac{dV}{V} + C_V \frac{dp}{p} = 0$$

Delením tohoto vzťahu  $C_V$  dostaneme

$$\frac{(C_V + R)}{C_V} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (9)$$

Podiel v prvom člene diferenciálnej rovnice (9) sa nazýva *Poissonova konštanta*

$$\kappa = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} \quad (10)$$

Zo vzťahu (10) vidno, že poissonova konštanta bude vždy väčšia ako 1.

Integrovaním rovnice (9) dostávame

$$\kappa \int \frac{dV}{V} + \int \frac{dp}{p} = \ln V^\kappa + \ln p = \ln(V^\kappa p) = C \quad (11)$$

kde  $C$  je integračná konštanta. Z rovnice (11) vyplýva konečný tvar rovnice platnej pre adiabatický dej (*Poissonova rovnica*)

$$p V^\kappa = p_0 V_0^\kappa = \text{konst} \quad (12)$$

Pomocou kinetickej teórie plynov možno dokázať pomerne jednoduchý vzťah pre Poissonovu konštantu plynu  $\kappa$

$$\kappa = \frac{i + 2}{i}$$

kde  $i$  počet stupňov voľnosti, t.j. počet nezávislých údajov, ktorými je určená poloha molekuly v priestore. Pre najčastejší prípad dvojatómovej molekuly, ktorá má 5 stupňov voľnosti, plynie z tohoto vzťahu hodnota

$$\kappa = \frac{5 + 2}{5} = 1,4$$

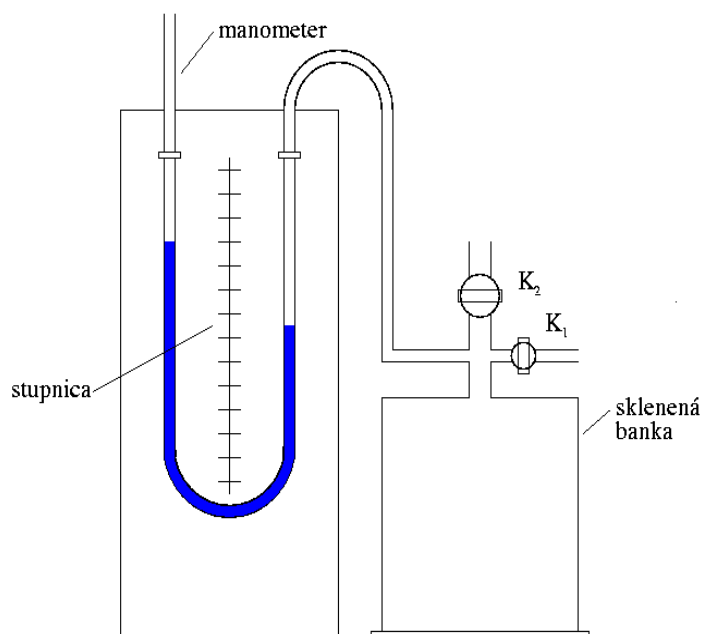
## Postup merania

Poissonovu konštantu meriame *Clément-Desormesovým* prístrojom (obr. 1). Prístroj je veľmi jednoduchý a pozostáva zo sklenenej banky objemu  $V$ , ventilov, prívodov k hustilke a k vodnému manometru tvaru U. Hustilkou zvýšime cez ventil  $K_1$  tlak  $p_1$  v banke nad barometrický tlak  $b$  a počkáme, až sa teplota nahusteného vzduchu vyrovná s teplotou okolia, čo sa prejaví ustálením vodného stĺpca na hodnote  $h_1$ . Pre tlak v banke môžeme písať

$$p_1 = b + \Delta p_1 = b + h_1 \rho_{H_2O} g \quad (13)$$

Teraz ventil  $K_2$  otvoríme tak, aby sa plyn prudko rozpínal, o čom nás presvedčí charakteristické zasyčanie expandujúceho plynu. Pritom predpokladáme, že neprebíhala tepelná výmena expandujúceho plynu s okolím a prebehol teda adiabatický dej. Pred expanziou plynu mal tento plyn tlak  $p_1$  a zaujímal objem sklenenej nádoby, teda  $V$ . Po expanzii plynu tlak v nádobe nadobudol hodnotu barometrického tlaku  $b$  a objem  $V_2$ . Pre uvedené veličiny potom platí poissonova rovnica

$$p_1 V^\kappa = b V_2^\kappa \quad (14)$$



obr.1 *Clément-Desormesov prístroj*

Vzhľadom k tomu, že adiabatická expanzia sa diala na úkor vnútornej energie plynu nahusteného v sklenenej nádobe, klesla pri tejto expanzii teplota plynu na hodnotu nižšiu ako teplota okolia. Keďže plyn uzavretý po expanzii nie je tepelne izolovaný od okolia, dochádza k tepelnej výmene medzi okolím a plynom v nádobe. Po chvíli sa teplota plynu uzavretého v nádobe zvýši na teplotu okolia a tlak z barometrického sa ustáli na novej hodnote  $p_2$ , vyššej ako barometrický tlak  $b$ , o čom bude svedčiť rozdiel hladín v manometri, rozdiel ktorých označíme  $h_2$ . Pre tlak  $p_2$  potom platí

$$p_2 = b + \Delta p_2 = b + h_2 \rho_{H_2O} g \quad (15)$$

Táto hodnota je samozrejme značne odlišná od hodnoty  $p_1$ , pretože v nádobe máme uzavreté iné množstvo plynu. Ak budeme sledovať pôvodné množstvo plynu, ktoré bolo pred expanziou natlakované v sklenenej nádobe, tak pri tomto deji sa jeho objem zmení z hodnoty  $V_2$  na hodnotu  $V_3$  a tlak, ako už bolo uvedené, z barometrického  $b$  na hodnotu  $p_2$ , pričom teplota plynu sa ustáli na teplote okolia  $T$ . Pri teplote  $T$  a tlaku  $p_1$  pred expanziou plyn zaberá objem  $V$ . Pri tej istej teplote a tlaku  $p_2$  zaujíma objem  $V_3$ . Medzi týmito veličinami platí vzťah (rovnica pre izotermický dej)

$$p_1 V_1 = p_2 V_3 \quad (16)$$

Vzhľadom na to, že zmena teploty pri expanzii je malá, bude sa tlak  $p_2$  málo líšiť od tlaku  $b$  a teda aj objem  $V_3$  bude málo odlišný od objemu  $V_2$ . Preto miesto vzťahu (16) použijeme približný vzťah

$$p_1 V = p_2 V_2 \quad (17)$$

Z rovníc (14) a (17) dostaneme dosadením (13) a (15)

$$(b + \Delta p_1) V^\kappa = b V_2^\kappa \quad (b + \Delta p_1) V = (b + \Delta p_2) V_2$$

Upravujeme teraz predchádzajúce vzťahy

$$\frac{b + \Delta p_1}{b} = \left(\frac{V_2}{V}\right)^\kappa \quad \frac{V_2}{V} = \frac{b + \Delta p_1}{b + \Delta p_2}$$

$$\frac{b + \Delta p_1}{b} = \left(\frac{b + \Delta p_1}{b + \Delta p_2}\right)^\kappa$$

$$1 + \frac{\Delta p_1}{b} = \left(\frac{1 + \frac{\Delta p_1}{b}}{1 + \frac{\Delta p_2}{b}}\right)^\kappa$$

$$\left(1 + \frac{\Delta p_1}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta p_2}{b}\right)^\kappa = \left(1 + \frac{\Delta p_2}{b}\right)^\kappa$$

Posledný vzťah rozpíšeme pomocou binomickej vety. Podiely  $\Delta p_1/b$  a  $\Delta p_2/b$  sú však malé oproti 1, takže zanedbaním súčinov a mocnín  $\Delta p_1/b$  a  $\Delta p_2/b$  dostaneme

$$\left(1 + \frac{\Delta p_1}{b}\right) \left(1 + \kappa \frac{\Delta p_2}{b}\right) = \left(1 + \kappa \frac{\Delta p_2}{b}\right)$$

Roznásobením a osamostatnením dostaneme konečný vzťah pre určenie hodnoty  $\kappa$

$$\kappa = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (18)$$

## Úloha

1. Zmerajte Poissonovu konštantu vzduchu desaťkrát pomocou Clément–Désormesovho prístroja a vzťahu (18).
2. Vypočítajte aritmetický priemer pre Poissonovu konštantu.
3. Ku každému rozdielu hladín  $h_1$  a  $h_2$  určte príslušný tlak  $p_1$  a  $p_2$ .
4. Uveďte tabuľku pre  $\kappa$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $p_1$  a  $p_2$ .
5. Porovnajme namerané  $\kappa$  s hodnotou získanou z tabuliek.
6. Vypočítajte chybu merania.