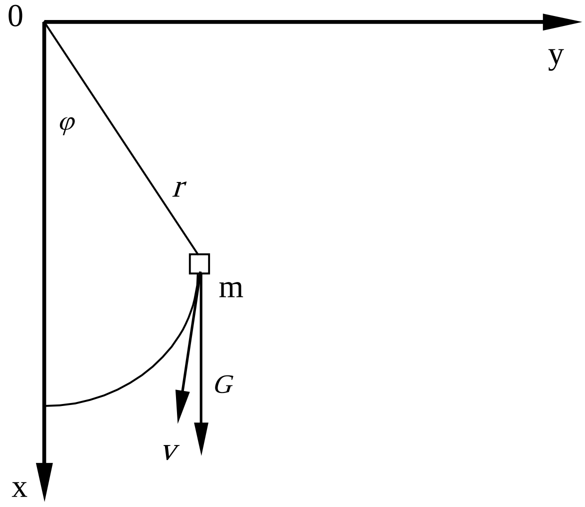
MATEMATICKÉ KYVADLO

Teoretický rozbor

Matematické kyvadlo je teleso s hmotnosťou m zavesené na závese dĺžky r, ktorého hmotnosť je zanedbateľná voči hmotnosti telesa. Pri vychýlení tohoto telesa z rovnovážnej polohy o uhol ϕ môžeme pohyb kyvadla popísať nasledovne:



Polohový vektor r, určujúci v karteziánskej súradnicovej sústave okamžitú polohu ťažiska telesa m, možno vyjadriť pomocou jednotkových smerových vektorov i a j nasledovne

$$r = r(i\cos\phi + j\sin\phi).$$

Moment M gravitačnej sily G = mgi vtedy bude

$$M = r \times G = -\,kmgr\sin\phi \;. \tag{1}$$

Moment gravitačnej sily M vyjadríme pomocou momentu hybnosti telesa L nasledovne

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times p) = \frac{d}{dt}\left\{ r\left[i\cos\phi + j\sin\phi\right] \times m\frac{dr}{dt} \right\} = kmr^2\frac{d^2\phi}{dt^2}\,. \tag{2}$$

Porovnaním (1) a (2) dostaneme pre uhlovú odchýlku kyvadla ϕ diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{r}\sin\phi = 0\,.$$

Pre kmity s malou amplitúdou použijeme pre zjednodušenie riešenia tejto rovnice aproximáciu

$$\sin\phi \cong \phi \tag{3}$$

a dostaneme rovnicu:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{g}{r}\right)\phi = 0\,.$$

Je to pohybová rovnica harmonického oscilátora s uhlovou frekvenciou ω

$$\omega = \left(\frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Vidíme, že veľkosť gravitačného zrýchlenia g je pre toto kyvadlo funkciou jeho periódy T a dĺžky r

$$g = g(T, r) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r\,. \tag{4}$$

Tento vzťah platí pre malé uhlové odchýlky ϕ matematického kyvadla, pre ktoré je možné použiť aproximáciu (3), t.j. približne do päťstupňov uhlovej odchýlky. Pri väčších hodnotách ϕ nie sú hodnoty gravitačného zrýchlenia g v zhode so vzťahom (4).

Pri analýze pohybu matematického kyvadla sme neuvažovali o brzdnej sile, ktorá tlmí pohyb tohto oscilátora. Jej zdrojom je hlavne odpor vzduchu. V dôsledku pôsobenia brzdnej sily dochádza k postupnému zmenšovaniu amplitúdy kyvadla. Podrobný rozbor tohto pohybu tu nebudeme prevádzať, využijeme len analógiu s pohybom tlmeného lineárneho harmonického oscilátora. Z nej vyplýva, že amplitúda uhlovej odchýlky tlmených kmitov Φ matematického kyvadla klesá exponenciálne s časom

$$\Phi = \Phi_o\, e^{-\delta t}\ ,$$

kde Φ_0 je počiatočná amplitúda v dobe t = 0 s a konštanta δ určuje rýchlosť poklesu amplitúdy.

Hodnota koeficientu tlmenia δ charakterizuje vplyv brzdnej sily na pohyb oscilátora. Odhadneme ho pomocou nasledovnej úvahy. Vyjadríme pomer dvoch po sebe nasledujúcich amplitúd kmitov kyvadla:

Amplitúda kmitov v dobe t = T_1 bude

$$\Phi(T_1) = \Phi_o\, e^{-\delta T_1}\,.$$

Amplitúda kmitov v dobe t = T_2 = T_1 + T bude

$$\Phi(T_2) = \Phi_o\, e^{-\delta T_2}$$

Potom

$$\frac{\Phi(T_1)}{\Phi(T_2)} = e^{\delta(T_2 - T_1)},$$

odtiaľ

$$\ln\frac{\Phi(T_1)}{\Phi(T_2)} = \delta T,$$

kde T je perióda kmitov oscilátora. Koeficient tlmenia δ bude

$$\frac{1}{T}\ln\frac{\Phi(T_1)}{\Phi(T_2)} = \delta.$$

Z tohto vzťahu je zrejmé, že pre pomer amplitúd kmitov kyvadla v dobe $t=T_1$ (amplitúdu označíme $\Phi(T_1)$) a po k kmitoch v dobe $t = T_1+kT$ (amplitúda bude $\Phi(kT)$) platí

$$\frac{1}{kT}\ln\frac{\Phi(T_1)}{\Phi(kT)} = \delta. \tag{5}$$

Úlohy

1. Zmerajte pre dané matematické kyvadlo jeho periódu T a dĺžku r.
2. Vypočítajte gravitačné zrýchlenie a štandartnú odchýlku merania s(g).
3. Určte skreslenie hodnoty g pri meraní s veľkými amplitúdami kmitov.
4. Určte koeficient tlmenia δ.

Postup

Periódu kmitov kyvadla určíme pomocou opakovaných meraní doby 30 kmitov kyvadla. Meranie opakujeme aspoň desaťkrát. Pri meraní dbáme na splnenie podmienky minimálnej amplitúdy výchylky. Oceľovým meradlom zmeriame dĺžku kyvadla r (vzdialenosť od závesu do ťažiska telesa). Pomocou rovnice (4) určíme gravitačné zrýchlenie v mieste experimentu. Štandartnú odchýlku s(T) do výpočtu chyby merania určíme z priamych opakovaných meraní periódy T a chybu merania dĺžky kyvadla s(r) odhadneme podľa použitého meradla.

V úlohe 3 nastavíme amplitúdu výchylky matematického kyvadla na 15 a potom na 30 stupňov. Riešenie pohybovej rovnice kyvadla s aproximáciou (3) je teraz zaťažené chybou. Hodnotu gravitačného zrýchlenia g určíme pri týchto výchylkách podobne ako v úlohe 2. Vyhodnotíme odchýlky takto určených hodnôt g od výsledkov merania v predchádzajúcej úlohe, kedy nebolo riešenie pohybovej rovnice kyvadla výrazne poškodené použitím aproximácie.

V úlohe 4 nastavíme uhlovú odchýlku kyvadla znovu na 5 stupňov. Určíme počet kmitov k matematického kyvadla, pri ktorom poklesne amplitúda jeho kmitov o jeden stupeň (výsledná amplitúda výchylky poklesne na 4 stupne). Hodnotu koeficientu δ určíme pomocou rovnice (5). Meranie zopakujeme pri rôznych hodnotách počiatočnej výchylky kyvadla, resp. pri poklese amplitúdy o 2 stupne. Ako hodnotu periódy T použijeme v rovnici (5) výsledok úlohy 1. Predpokladáme pritom, že perióda tlmených kmitov sa v priebehu tohto merania výrazne nezmení v porovnaní s periódou netlmených kmitov kyvadla.

Literatúra

1. VEIS, Š., MA□AR, J., MARTIŠOVITŠ, V.: Mechanika a molekulov*á fyzika.* Bratislava, Alfa, 1978.