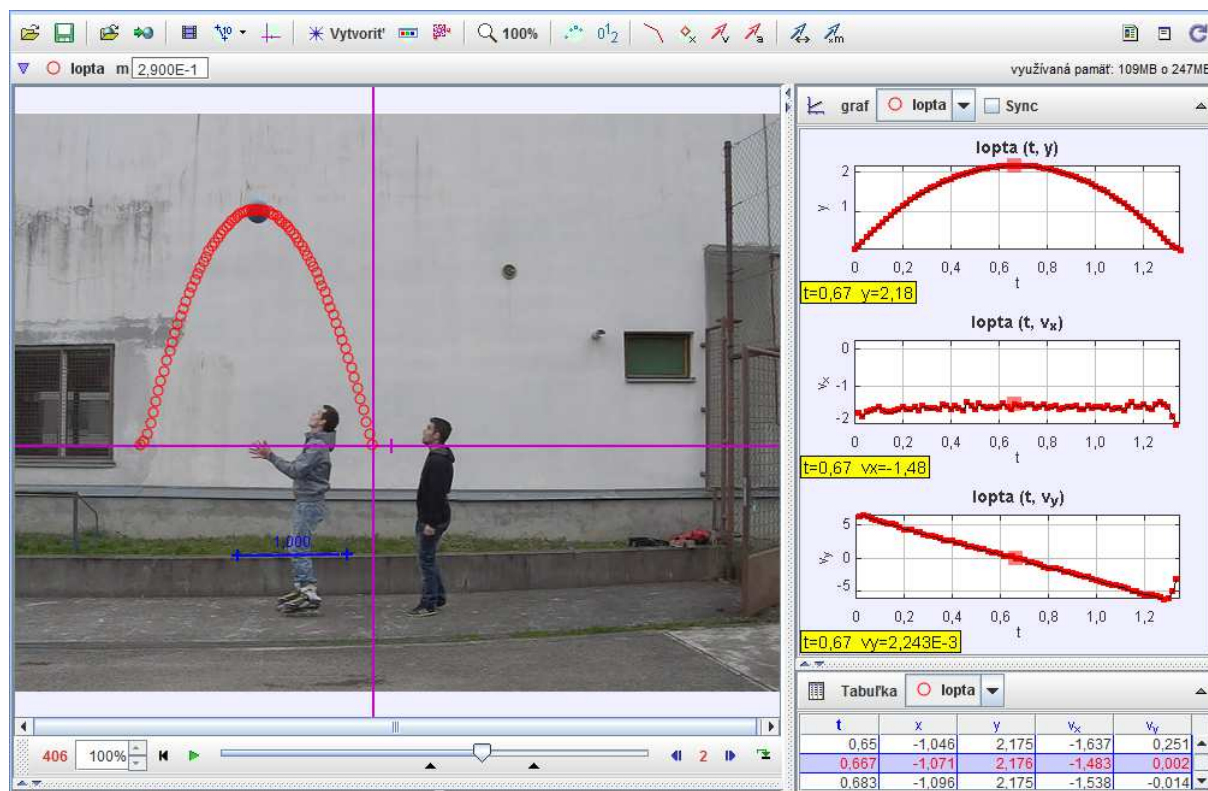


# Fyzikálna videoanalýza reálnych dejov

Peter Hockicko



Vydanie a tlač tejto publikácie bolo finančne podporené Nadáciou Tatrabanky (Zmluva č. 2014vs021).  
Obsahová stránka učebnice vznikla v rámci riešenia projektu KEGA č. 003TU Z-4/2015: Rozvoj konceptuálneho myslenia na technických univerzitách.

Vedecký redaktor prof. Ing. Pavol Rafajdus, PhD.

Recenzenti doc. RNDr. Marián Kireš, PhD.  
doc. PaedDr. Ľuboš Krišťák, PhD.

Za odbornú, jazykovú a technickú úroveň publikácie zodpovedá autor.

Vydala Žilinská univerzita v Žiline/EDIS-vydavateľské centrum ŽU

---

©P. Hockicko, 2015

ISBN 978-80-554-1128-6

## Obsah

Úvod.....	3
Práca v programe Tracker .....	5
1. Kinematika hmotného bodu .....	13
1.1 Hmotný bod, vzťahná sústava, trajektória, dráha pohybu .....	13
1.2 Priamočiary pohyb.....	15
1.2.1 Rýchlosť a dráha priamočiareho pohybu .....	16
1.2.2 Zrýchlenie priamočiareho pohybu .....	20
1.2.3 Rovnomerne zrýchlený pohyb .....	20
1.3 Dvojrzmerný pohyb.....	26
1.4 Krivočiary pohyb, pohyb po kružnici.....	29
1.4.1 Vzťah obvodovej a uhlovej rýchlosti .....	35
1.4.2 Perióda a frekvencia rovnomerného pohybu po kružnici.....	36
1.4.3 Tangenciálne a normálové zrýchlenie.....	37
2. Dynamika hmotného bodu .....	45
2.1 Newtonove pohybové zákony, hybnosť, impulz sily .....	46
2.2 Práca .....	48
2.3 Výkon .....	49
2.4 Energia.....	50
3. Trecie sily.....	69
3.1 Šmykové trenie .....	69
3.2 Valivé trenie .....	73
4. Gravitačné pole .....	85
4.1 Newtonov gravitačný zákon .....	85
4.2 Pohyby telies v gravitačnom poli Zeme .....	86
4.2.1 Pohybová rovnica pre popis v malých výškach .....	87
4.2.2 Šikmý vrh .....	88
4.2.3 Zvislý vrh nahor .....	90
4.2.4 Zvislý vrh nadol .....	91
4.2.5 Voľný pád.....	91
4.2.6 Vodorovný vrh .....	93
5. Tuhé teleso .....	97
5.1 Moment sily .....	97
5.2 Ťažisko telesa .....	97
5.2.1 Ťažisko sústavy dvoch a viacerých hmotných bodov .....	97
5.3 Moment zotrvačnosti a kinetická energia otáčavého pohybu.....	100
5.4 Pohybová rovnica telesa otáčajúceho sa okolo osi.....	101
6. Kvapaliny .....	109
6.1 Tlak v kvapalinách.....	109
6.1.1 Pascalov zákon .....	109
6.1.2 Hydrostatický tlak .....	109
6.2 Archimedov zákon.....	111
6.3 Povrchová vrstva kvapaliny.....	112
6.3.1 Kapilarita.....	114
6.4 Rovnica spojitosti .....	116
6.5 Bernoulliho rovnica .....	118
6.6 Obtiekanie telies .....	120
7. Kmitavý pohyb.....	123
7.1 Harmonický pohyb .....	123

7.1.1	Kinematika a dynamika kmitavého pohybu.....	124
7.1.2	Premeny energie v mechanickom oscilátore.....	131
7.2	Tlmený harmonický oscilátor a tlmené kmitanie.....	135
7.3	Vynútený kmitavý pohyb.....	140
7.4	Skladanie kmitov.....	142
8.	Mechanické vlnenie.....	151
8.1	Postupné mechanické vlnenie.....	151
8.2	Rovnica postupnej vlny.....	151
8.3	Interferencia vlnenia.....	152
8.4	Odraz vlnenia.....	154
8.5	Stojaté vlnenie a chvenie sústav.....	155
8.6	Zvuk a jeho vlastnosti, rýchlosť zvuku.....	157
8.6.1	Dopplerov efekt.....	161
8.6.2	Frekvenčná analýza zvukov zvierat.....	162
9.	Deformácia tuhého telesa.....	165
9.1	Hookov zákon a krivka deformácie.....	166
9.2	Deformácia šmykom.....	169
10.	Modelovanie reálnych dejov v programe Tracker.....	171
	Dodatky.....	179
	Dodatok A: Medzinárodná sústava jednotiek SI.....	179
	Dodatok B: Operácie s vektormi.....	182
	Dodatok C: Goniometrické funkcie.....	184
	Dodatok D: Základné matematické operácie: derivácie a integrály.....	185
	Použitá a odporúčaná literatúra.....	187
	Register.....	193

## Úvod

*The best teacher is experience  
and not through  
someone's distorted point of view.*  
(Jack Kerouac)

Fyzika ako predmet je pre mnohých študentov veľmi náročný, pretože preberané témy sú pre viacerých študentov abstraktné a je pre nich ťažké (niekedy až nemožné) predstaviť si daný dej. Súvisí to s tým, že mnohí študenti nemajú v dostatočnej miere vybudované abstraktné myslenie. Predkladaná učebnica ponúka prezentáciu a analýzu jednotlivých základných častí fyziky názorným spôsobom, keďže je obsahovo zameraná na fyzikálne videoanalýzy.

Učebnica je rozdelená nasledovne: po úvodnej časti nasleduje opis programu Tracker a práce v danom programe. 1. až 3. kapitola sa zaoberá mechanikou hmotného bodu a je rozdelená na kinematiku s popisom základných druhov pohybov a dynamiku rozoberajúcu príčiny vzniku pohybu. 3. kapitola sa zameriava na trecie sily. Vo 4. kapitole sú základné zákony gravitačného poľa s riešením pohybov v gravitačnom poli Zeme. V 5. kapitole sú základy dynamiky sústavy hmotných bodov a tuhého telesa. Predmetom 6. kapitoly je mechanika kvapalín, 7. kapitola rozoberá kmitavý pohyb telies. 8 kapitola sa zaoberá modelovaním reálnych dejov v programe Tracker.

Teoretické postupy v jednotlivých kapitolách sprevádzajú riešené príklady, ktoré majú za úlohu ukázať aplikáciu teórie na riešenie konkrétneho problému. Literatúra uvedená v závere učebnice predstavuje nielen literatúru, z ktorej bolo čerpané pri zostavovaní danej učebnice, ale aj literatúru odporúčanú na hlbšie štúdium.

Po prečítaní danej učebnice by mal študent byť schopný urobiť základnú fyzikálnu analýzu zosnímaného deja, určiť jednotlivé fyzikálne veličiny popisujúce daný dej, analyticky popísať časové závislosti fyzikálnych veličín a vytvoriť matematický model, ktorý čo najlepšie popíše časový priebeh pohybu vyšetřovaného telesa.

Táto učebnica je určená hlavne pre študentov bakalárskych a inžinierskych študijných programov s jednosemestrálnym základným kurzom fyziky na Žilinskej univerzite v Žiline (so zameraním hlavne na študentov EF, SvF, PEDaS, (predmet Kapitoly z fyziky a Úvod do fyziky)). Nájdú sa tu však aj ďalšie informácie pre všetkých, ktorí majú záujem o štúdium fyziky.

Z našich doterajších výskumov realizovaných v rámci projektov KEGA č. 075-008ŽU-4/2010 a 035ŽU-4/2012 vyplynulo, že študenti, ktorí pracovali s videoanalýzami v programe Tracker dosiahli štatisticky významne lepšie výsledky vo vedomostiach z fyziky ako študenti, ktorí pracovali na výpočtových cvičeniach štandardným spôsobom. V zmysle Bloomovej taxonómie poznávacích cieľov predkladaná učebnica pomáha riešiť problémové úlohy a rozvíjať poznávanie študentov na vyšších úrovniach osvojenia si poznatkov a to hlavne na úrovni aplikácia, analýza, syntéza a hodnotenie.

Všetky videá, ktoré sú analyzované v danej učebnici je možné nájsť na webe, konkrétne na adrese: <http://hockicko.uniza.sk/Priklady/videopriklady.htm>. Videá taktiež slúžia ako zdroj motivácie pre študentov, na základe ktorých je možné natočiť si vlastné video a podrobiť ho analýze v programe Tracker, a tak získať zaujímavé fyzikálne informácie o prebiehajúcom deji.

Rád by som sa poďakoval odborným recenzentom doc. RNDr. Mariánovi Kirešovi, PhD. a doc. PaedDr. Ľubošovi Krišťákovi, PhD. za pozorné prečítanie rukopisu, ich návrhy a pripomienky, ktoré prispeli k skvalitneniu tejto vysokoškolskej učebnice.

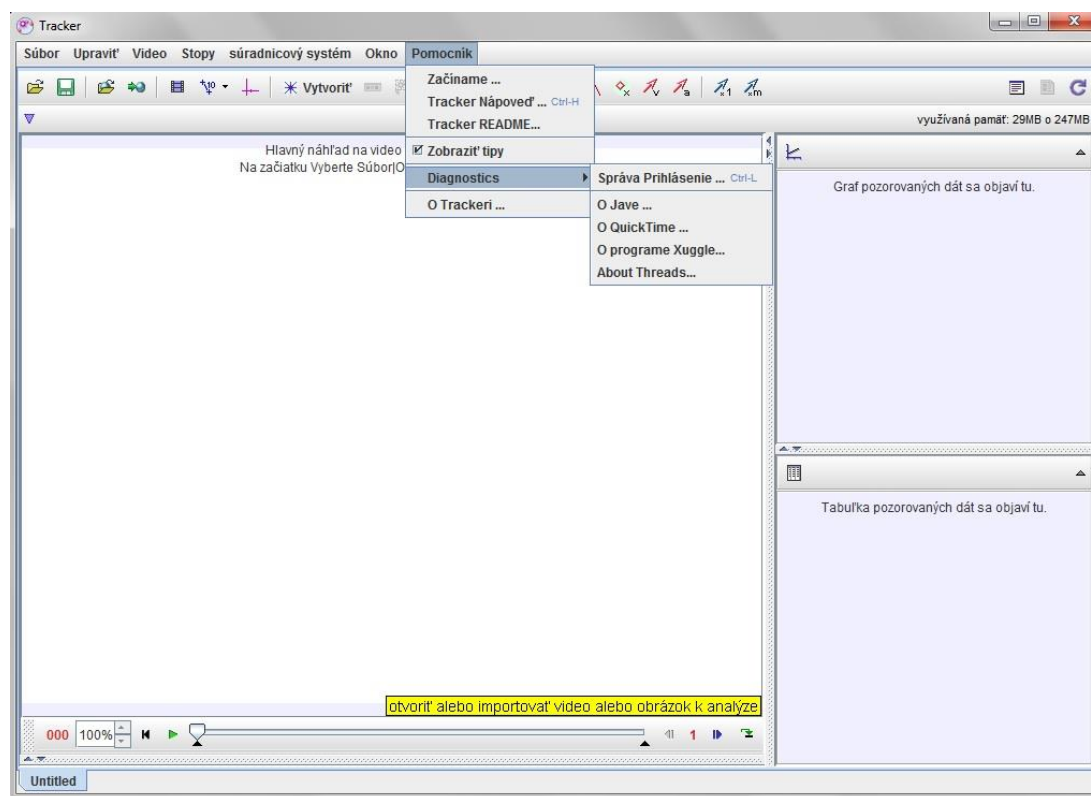
Vydanie a tlač tejto publikácie bolo finančne podporené Nadáciou Tatrabanky (Zmluva č. 2014vs021). Obsahová stránka učebnice vznikla riešením projektu KEGA č. 003TU Z-4/2015: Rozvoj konceptuálneho myslenia na technických univerzitách.

Autor

## Práca v programe Tracker

Jedným z vhodných a efektívnych nástrojov pre realizáciu videoanalýz je program Tracker. Program Tracker je voľne šíriteľný a sťahuteľný program vytvorený na platforme Open Source Physics (<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>). Pre správne fungovanie momentálnej a starších verzií je potrebné mať v počítači nainštalované programy QuickTime a Java (32-bitová verzia), aktuálna verzia programu je 4.86 avšak autori neustále pracujú na zdokonaľovaní daného programu.

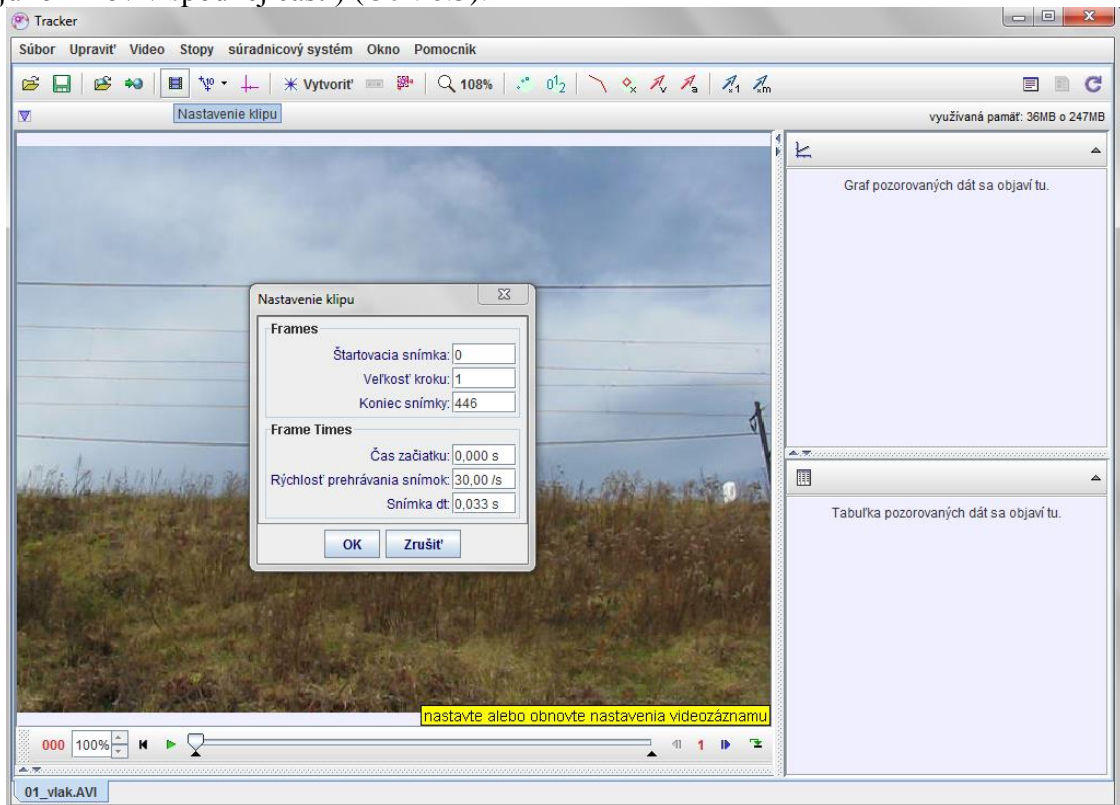
Po nainštalovaní programu a jeho prvom otvorení sa môžeme presvedčiť o správnom fungovaní programu (Obr. 0.1): Pomocník – Diagnostics - o Java/ O QuickTime / O programe Xuggle, pokiaľ sú všetky komponenty nainštalované, program by mal fungovať správne, presvedčíme sa o tak, že klikneme na Video – Importovať a vložíme video súbor (program akceptuje formáty avi, mov, mp4, flv, wmv, ogg) a skúsime ho prehrať kliknutím na zelenú šípku vľavo dole. Pokiaľ sa video spustí a prehráva sa, je predpoklad, že program je nainštalovaný správne a môže sa začať následná analýza. (Program taktiež obsahuje prehľadný help: Pomocník – Začíname ... alebo Tracker Nároveň...).



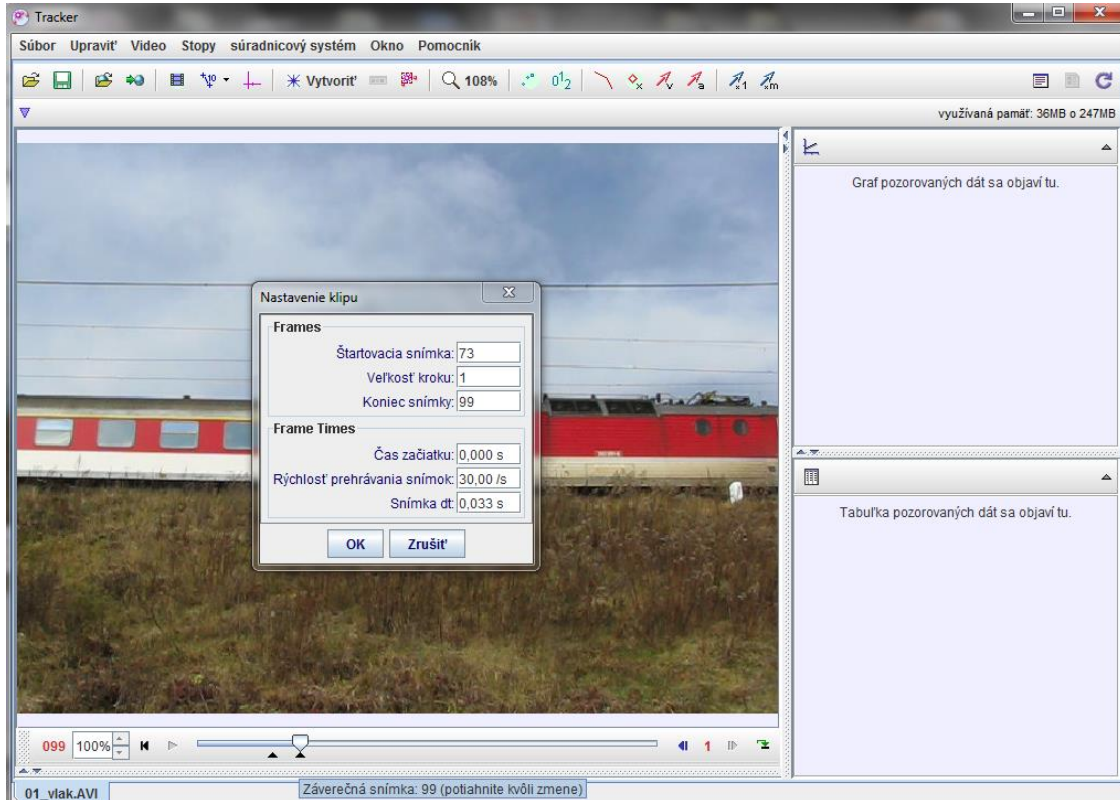
**Obr. 0.1** Otvorenie programu Tracker a overenie jeho funkčnosti

Po vložení videa do programu je potrebné dané video nakalibrovať, aby získané údaje predstavovali reálne fyzikálne hodnoty. Ako prvé je potrebné zadať správnu informáciu o počte obrázkov za sekundu (fps) (Obr. 0.2), zvyčajne fotoaparáty pripravujú videá s 30 fps, avšak stretne sa aj s videami, ktoré majú 120 alebo 1000 fps (pri každom príklade je uvedená daná informácia, ak nie je, ostáva hodnota 30 fps, ktorú má aj program predinštalovaný). Niektoré kamery pripravujú videá, ktoré majú 25 alebo 50 fps. Pri natáčaní vlastných videí je potrebné danú informáciu získať z daného zariadenia, aby bolo možné z analýzy získať reálne hodnoty. Dané hodnoty doplníme do programu po kliknutí na Nastavenie klipu (modrá štvorcová ikona, piata zľava hore). Taktiež je možné nastaviť štartovaciu snímku – začiatok a koniec klipu, ktorý

sa bude analyzovať (buď v samotnej tabuľke alebo uchytením a potiahnutím čiernych trojuholníkov v spodnej časti) (Obr. 0.3).



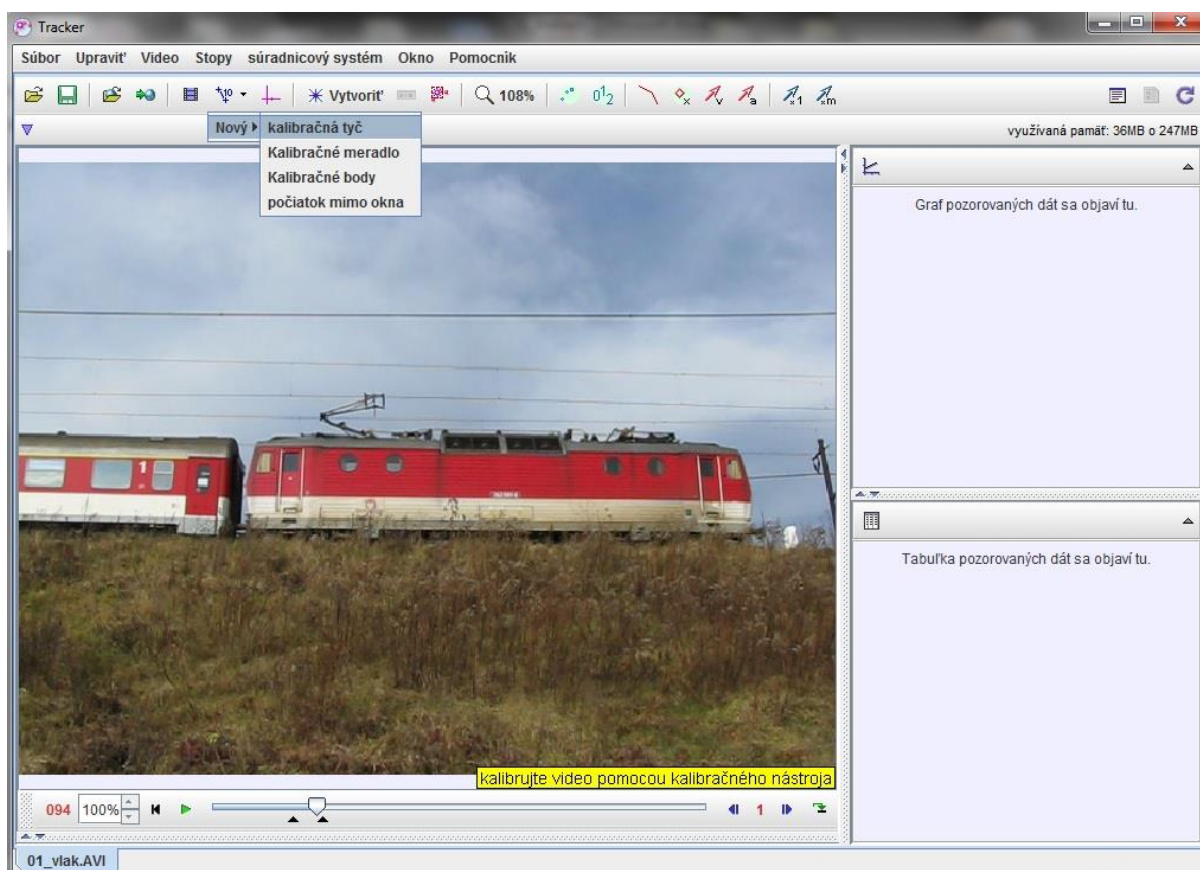
Obr. 0.2 Nastavenie klipu – rýchlosť prehrávania



Obr. 0.3 Nastavenie klipu – štartovacia a koncová snímka

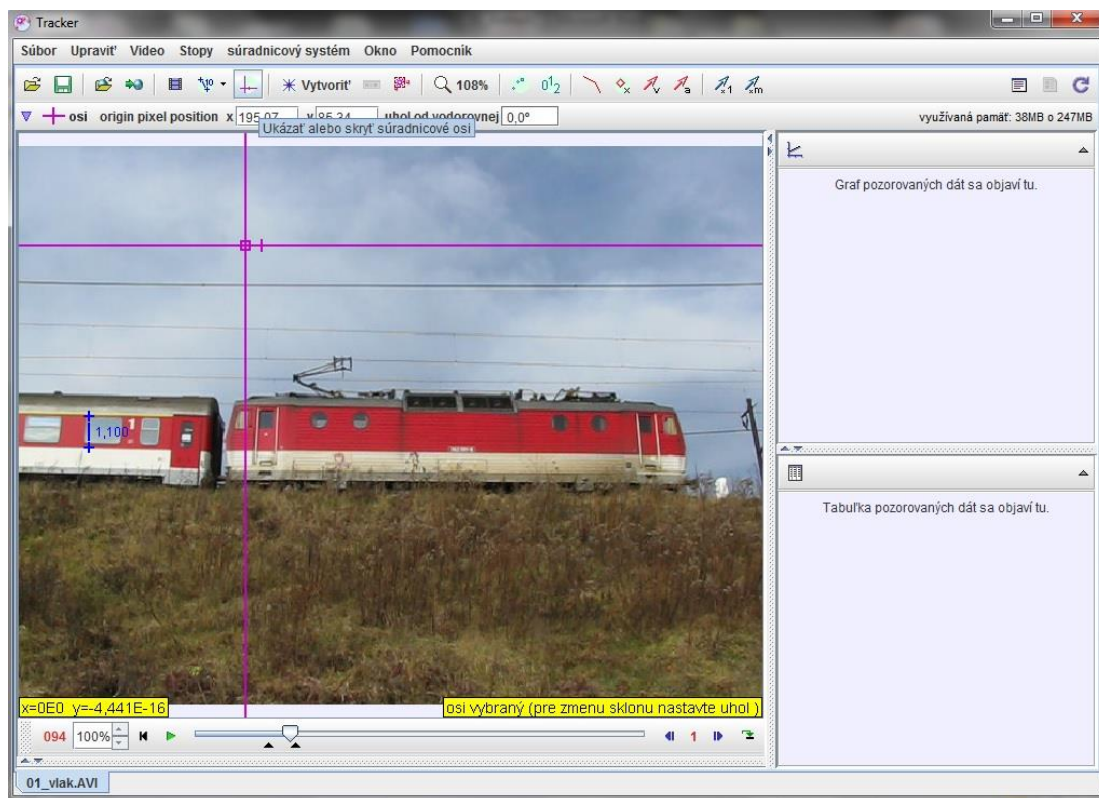


Následne je potrebné nakalibrovať veľkosť objektu na videu: zvolíme šiestu ikonu zľava (modrá úsečka) a vyberieme buď kalibračnú tyč alebo meradlo (Obr. 0.4). Videá pre analýzy obsahujú buď 1 metrovú kalibračnú tyč, alebo meter, prípadne sa v zadaní nachádza informácia o veľkosti objektu (napr. zvislý rozmer okna vlaku s rámom: 1,1m) potom, čo sa po stlačení ikon objaví tyč, je potrebné preniesť ju na dané miesto, upraviť rozmery a dopísať aktuálny údaj – pokiaľ to bude v metroch, všetky získané fyzikálne veličiny budú obsahovať metre (m/s, m/s<sup>2</sup> a pod.). Pri kalibrovaní reálnych rozmerov vo videozázname je potrebné pamätať na to, že čím rozmerovo väčší objekt je použitý na kalibráciu (je známa jeho skutočná veľkosť), tým väčšiu presnosť určovania rozmerov dosiahneme.



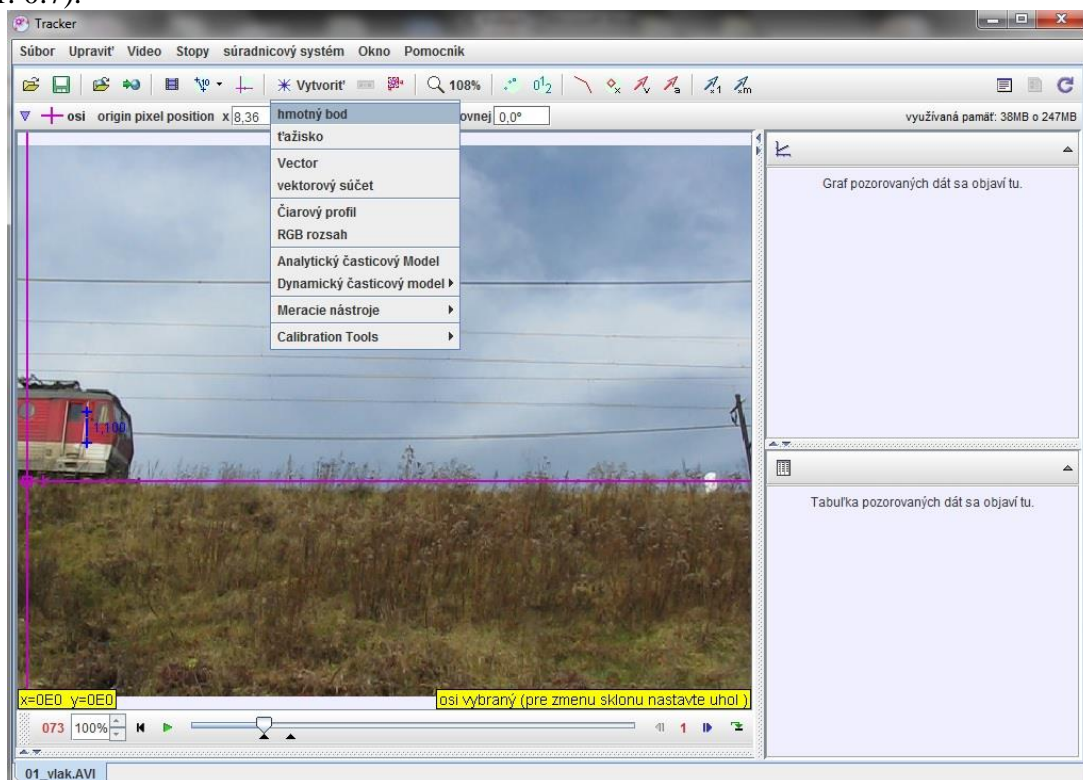
**Obr. 0.4 Kalibrácia klipu**

Ďalším dôležitým faktorom videoanalýzy je definovanie súradnicovej sústavy (Obr. 0.5). Zvyčajne nastavíme kladnú x-ovú os do smeru pohybu, avšak niekedy je taktiež vhodné analyzovať pohyb v smere zvislo nadol (zvislý vrh, voľný pád). Je potrebné si uvedomiť, že podľa toho, ako máme nastavené osi a počiatok súradnicovej sústavy, pre ďalšiu analýzu bude potrebné skúmať časový vývoj tých súradníc, v smere ktorých sa daný pohyb uskutočňuje. Keďže každý študent si môže ľubovoľne navoliť počiatok súradnicovej sústavy a aj smer osí, analytické vyjadrenie časových závislostí bude pre každého iné (nie je možné, aby dvaja študenti, ktorí robia dané analýzy toho istého videa na rozdielnych počítačoch dosiahli presne tie isté analytické vyjadrenia! Čo sa však týka veľkostí hľadaných fyzikálnych veličín, tie by sa zasa nemali výrazne odlišovať.)

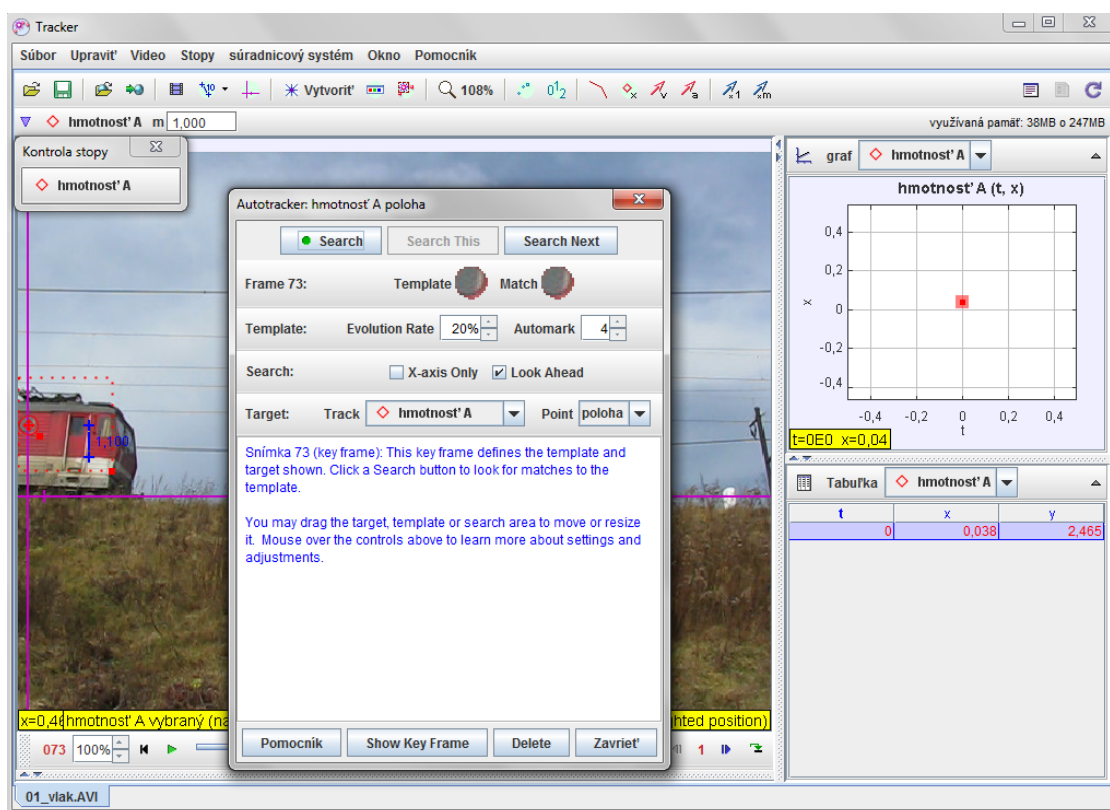


Obr. 0.5 Vloženie a nastavenie súradnicových osí

Ako náhle máme nakalibrované video a označenú súradnicovú sústavu, môžeme začať s analýzou. Klikneme na *Vytvorit' hmotný bod* (ôsma ikona v poradí - \* Vytvorit') (Obr. 0.6), stlačíme súčasne ľavé CTRL a SHIFT a označíme na video bod, ktorý budeme analyzovať (Obr. 0.7).

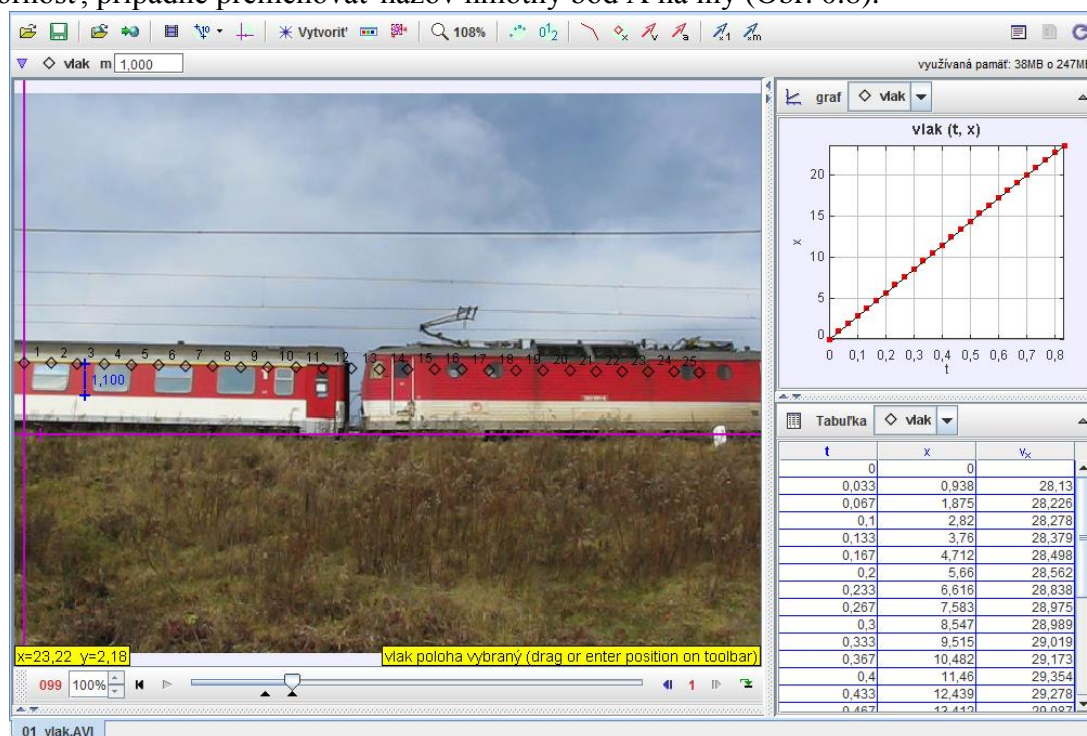


Obr. 0.6 Vytvorenie hmotného bodu pre analýzu časových závislostí



Obr. 0.7 Označenie hmotného bodu a využitie funkcie Autotracker

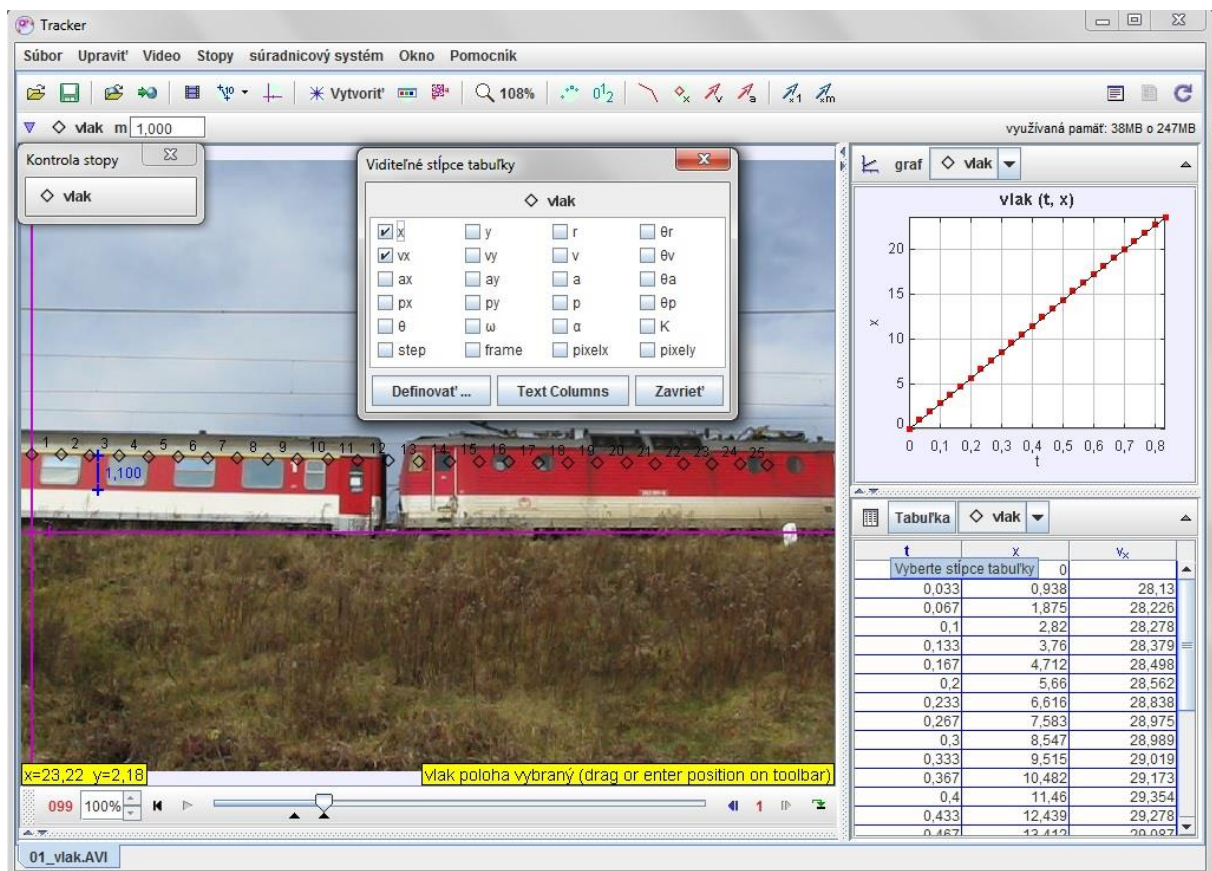
Po otvorení tabuľky (Obr. 0.7) je niekedy vhodné zväčšiť/zmenšiť veľkosť vyšetřovaného objektu či vyšetřovanej plochy a potom už len stlačiť SEARCH – program začne automaticky vyhľadávať polohu daného označeného bodu v jednotlivých snímkach, t.j. v čase a zaznačovať ich do okna, údaje do grafu a tabuľky. Je možné taktiež zmeniť farbu hmotného bodu pre lepšiu názornosť, prípadne premenovať názov hmotný bod A na iný (Obr. 0.8).



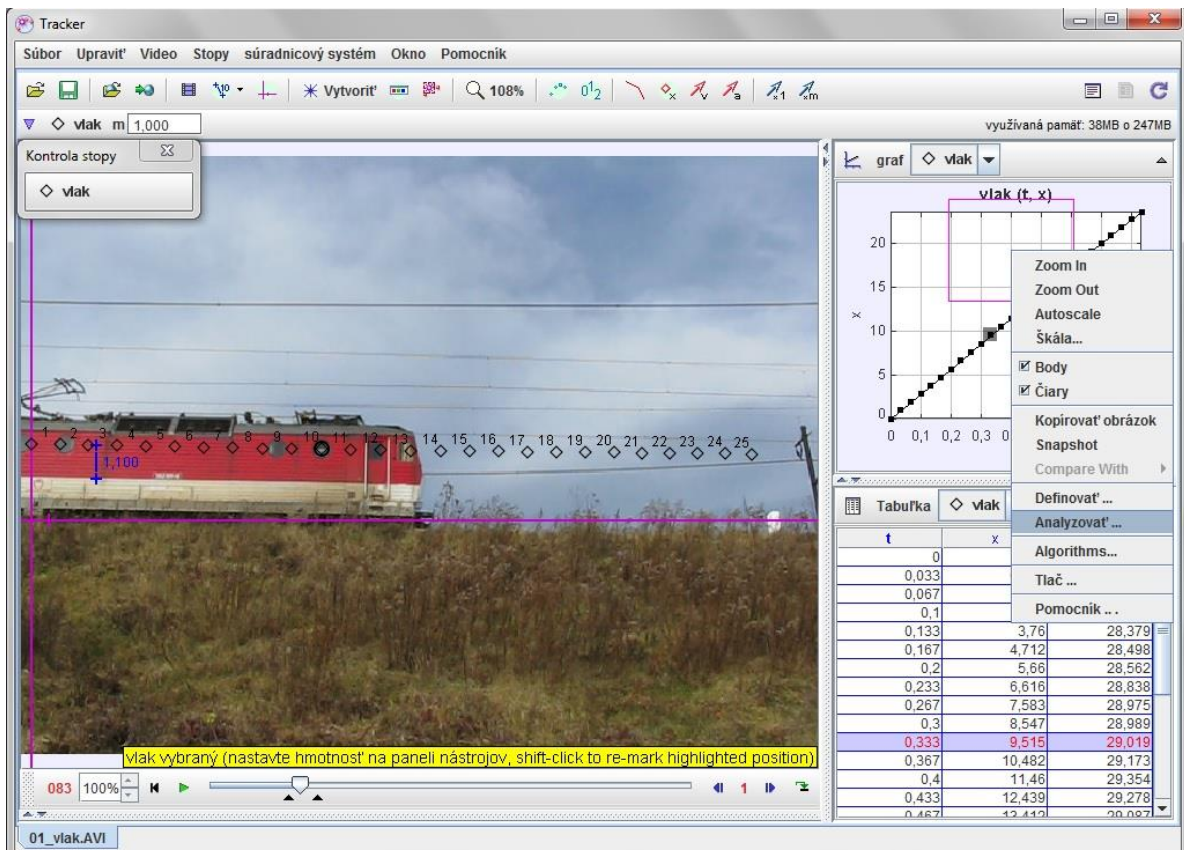
Obr. 0.8 Záznam pohybujúceho sa objektu a nameraných dát do grafu a tabuľky

Po všetkých týchto prípravách môže nasledovať analýza nameraných údajov: v pravej časti obrazovky sa nám následne objaví graf a tabuľka. Po kliknutí na premennú na zvislej osi ( $x$ ) je možné vybrať z niekoľkých fyzikálnych veličín – program ponúka 22 preddefinovaných časových závislostí, je tiež možnosť definovať aj iné závislosti a vyšetrovať nielen časové závislosti, keďže program umožňuje meniť aj fyzikálnu veličinu na vodorovnej osi (čas je preddefinovanou fyzikálnou veličinou).

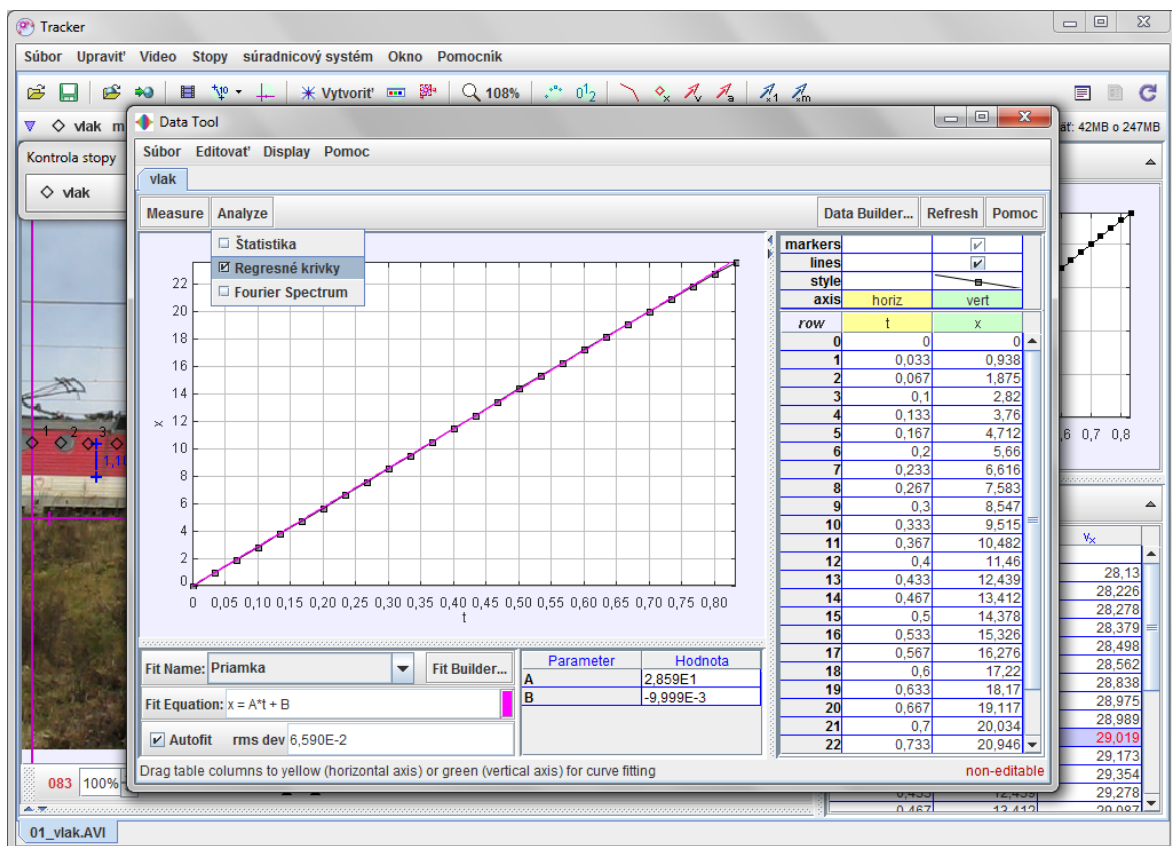
Po kliknutí na Tabuľka (Obr. 0.9) je možné vybrať z niekoľkých fyzikálnych veličín, ktoré budú pre naše ďalšie analýzy zaujímavé. Hodnoty z tabuľky je taktiež možné exportovať do samostatného súboru, s ktorým je možné ďalej pracovať. Po kliknutí pravým tlačidlom myši na graf (Obr. 0.10) je možné vybrať z ponuky analyzovať, čo nám umožní získať fyzikálnu interpretáciu deja a následne hľadané fyzikálne veličiny. Po otvorení nástroja na analýzy grafov – *Data Tool* a kliknutím na *Analyze* je možné označiť regresné krivky (Obr. 0.11), čo nám umožní nameranou sústavou bodov preložiť preddefinované funkcie (prípadne zdefinovať nové), program má preddefinovanú priamku, parabolu, exponenciálnu funkciu a iné. Následne po zadaní funkcie program vyráta parametre ( $A$ ,  $B$ , prípadne viac), ktoré čo najlepšie fitujú nameraný priebeh a predstavujú riešenie danej fyzikálnej analýzy. Úlohou študentov bude prisúdiť daným hodnotám fyzikálnym zmysel, doplniť patričné fyzikálne jednotky a odpovedať na vopred stanovený fyzikálny problém. Po kliknutí na tlačidlo *Measure* je možno využívať funkcie *Coordinates*, *Slope*, *Area*, ktoré umožňujú stanoviť súradnice označeného bodu, deriváciu fyzikálnej veličiny v danom čase a integrál danej fyzikálnej veličiny v danom časovom intervale. Viac sa o danom využití funkcií dozvieme v ďalších kapitolách pri riešení konkrétnych úloh.



Obr. 0.9 Výber vypočítaných údajov z nameraných dát a ich záznam v tabuľke



Obr. 0.10 Po kliknutí na graf je možné pristúpiť k analýze nameraných dát



Obr. 0.11 Nástroj Data Tool a analýza nameraných dát cez regresné krivky

Je vhodné ešte pripomenúť že pri tvorbe vlastného videozáznamu pre videomeranie je potrebné dbať na záznam zo statívu, resp. bez pohybu kamery či fotoaparátu, aby nedochádzalo následne k zmene počiatku zvolenej súradnicovej sústavy.

Ďalšie kapitoly tejto vysokoškolskej učebnice obsahujú fyzikálnu teóriu, ktorá je následne aplikovaná pre analýzu reálnych dejov okolo nás (vo forme videí alebo fotografií) prostredníctvom vyššie popísaného programu Tracker.

Z našich skúseností a štatistických analýz vyplýva, že analýzou videí v programe Tracker si študenti ľahšie ozrejmi fyzikálne vzťahy a zákonitosti a takto získajú požadované vedomosti z fyziky a jej príbuzných predmetov, nadobudnú matematické zručnosti (Hockicko a kol. 2014). Preto je aj základná fyzikálna problematika v ďalších kapitolách vysvetľovaná v súčinnosti s videoanalýzou v programe Tracker.

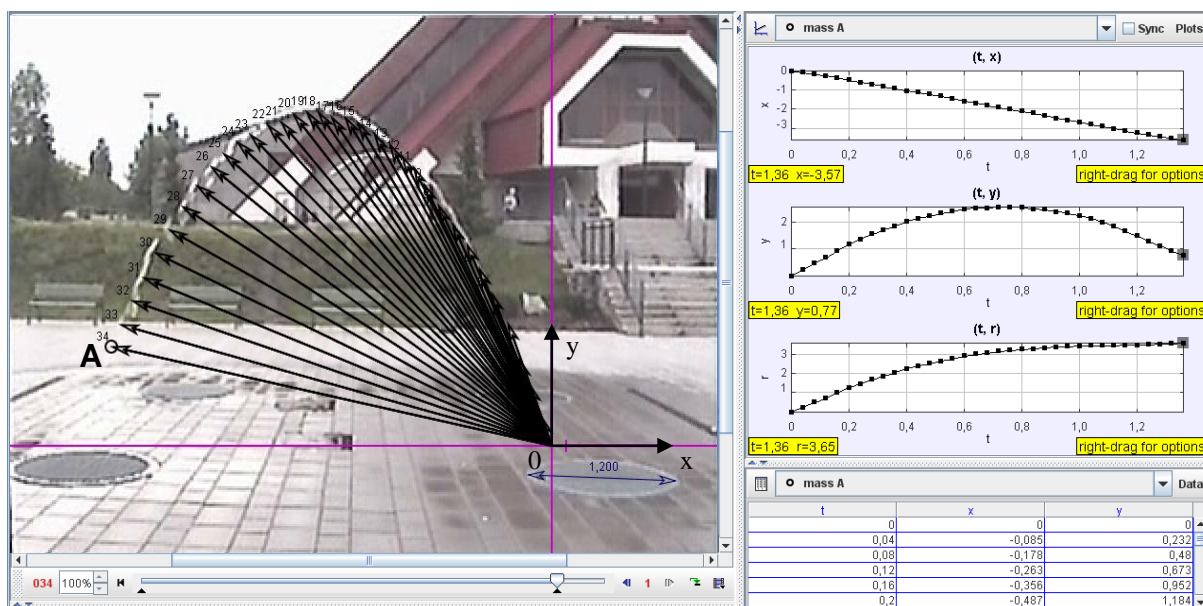
## 1. Kinematika hmotného bodu

Pohyb vo všeobecnosti zahŕňa všetky zmeny a procesy, ktoré prebiehajú okolo nás. Je neoddeliteľnou vlastnosťou hmoty. To, čo sa pri samotnom pohybe uskutočňuje, umožňuje do detailov analyzovať program Tracker, pomocou ktorého môžeme skúmať aj veľmi rýchle procesy. Časť fyziky, ktorá sa zaoberá popisom pohybu telies, triedením a porovnávaním pohybov sa nazýva *kinematika*.

### 1.1 Hmotný bod, vzťažná sústava, trajektória, dráha pohybu

Pod *mechanickým pohybom* budeme rozumieť proces, pri ktorom sa mení poloha hmotného objektu (auto, autobus, lietadlo). Aby sme si uľahčili popis pohybu telesa, nahradíme toto teleso hmotným bodom. Pod *hmotným bodom* rozumieme myslené teleso, ktorého rozmery a tvar môžeme pre popis pohybu zanedbať, avšak hmotnosť sa zachováva. Hmotným bodom pri našich analýzach v programe Tracker nahradíme auto, vlak, loptu, puk, atď. Budeme pritom predpokladať, že všetky časti daného telesa sa pohybujú rovnako rýchlo a v rovnakom smere. Predstava hmotného bodu však nebude vhodná pre otáčajúce sa telesá okolo vlastnej osi (napríklad letiaca a rotujúca sekera, kladivo), pretože rôzne časti danej sekery, kladiva sa v danom okamihu pohybujú rôzne rýchlo a v rôznych smeroch. Taktiež aj pri skúmaní deformácie telesa nie je vhodné pracovať s myšlienkovým pojmom hmotného bodu.

Pohyb hmotného bodu sa javí ako najjednoduchší mechanický pohyb. Ak mechanický pohyb definujeme ako premiestňovanie telesa, musíme premiestňovanie vzhľadom na niečo vzťahovať. Teleso alebo telesá, vzhľadom na ktoré pohyb opisujeme, tvoria *vzťažnú sústavu*. Pohyb a pokoj sú preto relatívne pojmy, čo sa javí vzhľadom na jednu vzťažnú sústavu v pokoji, môže byť súčasne vzhľadom na inú sústavu v pohybe a opačne (napr. opis pohybu áut na diaľnici). V praxi spájame s telesami tvoriacimi vzťažnú sústavu najčastejšie nejakú *súradnicovú sústavu*, napr. *pravouhlú pravotočivú sústavu súradníc x, y, z*. (Pre zjednodušenie budeme na začiatku uvažovať o pohybe v rovine, teda sústave *x, y*.) Polohu objektu určujeme najčastejšie k **počiatku** súradnicovej sústavy.



Obr. 1.1 Analýza pohybu vodného lúča fontány v programe Tracker

Vo fyzike sa často stretávame s úlohou, pri ktorej potrebujeme opísať polohu telesa alebo jeho pohyb. Na Obr. 1.1 je v istom okamihu znázornený pohyb vodného lúča fontány

na Vlčincoch v Žiline. Skúmame teraz pohyb začiatku vodného lúča. Čiara, po ktorej sa začiatok vodného lúča pohyboval sa nazýva **trajektória**. Pri opise pohybu začiatku vodného lúča sa obmedzíme na pohyb jedného bodu, ktorý môžeme považovať za hmotný bod. Aby sme mohli skúmať pohyb bodu, potrebujeme určiť jeho **polohu v čase  $t$**  vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy  $x, y$ , t.j., súradnice  $x_0, y_0, t_0, x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2, \dots$ , v ktorých sa daný bod v jednotlivých časových úsekoch pri pohybe nachádzal. Hodnoty týchto bodov zapíšeme do tabuľky. Čas sme začali merať, keď začiatok vodného lúča prechádzal bodom so súradnicami  $x_0, y_0$ . Vtedy mal čas hodnotu  $t_0 = 0$  s. V súradnicovej sústave  $x, y$  trajektória predstavuje graf vzájomnej závislosti  $y = y(x)$  súradníc bodov trajektórie.

Polohu nejakého bodu  $A$  vo všeobecnosti vzhľadom pravouhlú súradnicovú sústavu  $x, y, z$  máme určenú vtedy, keď poznáme všetky jeho tri súradnice  $x, y, z$  v priestore ( $x, y$  v rovine), kde  $x$  je kolmá vzdialenosť bodu  $A$  od roviny preloženej osami  $y$  a  $z$ ,  $y$  je kolmá vzdialenosť bodu  $A$  od roviny preloženej osami  $x$  a  $z$  a  $z$  je kolmá vzdialenosť bodu  $A$  od roviny preloženej osami  $x$  a  $y$ . Polohu hmotného bodu môžeme charakterizovať pomocou polohového vektora. Pod **polohovým vektorom  $\vec{r}$**  hmotného bodu  $A$  vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy  $O$  budeme rozumieť orientovanú úsečku, ktorej začiatok je v bode  $O$  a koniec v bode  $A$ . Pre polohový vektor v kartézskej sústave súradníc  $x, y, z$  platí

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.1)$$

kde  $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$  sú jeho priemety do súradnicových osí a  $x, y, z$  sú pravouhlé súradnice bodu  $A$  a  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sú jednotkové vektory v smere osí  $x, y, z$ . Pri analýze pohybu hmotného bodu v programe Tracker budeme uvažovať o pohybe v rovine, keďže záznam kamerou, fotoaparátom nám neumožňuje vnímať a analyzovať pohyb v treťom smere, takže pri našich ďalších analýzách sa obmedzíme len na pohyb v rovine  $x, y$ .

O mechanickom pohybe hovoríme vtedy, keď nejaký hmotný bod mení svoju polohu vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu, čiže mení sa jeho polohový vektor, pričom koncový bod sa pohybuje s hmotným bodom a počiatočný bod trvalo splýva s počiatkom sústavy súradníc. Pohyb hmotného bodu môžeme charakterizovať vtedy, keď v každom časovom okamihu sú známe jeho súradnice, čiže ak poznáme ich funkcie závislosti od času, čo môžeme zapísať

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (1.2)$$

alebo vo vektorovom tvare

$$\vec{r} = f(t), \quad (1.3)$$

vtedy hovoríme, že polohový vektor  $\vec{r}$  je **vektorovou funkciou času**. Sled polôh, ktoré hmotný bod počas svojho pohybu vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu zaujíma, predstavuje **trajektóriu** pohybu. Jej dĺžka sa nazýva **dráha pohybu**.

V dvojrozmerných prípadoch pohybu je jedna zložka rovná 0 (napr.  $z = 0$ ). Tu si vystačíme s dvojrozmerným súradnicovým systémom určeným osami  $x$  a  $y$ , a tým aj rozklad vektora  $\vec{r}$  je len rozkladom do týchto dvoch smerov

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (1.4)$$

Na popis priamočiareho pohybu nám postačuje len jedna zložka polohového vektora  $\vec{r}$ . Ak je pohyb hmotného bodu orientovaný v smere osi  $x$  tak platí



$$\vec{r} = x\vec{i} . \quad (1.5)$$

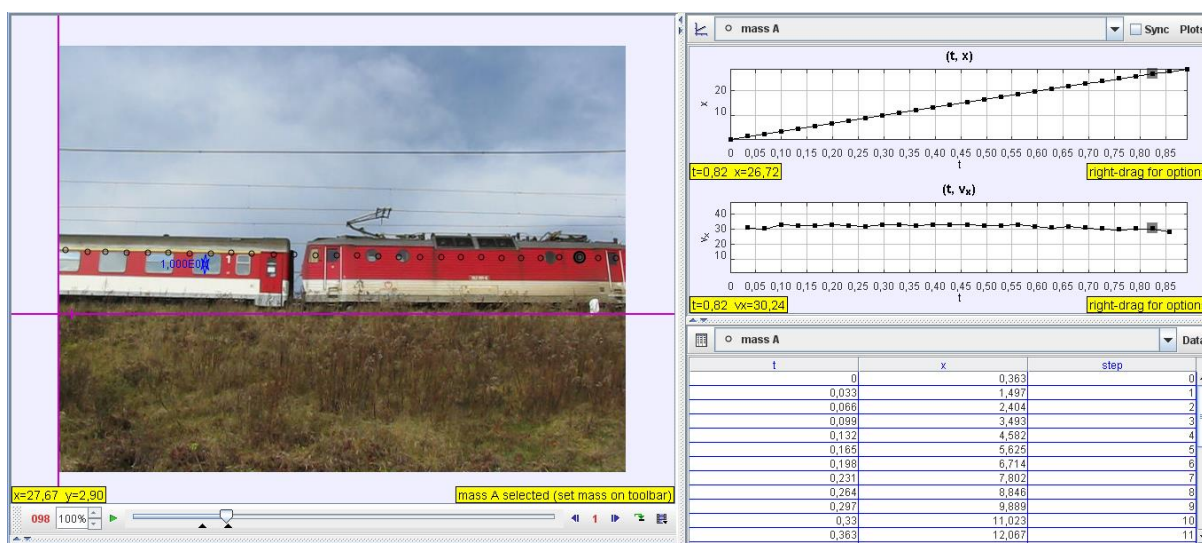
V prípade priamočiarych pohybov vystačíme pri určovaní polohy s dráhou  $s$

$$s = |\vec{r}| = x , \quad (1.6)$$

ktorá predstavuje veľkosť posunutia v danom smere, pričom súradnicovú sústavu si môžeme vždy zvoliť tak, aby sa pohyb uskutočňoval v kladnom smere osi  $x$ , čo nám zjednoduší opis pohybu.

## 1.2 Priamočiary pohyb

Aby sme si uľahčili opis pohybu, venujme sa teraz priamočiaremu pohybu vlaku (Obr. 1.2 - opis pohybu sa preniesie z roviny  $x, y$  iba na priamku, t.j. os  $x$ ). Bod, v ktorom sa začiatok vlaku nachádzal na začiatku v čase  $t = 0$  sme zvolili za začiatok dráhy. *Skúmať pohyb* znamená predovšetkým stanoviť závislosť  $x = x(t)$ , dráhy od času, prípadne ďalšie charakteristiky, ktoré sú závislé na čase. Zaznamenávajme teda polohy vlaku v istých časových intervaloch (napr.  $\Delta t = 0,033\text{s}$ , záznam bol vyhotovený fotoaparátom, pričom vytvorené video má 30 fps (obrázokov za sekundu)), zapisujeme ich do tabuľky a znázorníme body so súradnicami  $t, x$  a bodmi so súradnicami preložíme súvislú, spojitú čiaru, bez zlomov a skokov. Keďže naše merania nemusia byť celkom presné, snažíme sa, aby preložené krivka prechádzala okolo nameraných bodov čo najbližšie (zvyčajne to za nás urobí program (pridať regresné krivky, fit funkcie)). Tak vytvoríme grafickú závislosť  $x = x(t)$ . (Dĺžku úseku  $\Delta t$  si môžeme zvoliť ľubovoľne, program Tracker, pomocou ktorého bola urobená prezentovaná analýza nám umožňuje analyzovať pohyb v časových intervaloch  $\Delta t = 0,033\text{s}$  (v závislosti od zosnímaného videa a počtu záberov za 1s)). Tabuľka s hodnotami dvojíc  $(x, t)$  predstavuje jeden zo spôsobov vyjadrenia fyzikálnej závislosti dráhy od času,  $x = x(t)$ . Druhý zo spôsobov, akým možno vyjadriť závislosť fyzikálnej veličiny, je grafická závislosť.



Obr. 1.2 Analýza pohybu vlaku v programe Tracker

Dráha pohybu zvoleného začiatočného bodu vlaku sa v závislosti od času mení, čo vyjadruje aj zmena vektora  $\vec{r}(x) = f(t)$ . Aby sme sa o spôsobe, akým sa poloha vlaku

v závislosti od času mení dozvedeli viac, budeme merať zmeny dráhy  $\Delta x = \Delta s$  (v prípade pohybu v smere osi  $y$ :  $\Delta y = \Delta s$ ) v navzájom rovnakých časových intervaloch  $\Delta t$ . Zmeny dráhy sú vždy kladné, čiže dráha pohybu je veličina, ktorá vždy len narastá. Zmenu dráhy  $\Delta s$  zvykneme nazývať **prírastok dráhy** alebo **dráhový úsek**, ktorý vlak prešiel v časovom intervale  $\Delta t$ . Celková dráha  $s$ , ktorú vlak prešiel od začiatku pohybu, je rovná súčtu prírastkov – zmien dráhy  $\Delta s$  v jednotlivých časových intervaloch  $\Delta t$ , ktoré už uplynuli.

Ako si môžeme všimnúť z analýzy grafu  $x = x(t)$ , akokoľvek ľubovoľne si zvolíme veľkosť  $\Delta t$ , pri rovnakých zmenách  $\Delta t$  dráha narastie o rovnakú hodnotu  $\Delta s$ . Tento pohyb môžeme charakterizovať ako **pohyb rovnomerný priamočiary**. Hovoríme, že teleso sa pohybuje **rovnomerne**, ak v ľubovoľných, ale navzájom rovnakých časových intervaloch  $\Delta t$  prejde rovnaké dráhy  $\Delta s$ . Ak teleso v ľubovoľných, ale navzájom rovnakých časových intervaloch  $\Delta t$  prejde rôzne úseky dráhy  $\Delta s$ , hovoríme, že sa pohybuje **nerovnomerným pohybom**. Takým pohybom sa pohybuje napríklad vlak pri rozbiehaní alebo pri brzdení. Ak sa zmeny dráhy  $\Delta s$ , prislúchajúce navzájom rovnakým časovým intervalom  $\Delta t$ , postupne zväčšujú, nerovnomerný pohyb pri rozbiehaní vlaku sa nazýva **zrýchlený pohyb**. Ak sa zmeny dráhy  $\Delta s$ , prislúchajúce navzájom rovnakým časovým intervalom  $\Delta t$ , budú postupne zmenšovať, nerovnomerný pohyb vlaku pri brzdení sa nazýva **spomalený pohyb**.

Skúsme teraz spoločne analyzovať pohyb začiatku vodného lúča v dvoch rôznych smeroch -  $x$ ,  $y$ . Ako si môžeme všimnúť zo závislosti  $x(t)$  a  $y(t)$  (Obr. 1.3), pohyb v smere osi  $x$  je rovnomerný a v smere osi  $y$  je nerovnomerný - na začiatku spomalený a v druhej časti deja zrýchlený. Prečo je tomu tak, dozvieme sa v ďalších kapitolách pri skúmaní príčin pohybu - v dynamike a pri pohyboch telies v gravitačnom poli Zeme (pôsobiacia sila, ktorá ovplyvňuje pohyb, pôsobí iba v jednom smere).

### 1.2.1 Rýchlosť a dráha priamočiareho pohybu

Pojem rýchlosť používame v bežnom živote často bez toho, aby sme si uvedomovali, že to je **fyzikálna veličina**. Z praxe vieme, že keď napr. auto prejde určitú vzdialenosť, napr. zo Žiliny do Bratislavy 200 km za dve hodiny, vypočítame jeho rýchlosť tak, keď určíme dráhu, ktorú auto prešlo za jednu hodinu. Inokedy zase odmeriame čas  $\Delta t = 10$  s, za ktorý šprintér, zabehne dráhu  $\Delta s = 100$  m. Každý, kto cestoval autom vie, že na 200 km dlhej ceste sa auto nepohybuje stále rovnako. Na ceste sú úseky, na ktorých sa auto pohybuje rýchlejšie a inde je jeho rýchlosť obmedzená dopravnou značkou. Podobne je to aj so šprintérom. Najprv bol pri štarte v pokoji a až po rozbehu sa mu podarilo dosiahnuť maximálnu rýchlosť.

Rýchlosť, ktorú sme vypočítali pre dvojhodinový pohyb auta alebo pre desaťsekundový beh športovca, nazývame **priemerná veľkosť rýchlosti** a definujeme ju ako podiel celkovej dráhy  $s$  a časového intervalu, v ktorom sa daný pohyb uskutočnil:

$$v_p = \frac{s}{t}. \quad (1.7)$$

Jednotku rýchlosti v sústave SI určíme podľa známeho predpisu

$$[v_p] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{m}{s} = m \cdot s^{-1} \quad (1.8)$$

Pri opise dopravných situácií zvykneme vyjadrovať rýchlosť v jednotkách kilometer za hodinu ( $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ ).

Pod tzv. **priemernou** alebo **strednou rýchlosťou**  $\overline{v_p}$  rozumieme podiel posunutia  $\Delta s$  v určitom časovom intervale  $\Delta t$  a dĺžky tohto intervalu

$$\overline{v_p} = \frac{\Delta s}{\Delta t} . \quad (1.9)$$

Priemerná rýchlosť je podľa definície závislá od dĺžky časového intervalu, v ktorom ju určujeme a od zmeny dráhy v tomto intervale. Veľkosť priemernej rýchlosti rovnomerného pohybu sa v závislosti od času nemení. Priemerná rýchlosť nerovnomerného pohybu vyjadruje veľkosť rýchlosti rovnomerného pohybu, ktorým by teleso prešlo rovnako veľkú dráhu za rovnako dlhý čas ako pri pohybe nerovnomernom.

Ak sa ale opýtame, ako rýchle sa daný objekt pohybuje, máme na mysli rýchlosť telesa v danom okamihu, to znamená tzv. **okamžitú rýchlosť**. Tú dostaneme z priemernej rýchlosti tak, že budeme časový interval  $\Delta t$ , meraný od okamihu  $t$ , znižovať až k nule. S poklesom hodnoty  $\Delta t$  sa priemerná rýchlosť meraná v intervale  $t + \Delta t$  blíži k istej limitnej hodnote, čiže derivácii vektora posunutia, ktorá definuje rýchlosť v okamihu  $t$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} . \quad (1.10)$$

Veličiny  $ds$ ,  $dt$  nazývame **infinitesimálnymi** (nekonečne malými) alebo **elementárnymi**. Ich fyzikálny význam spočíva v tom, že označujú veľmi malé hodnoty alebo zmeny príslušných fyzikálnych veličín. Okamžitá rýchlosť je vektorovou veličinou. **Veľkosť okamžitej rýchlosti** (alebo **veľkosť rýchlosti**) má vždy nezápornú hodnotu a postráda informáciu o smere. To, čo určuje rýchlosť v automobile, predstavuje práve veľkosť rýchlosti.

Ak využijeme poznatky o diferenciálnych operáciách a integrálnom počte môžeme zo všeobecnej definície rýchlosti (1.10) odvodiť vzťah pre dráhu priamočiareho pohybu hmotného bodu.

V prípade rovnomerného pohybu je rýchlosť  $v = v_0$  a keďže veľkosť priemernej rýchlosti sa nemení, možno vzťah (1.9) upraviť do tvaru

$$\Delta s = v_0 \Delta t , \quad (1.11)$$

pričom pre celkovú dráhu prejdenu v čase  $t$  môžeme písať známy vzťah (za predpokladu, že v čase  $t = 0$  bola prejdenu dráha nulová)

$$s = v_0 t . \quad (1.12)$$

Pozrime sa teraz na graf závislosti rýchlosti na čase a pokúsme sa hľadať isté súvislosti so vzťahom (1.11). Keďže sa jedná o rovnomerný pohyb, grafom závislosti  $v = v(t)$  je úsečka v danom časovom intervale. Ak veľkosť rýchlosti  $v_0$  vynásobíme s časom, v ktorom daný pohyb skúmame, dostaneme podľa vzťahu (1.11) prejdenu dráhu a podľa grafu obsah plochy pod grafom závislosti  $v = v(t)$ . Možno teda konštatovať, že dráha, ktorú teleso pri rovnomernom pohybe prejde, je úmerná veľkosti (obsahu) plochy pod grafom závislosti rýchlosti na čase. Tento významný poznatok je možné zovšeobecniť aj pre nerovnomerné pohyby. Vo všeobecnosti si možno časovú os rozdeliť na menšie časové úseky  $\Delta t$ , v ktorých môžeme priemernú rýchlosť  $v_i$  považovať za konštantnú. Hodnotu celkovej prejdenej dráhy s istým

priblížením a chybou určíme ako súčet obsahov všetkých obdĺžnikov so stranami  $\Delta t$  a  $v_i$ , čo môžeme zapísať

$$s = \sum_i v_i \Delta t . \quad (1.13)$$

Zmenšovaním intervalov na minimum ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) sa budeme blížiť k skutočnej hodnote prejdenej dráhy v danom čase, čo môžeme zapísať

$$s = \sum_i \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_i \Delta t , \quad (1.14)$$

čo je ekvivalentné zápisu pomocou integrálu

$$s = \int ds = \int v dt . \quad (1.15)$$

V prípade rovnomerného pohybu, kedy je rýchlosť stále konštantná, môžeme podľa pravidiel pre integrovanie ju vyňať pred integrál, čím dostaneme

$$s = \int ds = \int v_0 dt = v_0 \int dt = v_0 t + c , \quad (1.16)$$

kde  $c$  je integračná konštanta, ktorú vypočítame, ak poznáme prejdenú dráhu v čase  $t = 0$ s. Ak prejdená dráha v čase  $t = 0$ s bola  $s = s_0$ , môžeme písať

$$s(t = 0) = s_0 = v_0 \cdot 0 + c \Rightarrow c = s_0 . \quad (1.17)$$

V konečnom dôsledku po úpravách dostávame vzťah

$$s = v_0 t + s_0 , \quad (1.18)$$

ktorý je známym vyjadrením dráhy rovnomerného priamočiareho pohybu hmotného bodu. V prípade, že v čase  $t = 0$ s bola dráha  $s_0 = 0$ m, potom vzťah (1.18) prejde na zjednodušený tvar

$$s = v_0 t . \quad (1.19)$$

Pri našich analýzach v programe Tracker budeme analyzovať prejdenú dráhu hmotného bodu v smere osi  $x$ :  $s = x$  alebo v smere osi  $y$ :  $s = y$ , pričom rýchlosti v danom smere budú charakterizované zložkami v smere osi  $x$ :  $v = v_x$  a v smere osi  $y$ :  $v = v_y$ . Keďže súradnicovú sústavu je možné ľubovoľne natočiť, odporúčame si zvoliť vzťažnú sústavu tak, aby analýza bola čo najjednoduchšia – zvyčajne natočíme osi v smere pohybu telesa.

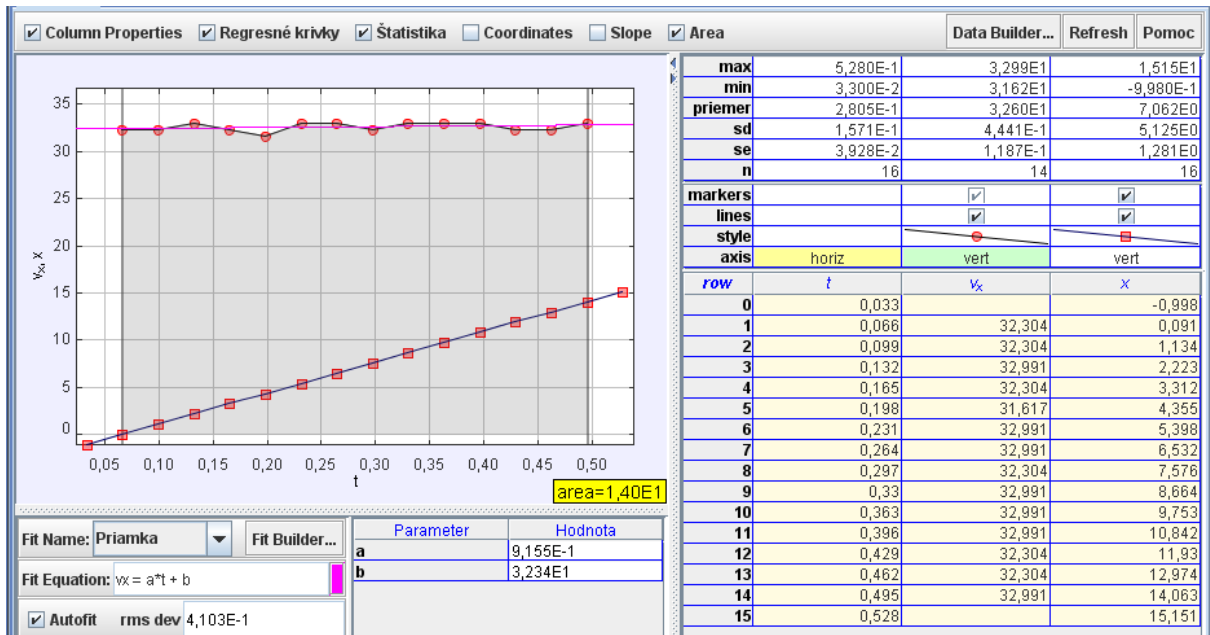
### Úloha 1-1:

**Analyzujte pohyb vlaku a určte jeho rýchlosť. Pre analýzu použite program Tracker a video [vlak.avi](#).**

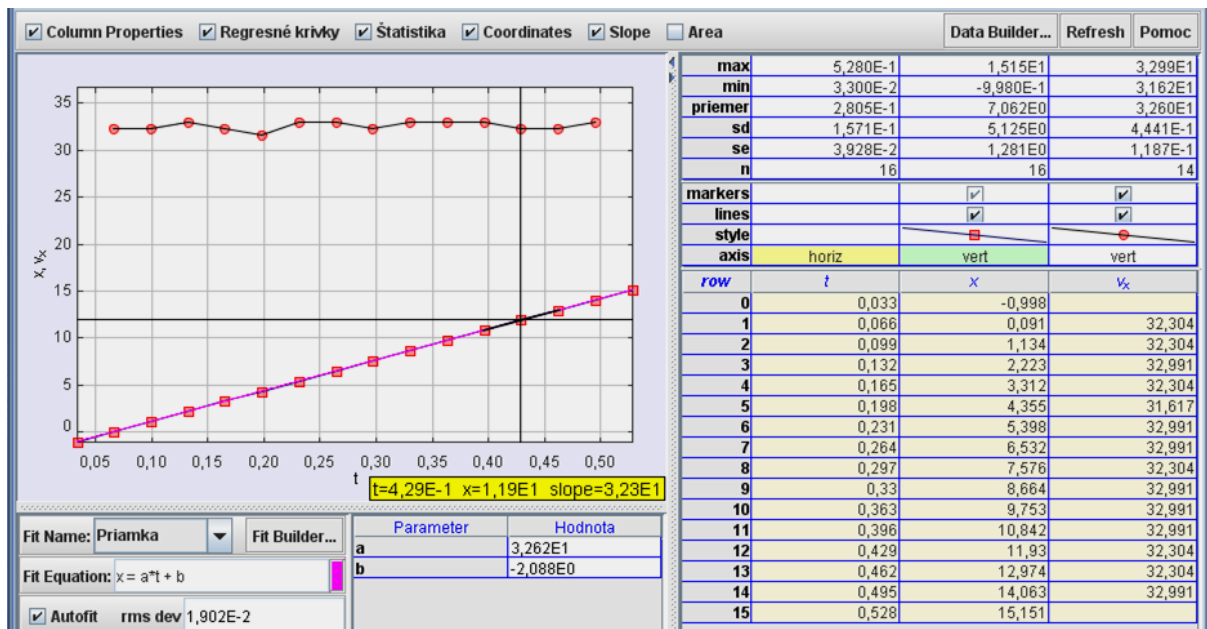
**(dĺžka vozňa je 26,40 m, výška a šírka okna vozňa s rámom je 1,10 m x 1,35 m, počet obrázkov za sekundu je 30fps).**

**Riešenie:**

Ako môžeme vidieť z Obr. 1.3, rýchlosť pohybu vlaku (vyjadrenú na grafe guľôčkami) môžeme považovať za približne konštantnú ( $v = 32,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  z grafickej závislosti, zo štatistiky  $v = 32,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) a pohyb vlaku za rovnomerný priamočiary. Ak teraz porovnáme obsah plochy pod grafom závislosti rýchlosti v časovom intervale od  $t_1 = 0,066 \text{ s}$  do  $t_{14} = 0,495 \text{ s}$  (čo je hodnota v žltom rámyku  $\text{area} = 14$ ) s prejdenou dráhou v danom časovom intervale ( $\Delta s = \Delta x = x_{14} - x_1 = 14,063 \text{ m} - 0,091 \text{ m} = 13,972 \text{ m} \approx 14 \text{ m}$ ) zistíme, že hodnoty sú navzájom rovnaké.



Obr. 1.3 Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe



Obr. 1.4 Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe

Z analýzy pohybu vlaku na Obr. 1.4 môžeme usúdiť, že dráha pohybu vlaku sa rovnomerne zvyšovala s časom, čo možno charakterizovať rovnicou v analytickom vyjadrení  $x(t) = 32,6t - 2,088$ . To znamená, že pohyb vlaku je rovnomerný priamočiary s rýchlosťou

vlakú  $v = 32,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a v čase  $t = 0 \text{ s}$  bola poloha vlaku  $x_0 = -2,088 \text{ m}$  (čo súvisí pri danej analýze s posunom vzťažnej sústavy kvôli lepšej analýze rýchlosti). V čase  $t_{12} = 0,429 \text{ s}$  bola na grafe závislosti dráhy od času urobená dotyčnica ku grafu, ktorej smernica má hodnotu 32,3 (slope = 32,3). Ak túto hodnotu porovnáme s hodnotou rýchlosti v danom čase ( $v(t_{12} = 0,429 \text{ s}) = 32,304 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ), zistíme, že dané hodnoty sú si navzájom odpovedajúce. To znamená, že ak na grafe závislosti dráhy na čase určíme v ktoromkoľvek časovom intervale hodnotu smernice dotyčnice, určíme zároveň aj rýchlosť pohybu v danom časovom okamihu. Matematicky je okamžitá rýchlosť rovná smernici dotyčnice ku grafu funkcie  $s = s(t)$ .

### 1.2.2 Zrýchlenie priamočiareho pohybu

Rýchlosť pohybu môže byť stála alebo sa môže meniť. Pohyb, pri ktorom sa rýchlosť mení sa nazýva **zrýchleným**. O zrýchlený pohyb pôjde nielen vtedy, keď sa bude meniť veľkosť rýchlosti, ale aj vtedy, keď sa bude meniť smer rýchlosti. Ako miera pre zmenu rýchlosti za jednotku času sa zavádza **zrýchlenie**.

**Priemerné (stredné) zrýchlenie**  $\bar{a}$  v časovom intervale  $\Delta t$  je definované

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.20)$$

Podobne ako pri rýchlosti, tak aj pri zrýchlení dostaneme **okamžité zrýchlenie** tak, že časový interval  $\Delta t$  sa bude približovať k nule

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.21)$$

Hovoríme, že zrýchlenie  $a$  sa rovná derivácii rýchlosti podľa času, čiže v danom okamihu je rovné smernici dotyčnice ku krivke  $v(t)$  v bode určenom daným okamihom. Vzhľadom k tomu, že pri priamočiarom pohybe je rýchlosť rovná derivácii posunutia podľa času, môžeme zrýchlenie  $a$  určiť tak, že dané posunutie budeme derivovať dvakrát za sebou, čo môžeme vyjadriť nasledovne

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (1.22)$$

a hovoríme, že zrýchlenie je rovné druhej derivácii dráhy  $s(t)$  podľa času.

Jednotkou zrýchlenia v sústave SI je  $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Zrýchlenie má veľkosť aj smer, je teda vektorovou veličinou.

### 1.2.3 Rovnomerne zrýchlený pohyb

Veľmi často sa stretávame s pohybmi, pri ktorých sa rýchlosť mení rovnomerne, čiže zrýchlenie je konštantné. Takýto pohyb nazývame **rovnomerne zrýchlený**. Príkladom takéhoto pohybu môže byť rozbeh auta, vlaku, ale aj pád telesa (za určitých podmienok pri zanedbaní

odporu vzduchu). Obdobným spôsobom, ako v prípade rovnomerného pohybu, môžeme aj v prípade nerovnomerného pohybu určiť  $v$  a  $s$  zo zrýchlenia a rýchlosti.

Aby sme sa dozvedeli, čo platí pre rýchlosť a dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu, pokúsime sa upraviť niektoré z predchádzajúcich vzťahov ((1.21) a (1.22)).

Úpravou vzťahu (1.21) dostávame

$$dv = a dt. \quad (1.23)$$

Integráciou oboch strán rovnice dostaneme

$$\int dv = \int a dt. \quad (1.24)$$

Keďže uvažujeme o konštantnom zrýchlení, môžeme ho vyňať pred integrál

$$\int dv = a \int dt \quad (1.25)$$

a nasledovným výpočtom neurčitého integrálu dostávame

$$v = a t + c, \quad (1.26)$$

kde  $c$  je integračná konštanta. Túto konštantu určíme z počiatočných podmienok pre rýchlosť častice v čase  $t = 0$ , kedy je rýchlosť  $v_x = v_{0x}$ . Dosadením tejto hodnoty do predchádzajúceho vzťahu, ktorý platí pre ľubovoľný okamih dostaneme hodnotu integračnej konštanty  $c$

$$v_0 = v(t = 0) = a \cdot 0 + c = c. \quad (1.27)$$

Získanú hodnotu konštanty  $c$  dosadíme do vzťahu (1.26) a dostávame

$$v = a t + v_0. \quad (1.28)$$

V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu je zrýchlenie  $a > 0$  a pre spomalený pohyb je  $a < 0$  a predchádzajúci vzťah prejde na tvar  $v = v_0 - at$ .

Podobným spôsobom so znalosťou pravidiel pre integračný počet môžeme odvodiť aj vzťah pre dráhu zo vzťahu (1.10). Úpravou tohto vzťahu dostávame

$$ds = v dt. \quad (1.29)$$

Integráciou tejto rovnice dostaneme

$$\int ds = \int v dt. \quad (1.30)$$

Z predchádzajúceho výsledku poznáme vzťah pre rýchlosť (1.28), ktorá závisí na čase. Jej dosadením za  $v$  dostávame

$$\int ds = \int (v_0 + at) dt . \quad (1.31)$$

Využijeme jednu z vlastností integrálov – aditívnosť, t.j. integrál súčtu je rovný súčtu integrálov. Keďže počiatočná rýchlosť  $v_0$  je konštantná, môžeme ju vyňať pred integrál a následne upraviť

$$\int ds = v_0 \int dt + a \int t dt . \quad (1.32)$$

Integráciou oboch strán rovníc dostávame

$$s = 1/2at^2 + v_0t + c' , \quad (1.33)$$

kde  $c'$  je integračná konštanta, ktorú určíme z počiatočných podmienok pre polohu častice (v čase  $t = 0s$  je  $s = s_0$ ). Dosadením do predchádzajúceho vzťahu zistíme, že hodnota konštanty  $c' = s_0$ , čiže predchádzajúca rovnica nadobudne tvar

$$s = 1/2at^2 + v_0t + s_0 . \quad (1.34)$$

### Úloha 1-2:

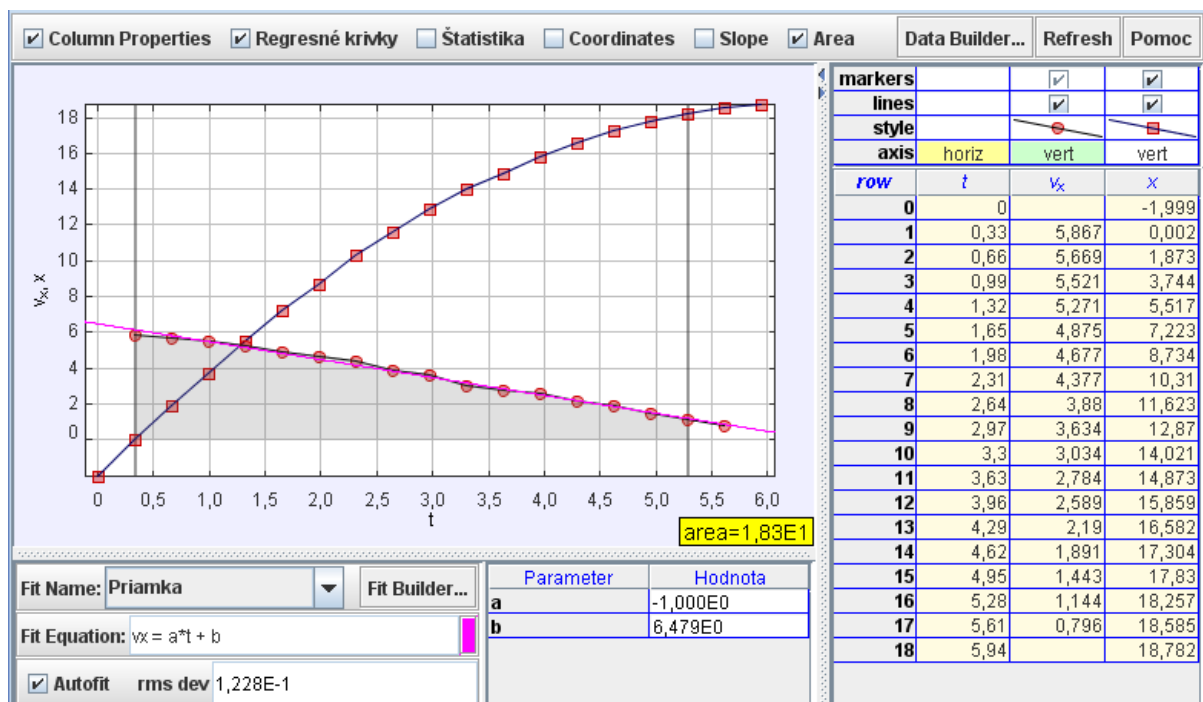
**Analyzujte pohyb vlaku, určte jeho spomalenie vlaku.**

**(dĺžka vozňa je 24,50 m, výška a šírka okna vozňa s rámom 0,96 m x 1,27 m, 30fps).**

**zdroj: [brzdenie\\_vlaku.avi](#)**

**Riešenie:**



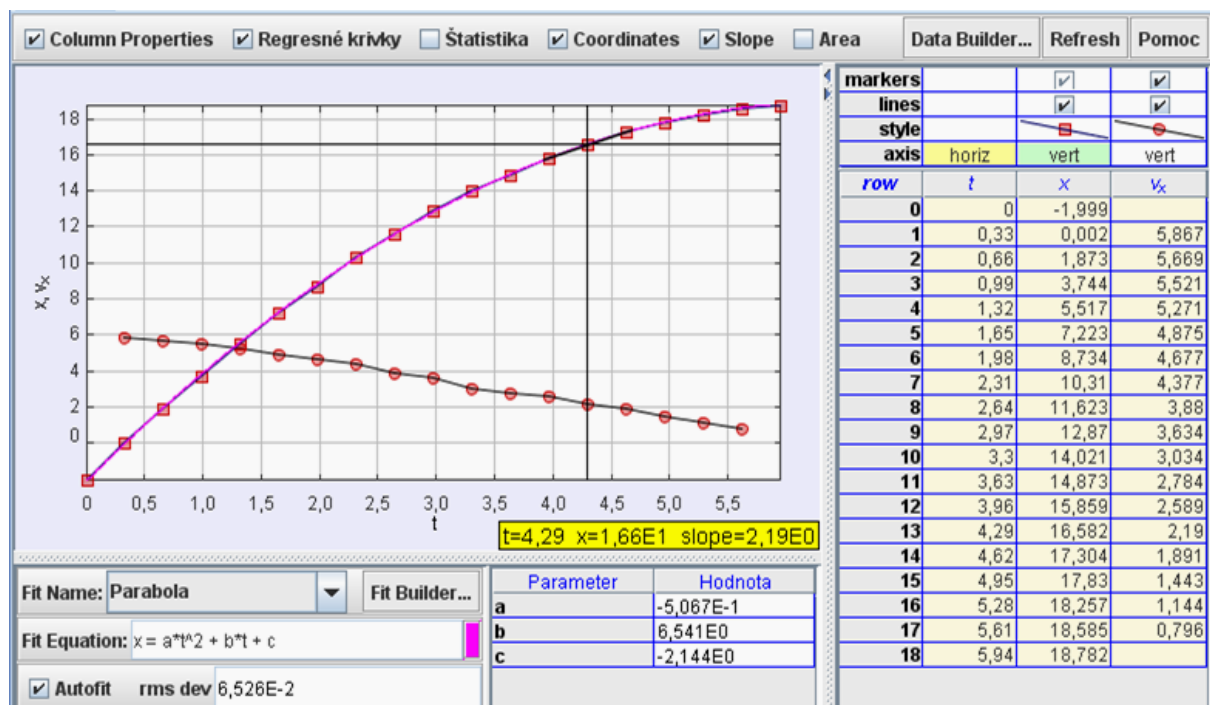


Obr. 1.5 Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe pri brzdení

Ako si môžeme všimnúť z grafu závislosti dráhy na čase (štvorčeky), pohyb, ktorý vlak vykonáva môžeme považovať za spomalený, navyše z grafu rýchlosti na čase môžeme konštatovať, že vlak vykonáva rovnomerne spomalený pohyb so zrýchlením  $a = -1 \text{ m.s}^{-2}$ .

Analyticky môžeme závislosť rýchlosti vlaku na čase vyjadriť rovnicou  $v(t) = -t + 6,479$ , čo napovedá, že v čase, keď sme začali pohyb analyzovať ( $t = 0\text{s}$ ) mal vlak veľkosť rýchlosti  $v_0 = 6,479 \text{ m.s}^{-1}$ . Obsah plochy pod závislosťou rýchlosti na čase nás informuje o tom, že za čas  $\Delta t = t_{16} - t_1 = 5,28\text{s} - 0,33\text{s}$  prešiel vlak dráhu  $s = 18,3\text{m}$  (area = 18,3), čo odpovedá prejdenej dráhe v čase  $\Delta t = 5,28\text{s} - 0,33\text{s} = 4,95\text{s}$  ( $\Delta s = \Delta x = x_{16} - x_1 = 18,257\text{m} - 0,002\text{m} = 18,255\text{m} \approx 18,3\text{m}$ ).

Na Obr. 1.6 je prevedená analýza závislosti prejdenej dráhy pri brzdení vlaku od času. Ako z matematickej analýzy daného pohybu vyplýva, závislosť dráhy na čase pri brzdení vlaku môžeme popísať rovnicou  $s = -0,5067t^2 + 6,54t - 2,144 = \frac{1}{2} \cdot 1,0134t^2 + 6,54t - 2,144$ . Daný pohyb považujeme teda za rovnomerne spomalený so zrýchlením  $a = -1,0134\text{m.s}^{-2}$  a počiatočnou rýchlosťou  $v_0 = 6,541\text{m.s}^{-1}$  (čo odpovedá analýze predchádzajúceho grafu). V čase  $t = 0\text{s}$  bola poloha vlaku  $x_0 (t_0 = 0\text{s}) = -1,999\text{m}$  (hodnota v tabuľke nameraných hodnôt, z fitovania matematickej závislosti  $s_0 = c = -2,144 \text{ m}$ ). V čase  $t_{13} = 4,29 \text{ s}$  bola na grafe závislosti dráhy od času urobená dotyčnica ku grafu, ktorej smernica má hodnotu 2,19 (slope = 2,19). Ak túto hodnotu porovnáme s hodnotou rýchlosti v danom čase ( $v(t_{13} = 4,29\text{s}) = 2,19\text{m.s}^{-1}$ ), zistíme, že dané hodnoty sú si navzájom odpovedajúce. Takýmto spôsobom je možno v ktoromkoľvek čase určiť okamžitú rýchlosť pohybu vlaku ako smernicu dotyčnice ku grafu závislosti dráhy na čase.



Obr. 1.6 Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe pri brzdení

Deriváciou dráhy podľa času dostaneme funkčnú závislosť rýchlosti a naopak, integráciou rýchlosti dostaneme závislosť dráhy ako funkciu času. Vo všeobecnosti, ak je jedna fyzikálna veličina vyjadrená ako derivácia druhej, tak zase druhú je možné získať integrovaním funkčnej závislosti prvej veličiny. Takýto postup sa nevzťahuje len na riešenie pohybov v kinematike, ale sa uplatňuje prakticky pri vzájomných vzťahoch všetkých fyzikálnych veličín.

Treba však pripomenúť, že odvodené rovnice (1.28) a (1.34) platia iba pre rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb. Symbol  $s_0$  predstavuje dráhu hmotného bodu prejdenu v čase  $t = 0s$  a rýchlosť  $v_0$  je rýchlosť v čase  $t = 0s$ . V prípade, že zrýchlenie  $a = 0m.s^{-2}$  potom vzťah (1.34) prejde na tvar (1.18), resp. ak v čase  $t = 0s$  bola dráha  $s_0 = 0$  tak na tvar (1.19), čo sú vzťahy pre rovnomerný priamočiary pohyb hmotného bodu pohybujúceho sa konštantnou rýchlosťou  $v_0$ . Tiež, ak zrýchlenie bolo nenulové a počiatočná rýchlosť a dráha bola nulová ( $v_0 = 0ms^{-1}$ ,  $s_0 = 0m$ ), tak dostávame vzťah pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu

$$s = 1/2at^2 \quad (1.35)$$

Obdobným spôsobom, ako bol analyzovaný pohyb vlaku, môžeme urobiť aj analýzu pohybu padajúceho telesa, ibaže tento raz budeme analyzovať pohyb v smere osi y, pričom pri analýzach budeme využívať y-ovú súradnicu:  $s = y$  a pre popis rýchlosti  $v = v_y$  (pri zachovaní natočenia súradnicovej sústavy). Keďže je možné súradnicovú sústavu natáčať ľubovoľným spôsobom, je na samotnom študentovi, ako si danú sústavu natočí a aké zložky bude analyzovať.

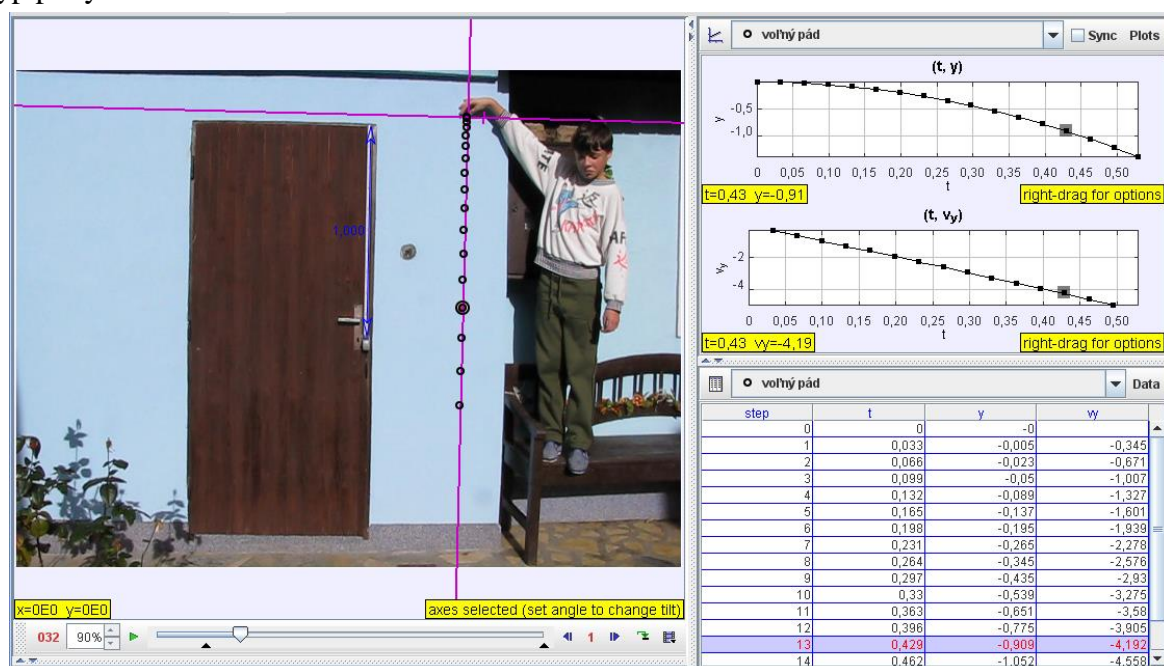
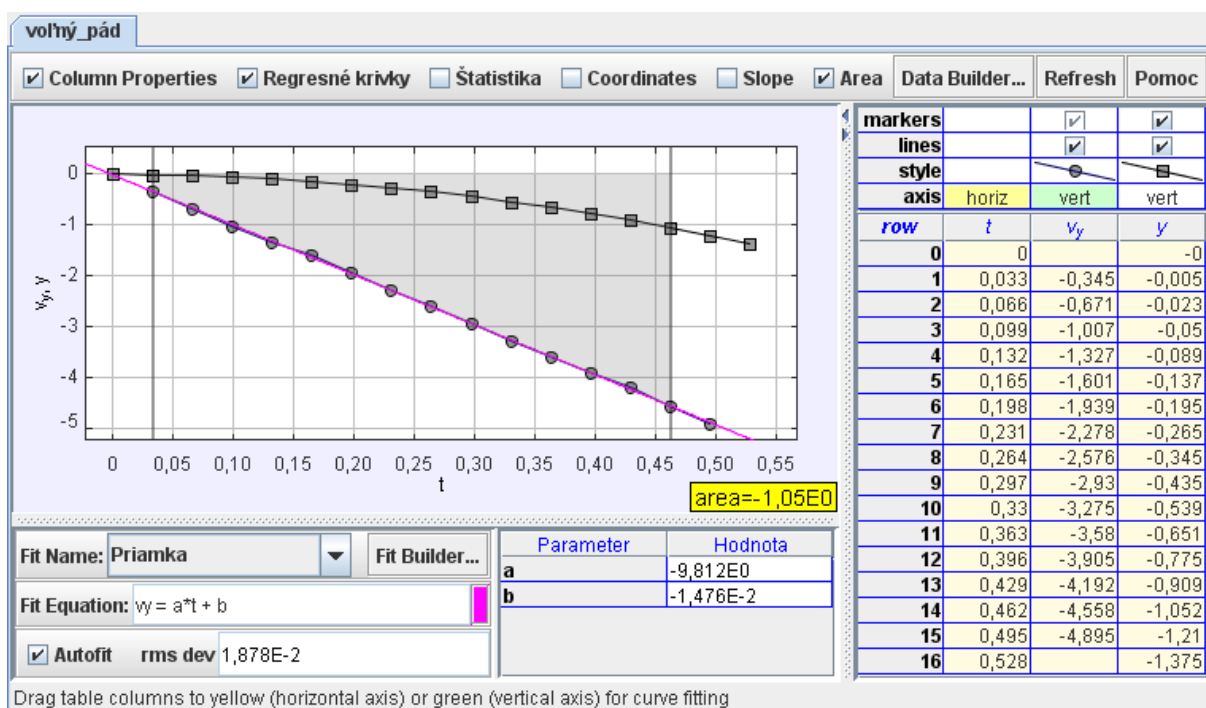
### Úloha 1-3:

**Analyzujte pohyb padajúcej loptičky, určte hodnotu jej zrýchlenia.**

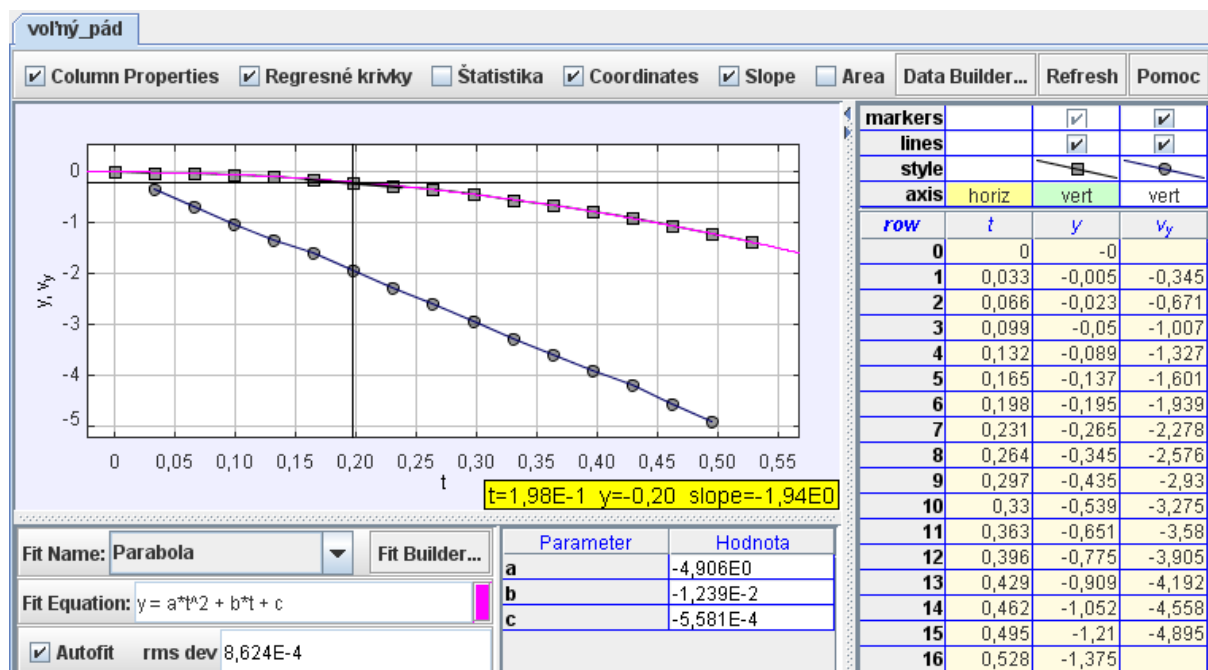
(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť loptičky:  $m = 2,5$  g), zdroj: [volny pad.avi](#) (30fps).

**Riešenie:**

Keďže padajúca guľôčka sa pohybuje v zápornom smere osi  $y$ , hodnoty polohy a rýchlosti v danom smere nadobúdajú záporné hodnoty. Z prvého grafu závislosti dráhy na čase môžeme usudzovať, že sa jedná o pohyb nerovnomerný a zrýchlený, graf závislosti rýchlosti od času potvrdzuje, že daný pohyb je rovnomerne zrýchlený. Obdobnou analýzou, aká bola urobená v predchádzajúcom príklade sa môžeme dopracovať k analytickým vyjadreniam časových závislostí dráhy a rýchlosti a taktiež aj k hodnote zrýchlenia, ktorá je charakteristická pre daný typ pohybu.

**Obr. 1.7** Analýza pohybu padajúceho telesa**Obr. 1.8** Analýza rýchlosti pohybu padajúceho telesa

Z analýzy rýchlosti pohybu voľne padajúceho telesa vyplýva, že pohyb voľne pustenej guľôčky je rovnomerne zrýchlený so záporným zrýchlením  $a = -9,812 \text{ m.s}^{-2}$ . Závislosť rýchlosti na čase môžeme charakterizovať rovnicou  $v(t) = -9,812t - 0,0147$ , z obsahu plochy pod grafom závislosti rýchlosti na čase vyplýva, že prejdená dráha v danom časovom intervale  $\Delta t = t_{14} - t_1 = 0,462\text{s} - 0,033\text{s} = 0,429\text{s}$  je 1,05 metra (resp.  $\Delta s = \Delta y = y_{14} - y_1 = |-1,052 - (-0,005)| = 1,047\text{m}$  z nameraných dát v tabuľke).



Obr. 1.9 Analýza dráhy pohybu padajúceho telesa

Závislosť dráhy na čase voľne padajúceho telesa na čase (1.34) môžeme popísať rovnicou  $s(t) = y(t) = -4,906t^2 - 0,01239t - 0,0005581$ , čo môžeme prepísať do tvaru  $s(t) = y(t) = -\frac{1}{2} \cdot 9,812t^2 - 0,01239t - 0,0005581$ . Pohyb voľne pustenej guľôčky (v krátkom časovom intervale, kedy ešte môžeme zanedbať odpor vzduchu) môžeme opäť podľa predchádzajúcej analýzy považovať za rovnomerne zrýchlený pohyb so záporným zrýchlením  $a = -9,812 \text{ m.s}^{-2}$ . Zistením smernice dotyčnice ku grafu závislosti dráhy od času v čase  $t_6 = 0,198 \text{ s}$ , bola určená hodnota okamžitej rýchlosti  $v(0,198\text{s}) = -1,94 \text{ m.s}^{-1}$ , čo odpovedá hodnote určenej z tabuľky  $v_{y,6} = -1,939 \text{ m.s}^{-1}$ . Daný pohyb možno považovať za voľný pád, keďže  $\vec{a} = \vec{g} = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ . Čo sa počiatkovej rýchlosti a dráhy týka, tie by v prípade voľného pádu mali byť nulové; po zaokrúhlení čísel na prvú platnú číslicu sú hodnoty počiatkovej rýchlosti aj dráhy veľmi blízke nule. Viac o podobných pohyboch realizovaných v blízkosti zemského povrchu (v gravitačnom poli Zeme) sa dozvieme v kapitole Gravitačné pole (4).

### 1.3 Dvojmerný pohyb

Po predchádzajúcej analýze pohybu v jednom smere (na priamke) možno naše úvahy rozšíriť na pohyb, ktorý sa uskutočňuje v dvoch smeroch. Najdôležitejšie pojmy týkajúce sa popisu pohybu budú analogické s tými, ktoré sme odvodili v predchádzajúcich častiach, avšak rozšírené za pomoci vektorovej algebry do roviny.

Podiel

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_p \quad (1.36)$$

definuje priemernú rýchlosť hmotného bodu. Matematicky môžeme zmenšovanie časového intervalu vyjadriť pomocou limity a následnej derivácie polohového vektora podľa času

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.37)$$

Rýchlosť  $\vec{v}$  je v tomto vyjadrení okamžitou rýchlosťou hmotného bodu v čase  $t$  a smer rýchlosti má smer dotyčnice ku trajektórii pohybu. Vzťah (1.37) je analógiou vzťahu (1.10), ale zároveň je jeho zovšeobecnením pre pohyby v trojrozmernom (dvojrozmernom) priestore. (Keďže v programe Tracker budeme analyzovať pohyby v rovine, vystačíme si s dvoma rozmermi.) Zavedené veličiny  $d\vec{r}$  a  $dt$  sú elementárnym vyjadrením polohového vektora a času.

Pre dvojrozmerný súradnicový systém s vektorom  $\vec{r}$  určeným pomocou dvoch zložiek prejde vzťah pre rýchlosť (1.37) do tvaru

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}. \quad (1.38)$$

Ak zavedieme veľkosti zložiek vektora rýchlosti pre jednotlivé smery nasledovne

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad (1.39)$$

dostávame pre celkovú rýchlosť

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (1.40)$$

Veľkosť rýchlosti je určená absolútnou hodnotou

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1.41)$$

V prípade pohybu hmotného bodu rýchlosťou  $v_0$  len v jednom smere napr. v smere osi  $x$  sú zložky rýchlosti v ostatných smeroch  $v_y = 0$ . Potom vo vzťahu (1.40) pre zložku rýchlosti nahradíme  $v_x = v_0$  a zložku vektora  $x$  môžeme nahradiť dráhou  $s$ . Dostávame tak skalárny vzťah pre rýchlosť priamočiareho pohybu vyjadrený ako deriváciu dráhy podľa času, čo je vzťah (1.10).

Predpokladajme v ďalšom, že rýchlosť pohybu nezostáva konštantná ako v prípade rovnomerného pohybu, ale sa mení s časom. Takýto pohyb sme označili ako nerovnomerný. Nech sa hmotný bod v čase  $t_1$  pohybuje rýchlosťou  $v_1$  a v čase  $t_2$  rýchlosťou  $v_2$ . Pomer zmeny rýchlosti v časovom intervale vyjadruje zrýchlenie už zadefinované vzťahom (1.21). Avšak vzťah (1.21) je opäť definíciou zrýchlenia len pre prípad priamočiareho pohybu. Pre zovšeobecnenie definície zrýchlenia v priestore je potrebné upraviť vzťah pre dvojrozmerný súradnicový systém. Ak uvážime dvojrozmerný súradnicový systém s vektorom  $\vec{r}$  určeným pomocou dvoch zložiek, potom zrýchlenie môžeme vyjadriť s využitím vzťahu (1.21) analogicky, ako sme to urobili pre rýchlosť v predchádzajúcej časti

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j}. \quad (1.42)$$

Ak uvážime vzťahy pre veľkosti zložiek rýchlosti (1.39), tak zrýchlenie je možné vyjadriť ako druhú deriváciu polohového vektora podľa času

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j}. \quad (1.43)$$

Veľkosti zložiek vektora zrýchlenia zavedieme nasledovne

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad (1.44)$$

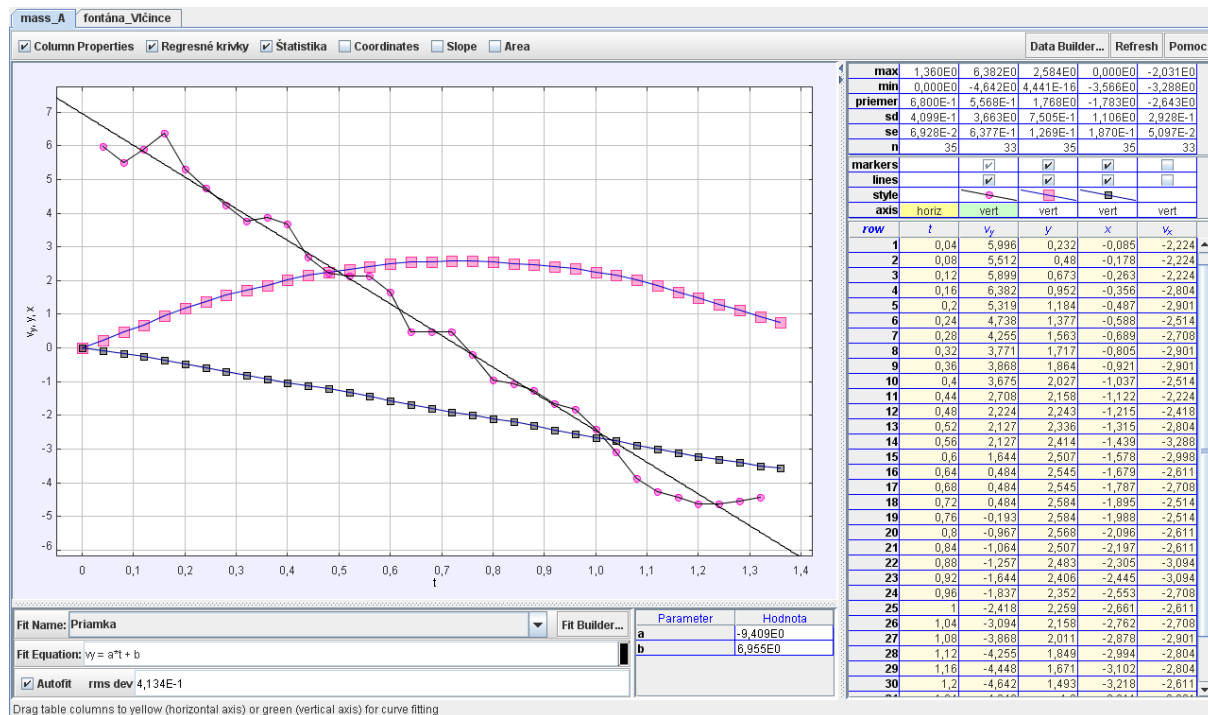
a pre celkové zrýchlenie potom dostávame

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}. \quad (1.45)$$

Veľkosť zrýchlenia je určená absolútnou hodnotou

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (1.46)$$

Vráťme sa ešte na koniec tejto časti k analýze pohybu vodného lúča fontány, ktorý urobíme v rovine  $x, y$  (v smere osi  $z$  sa daný pohyb nerealizuje). Ako si môžeme všimnúť, poloha začiatku vodného lúča v smere osi  $x$  rovnomerne narastá (menšie modré štvorčeky), závislosť polohy  $x$  na čase môžeme približne charakterizovať rovnicou  $x(t) = -2,7t + 0,052$ , a teda pohyb v danom smere môžeme považovať za rovnomerný (s rýchlosťou  $v_x = 2,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , znamienko – hovorí o pohybe v zápornom smere osi  $x$ ). Poloha vodného lúča v smere osi  $y$  najprv narastá, potom sa znižuje (väčšie červené štvorčeky), preto pohyb v tomto smere považujeme za nerovnomerný. Matematickou analýzou možno daný pohyb popísať vzťahom  $y(t) = -1/2 \cdot 9,67t^2 + 7,13t - 0,0054$ , z čoho vyplýva, že zrýchlenie tohto pohybu je konštantné a smeruje dole v zápornom smere osi  $y$ , t.j.  $a_y = -9,67 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \approx g$ . Rýchlosť pohybu v danom smere možno charakterizovať rovnicou  $v_y(t) = 6,96 - 9,41t$ , pričom z daného vyjadrenia a grafickej závislosti  $v_y(t)$  (gulôčky) vyplýva, že pri stúpaní vodného lúča je rýchlosť kladná a znižuje sa z rýchlosti približne  $v_y(0) \approx 7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  až na nulu ( $v_y(0,74\text{s}) = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) a potom veľkosť (zápornej) rýchlosti narastá.



Obr. 1.10 Analýza pohybu vodného lúča fontány

### 1.4 Krivočiary pohyb, pohyb po kružnici

V prechádzajúcej časti boli odvodené vzťahy pre prípad priamočiareho rovnomerného a rovnomerne zrýchleného pohybu. Trajektória takéhoto pohybu bola časť priamky. Tieto vzťahy boli potom zovšeobecnené na pohyb v priestore s použitím vektorového zápisu. Ak zavedieme jednotkový vektor  $\vec{\tau}$  orientovaný v smere dotyčnice ku krivke, môžeme potom rýchlosť vyjadriť ako skalárny násobok veľkosti rýchlosti  $v$  a jednotkového vektora  $\vec{\tau}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v \vec{\tau}. \quad (1.47)$$

Analýzou vzťahu (1.47) podľa skalárnej veličiny  $v$  dostávame nasledujúce druhy pohybov podľa veľkosti rýchlosti

- a)  $v = \text{konštanta}$ ,  $\Rightarrow$  rovnomerný pohyb,
- b)  $v \neq \text{konštanta}$ ,  $\Rightarrow$  nerovnomerný pohyb

a rozborom z pohľadu vektora  $\vec{\tau}$  vystihujúceho smer pohybu dostávame ďalšie rozdelenie

- c)  $\vec{\tau} = \text{konštanta}$ ,  $\Rightarrow$  priamočiary pohyb,
- d)  $\vec{\tau} \neq \text{konštanta}$ ,  $\Rightarrow$  krivočiary pohyb.

Kombináciou týchto možností získame štyri základné druhy pohybu, rovnomerný priamočiary, rovnomerný krivočiary, nerovnomerný priamočiary, nerovnomerný krivočiary. Na popis priamočiarych pohybov vystačíme s jednorozmerným súradnicovým systémom, kým v prípade krivočiarych pohybov je potrebný popis s dvoma súradnicami pre pohyby v rovine resp. tromi súradnicami pre pohyby v priestore. Predmetom tejto kapitoly bude rozbor z pohľadu smeru pohybu.

Veľká variabilita krivočiarych pohybov neumožňuje univerzálnym spôsobom popísať všetky krivočiare pohyby, a preto sa v tejto kapitole naša pozornosť zúži len na špeciálny prípad krivočiareho pohybu, konkrétne prípad pohybu po kružnici, ktorý taktiež nazývame *otáčavý* alebo *rotačný pohyb*. Analogicky s priamočiarým pohybom (patrí medzi *posuvné (translačné)*

**pohyby**), ktorý je charakterizovaný dráhou  $\vec{s}$ , rýchlosťou  $\vec{v}$  a zrýchlením  $\vec{a}$  môžeme aj pohyb po kružnici charakterizovať orientovaným uhlom  $\alpha$ , vektorom uhlovej rýchlosti  $\vec{\omega}$  a vektorom uhlového zrýchlenia  $\vec{\epsilon}$ . Kým v prípade priamočiareho pohybu sme mohli s dráhou, rýchlosťou a zrýchlením pracovať ako so skalárnymi veličinami, tak v prípade pohybu po kružnici sú spomínané veličiny vektormi.

Uvažujme teraz o pohybe hmotného bodu, ktorý sa otáča okolo pevnej osi  $o$  (Obr. 1.11). Odrazové sklíčko na bicykli opíše pri otáčavom pohybe za daný čas rovnaký uhol. (Naproti tomu pri posuvnom pohybe všetky body telesa sa pohybujú po trajektóriách rovnakého tvaru, napr. po priamkach pri priamočiaram pohybe a v danom časovom intervale prejdú rovnakú vzdialenosť.) Uhol  $\alpha$  charakterizuje oblúk opísaný sprievodičom rotujúceho hmotného bodu (odrazové sklíčko) so stredom kruhovej trajektórie. Ak poznáme dĺžku oblúka  $s$ , ktorú hmotný bod za čas  $t$  urazil a polomer kružnice, po ktorej sa pohybuje je  $R$ , pre veľkosť uhla  $\alpha$  platí

$$\alpha = \frac{s}{R}. \quad (1.48)$$

Hodnoty takto definovaného uhla sa udávajú v oblúkovej miere, t.j. v radiánoch (rad). Niekedy sa však môžeme stretnúť aj so zadaním uhla v stupňoch, pričom platí prevod

$$1 \text{ plný uhol} = 360^\circ = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}, \quad (1.49)$$

odtiaľ potom dostávame

$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ = 0,159 \text{ plného uhla}. \quad (1.50)$$

Ak teraz chceme skúmať otáčavý pohyb, znamená to skúmať časovú závislosť uhla otočenia hmotného bodu, čiže  $\alpha = \alpha(t)$ . Ak sa uhol otočenia hmotného bodu v čase  $t$  mení z hodnoty  $\alpha_1(t_1)$  na hodnotu  $\alpha_2(t_2)$ , potom pod **otočením** hmotného bodu rozumieme v danom časovom intervale veličinu  $\Delta\alpha$ , ktorá je definovaná vzťahom

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (1.51)$$

Otočenie  $\Delta\alpha$  rotujúceho hmotného bodu nadobúda kladné hodnoty, ak sa daný bod otáča v smere rastúceho uhla, t.j. proti smeru pohybu hodinových ručičiek. Pri otáčaní v smere klesajúcich hodnôt uhla otočenia nadobúda záporné hodnoty. (Otočenie v zmysle vektorovej algebry nie je vektorovou veličinou, pretože skladanie otočení nie je komutatívne (pri zmene poradia dvoch otočení knihy o uhol  $90^\circ$  v rôznych smeroch nedostaneme knihu do tej istej polohy). Pri infinitezimálnych otočeniach  $d\alpha$  však môže byť pokladané za vektorovú veličinu.) Nech v čase  $t_1$  je uhol otočenia hmotného bodu  $\alpha_1$  a v čase  $t_2$  je uhol otočenia  $\alpha_2$ . **Priemerná uhlová rýchlosť** hmotného bodu v časovom intervale  $\Delta t = t_2 - t_1$  je definovaná vzťahom

$$\vec{\omega} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}, \quad (1.52)$$

kde  $\Delta\alpha$  predstavuje otočenie hmotného bodu v časovom intervale  $\Delta t$ .

**(Okamžitá) uhlová rýchlosť**  $\vec{\omega}$  je limitou priemernej uhlovej rýchlosti vyjadrenej vzťahom (1.50) pri poklese veličiny  $\Delta t$  k nulovej hodnote, t.j.



$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (1.53)$$

Jednotkou uhlovej rýchlosti je  $rad.s^{-1}$  (alebo  $Is^{-1}$ , prípadne otáčky/s). V prípade, že uhlová rýchlosť rotujúceho bodu nie je konštantná, daný bod má nenulové uhlové zrýchlenie. Ak uhlová rýchlosť v čase  $t_1$  je  $\omega_1$  a v čase  $t_2$  je  $\omega_2$ , potom **priemerné uhlové zrýchlenie** hmotného bodu v časovom intervale  $\Delta t$  je definované vzťahom

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}, \quad (1.54)$$

kde  $\Delta \omega$  predstavuje zmenu uhlovej rýchlosti hmotného bodu v danom časovom intervale  $\Delta t$ . **(Okamžité) uhlové zrýchlenie**  $\vec{\varepsilon}$  je limitou priemerného uhlového zrýchlenia pri poklese  $\Delta t$  k nulovej hodnote, t.j.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.55)$$

Jednotkou uhlového zrýchlenia je  $rad.s^{-2}$  (alebo  $Is^{-2}$ , prípadne otáčky/s<sup>2</sup>).

Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie sú vektorové veličiny, to znamená, že vzťahy (1.53) a (1.55) môžeme zapísať aj vo vektorovom tvare, pričom orientácia vektorov  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\varepsilon}$  je totožná a je určená podľa pravidla pravej ruky. Vektory majú smer kolmý na rovinu danú pohybom s orientáciou nahor, resp. nadol v závislosti na smere pohybu hmotného bodu.

Okrem týchto veličín môže byť pohyb po kružnici popísaný aj pomocou obvodovej rýchlosti  $\vec{v}$ . Smer vektora obvodovej rýchlosti je dotyčnica ku kružnici v danom mieste, čiže sa nachádza v rovine kružnice.

Podobným spôsobom ako v prípade priamočiareho pohybu môžeme odvodiť vzťah pre uhol a uhlovú rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici. V takom prípade je zrýchlenie  $\varepsilon$  konštantné, smery vektorov uhlového zrýchlenia a uhlovej rýchlosti sú zhodné a vzťah (1.55) sa dá prepísať nasledovne

$$d\omega = \varepsilon dt. \quad (1.56)$$

Uhlová rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu je potom po zintegrovaní vzťahu (1.56) daná zápisom

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (1.57)$$

V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici je zrýchlenie  $\varepsilon > 0$  a pre spomalený pohyb je  $\varepsilon < 0$ . Pre vyjadrenie opísaného uhla rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici využijeme základný vzťah pre vyjadrenie uhla (1.53) a použijeme odvodený vzťah (1.57). Následne dostaneme

$$\int d\alpha = \int (\omega_0 + \varepsilon t) dt \quad (1.58)$$

a ďalším zintegrovaním dostávame pre uhol rovnomerne zrýchleného pohybu vzťah

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2. \quad (1.59)$$

Tento vzťah je všeobecným vyjadrením uhla rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici. Symbol  $\alpha_0$  predstavuje uhol prejdený v čase  $t = 0$ s a  $\omega_0$  je uhlová rýchlosť v čase  $t = 0$ s. Vo všetkých predchádzajúcich vzťahoch je vidieť analógiu veličín a vzťahov s priamočiarym pohybom, na čo poukazuje aj Tab. 1.1.

**Tab. 1.1 Analógia veličín a vzťahov pre pohyb po kružnici a priamočiary pohyb**

Pohyb po kružnici	Priamočiary pohyb
$\alpha$	$\vec{r}$
$\vec{\omega}$	$\vec{v}$
$\vec{\varepsilon}$	$\vec{a}$
$\vec{\omega} = \frac{d\alpha}{dt}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	$v = v_0 + at$
$\alpha = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$	$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

#### Úloha 1-4:

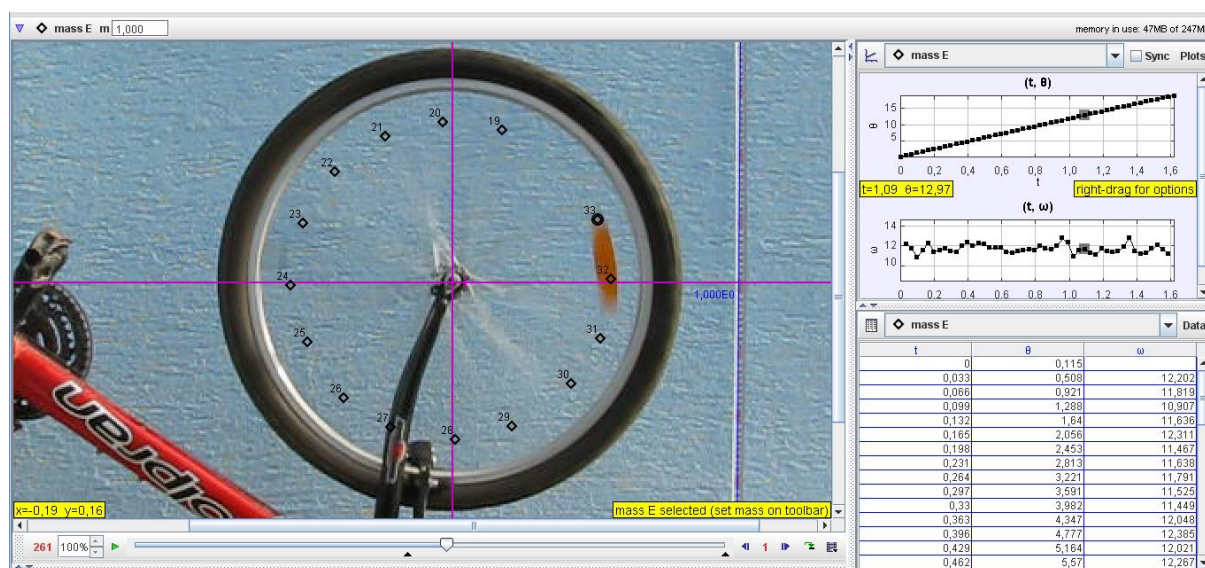
**Analyzujte otáčavý pohyb kolesa (odrazového sklíčka). Určte uhlovú rýchlosť otáčania kolesa, určte uhlové zrýchlenie pri brzdení kolesa.**

**(dĺžka meradla: 1 m).**

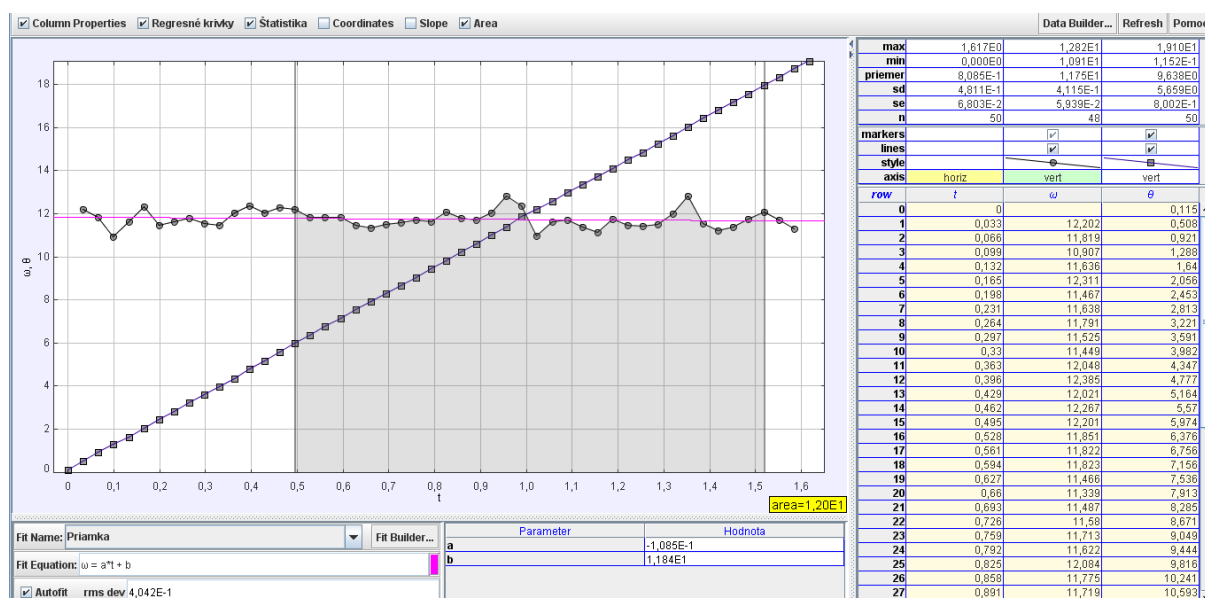
**zdroj: [koleso.avi](#) (30 fps),**

**Riešenie:**

Pokúsme sa teraz spoločne tak ako v predchádzajúcej časti analyzovať pohyb hmotného bodu po kružnici. Na Obr. 1.11 je zaznamenaný pohyb odrazového sklíčka na kolese bicykla. Matematickou analýzou grafov daných pohybov (Obr. 1.12, Obr. 1.13) môžeme usúdiť s istou presnosťou, že sa jedná o rovnomerný otáčavý pohyb, pričom veľkosť priemernej uhlovej rýchlosti je  $\omega = 11,8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Uhol otočenia v čase  $t$  môžeme popísať rovnicou  $\alpha(t) = \theta = 11,8t + 0,127$ . Obdobnou analýzou ako v predchádzajúcom prípade analýzy priamočiarych pohybov môžeme určiť uhol otočenia v istom časovom okamihu ako obsah plochy pod grafom závislosti uhlovej rýchlosti v danom časovom okamihu (Obr. 1.12 – obsah vyznačenej plochy je 12 jednotiek, čo odpovedá uhlu otočenia vo vyznačenom časovom intervale  $\Delta\alpha = \Delta\theta = (18 - 6) \text{ rad} = 12 \text{ rad}$ .) (V Trackeri je možné zvoliť aj stupne.)

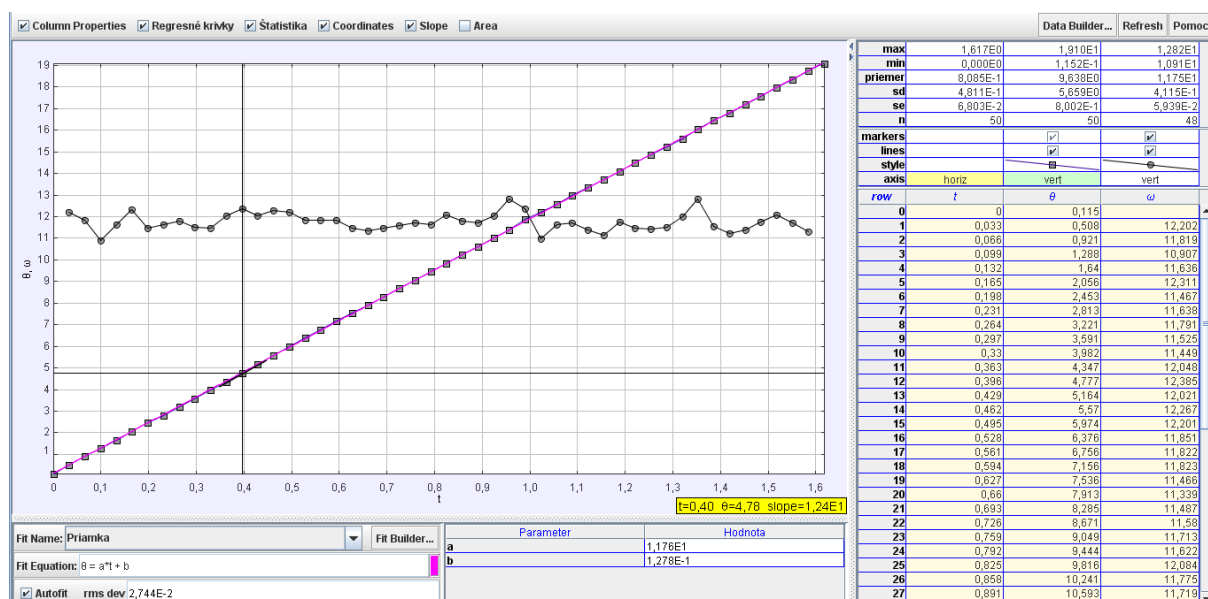


Obr. 1.11 Analýza pohybu odrazového sklička na kolese bicykla

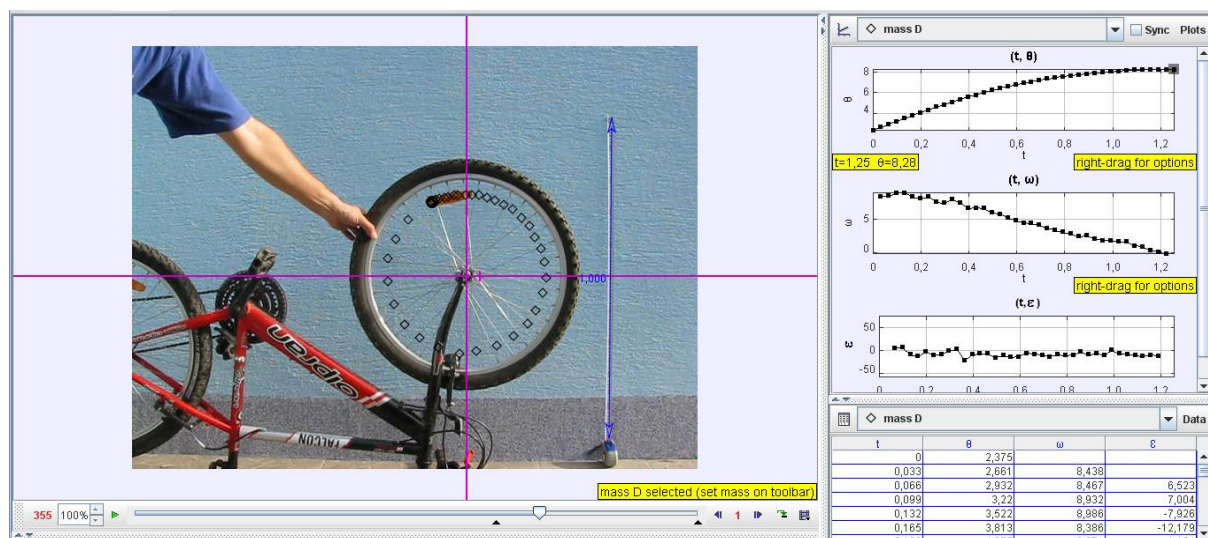


Obr. 1.12 Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (gulôčky) a uhla otočenia (štvorčeky) od času, analýza uhlovej rýchlosti

Obdobnou analýzou grafu závislosti uhla otočenia na čase možno v ktoromkoľvek okamihu určiť uhlovú rýchlosť ako smernicu dotčnice ku grafu v danom bode (Obr. 1.13 – v čase  $t = 0,40s$  má smernica dotčnice hodnotu  $12,4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , čo odpovedá uhlovej rýchlosti v danom čase určenej z tabuľky:  $\omega(0,40s) = 12,385 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ).

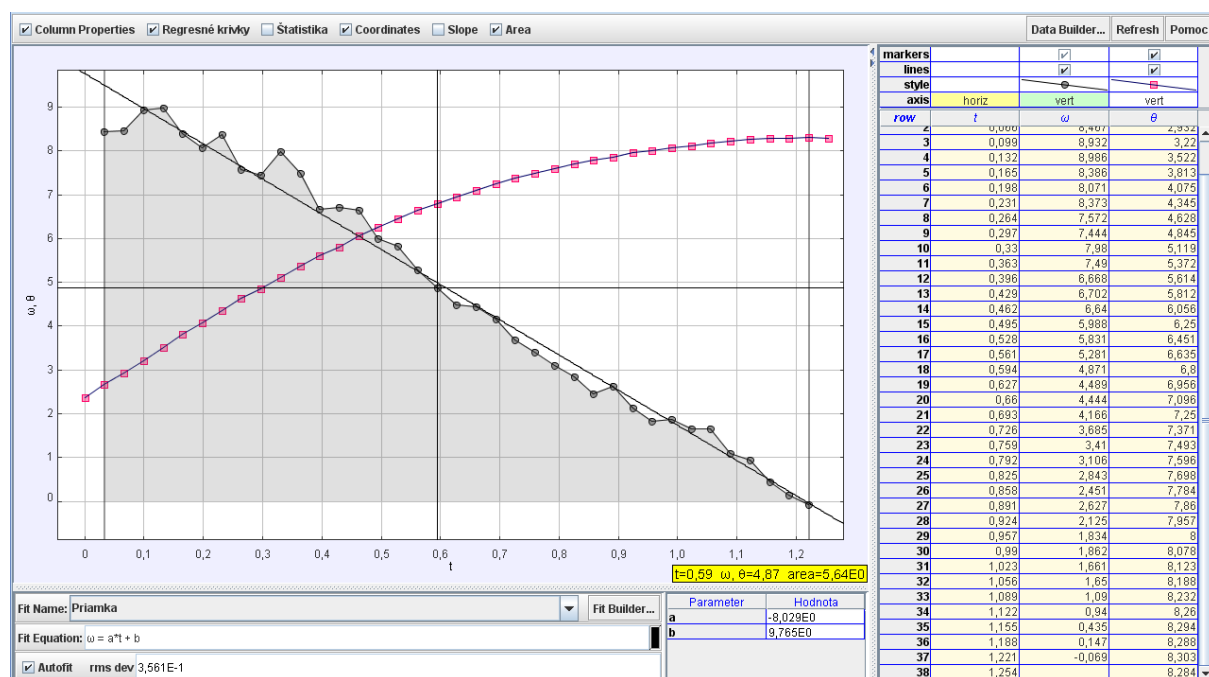


Obr. 1.13 Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (guľôčky) a uhla otočenia (štvorčky) od času, analýza uhla otočenia

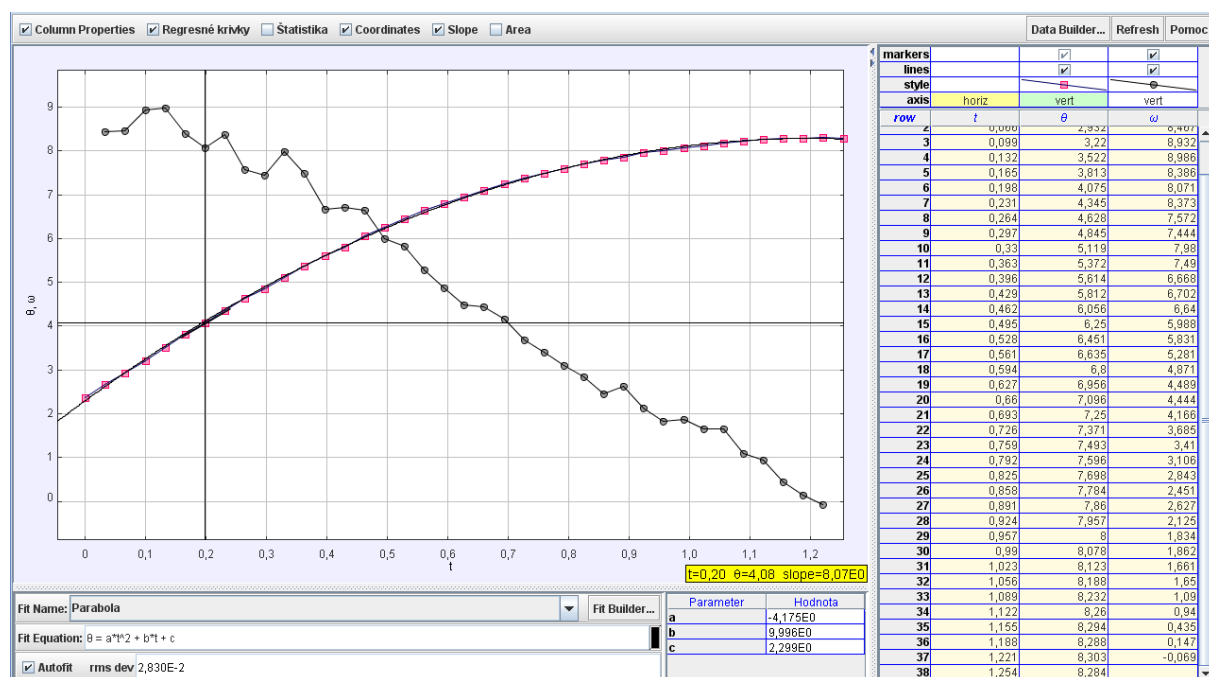


Obr. 1.14 Analýza pohybu odrazového sklička na kolese bicykla pri brzdení koleša

Na Obr. 1.14 je znázornená analýza pohybu odrazky na kolese bicykla pri jeho brzdení. Detailnejšou analýzou časových závislostí možno usúdiť (Obr. 1.15, Obr. 1.16), že sa jedná o rovnomerne spomalený otáčavý pohyb, ktorý možno popísať rovnicami  $\omega(t) = -8,029t + 9,765$  a  $\alpha(t) = \theta(t) = -1/2 \cdot 8,35t^2 + 9,996t + 2,299$ , pričom veľkosť uhlového zrýchlenia je približne rovná  $\varepsilon \approx 8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$  a uhlová rýchlosť na začiatku brzdenia koleša mala hodnotu približne  $\omega \approx 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Aj v prípade tohto pohybu možno v ktoromkoľvek okamihu určiť uhlovú rýchlosť ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode (Obr. 1.16 – v čase  $t = 0,20\text{s}$  má smernica dotyčnice hodnotu  $8,07 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , čo odpovedá uhlovej rýchlosti v danom čase určenej z tabuľky:  $\omega(0,20\text{s}) = 8,071 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ) a uhol otočenia v danom časovom intervale ako obsah plochy pod krivkou závislosti uhlovej rýchlosti na čase (Obr. 1.15 - obsah vyznačenej plochy je  $5,64 \text{ rad}$ , čo odpovedá uhlu otočenia vo vyznačenom časovom intervale  $\Delta t = t_{37} - t_1 = 1,221\text{s} - 0,033\text{s} = 1,188\text{s}$ :  $\Delta\alpha = \Delta\theta = \theta_{37} - \theta_1 = 8,303 \text{ rad} - 2,661 \text{ rad} = 5,642 \text{ rad}$ ).



Obr. 1.15 Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (guľôčky) a uhla otočenia (štvorčky) od času, analýza uhlovej rýchlosti



Obr. 1.16 Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (guľôčky) a uhla otočenia (štvorčky) od času, analýza uhla otočenia

#### 1.4.1 Vzťah obvodovej a uhlovej rýchlosti

Na odvodenie vzťahu, ktorý vyjadruje vzájomný súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou, použijeme základnú definíciu uhlovej rýchlosti (1.53) a súvis medzi opísaným uhlom  $\alpha$  a prejdenu dráhou, ktorú v tomto prípade predstavuje oblúk  $s$  (vzťah (1.48)).

Dosadením rovnosti (1.48) za  $\alpha$  do vzťahu (1.53) dostávame

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\left(\frac{s}{R}\right)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt}, \quad (1.60)$$

kde  $\frac{ds}{dt} = v$  je už známa definícia okamžitej rýchlosti posuvného pohybu. Po dosadení dostávame vzťah medzi uhlovou a obvodovou rýchlosťou v skalárnom tvare

$$\omega = \frac{v}{R}. \quad (1.61)$$

(Ešte elegantnejšie je možné dopracovať sa k tomuto vzťahu priamo deriváciou vzťahu (1.48) podľa času, čo už ponechávame na samotnom čitateľovi.) Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, že aj keď sa všetky časti telesa otáčajúceho sa okolo vlastnej osi otáčajú rovnakou uhlovou rýchlosťou, častice telesa, ktoré obiehajú vo väčšej vzdialenosti  $R$  od osi otáčania, pohybujú sa aj väčšou obvodovou rýchlosťou  $v$ . Predchádzajúci vzťah však nevystihuje smer rýchlosti, hovorí iba o veľkosti obvodovej rýchlosti. Vo vektorom tvare je výsledný vzťah charakterizujúci súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou daný zápisom

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (1.62)$$

#### 1.4.2 Perióda a frekvencia rovnomerného pohybu po kružnici

V prípade rovnomerného otáčavého pohybu telesa po kružnici stálou uhlovou rýchlosťou je podľa vzťahu (1.61) časovo nepremenná obvodová rýchlosť každej častice telesa. Vtedy vykoná každý hmotný bod telesa jeden obeh po kružnici za rovnaký časový interval. **Čas, za ktorý vykoná hmotný objekt jeden obeh po kružnici rovnomerným pohybom sa nazýva perióda ( $T$ ).** Doba obehu je pre všetky častice otáčajúceho sa telesa rovnaká. Jednotkou periódy je 1s. Perióda je vyjadrená vzťahom

$$T = \frac{2\pi R}{v}, \quad (1.63)$$

z ktorého je zrejme, že je podielom dĺžky kruhovej trajektórie hmotného bodu ( $2\pi R$ ) a jej obvodovej rýchlosti  $v$ . Po dosadení vzťahu (1.61) do tejto rovnice dostaneme

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.64)$$

Okrem periódy sa pre rovnomerné pohyby po kružnici zavádza aj ďalšia fyzikálna veličina **frekvencia ( $f$ ).** **Frekvencia je definovaná ako počet obbehov hmotného bodu rovnomerným pohybom po kružnici za jednotku času.** Matematicky je vyjadrená ako prevrátená hodnota periódy

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1.65)$$

Jednotkou frekvencie je  $1s^{-1} = 1Hz$  (Hertz). Pomocou týchto zavedených veličín je možné vyjadriť uhlovú rýchlosť. Keďže perióda a frekvencia popisujú výhradne rovnomerné pohyby, tak aj vzťah pre uhlovú rýchlosť (1.53) sa môže zjednodušiť

$$\omega = \frac{\alpha}{t}. \quad (1.66)$$

Jeden obchod po kružnici zodpovedá uhlu  $\alpha = 2\pi$  a čas  $t = T$ . Po dosadení vzťahu (1.66) prejde na tvar

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.67)$$

alebo po dosadení vzťahu (1.65) na tvar

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.68)$$

### 1.4.3 Tangenciálne a normálové zrýchlenie

Podľa základnej definície zrýchlenia v priestore (1.42) je zrýchlenie vektorová veličina vyjadrená ako časová zmena vektora rýchlosti. Ak dôjde k časovej zmene rýchlosti je potom zrýchlenie nenulové. Táto zmena rýchlosti môže byť reprezentovaná buď zmenou jej veľkosti alebo jej smeru. V predchádzajúcej kapitole sme analyzovali priamočiary pohyb, pričom sme neuvažovali o zmene smeru rýchlosti. V prípade pohybu po kružnici sa však táto zmena smeru rýchlosti nedá zanedbať. Zmenu smeru rýchlosti bude popisovať **normálové (radiálne) zrýchlenie**  $\vec{a}_n$  a zmenu jej veľkosti **tangenciálne zrýchlenie**  $\vec{a}_t$ . Ich orientáciu na kružnici znázorňuje Obr. 1.17. Kým vektor tangenciálneho zrýchlenia  $a_t$  je dotyčnicou ku kruhovej trajektórii pohybu v danom mieste, tak vektor normálového zrýchlenia  $a_n$  má smer do stredu kružnice. Celkové zrýchlenie potom môžeme vyjadriť ako vektorový súčet oboch zrýchlení

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (1.69)$$

alebo v prípade určenia len veľkosti celkového zrýchlenia

$$|a| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (1.70)$$

Odvoďme teraz vzťahy pre tangenciálne a normálové zrýchlenie, pričom využijeme všeobecnú definíciu zrýchlenia v priestore (1.42) a použijeme prepis vektora rýchlosti ako súčin veľkosti rýchlosti vyjadrenej skalárom  $v$  a smeru charakterizovanom jednotkovým vektorom (1.47)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e})}{dt}. \quad (1.71)$$

Podľa pravidiel pre derivovanie súčinu je možné upraviť predchádzajúci vzťah (1.71) na nasledujúci tvar

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.72)$$

Prvá časť vzťahu (1.72) charakterizuje zmenu veľkosti rýchlosti, a teda predstavuje tangenciálnu zložku zrýchlenia, pričom za rýchlosť môžeme dosadiť vzťah (1.61),  $\varepsilon$  predstavuje uhlové zrýchlenie. Druhá časť vyjadruje zmenu smeru rýchlosti a predstavuje normálovú zložku zrýchlenia

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} = R \frac{d\omega}{dt} \vec{\tau} = R \varepsilon \vec{\tau}, \quad (1.73)$$

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{R} \vec{\rho}. \quad (1.74)$$

kde  $\rho$  je jednotkový vektor smerujúci do stredu kružnice. Určenie tangenciálneho zrýchlenia podľa vzťahu (1.73) je potom analogické určeniu zrýchlenia priamočiareho pohybu. Pre celkové zrýchlenie s dosadením predchádzajúcich vzťahov pre tangenciálne zrýchlenie (1.73) a normálové zrýchlenie (1.74) dostávame

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} - \frac{v^2}{R} \vec{\rho}. \quad (1.75)$$

Vzťah (1.75) je vyjadrením celkového zrýchlenia hmotného bodu pohybujúceho sa po kružnici s polomerom  $R$ . V prípade rovnomerného pohybu po kružnici je tangenciálne zrýchlenie nulové a normálové zrýchlenie konštantné. A zase v prípade rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici je tangenciálne zrýchlenie konštantné a normálové zrýchlenie narastá s druhou mocninou obvodovej rýchlosti.

### Úloha 1-5:

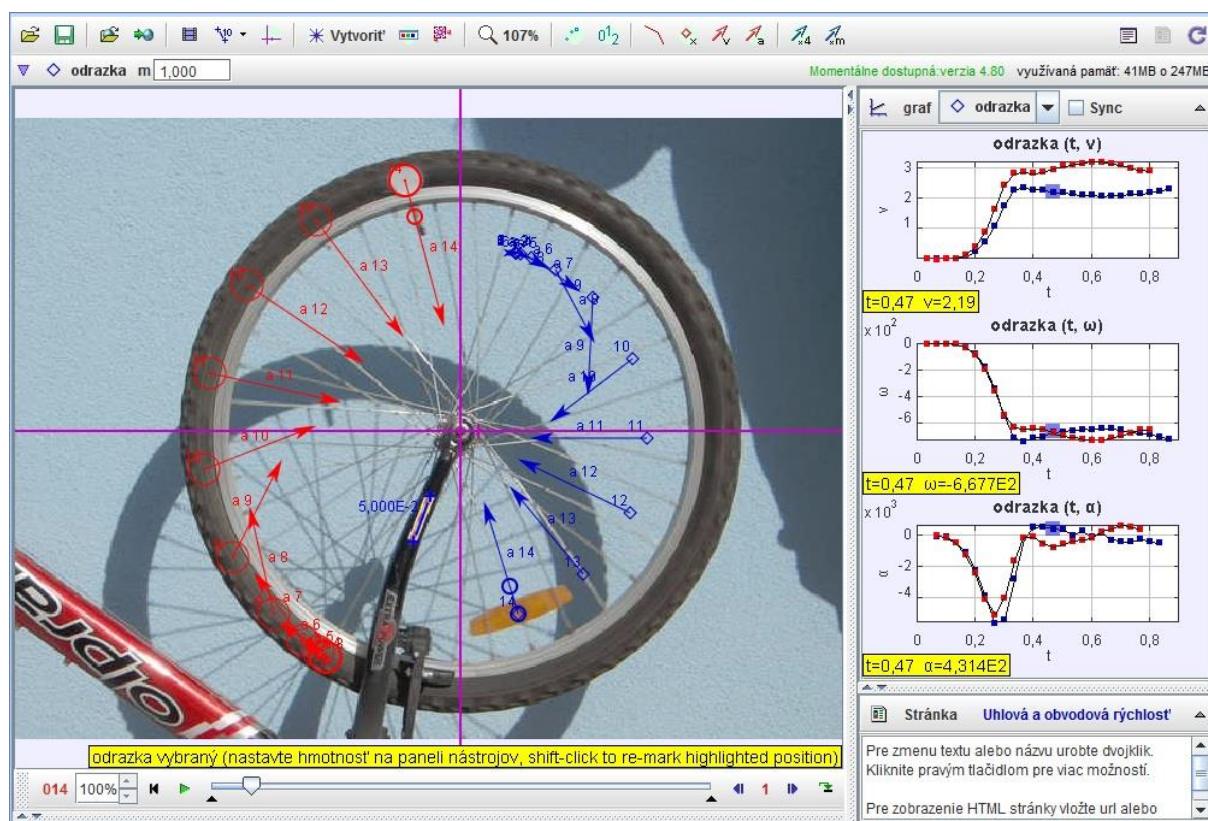
**Analyzujte otáčavý pohyb odrazového sklíčka a bieleho kruhu na otáčajúcom sa kolese. Určte uhlovú a obvodovú rýchlosť otáčania odrazového sklíčka, kruhu a navzájom ich porovnajte. Čo platí pre uhlové zrýchlenie pri rozbehu a brzdení kola? (dĺžka meradla: 1 m, 120 fps).**

zdroj: [koleso\\_120.avi](#)

### Riešenie:

Pre analýzu použijeme časové závislosti obvodovej a uhlovej rýchlosti odrazového sklíčka a bieleho bodu, časovú závislosť uhlovej rýchlosti. Program Tracker umožňuje vzájomné porovnanie viacerých hmotných bodov (odrazové sklíčko a biely bod), čo umožňuje priamo odpovedať na zadané otázky. Zaujímavé je taktiež sledovať vektor zrýchlenia rozbiehajúcich sa hmotných bodov a ich smer a veľkosť v závislosti od pôsobiacej sily (dotyk ruky s kolesom) a rýchlosti kola. Danú analýzu a skúmanie smeru a veľkosti okamžitého zrýchlenia, aplikáciu vzťahov (1.73), (1.74) ponechávame na samotnom čitateľovi.





Obr. 1.17 Analýza rozbehu kolesa, obvodovej a uhlovej rýchlosti a zrýchlenia

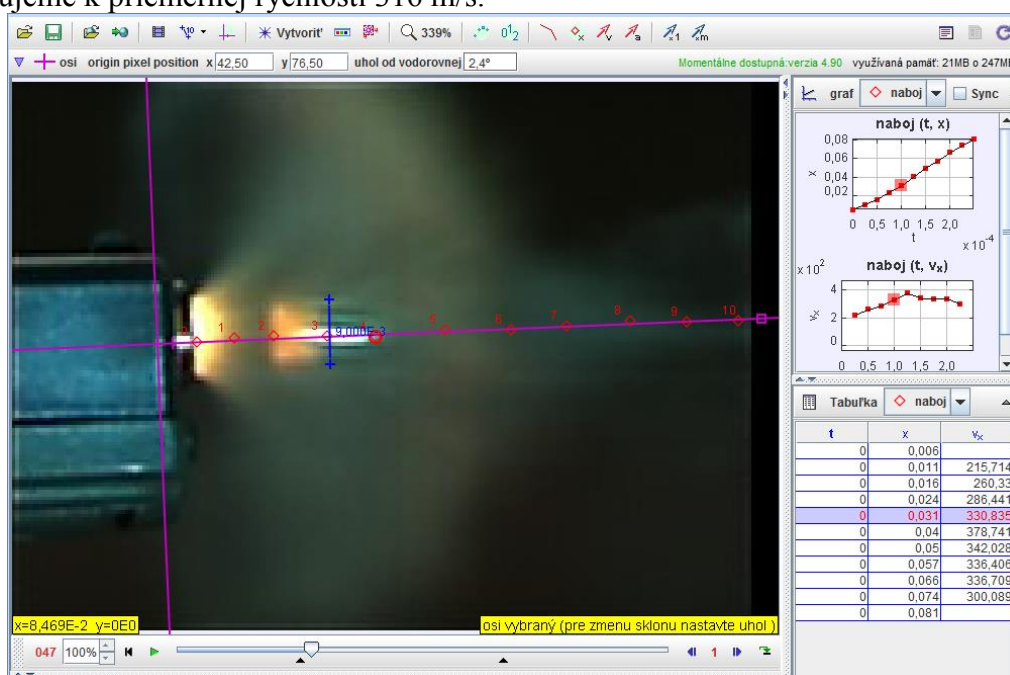
### Ďalšie riešené úlohy:

#### Úloha 1-6:

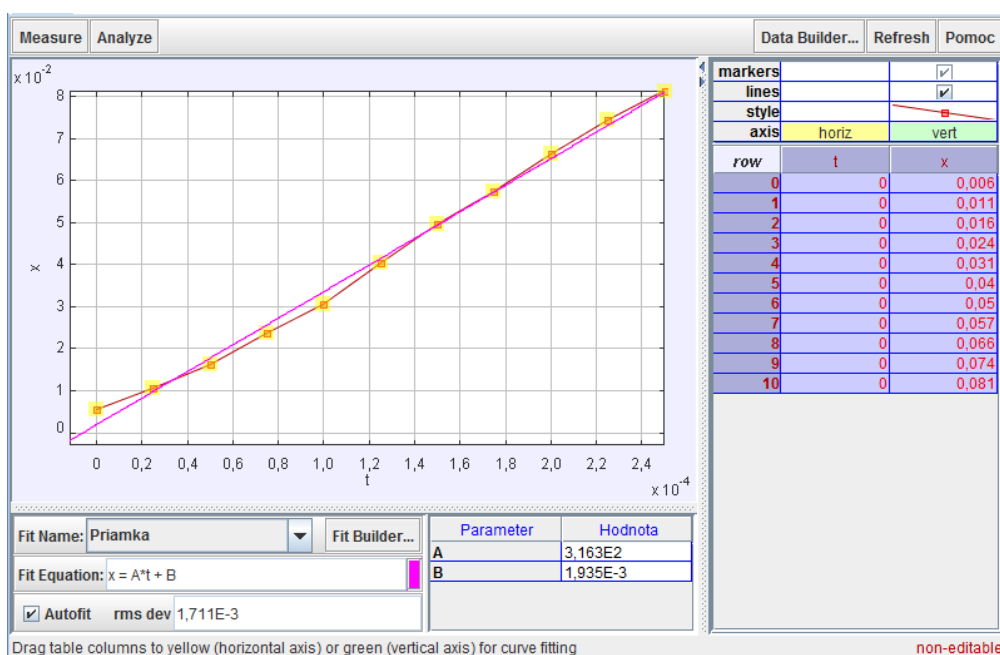
**Odhadnite rýchlosť strely vystrelenej z pištole.**  
 (priemer náboja je 9 mm, počet obrázkov za sekundu je 40000 fps).  
 zdroj: [PIST5.avi](#)

#### Riešenie:

Analýzou x-ovej výchylky v čase a určením smernice dotyčnice (Obr. 1.19) sa dopracujeme k priemernej rýchlosti 316 m/s.



Obr. 1.18 Analýza pohybu vystreleného náboja z pištole náboja

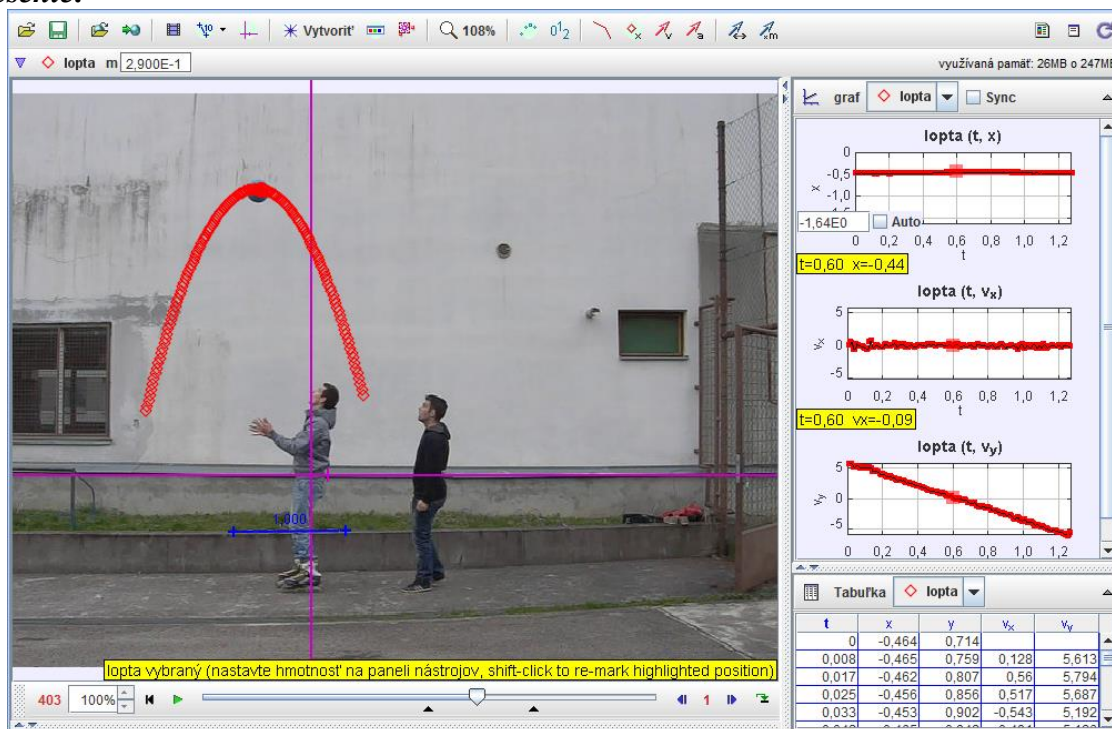


Obr. 1.19 Analýza polohy (v metroch) vystreleného náboja z pištole v jednotlivých desiat'tisíčinách sekundy

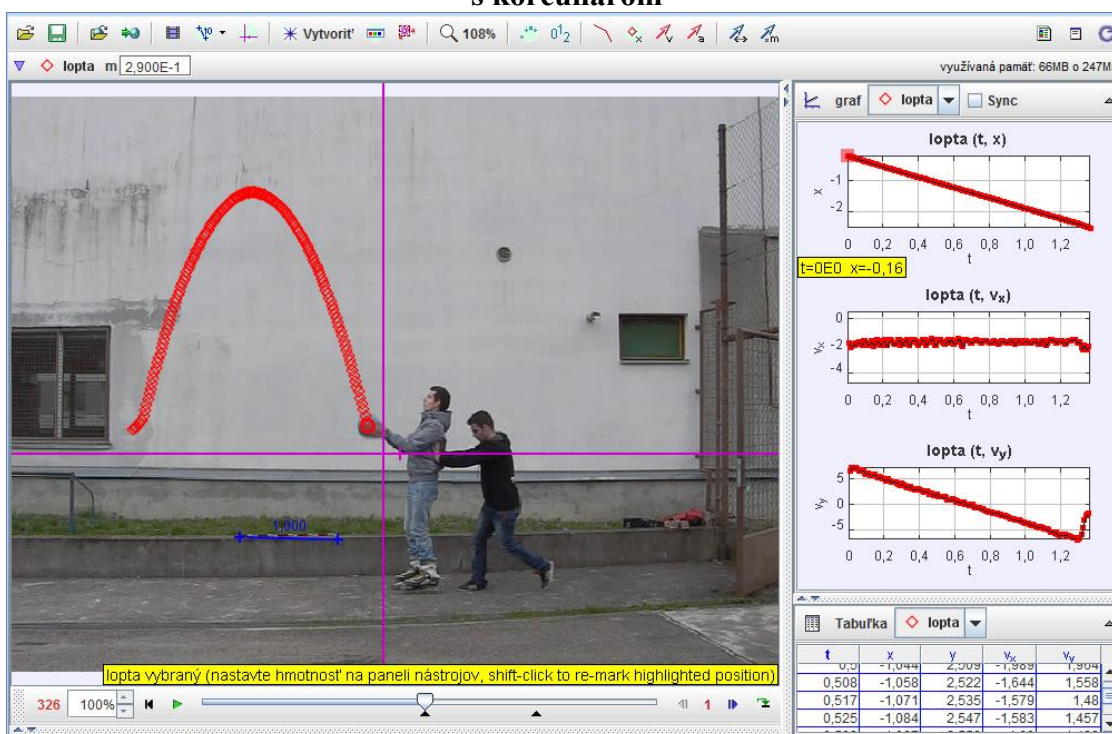
## Úloha 1-7:

Analyzujte pohyb lopty vyhodenej zvislo nahor vo vodorovnom a zvislo smere.  
(dĺžka meradla je 1 m, hmotnosť lopty je 290 g, počet obrázkov za sekundu je 120 fps).  
Zdroj: [hod\\_lopty.avi](#).

## Riešenie:



Obr. 1.20 Analýza pohybu vyhodenej lopty v súradnicovej sústave spojenj s korčuliarom



Obr. 1.21 Analýza pohybu vyhodenej lopty v súradnicovej sústave pevne spojenj so stenou

Pokoj a pohyb je vždy relatívny a výsledok závisí od voľby vzťažnej sústavy. Ak vzťažnú sústavu zvolíme spojenú s korčuliarom pohybujúcim sa v smere osi  $x$  (Obr. 1.20), po vyhodení lopty zvisle nahor je výchylka aj rýchlosť v danom smere konštantná ( $x = -0,5 \text{ m}$ ,  $v_x = 0 \text{ m/s}$ ). V prípade, že súradnicovú sústavu zvolíme pevne spojenú so stenou (Obr. 1.21), situácia sa zmení vzhľadom na predošlý prípad - výchylka v smere osi  $x$  sa bude znižovať (keďže pohyb sa uskutočňuje v zápornom smere osi  $x$ , alebo môžeme povedať, že sa narastá v zápornom smere osi  $x$ ) a rýchlosť v smere osi  $x$  bude tiež odlišná od predchádzajúceho prípadu:  $v_x = -2 \text{ m/s}$ . Situácia v smere osi  $y$  sa nemení, keďže súradnicová sústava sa v danom smere nepohybuje.

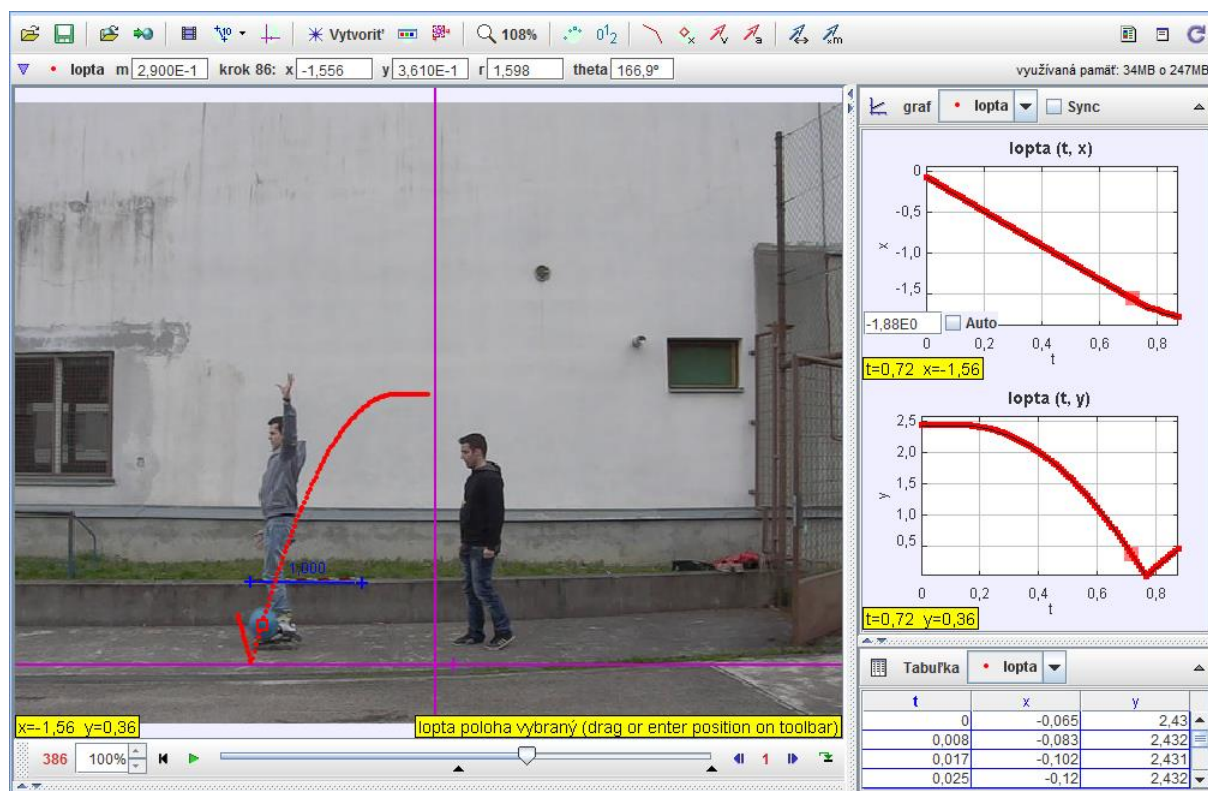
### Úloha 1-8:

*Analyzujte pohyb lopty voľne pustenej korčuliarom pohybujúcim sa na kolieskových korčuliach.*

*(dĺžka meradla je 1 m, hmotnosť lopty je 290 g, počet obrázkov za sekundu je 120 fps).*

*Zdroj: [pad lopty.avi](#).*

### Riešenie:



**Obr. 1.22** Analýza pohybu voľne pustenej lopty v súradnicovej sústave pevne spojenej so stenou

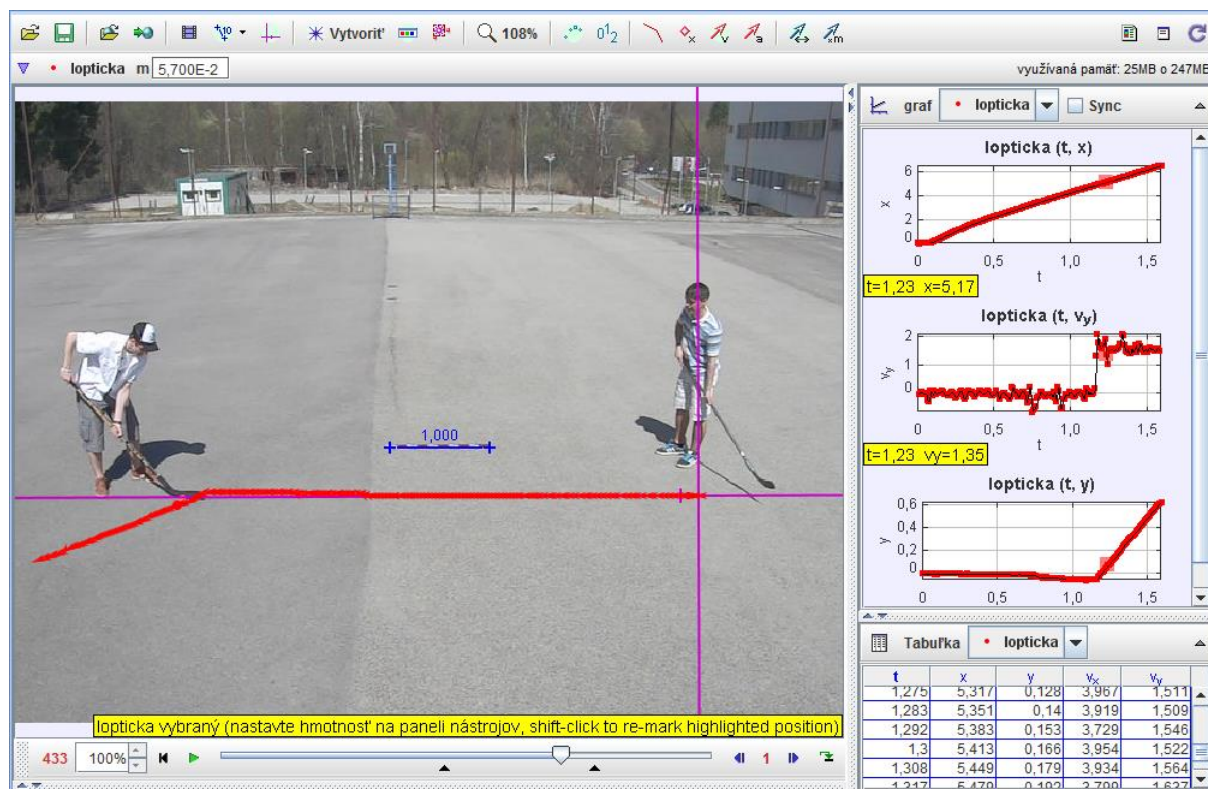
Z analýzy daného videa vyplýva, že voľne pustená lopta bude v  $y$ -ovom smere padať voľným pádom, v smere osi  $x$  si však zachová pôvodnú rýchlosť. Takže ak súradnicovú sústavu stotožníme s nepohybujúcou sa budovou, bude výsledný pohyb súčtom pohybov v smere osi  $x$  a  $y$  a pozorovateľovi v pokoji sa bude javiť ako pohyb po parabole. Korčuliar však vníma, že lopta padá vedľa neho, t.j. vykonáva len voľný pád.

**Úloha 1-9:**

Analyzujte pohyb loptičky pohybujúcej sa v smere osi  $x$  po jemnom údere do loptičky v smere osi  $y$ . Aký bude výsledný pohyb loptičky?

(dĺžka meradla je 1 m, hmotnosť lopty je 5,7 g, počet obrázkov za sekundu je 120 fps).

Zdroj: [hokej.avi](http://hokej.avi).

**Riešenie:**

**Obr. 1.23** Analýza pohybu lopty v súradnicovej sústave pevne spojenej s ihriskom po krátkodobých úderoch do lopty

Ako možno na predchádzajúcom obrázku Obr. 1.23 vidieť, trajektória lopty po údere do lopty (jemnom ťuknutí v kladnom smere osi  $y$  nadol) sa zmení. Nie však na toľko, ako si mnohí študenti myslia, že sa bude pohybovať len v smere osi  $y$ . Z grafu časovej závislosti  $x$ -ovej výchylky vyplýva, že poloha v danom smere sa bude zvyšovať rovnomerne, teda aj rýchlosť v smere osi  $x$  sa po údere nemení. V smere osi  $y$  bola na začiatku a v čase pohybu lopty pozdĺž  $x$ -ovej osi výchylka nulová, po pôsobení sily v smere osi  $y$  začne výchylka v smere osi  $y$  rovnomerne narastať, teda loptička sa bude naďalej pohybovať rovnomerným pohybom, avšak s vyššou celkovou rýchlosťou vzhľadom na počiatočnú, keďže výsledný pohyb si môžeme predstaviť ako pôvodný – v smere osi  $x$  a nový v smere osi  $y$ . (Trenie zanedbávame.)

**Neriešené úlohy:**

**Úloha 1-10:** Určte periódu a frekvenciu otáčavého pohybu vrtule lietadla pri lete.

(frekvencia snímok: 1000 fps)

zdroj: [vrtula.avi](#)

**Úloha 1-11:** Analyzujte pohyb rakety, určte jej rýchlosť, zrýchlenie tesne po odpálení.

(dĺžka meradla: 1 m, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [raketa.avi](#), [raketa\\_odpal.avi](#)

**Úloha 1-12:** Analyzujte daný pohyb, určte veľkosť rýchlosti lopty v čase. Akú má rýchlosť lopta v najvyššom bode, aké má zrýchlenie?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,290 kg, frekvencia snímok: 30 fps) zdroj: vrh\_nahor2.avi,

(hmotnosť lopty: 0,580 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [vrh\\_nahor.avi](#)

## 2. Dynamika hmotného bodu

Dynamiku hmotného bodu charakterizujú pohybové zákony, ktoré sformuloval Isaac Newton (1642-1727). Ešte ale aj dnes sa mnohokrát stretávame s nesprávnym, tzv. aristotelovským názorom, podľa ktorého pre udržanie telesa v pohybe stálou rýchlosťou je potrebné nejaké silové pôsobenie („sila“), lebo inak sa teleso zastaví. Ak by sme pripravili ľadovú plochu dokonale hladkú, puk by sa po náraze pohyboval po dokonale hladkej ploche bez toho, aby spomaloval a zastavil sa. Na udržanie stálej rýchlosti pohybu telesa po dokonale hladkej podložke teda nepotrebujeme silu (zatiaľ neuvažujeme o odporových ani trecích silách). Pre zjednodušenie nebudeme uvažovať o otáčavom pohybe a budeme pracovať výlučne s modelom hmotného bodu.

Vzájomné pôsobenie telies (interakcia) sa môže uskutočňovať napr. pri vzájomnom styku telies alebo prostredníctvom fyzikálnych polí (gravitačného, elektrického, magnetického). Toto vzájomné pôsobenie telies alebo telies a polí charakterizuje vektorová fyzikálna veličina *сила* –  $\vec{F}$ . Výsledkom vzájomného silového pôsobenia telies môže byť zmena ich pohybového stavu alebo deformácia týchto telies. Teleso, ktoré je v dostatočnej vzdialenosti od všetkých ostatných telies a nepôsobí na neho žiadne pole (nie je v žiadnom vzájomnom pôsobení s iným fyzikálnym objektom) nazývame *izolované teleso* (prípadne ak zanedbávame rozmery telesa hovoríme o *izolovanom hmotnom bode*). Ako izolované sa správajú všetky telesá, pri ktorých je silové pôsobenie ostatných telies vykompenzované.

Vzťažné sústavy, v ktorých izolované hmotné body zotrúvajú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiari pohybe sa nazývajú *inerciálne vzťažné sústavy*. Zmenu pohybového stavu telies môže v inerciálnych vzťažných sústavách spôsobiť len ich vzájomné pôsobenie s inými objektmi. V inerciálnych vzťažných sústavách izolované hmotné body, ktoré sú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiari pohybe, majú vlastnosť zotrúvať v tomto stave. *Zotrúvanosť* je jednou z vlastností hmoty a nezávisí na rýchlosti hmotného bodu.

Vzťažné sústavy, v ktorých zmena pohybového stavu telies môže nastať bez ich vzájomného pôsobenia s ostatnými objektmi sa nazývajú *neinerciálne vzťažné sústavy*. V mnohých prípadoch môžeme s dostatočnou presnosťou za inerciálnu považovať vzťažnú sústavu spojenú s povrchom Zeme. Vždy možno nájsť reálnu vzťažnú sústavu, ktorá bude s dostatočnou presnosťou spĺňať vlastnosti inerciálnej vzťažnej sústavy a umožní čo najjednoduchší opis a vysvetlenie fyzikálnych dejov.

Všetky inerciálne vzťažné sústavy sú si navzájom rovnocenné. Buď sa navzájom pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom alebo sú v pokoji, pričom nie je možné žiadnym pokusom v inerciálnej vzťažnej sústave určiť, či je daná sústava v pokoji alebo v rovnomernom priamočiari pohybe. V prípade niektorých fyzikálnych veličín namerajú pozorovatelia v rôznych inerciálnych vzťažných sústavách tie isté hodnoty. Takýmito *invariantnými veličinami* v nerelativistickej newtonovskej mechanike sú *сила, hmotnosť, zrýchlenie a čas*. Iné fyzikálne veličiny, ako napr. *rýchlosť*, majú pre pozorovateľa v rôznych inerciálnych vzťažných sústavách rôzne hodnoty (pre jedného pozorovateľa nachádzajúceho sa v inerciálnej vzťažnej sústave pohybujúcej sa rýchlosťou  $\vec{v}$  je určitý objekt v pokoji, pre iného pozorovateľa v inej sústave sa ten istý objekt pohybuje napr. rýchlosťou  $\vec{v}$ ). Vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách však platí *princíp invariantnosti: Fyzikálne zákony vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách majú rovnaký tvar*.

Z tohto princípu vyplýva, že voľba vzťažnej sústavy nemôže ovplyvniť platnosť fyzikálnych zákonov. Princíp invariantnosti hovorí, že dvaja rôzni pozorovatelia, ktorí budú študovať tú istú udalosť v dvoch rôznych inerciálnych sústavách musia dôjsť k záveru, že príroda funguje pre oboch rovnako. Aj keď hodnoty napr. práce a kinetickej energie namerané rôznymi

pozorovateľmi sa budú líšiť, vzťah medzi prácou a kinetickou energiou bude v oboch vzťahových sústavách rovnaký.

Pri video analýze dejov v programe Tracker si väčšinou zvolíme inerciálnu vzťahnú sústavu, ktorá bude v pokoji a jej počiatok spojíme s bodom, ktorý sa na videu nepohybuje. (Preto je aj pri príprave ďalších videí vhodné používať statív, aby daný obraz nebol roztrasený a aby sme sa pri analýze dopúšťali čo najmenších chýb merania.)

## 2.1 Newtonove pohybové zákony, hybnosť, impulz sily

Prejdime teda k základným zákonom dynamiky a sformulujeme *prvý Newtonov pohybový zákon (zákon zotrvačnosti)*, ktorý hovorí:

***Každý hmotný bod v inerciálnej vzťahnej sústave zotrvača v pokoji alebo v rovnomernom priamočiariom pohybe, pokiaľ nie je nútený vonkajšími silami tento svoj stav zmeniť.***

Treba poznamenať, že prvý Newtonov pohybový zákon platí nielen v prípadoch, kedy na teleso nepôsobia žiadne sily, ale aj vtedy, keď sily pôsobia, ale ich výslednica je nulová. Zákon charakterizuje *zotrvačnosť* ako základnú vlastnosť každého izolovaného hmotného bodu zotrvačať v pokoji alebo v rovnomernom priamočiariom pohybe v inerciálnej vzťahnej sústave. Čím väčšia je zotrvačnosť telesa, tým väčšia sila je potrebná na to, aby sme zmenili rýchlosť na určitú hodnotu. Zo zákona vyplýva, že na zmenu pohybového stavu hmotného bodu v inerciálnej vzťahnej sústave je potrebné jeho vzájomné pôsobenie s inými objektmi. Mierou toho pôsobenia je sila. Zotrvačné a gravitačné vlastnosti objektov charakterizuje ďalšia fyzikálna veličina, ktorú nazývame *hmotnosť*  $m$  (jednotka v sústave SI je kilogram  $[m] = \text{kg}$ ). Hmotnosť je charakteristikou samotného predmetu. Na tomto mieste je vhodné zdôrazniť rozdiel medzi tiažou, hmotnosťou a ich určovaním. Vážením určujeme veľkosť tiaže, porovnaním tiaže telesa a tiaže závažia pôsobiacej na misky váh a zo znalosti tiažového zrýchlenia  $g$  v mieste merania dokážeme určiť veľkosť hmotnosti telesa. Z rovnosti tiaže telesa a tiaže závažia vyplýva rovnosť hmotností oboch telies. (Pri analýzach v programe Tracker je potrebné poznať hmotností analyzovaných telies, ktoré sa priamo zadávajú do programu.)

Zo skúsenosti vieme, že ak na dve telesá rôznej hmotnosti budeme pôsobiť rovnakou silou (napr. kopnutie do rôznych lôpt), bude aj ich pohybový účinok iný – čím menšia hmotnosť, tým väčšia zmena rýchlosti telesa za jednotku času, čiže zrýchlenie. Alebo čím väčšia má byť zmena rýchlosti telesa danej hmotnosti za určitý čas, tým väčšia sila naň musí pôsobiť. Prípadne, pre to isté zrýchlenie rôznych telies musí byť pôsobiaca sila tým väčšia, čím väčšia je ich hmotnosť. Zhrnutím týchto poznatkov dospějeme k formulácii *druhého Newtonovho pohybového zákona (zákon sily)*:

***Aby mal hmotný bod s hmotnosťou  $m$  v inerciálnej vzťahnej sústave zrýchlenie  $a$ , musia naň okolité objekty pôsobiť výslednou silou  $F$ :***

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{alebo} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.1)$$

Je potrebné si uvedomiť, že sila nie je príčinou pohybu, ale je príčinou zmeny pohybového stavu telesa. Sila  $\vec{F}$  je vektorovou fyzikálnou veličinou, ktorej smer je zhodný so smerom zrýchlenia  $\vec{a}$ , ktoré udeľuje hmotnému objektu. Pod silou  $\vec{F}$  môžeme rozumieť aj vektorový súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso. Jednotkou sily je *newton* (N). *1 newton* je sila, ktorá telesu hmotnosti 1 kg udeľuje zrýchlenie  $1 \text{ m.s}^{-2}$ . Odtiaľ  $[F] = 1\text{N} = 1 \text{ kg.m.s}^{-2}$ .



Za povšimnutie stojí, že druhý Newtonov pohybový zákon nie je v rozpore s prvým. Ak na hmotný bod nepôsobia žiadne sily, podľa rovnice (2.1) sa bude hmotný bod pohybovať bez zrýchlenia, t.j. rovnomerným pohybom alebo bude v pokoji.

Zmena pohybového stavu hmotného bodu nezávisí len od pôsobiacej sily, ale aj od času, za ktorý sila pôsobila. Mierou časového účinku sily je fyzikálna veličina, ktorú nazývame **impulz sily**. Impulz sily  $\vec{I}$  je definovaný ako súčin sily  $\vec{F}$  a času  $t$ , počas ktorého sila pôsobila. Pre konštantnú silu platí

$$\vec{I} = \vec{F}t. \quad (2.2)$$

Ak sila nie je konštantná, môžeme vo všeobecnosti pre impulz sily písať

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt. \quad (2.3)$$

Impulz sily je vektorovou fyzikálnou veličinou a pre konštantnú silu má smer rovnaký ako sila. Ak bude sila  $\vec{F}$  za čas  $t$  pôsobiť na hmotný bod s konštantnou hmotnosťou  $m$ , pre impulz sily platí

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \int_0^t m \vec{a} dt = m \int_0^t \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \int_{v_0}^v d\vec{v} = m(\vec{v} - \vec{v}_0), \quad (2.4)$$

kde  $\vec{v}$  a  $\vec{v}_0$  sú rýchlosti hmotného bodu v čase  $t$  a  $t = 0$ s. Súčin hmotnosti  $m$  a rýchlosti  $\vec{v}$  hmotného bodu nazývame **hybnosť** a označujeme  $\vec{p}$

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.5)$$

Hybnosť je vektorová fyzikálna veličina, ktorej smer je totožný so smerom rýchlosti. Jednotkou hybnosti je  $[p] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Zadefinovaním hybnosti môžeme pre impulz sily písať

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \vec{p} - \vec{p}_0. \quad (2.6)$$

**Impulz sily, ktorá pôsobí na hmotný bod, je rovný zmene jeho hybnosti.**

Zavedenie hybnosti nám umožňuje druhý Newtonov pohybový zákon zapísať aj v inej forme

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.7)$$

Z vyjadrenia vyplýva, že sila pôsobiacia na hmotný bod je rovná derivácii jeho hybnosti podľa času. Na základe predchádzajúcej formulácie môžeme **druhý Newtonov zákon** formulovať nasledovne:

**Pomer zmeny hybnosti hmotného bodu a doby, za ktorú táto zmena nastala, je priamo úmerný výslednej pôsobiacej sile.**

Z tejto formulácie vyplýva, že ak nastala zmena hybnosti v čase, musela na teleso pôsobiť sila, prípadne obrátene, ak na teleso bude pôsobiť sila, nastane zmena jeho hybnosti.

Silové pôsobenie dvoch telies je vždy vzájomné. Tento poznatok je obsahom **tretieho Newtonovho pohybového zákona (zákon akcie-reakcie)**, ktorý hovorí:

**Dva hmotné body na seba navzájom pôsobia rovnako veľkými silami opačného smeru.**

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} . \quad (2.8)$$

Jednu z týchto síl nazývame **akcia** a druhú **reakcia**. Akcia a reakcia súčasne vznikajú a súčasne zanikajú. Každá z týchto síl pôsobí na iné teleso, preto sa vo svojich účinkoch navzájom nerušia. (Ak dve rovnako veľké sily opačného smeru pôsobia súčasne na ten istý hmotný bod, nejedná sa o akciu a reakciu.)

## 2.2 Práca

Ak chceme premiestniť nejaký predmet, musíme vynaložiť určitú námahu. Zvyčajne to robíme tak, že na predmet pôsobíme silou a vykonáme pri tom istú prácu. Vo všeobecnosti pod prácou rozumieme mieru účinku sily, ktorým hmotný bod mení svoju polohu. Ak na hmotný bod bude pôsobiť nejaká konštantná sila  $\vec{F}$  tak, že jej účinkom sa posunie po úsečke (dráhe)  $\vec{s}$  a ak navyše smer sily a dráhy je ten istý, potom práca  $W$  je rovná priamo súčinu veľkosti sily  $F$  a dráhy  $s$

$$W = Fs . \quad (2.9)$$

Ak smer sily a dráhy nebudú rovnaké, ale budú zvierat' uhol  $\alpha$ , práca bude rovná súčinu veľkosti priemetu sily do smeru dráhy a dráhy  $s$

$$W = Fs \cos \alpha . \quad (2.10)$$

Využitím znalostí z vektorového počtu o skalárnom súčine dvoch vektorov môžeme predchádzajúci vzťah prepísať do vektorového tvaru

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} , \quad (2.11)$$

pričom  $\vec{s}$  predstavuje orientovanú úsečku (vektor dráhy).

Ak bude na hmotný bod pôsobiť premenlivá sila, dráhu rozdelíme na také malé intervaly  $\Delta\vec{s}$ , aby sme v každom z nich mohli považovať silu  $\vec{F}$  za konštantnú, resp. dráhu za priamočiaru. Elementárnu prácu v  $i$ -tom intervale vypočítame zo vzťahu

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \quad (2.12)$$

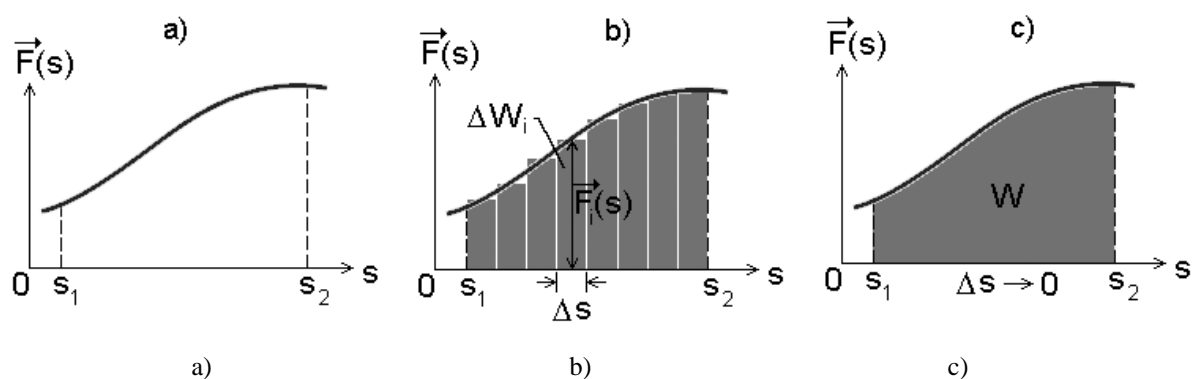
a celkovú prácu dostaneme súčtom jednotlivých elementárnych prác pozdĺž celej dráhy

$$W = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i . \quad (2.13)$$

Ak jednotlivé intervaly budú nekonečne malé (infinitesimalne) dš, sumácia prejde na integrál

$$W = \int dW = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (2.14)$$

pričom integrovať treba pozdĺž celej dráhy (Obr. 2.1).



**Obr. 2.1** a) Graf závislosti sily pôsobiacej na časticu, ktorá sa pohybuje po priamej dráhe  $s$ , pričom sila  $F$  na ňu pôsobí rovnobežne s osou  $s$  v intervale  $s_1$  až  $s_2$ . b) Dráha v intervale  $s_1$  až  $s_2$  bola rozdelená na jednotlivé rovnaké elementy  $\Delta s$ , v ktorých predpokladáme pôsobenie konštantnej sily  $F_i(s)$ . Sila v danom intervale vykoná prácu  $\Delta W_i$ . c) Limitný prípad, kedy  $\Delta s \rightarrow 0$  a práca vykonaná silou  $F(s)$  v intervale  $s_1$  až  $s_2$  je reprezentovaná obsahom vyfarbenej plochy pod krivkou.

### 2.3 Výkon

Tú istú prácu môžeme vykonať za rôzny čas. Mierou toho, ako „rýchle“ koná sila prácu je fyzikálna veličina, ktorá sa nazýva **výkon**  $P$ . Ak vykoná sila  $\vec{F}$  prácu  $\Delta W$  za dobu  $\Delta t$ , je jej **priemerný výkon** v danom časovom intervale definovaný pomerom

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (2.15)$$

**Okamžitý výkon**  $P$  je limitným prípadom priemerného výkonu pre  $\Delta t \rightarrow 0$

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (2.16)$$

Jednotkou výkonu v SI je joule za sekundu, ale používanéjšia je jednotka *watt* (W) [ $P$ ] =  $J \cdot s^{-1}$  = W. Stretnúť sa môžeme aj s jednotkou nazývanou *konská sila* (*konská sila* = 746 W). Pri stálom výkone  $P$  môžeme prácu vyjadriť ako súčin výkon a času

$$W = Pt \quad (2.17)$$

a z tohto vzťahu nám pre prácu vyplýva bežne používaná jednotka – kilowatthodina ( $1 \text{ kilowatthodina} = 1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 1000 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}$ ).

Ak vo vzťahu (2.16) vyjadríme prácu súčinom  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , môžeme pre výkon písať

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (2.18)$$

Výkon teda môžeme vyjadriť aj ako skalárny súčin sily a rýchlosti jej pôsobiska. Takže ak napr. ťahač bude pôsobiť na plne naložený príves silou  $\vec{F}$  a rýchlosť prívesu je v danom okamihu  $\vec{v}$ , súčin sily a rýchlosti nám povie, aký je „výkon ťahača“ v danom okamihu.

## 2.4 Energia

Pod pojmom **energia** budeme rozumieť skalárnu fyzikálnu veličinu, ktorej hodnota je určená stavom fyzikálnej sústavy (objektu). Kinetická energia  $E_k$  súvisí s pohybovým stavom častice alebo telesa. Zo skúseností vieme, že ak sa teleso pohybuje rýchlejšie, jeho kinetická energia je väčšia, ak je teleso v pokoji, jeho kinetická energia je nulová. To isté platí aj pre kinetickú energiu telesa nezanedbateľných rozmerov, ak sa všetky jeho časti pohybujú rovnakou rýchlosťou  $\vec{v}$ , t.j. vykonávajú posuvný (translačný) pohyb, pričom uvažujeme, že teleso nerotuje ani nie je deformované. Jednotkou kinetickej energie (a všeobecne energie) je joule ( $[E] = J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ). V oblasti časticovej fyziky sa zvykne používať aj jednotka elektrónvolt ( $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ).

Prenos energie medzi objektom a jeho okolím môže byť sprostredkovaný silovým pôsobením alebo tepelnou výmenou. Deje súvisiace so silovým pôsobením nazývame súhrne konanie práce. Ak budeme na teleso pôsobiť nejakou silou, z 2. Newtonovho zákona vyplýva, že jeho rýchlosť bude rásť a tým rastie aj jeho kinetická energia. Naopak, ak bude teleso vplyvom výslednej sily spomaľovať, bude aj jeho kinetická energia klesať. Ak sa kinetická energia častice vplyvom silového pôsobenia jeho okolia všeobecne mení, hovoríme, že sily pôsobiace na časticu konajú prácu. Ak sila zväčšila (nezmenila, zmenšila) kinetickú energiu častice, hovoríme, že vykonala kladnú (nulovú, zápornú) prácu, prípadne hovoríme, že sila prácu koná (nekoná, sprostredkováva). V najširšom slova zmysle práca predstavuje tú časť energie, ktorú teleso získava prostredníctvom silového pôsobenia jeho okolia.

Podľa charakteru pôsobiacich síl hovoríme o energii mechanickej, elektrickej, chemickej, jadrovej a pod. Často sa používa tvrdenie, že energia je schopnosť konať prácu. Mierou procesu premeny energie aj mierou prenosu energie z jedného telesa na druhé je práca (fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje dej). Aj keď hodnoty veličín energie a práce vyjadrujeme v rovnakých jednotkách, nesmieme tieto veličiny stotožňovať (jedna vyjadruje stav sústavy, druhá dej).

Keď na hmotný bod s hmotnosťou  $m$  pôsobí sila  $\vec{F}$ , udeľuje mu zrýchlenie  $\vec{a}$ , pričom koná prácu

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m \int_{r_1}^{r_2} d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (2.19)$$

Aby sa hmotný bod s hmotnosťou  $m$ , ktorý sa pohybuje rýchlosťou  $\vec{v}$  zastavil, musí na neho pôsobiť sila  $\vec{F}'$  opačného smeru, ako je smer rýchlosti  $\vec{v}$ . Sila  $\vec{F}'$  pri zastavovaní hmotného bodu koná prácu

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}'(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \dots = m \int_v^0 \vec{v} \cdot d\vec{v} = -m \int_v^0 v dv = -\left(0 - \frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.20)$$

Hmotný bod s rýchlosťou  $v$  má teda schopnosť vykonať prácu  $\frac{1}{2}mv^2$ . Hovoríme, že má pohybovú alebo *kinetickú* energiu. **Kinetická energia** hmotného bodu s hmotnosťou  $m$  pohybujúceho sa rýchlosťou  $\vec{v}$  je rovná

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.21)$$

Využitím vzťahu (2.19) môžeme vysloviť tvrdenie, že zmena kinetickej energie častice  $\Delta E_k$  je rovná práci  $W$  vykonanej silou  $\vec{F}$

$$\Delta E_k = E_{k1} - E_{k0} = W, \quad (2.22)$$

pričom symbolom  $E_{k0}$  sme označili počiatočnú kinetickú energiu častice  $\frac{1}{2}mv_0^2$  a  $E_{k1}$  predstavuje výslednú kinetickú energiu častice  $\frac{1}{2}mv_1^2$ . Tento vzťah však neplatí všeobecne, stačí si predstaviť rotujúce alebo deformujúce sa teleso, kde sa jednotlivé časti telesa pohybujú rôznymi rýchlosťami.

Uvažujme teraz loptu hmotnosti  $m$ , ktorú môžeme považovať za bodový objekt. Ak ju vyhodíme zvisle nahor počiatočnou rýchlosťou  $\vec{v}_0$  vzhľadom k Zemi (pričom pre jednoduchosť zanedbáme otáčanie Zeme okolo Slnka a jej rotáciu okolo vlastnej osi (vtedy tiažová sila Zeme  $\vec{F}_G$  je rovná gravitačnej sile  $\vec{F}_g$ ) a uvažujeme len malé výšky nad povrchom Zeme), bude jej počiatočná kinetická energia  $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ . V priebehu výstupu sa jej pohyb pôsobením príťažlivej *tiažovej sily* Zeme  $\vec{F}_G = \vec{F}_g$ ,  $\vec{F}_G = m\vec{g}$  (kde  $\vec{g}$  je vektor tiažového zrýchlenia smerujúci do stredu Zeme) spomaľuje a kinetická energia klesá. Ak bude tiažová sila jedinou silou, ktorá na loptu pôsobí (ak zanedbáme odporovú silu vzduchu), potom k zmene kinetickej energie prispieva iba práca tiažovej sily

$$W_g = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\vec{g} \cdot d\vec{r} = m \int_{h_1}^{h_2} \vec{g} \cdot d\vec{h} = mg(h_1 - h_2). \quad (2.23)$$

Ak zoberieme záporne vzatú prácu vykonanú tiažovou silou, môžeme pri pohybe telesa v blízkosti povrchu Zeme zadefinovať zmenu **tiažovej potenciálnej energie sústavy** teleso – Zem

$$\Delta E_p = -W, \quad (2.24)$$

ktorá sa tiež nazýva **potenciálna energia telesa** v tiažovom poli Zeme. V prípade sústavy častica – Zem budeme pod  $E_p$  rozumieť hodnotu tiažovej potenciálnej energie častice v polohe o súradnici  $h$ . Vo vzťahu

$$\Delta E_p = E_{ph} - E_{p0} = mg(h-0), \quad (2.25)$$

pod hodnotou  $E_{p0}$  budeme rozumieť tiažovú potenciálnu energiu v tzv. referenčnej konfigurácii, pri ktorej sa častica nachádza v referenčnom bode o súradnici  $h_0$ . Zvyčajne kladieme  $E_{p0} = 0$  J pre  $h_0 = 0$  m. Predchádzajúci vzťah môžeme potom prepísať do tvaru

$$E_p(h) = mgh, \quad (2.26)$$

z ktorého vyplýva, že tiažová potenciálna energia sústavy častica – Zem závisí iba od zvislej polohy  $h$  častice vzhľadom k referenčnej polohe o súradnici  $h_0 = 0$  m (t.j. na výške častice nad referenčným bodom). Ak vzťažnú sústavu a nulovú hladinu spojíme s povrchom Zeme, hovoríme stručne, že potenciálnu energiu má teleso. Ako sme však už spomenuli, v skutočnosti potenciálnu energiu tiažovú nemá samo teleso, ale presnejšie sústava Zem – teleso. Predchádzajúci vzťah (2.26) je možné použiť iba v nie veľkých vzdialenostiach od povrchu Zeme, kde hodnotu  $\vec{g}$  považujeme za približne konštantnú.

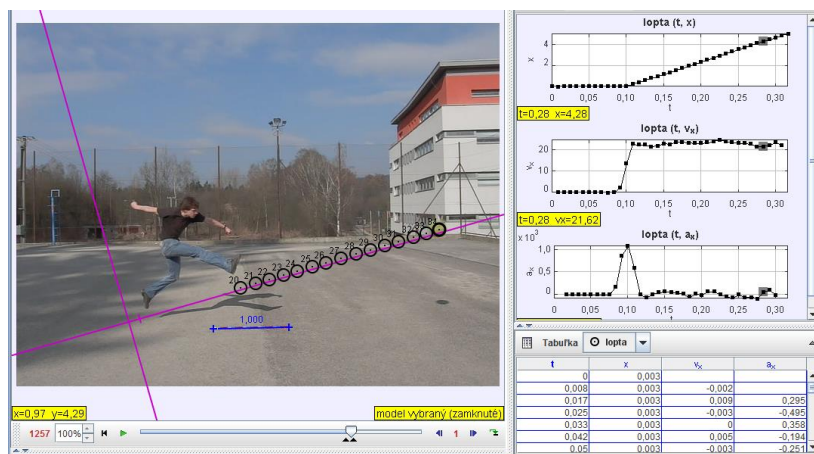
### Úloha 2-1:

**Analyzujte daný pohyb, určte hybnosť lopty a jej zmenu v čase. Akou veľkou silou pôsobí noha na loptu v čase kopu?**

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,421 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [odkop.avi](#)

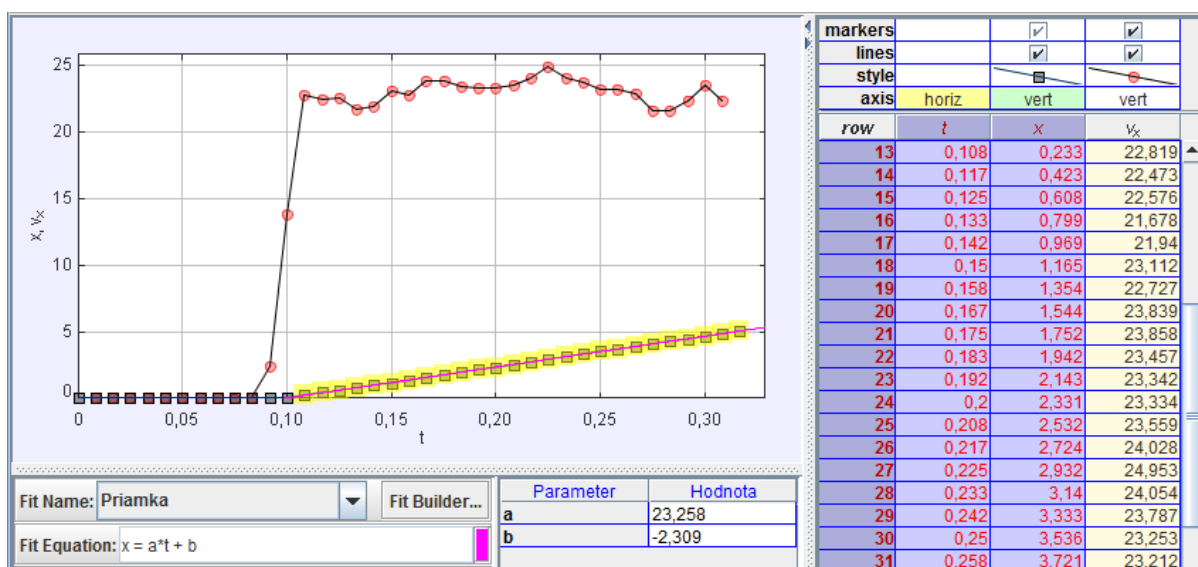
### Riešenie:



Obr. 2.2 Analýza pohybu lopty

Zvolením vhodnej súradnicovej sústavy (ponechávame na samotnom študentovi) a využitím funkcie „autotracker“ zaznamená program polohu lopty v jednotlivých časových intervaloch ( $\Delta t = 0,00833$  s pre 120 fps). Hodnoty veličín ( $x$ ,  $y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $t$ ) sú

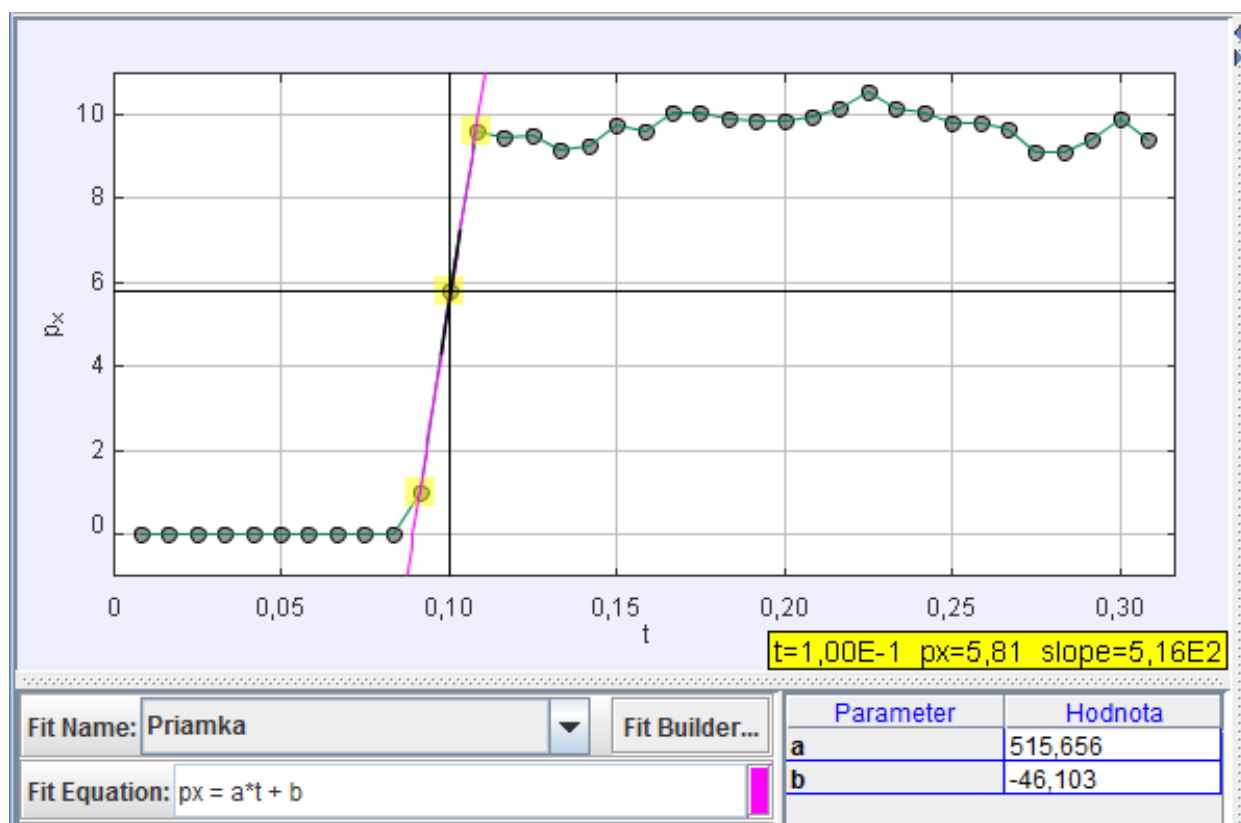
zaznamenávané do tabuľky a znázornené v grafických závislostiach  $x = x(t)$ ,  $v_x = v_x(t)$  a  $a_x = a_x(t)$  (Obr. 2.2).



Obr. 2.3 Spracovanie zaznamenaných údajov

Ako môžeme z Obr. 2.2 vidieť, jednou z možností ako si zvoliť súradnicovú sústavu, je umiestniť os tak, aby sa pohyb uskutočňoval v jednom smere. Ďalšou matematickou analýzou určíme, že rýchlosť pohybu lopty (vyjadrenú na grafe guľôčkami (Obr. 2.3) môžeme považovať od istého okamihu ( $t = 0,108$  s) za približne konštantnú, a teda pohyb lopty v analyzovanom čase za rovnomerný priamočiary, čo môžeme matematicky zapísať rovnicou, ktorú sme určili fitovaním závislosti polohy na čase pomocou priamky:  $x = at + b = 23,258t - 2,309$ . Parameter  $a$  v tomto prípade má charakter rýchlosti pohybu lopty, takže rýchlosť pohybu lopty bola stanovená na  $v_p = 23,26$  m/s.

Ďalšou úlohou je určiť, akou silou pôsobila noha na loptu (alebo lopta na nohu) v okamihu kopnutia. Pri tejto úlohe je niekoľko možností ako určiť daný fyzikálny parameter. Jeden zo spôsobov ponúka Obr. 2.4: veľkosť pôsobiacej sily pri odkope lopty určíme z II. Newtonovho pohybového zákona (NPZ) v tvare  $F = \Delta p / \Delta t$ , pričom  $\Delta t$  predstavuje časový okamih, za ktorý pôsobila na loptu sila. Následne z grafu časovej závislosti hybnosti – z analytického vyjadrenia priamky, ktorou sme fitovali časovú závislosť hybnosti v okamihu pôsobenia sily na loptu, sme určili:  $p_x = 515,656t - 46,103$ . Veľkosť pôsobiacej sily bola teda určená ako  $F = 515,66$  N. Iný zo spôsobov, ako možno určiť veľkosť pôsobiacej sily v danom okamihu, je využitie II. NPZ v tvare  $F = dp/dt = d/dt(p)$ , čo predstavuje deriváciu hybnosti podľa času. Využitím funkcie *slope* v programe určíme smernicu dotyčnice ku krivke, čo predstavuje veľkosť pôsobiacej sily v danom okamihu. Hodnota sily určenej daným spôsobom mala veľkosť  $F = 516$  N (Obr. 2.4).



Obr. 2.4 Analýza časovej závislosti hybnosti a určenie pôsobiacej sily

Ďalšou z možností, ktorú je možno využiť pre určenie veľkosti pôsobiacej sily, je použitie II. NPZ v tvare  $F = ma$ , čiže určením veľkosti zrýchlenia v čase pôsobiacej sily z časovej závislosti zrýchlenia (maximálna hodnota bola  $a = 1090 \text{ m/s}^2$ ) a vynásobením danej hodnoty odmeranou hmotnosťou lopty. Je taktiež možné pre určenie zrýchlenia využiť metódu fitovania časovej závislosti rýchlosti a veľkosť zrýchlenia určiť ako  $a = \Delta v / \Delta t$  (prípadne využiť funkciu *slope* ( $a = dv/dt$ )).

#### Úloha 2-2:

*Analyzujte otváranie šampanského. Aká veľká sila pôsobí na korkovú zátku pri otvorení šampanského? Určte veľkosť impulzu sily.*

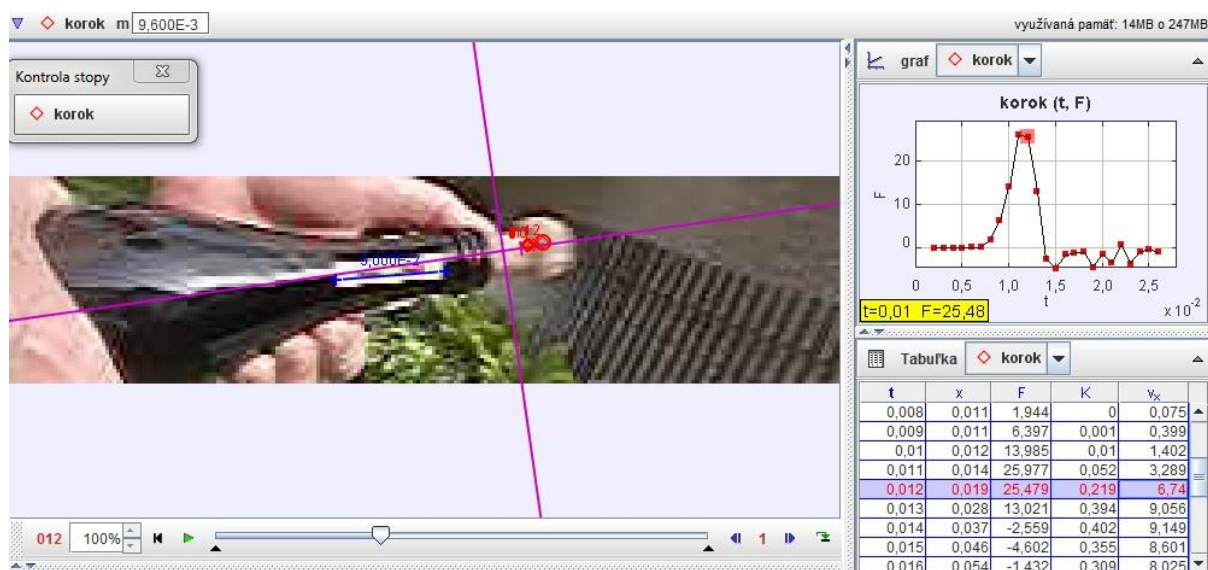
(dĺžka dielika: 1 cm, hmotnosť zátky je 9,6 g, frekvencia snímok: 1000 fps)

zdroj: [sampanske.avi](#)

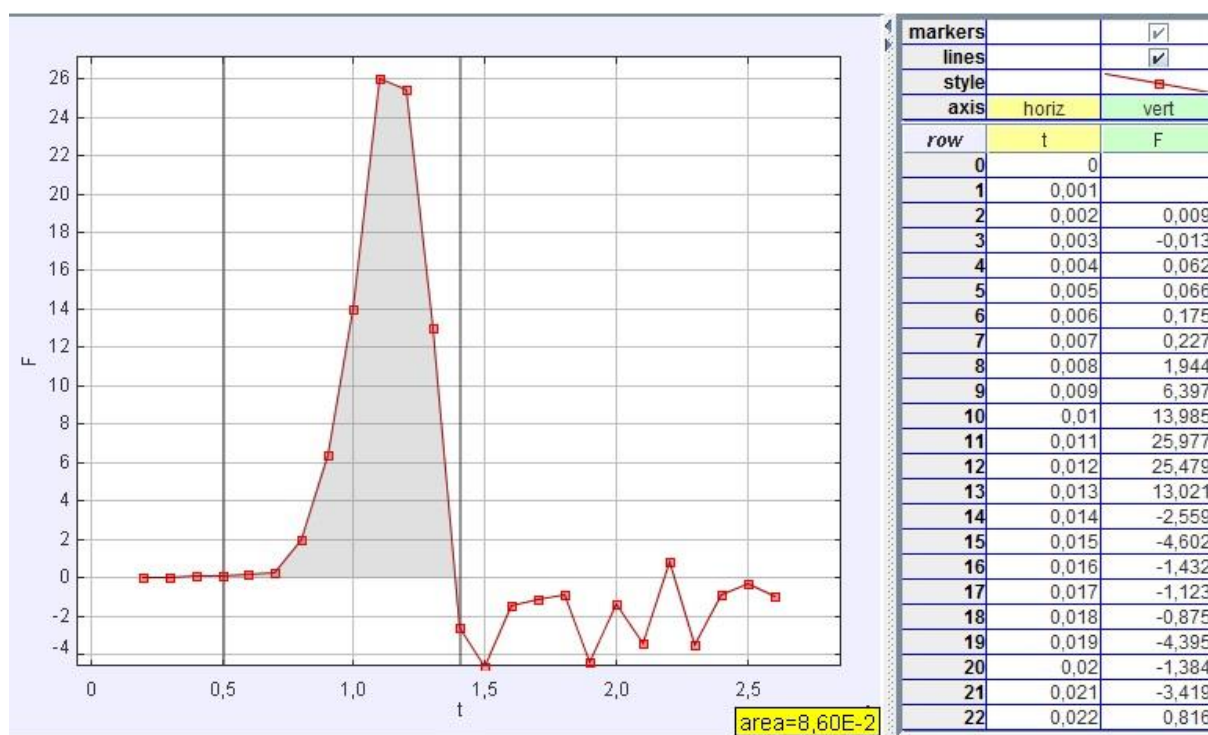
#### Riešenie:

Nasledujúci Obr. 2.5 ukazuje časovú závislosť sily. Využitím vzťahu (2.3) dokážeme vypočítať impulz sily  $I$  ako obsah plochy pod krivkou časovej závislosti sily (funkcia area) (Obr. 2.6), ( $I = 0,086 \text{ Ns}$ ). Je potrebné si však uvedomiť, že kým je zátku v hrdle fľaše, pôsobí statické a neskôr pri pohybe zátky dynamické trenie, ktoré znižujú výslednú silu. Na to, aby sa zátku pohla, je potrebná väčšia sila na prekonanie statického trenia, ako sila určená z analýzy.





Obr. 2.5 Analýza otvárania šampanského



Obr. 2.6 Časová analýza sily a výpočet impulzu sily

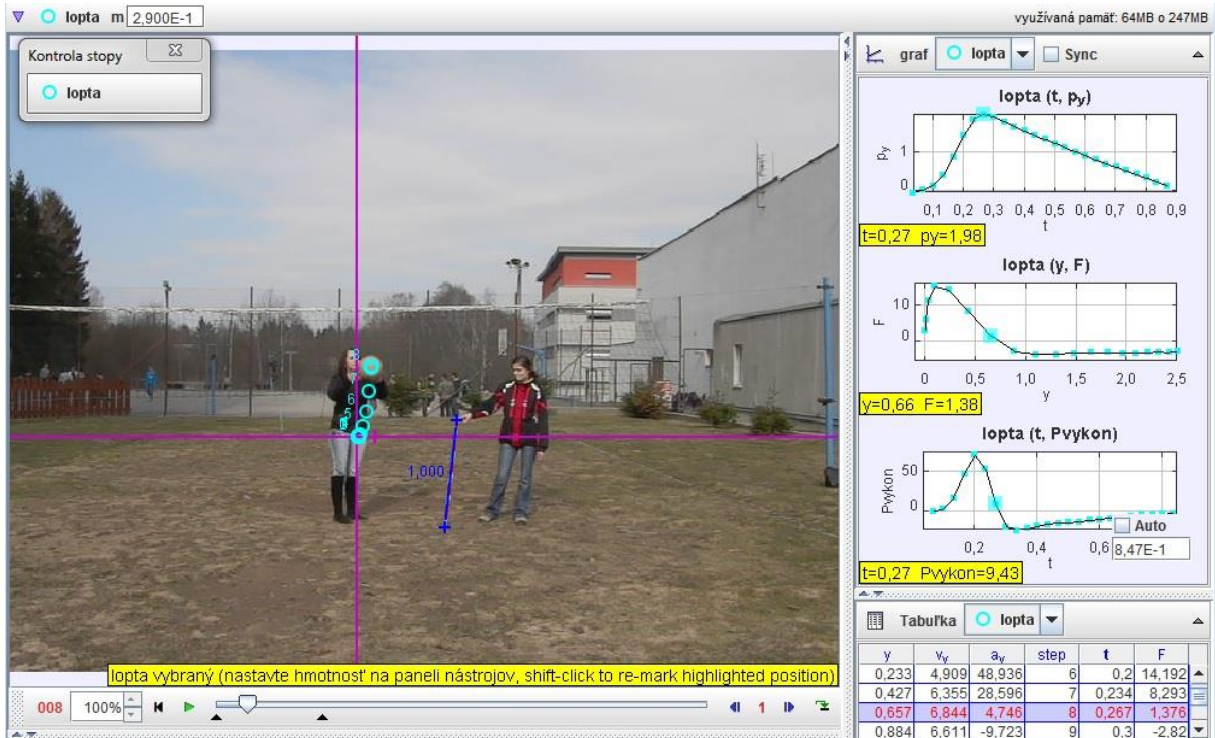
### Úloha 2-3:

Analyzujte pohyb vyhodenej lopty. Aká sila pôsobí na loptu pri vyhodení? Odhadnite veľkosť vykonanej práce pri vyhodení lopty?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,290 kg, frekvencia snímok: 30 fps),

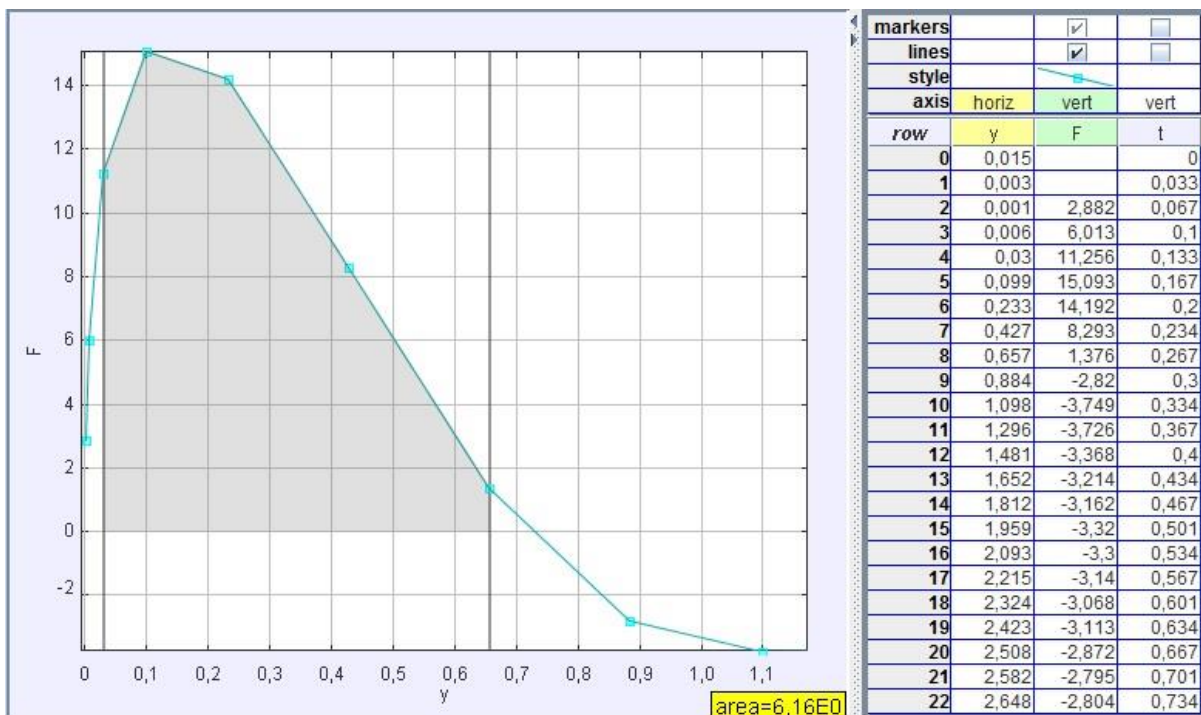
zdroj: [vrh nahor2.avi](#)

## Riešenie:



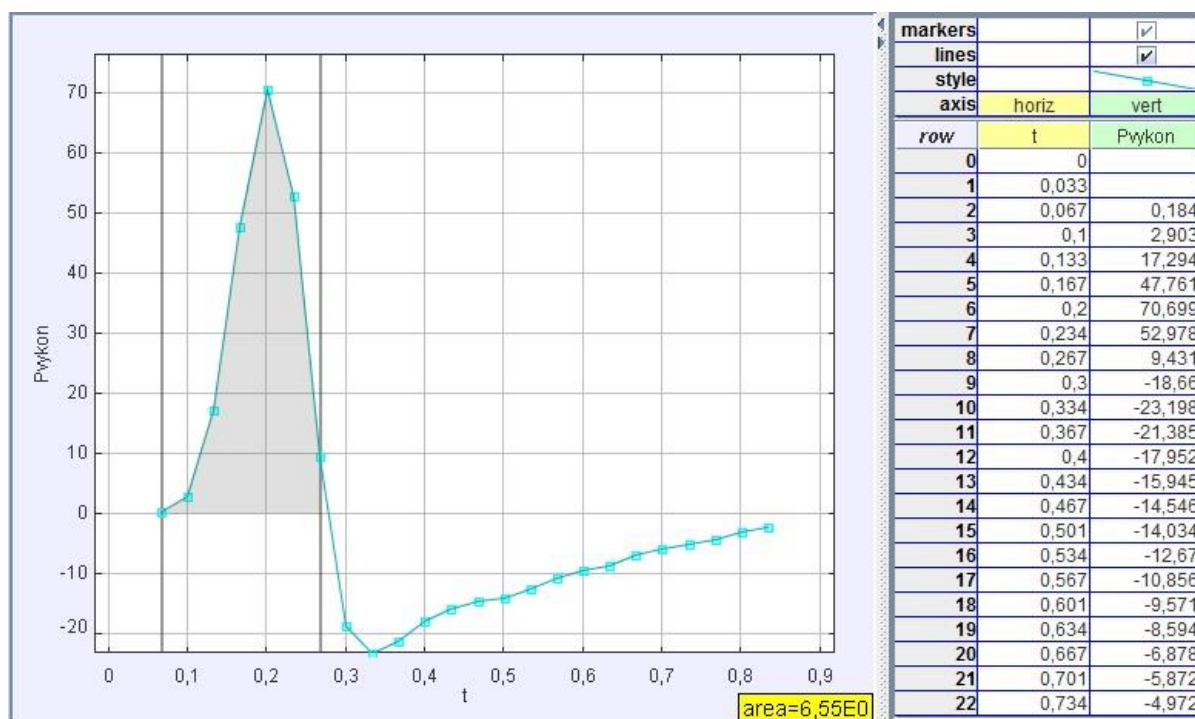
Obr. 2.7 Analýza pohybu vyhodenej lopty

Ako si môžeme z Obr. 2.7 všimnúť, veľkosť výslednej sily  $F$ , ktorá pôsobí na loptu pri vyhodení nie je konštantná, ale sa mení, dokonca pri opustení rúk sa jej hodnota zmení na zápornú (na loptu už nepôsobia ruky, ale len gravitačné pole Zeme). Využitím vzťahu (2.14) a analýzou závislosti pôsobiacej sily  $F$  od polohy  $y$  odhadneme vykonanú prácu  $W \approx 6,2$  J. (dopúšťame sa však istej chyby, keďže v danom konkrétnom prípade program neumožňuje vyrátať obsah pod krivkou počas prvých dvoch snímkov.)



Obr. 2.8 Analýza pôsobiacej sily pri vyhodení lopty

Ako si môžeme všimnúť z Obr. 2.8, program Tracker umožňuje vykonávať nie len časové závislosti, ale aj závislosti podľa iných fyzikálnych veličín (preddefinovaných je ich viac ako 20, ďalšie veličiny je však možné zadefinovať v programe). Možnosti daného programu nám umožnili zadefinovať výkon  $P$  podľa vzťahu (2.18) a využitím vzťahu (2.16) určiť veľkosť vykonanej práce pomocou výkonu, ktorej vypočítaná hodnota  $W = 6,55 \text{ J}$  (Obr. 2.9) je v celkom dobrej zhode s prácou odhadnutou v predchádzajúcom prípade.



Obr. 2.9 Analýza výkonu a výpočet vykonanej práce

#### Úloha 2-4:

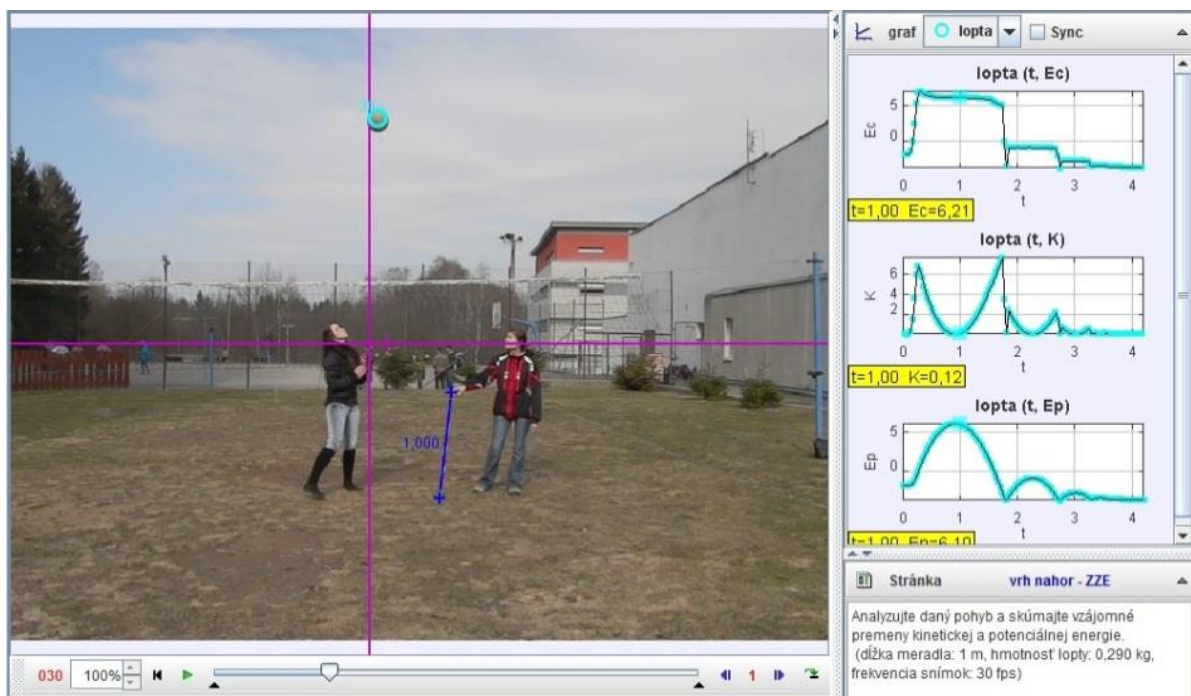
*Analyzujte pohyb vyhodenej lopty, jej kinetickú, potenciálnu a celkovú energiu v jednotlivých okamihoch.*

*(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,290 kg, frekvencia snímok: 30 fps)*

*zdroj: zdroj: vrh\_nahor2.avi*

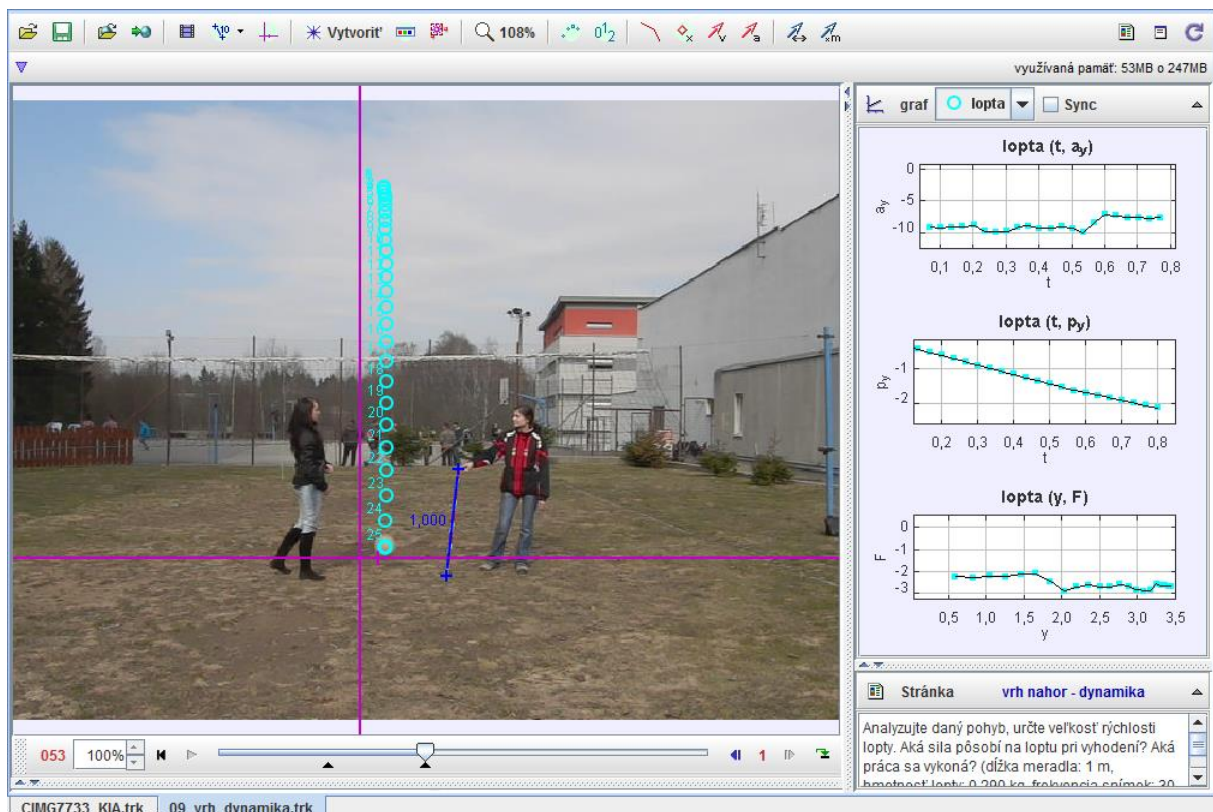
#### Riešenie:

Kinetickú energiu má program Tracker preddefinovanú, potenciálnu a celkovú energiu je potrebné v programe zadefinovať. Ako si možno všimnúť z Obr. 2.10, potom, čo lopta opustí ruky, jej kinetická energia sa znižuje a naopak, potenciálna energia narastá, až kým lopta nedosiahne maximálnu výšku. Potom pri páde lopty nadol platí predchádzajúce tvrdenie v obrátenom poradí – kinetická energia lopty narastá a potenciálna sa znižuje až pokiaľ lopta nedosiahne zem. Po odraze sa časť mechanickej energie stratí, avšak, ako si možno z analýzy všimnúť, medzi odrazmi je súčet kinetickej a potenciálnej energie (mechanická energia) stály, pričom prebieha premena kinetickej energie na potenciálnu a opačne. Po niekoľkých odrazoch lopty jej kinetická (a zároveň aj potenciálna) energia sa zníži na minimum a pôvodná energia lopty sa premení na iné formy energie (vnútorná energia), ktoré už ale nie sú analyzované v danom programe.



Obr. 2.10 Analýza kinetickej, potenciálnej a celkovej energie

Využitím programu Tracker je taktiež možné určiť prácu tiažovej sily pri páde lopty z najvyššej polohy (Obr. 2.11). Pomocou vzťahu (2.23) a určením obsahu plochy pod závislosťou pôsobiacej sily  $F$  od polohy  $y$  bola určená práca  $W = 7,1 J$ .



Obr. 2.11 Analýza práce tiažovej sily

## Úloha 2-5:

Určte rýchlosť strely pred nárazom do plechovice.

(dĺžka plechovice je 16,7 cm, hmotnosť strely: 0,1 g, hmotnosť plechovice: 15,8 g, frekvencia snímok: 120 fps)

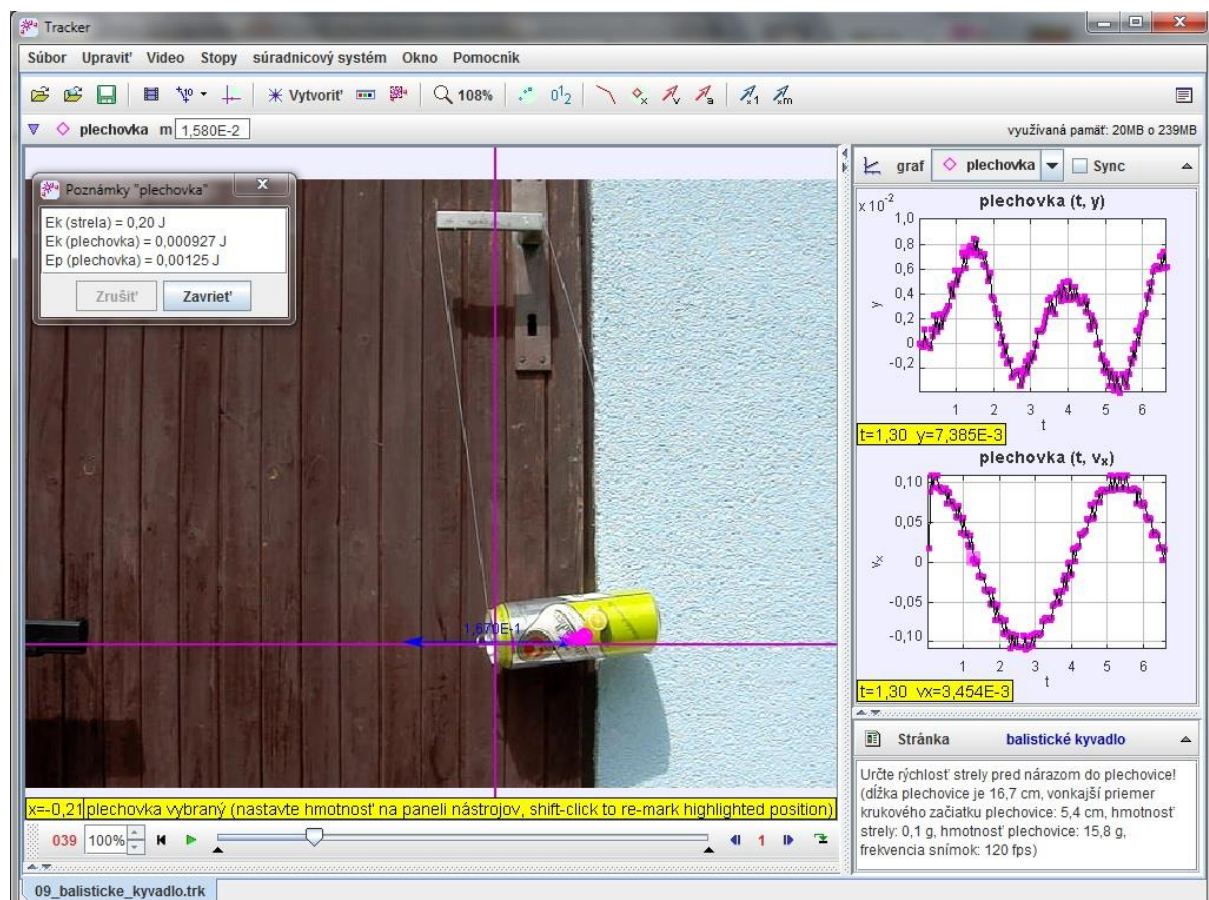
zdroj: [balisticke\\_kyvadlo.avi](#)

Overte vypočítanú rýchlosť strely z predchádzajúceho príkladu výpočtom na videu s 1000 fps. (vonkajší priemer kruhového začiatku plechovice: 53,92 mm, frekvencia snímok: 1000 fps)

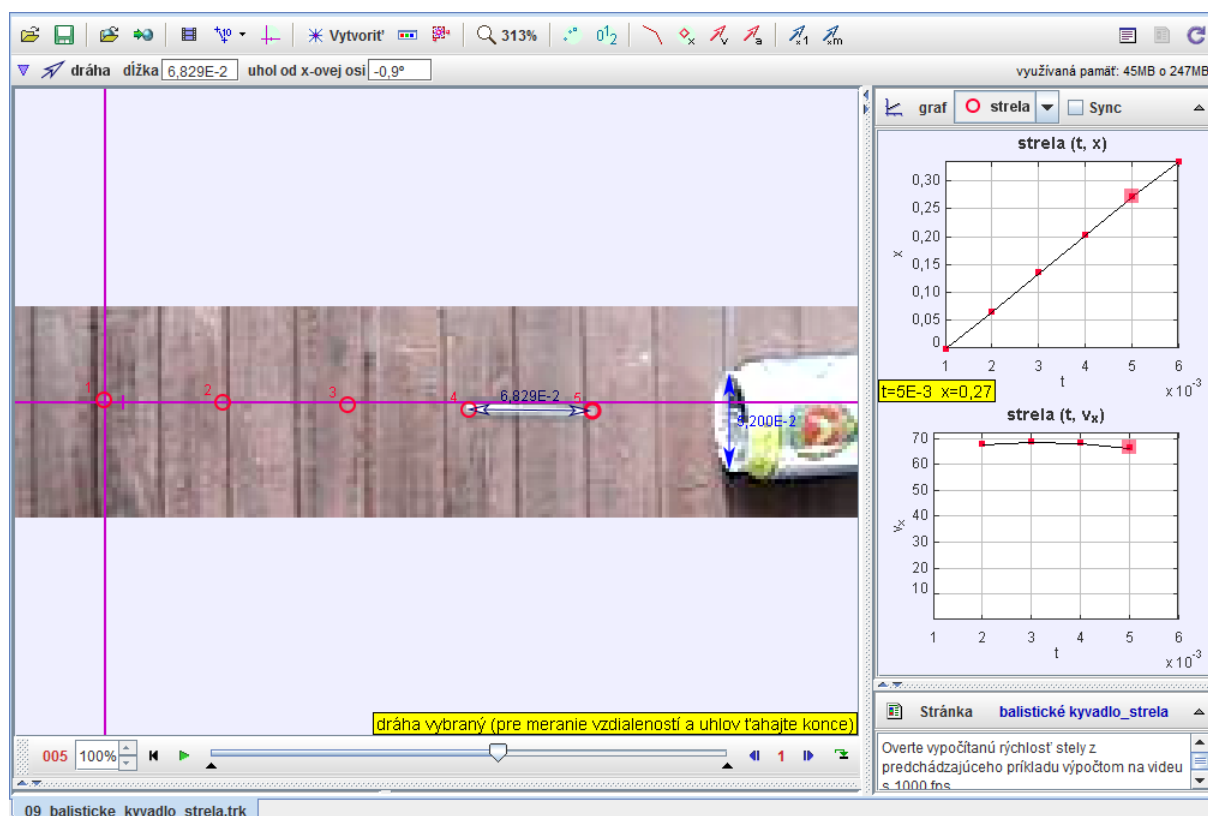
zdroj: [rychlost\\_strely.avi](#)

Riešenie:

Vzhľadom k tomu, že daný dej je natoľko rýchly, že nie je možné zaznamenať polohu vystrelenej strely (video má 120 fps a vystrelenú guľôčku je možné zaznamenať len počas jedného záberu), je potrebné určovať rýchlosť strely z analýzy pohybu plechovice po náraze (Obr. 2.12). Zvolením vhodných časových závislostí je možné určiť maximálnu výšku, do ktorej sa plechovica dostane a rýchlosť plechovice tesne po zrážke. Využitím vzťahov pre zákon zachovania mechanickej (ZZME) a celkovej energie je možné dopracovať sa k počiatočnej rýchlosti strely. Či však ZZME bol aplikovaný správne, o tom sa môžeme presvedčiť analýzou ďalšieho videa (obrázku), ktoré bolo zosnímané rýchlosťou 1000 fps (Obr. 2.13).



Obr. 2.12 Analýza pohybu plechovice po náraze strely vystrelenej z guľôčkovej pištole



Obr. 2.13 Analýza pohybu strely vystrelenej z guľôčkovej pištole (1000 fps)

Vzhľadom k tomu, že daný záber trval  $t = 1/1000$  s, z odhadu prejdenej dráhy guľôčky (biely pás) je možné vypočítať rýchlosť strely pred zrážkou a overiť tak, či predchádzajúci výsledok a analýza boli správne. V prípade, že sa vypočítané rýchlosti líšia o jeden až dva rády, je potrebné si uvedomiť, kedy je možné použiť ZZME a kedy ho zase použiť nemôžeme. V prípade, že počas deja dochádza k premene mechanickej energie na iné formy energie, či už v dôsledku trecích alebo odporových síl, nie je možné použiť ZZME. Ďalšie riešenie teda ponechávame na samotnom čitateľovi, analýze a porovnaní výsledkov z oboch videí.

### Úloha 2-6:

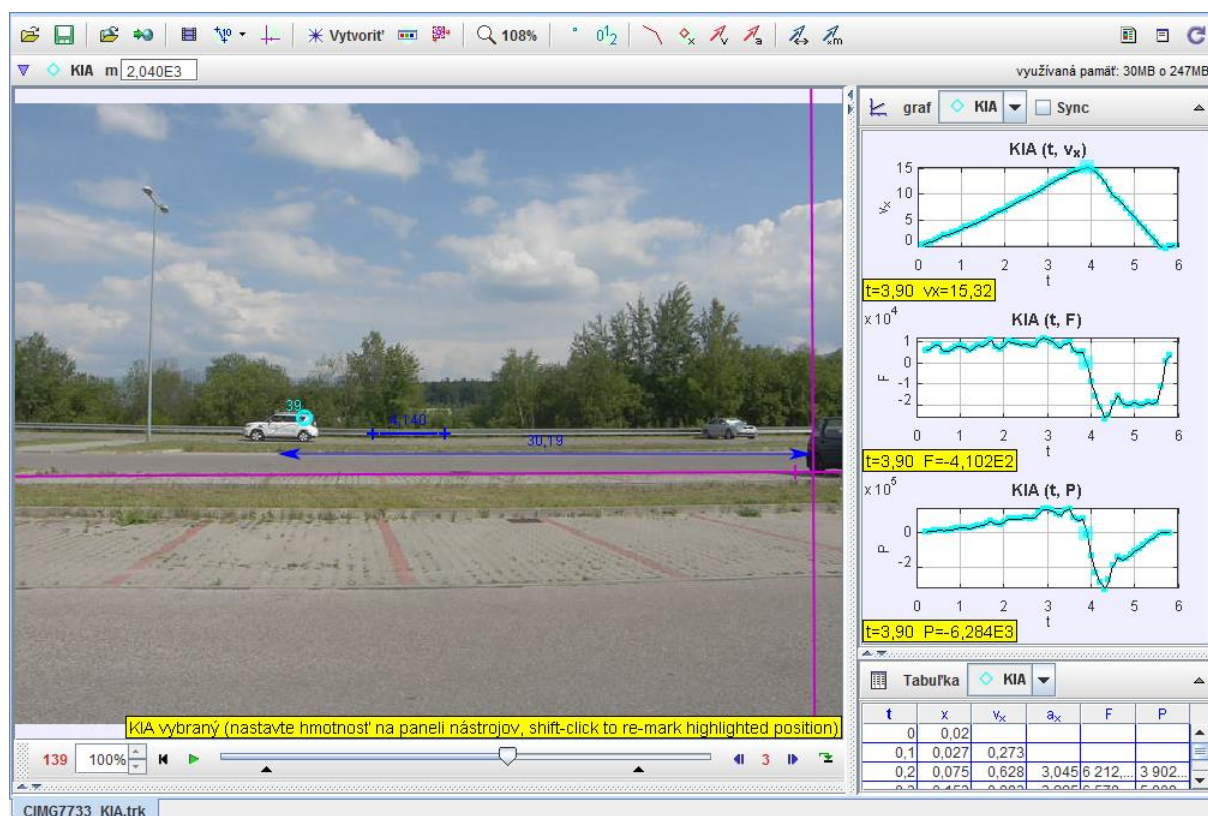
Určte ťažnú silu a výkon motora rozbiehajúceho sa auta.

(dĺžka auta 4,140 m, hmotnosť auta je: 2040 kg, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [kia.avi](#)

### Riešenie:

Nasledujúci Obr. 2.14 znázorňuje priebeh maximálneho rozbehu elektromobilu Kia Soul a následné maximálne brzdenie. Z grafu závislosti hybnosti na čase pomocou smernice dotyčnice bola určená ťažná sila motora  $F = 8416$  N (auto sa rozbieha so zrýchlením  $a_1 = 4,13$   $m/s^2$  a brzdí so spomalením  $a_2 = 9,34$   $m/s^2$ ). Maximálny výkon motora bol analýzou stanovený na 129 kW, priemerný výkon auta bol stanovený na 74 kW.



Obr. 2.14 Analýza rozbehu a brzdenia auta

**Úloha 2-7:**

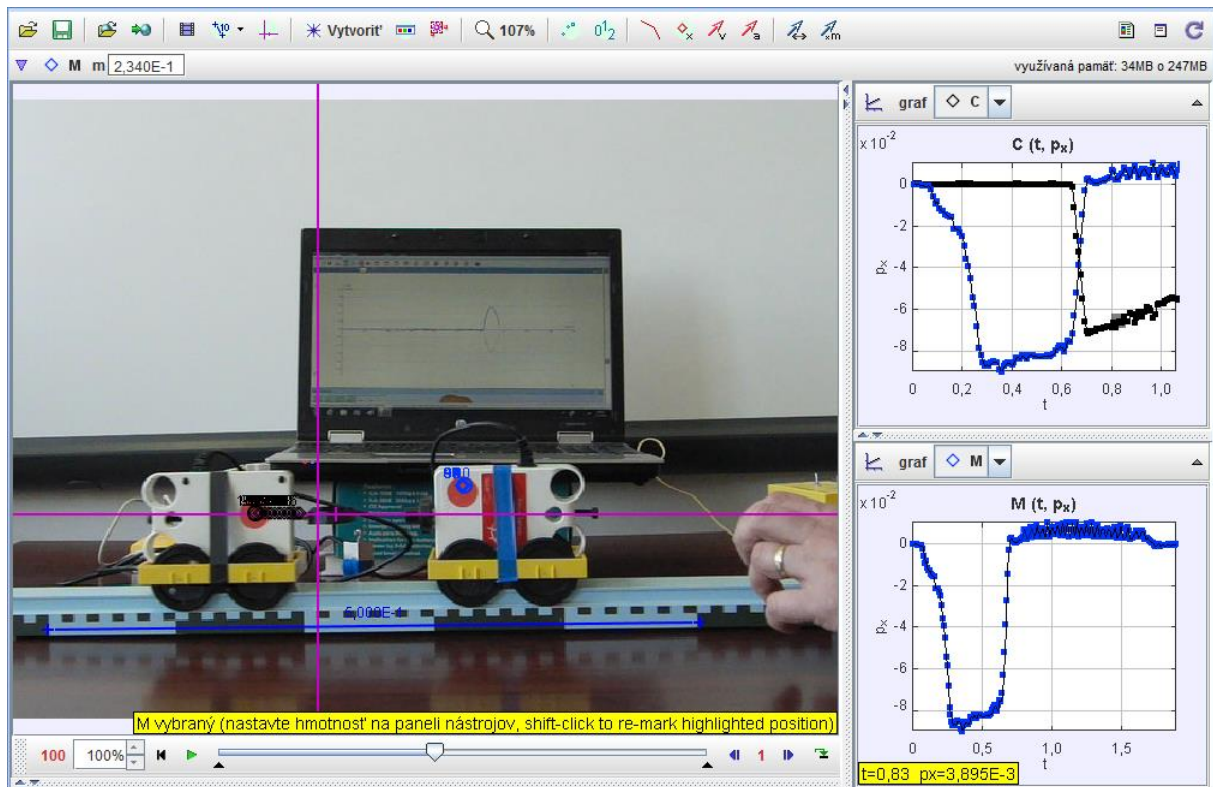
Analyzujte náraz vozíkov. Akou silou pôsobí pohybujúci sa vozík na nepohybujúci sa a opačne?

(1 dielik na meradle je 1 cm, počet obrázkov za sekundu je 120 fps).

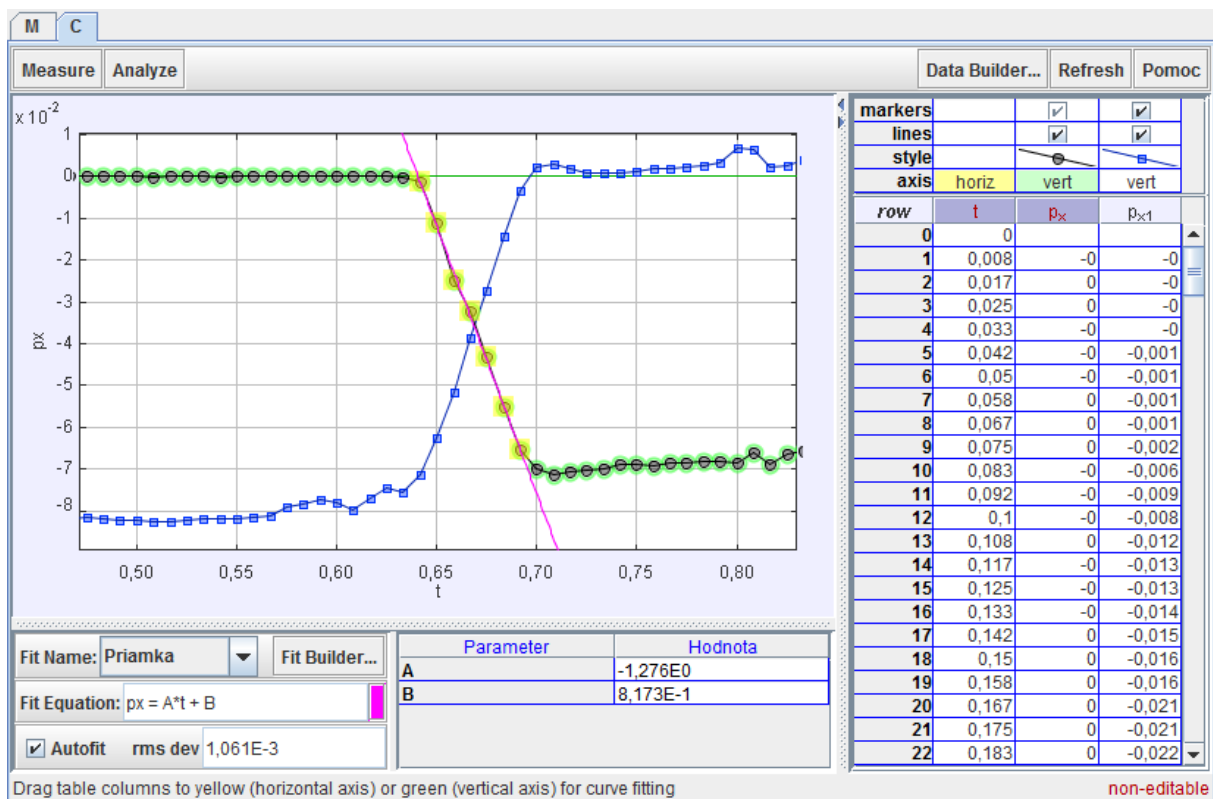
Zdroj: [voziky.avi](http://voziky.avi).

**Riešenie:**

Z analýzy videa vyplýva, že je úplne jedno, či budeme analyzovať prvý vozík v pohybe alebo ten druhý v pokoji, v oboch prípadoch je výsledná priemerná sila pôsobiaca pri pružnej zrážke rovnaká (časová zmena hybnosti má v oboch prípadoch rovnakú veľkosť). Využitím regresných kriviek bola stanovená priemerná hodnota veľkosti pôsobiacej sily v čase nárazu  $F = 1,3 \text{ N}$ . (Daná hodnota určená z videoanalýz je vo veľmi dobrej zhode so silou určenej využitím systému Coach).



Obr. 2.15 Analýza pružnej zrážky vozíkov



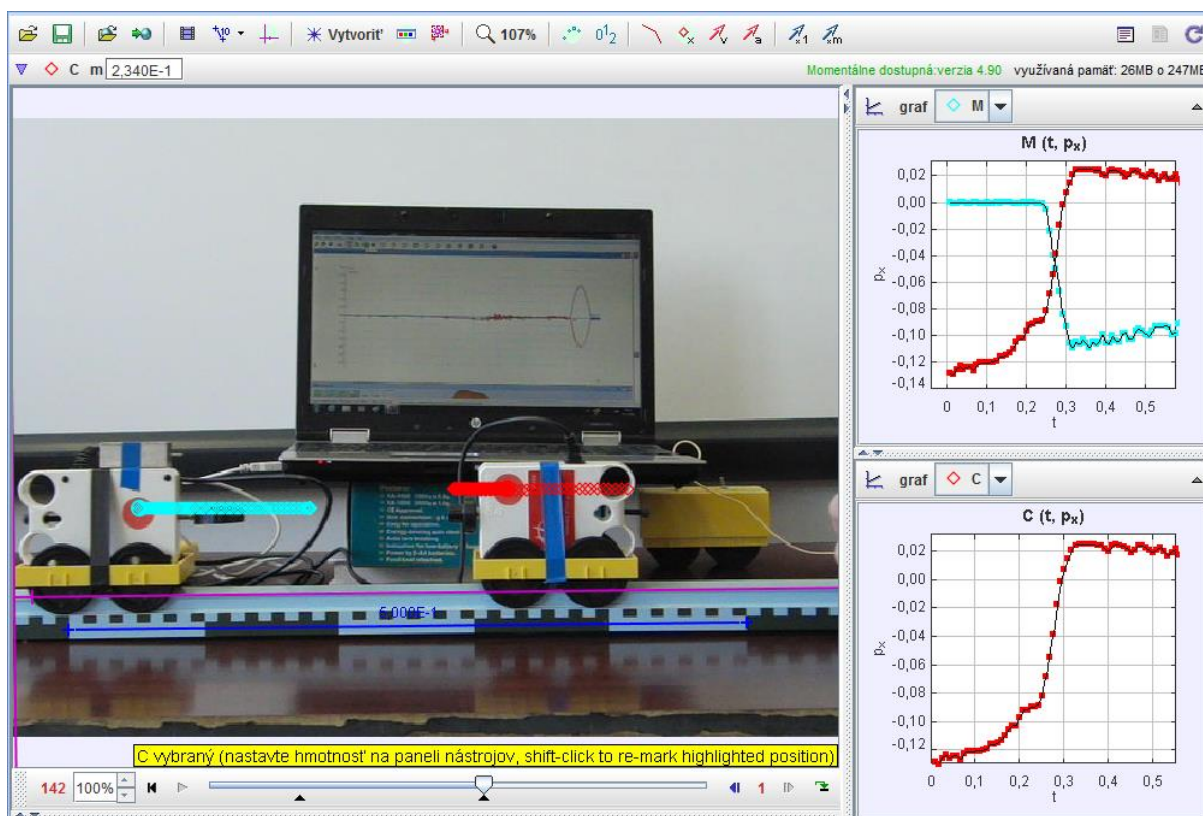
Obr. 2.16 Určenie veľkosti pôsobiacej sily



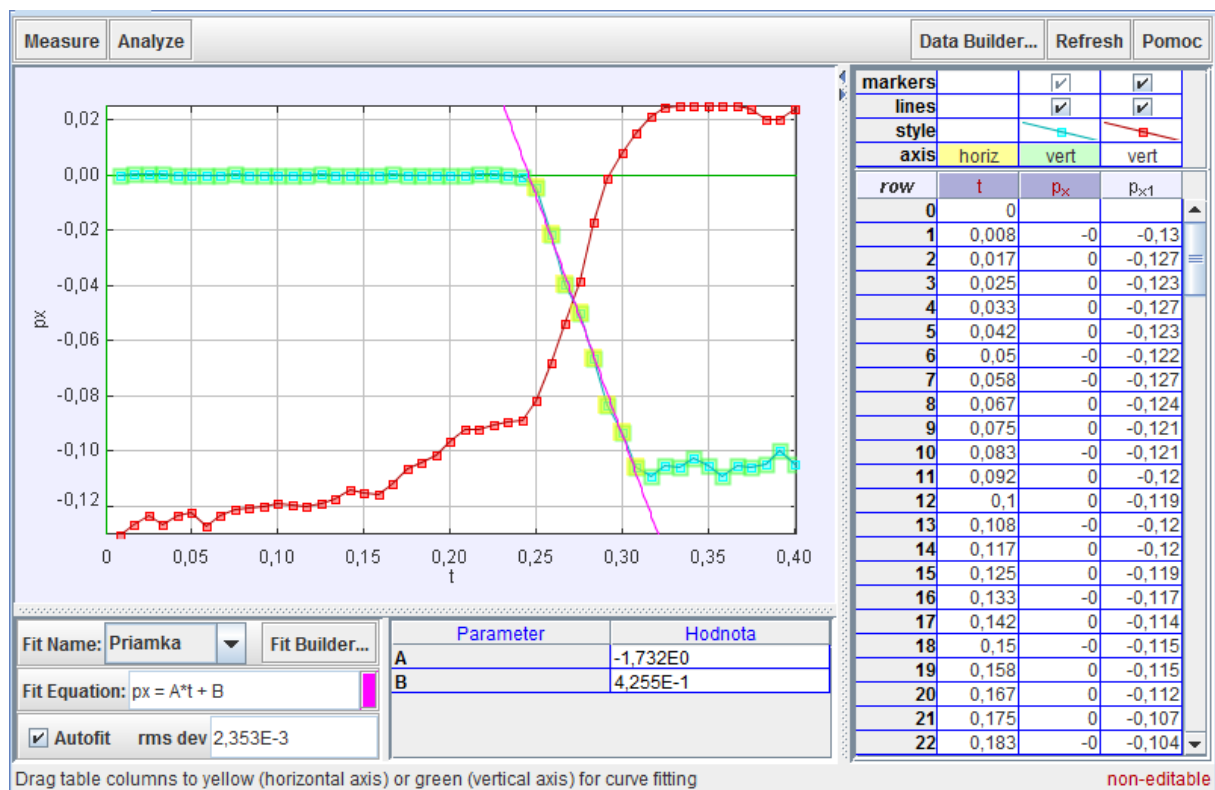
Zmení sa nejaká situácia a riešenie úlohy, keď bude jeden z vozíkov ťažší?

Zdroj: [voziky2.avi](#).

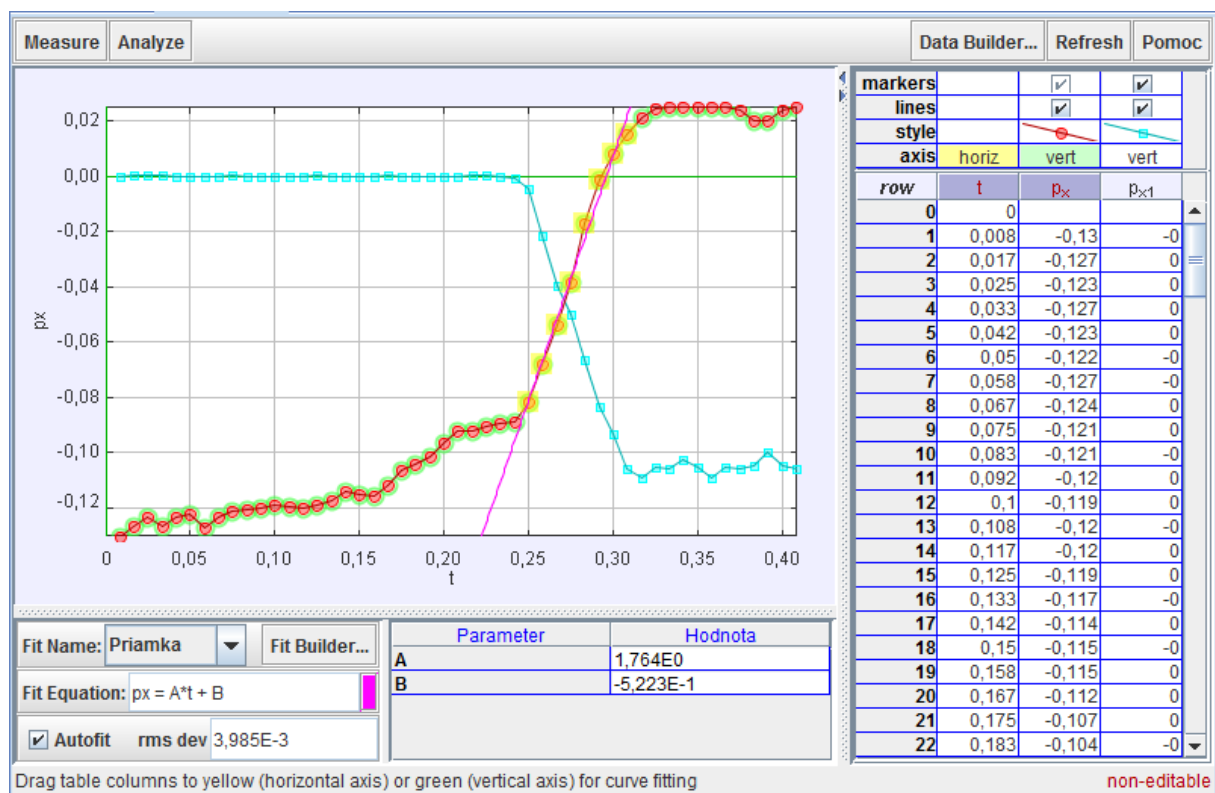
Ako ukazuje nasledujúca analýza videa (Obr. 2.17), platí zákon zachovania hybnosti, teda hybnosť sústavy pred zrážkou bude rovná hybnosti po zrážke. Čo sa týka silového pôsobenia, aj v tomto prípade je priemerná sila, ktorou pôsobí prvý, ľahší vozík na druhý ťažší vozík v čase zrážky ( $F = 1,73 \text{ N}$ ) rovnako veľká ako sila, ktorou pôsobí ťažší vozík na ľahší ( $F = 1,76 \text{ N}$ ) (menšie odchýlky vznikli v dôsledku odporu káblov spájajúcich senzory s počítačom). Daný výsledok potvrdil aj systém Coach (na obrazovke počítača).



Obr. 2.17 Analýza pružnej zrážky vozíkov



Obr. 2.18 Analýza zmeny hybnosti a určenie veľkosti pôsobiacej sily na vozík vľavo



Obr. 2.19 Analýza zmeny hybnosti a určenie veľkosti pôsobiacej sily na vozík vpravo (narážajúceho vozíka)

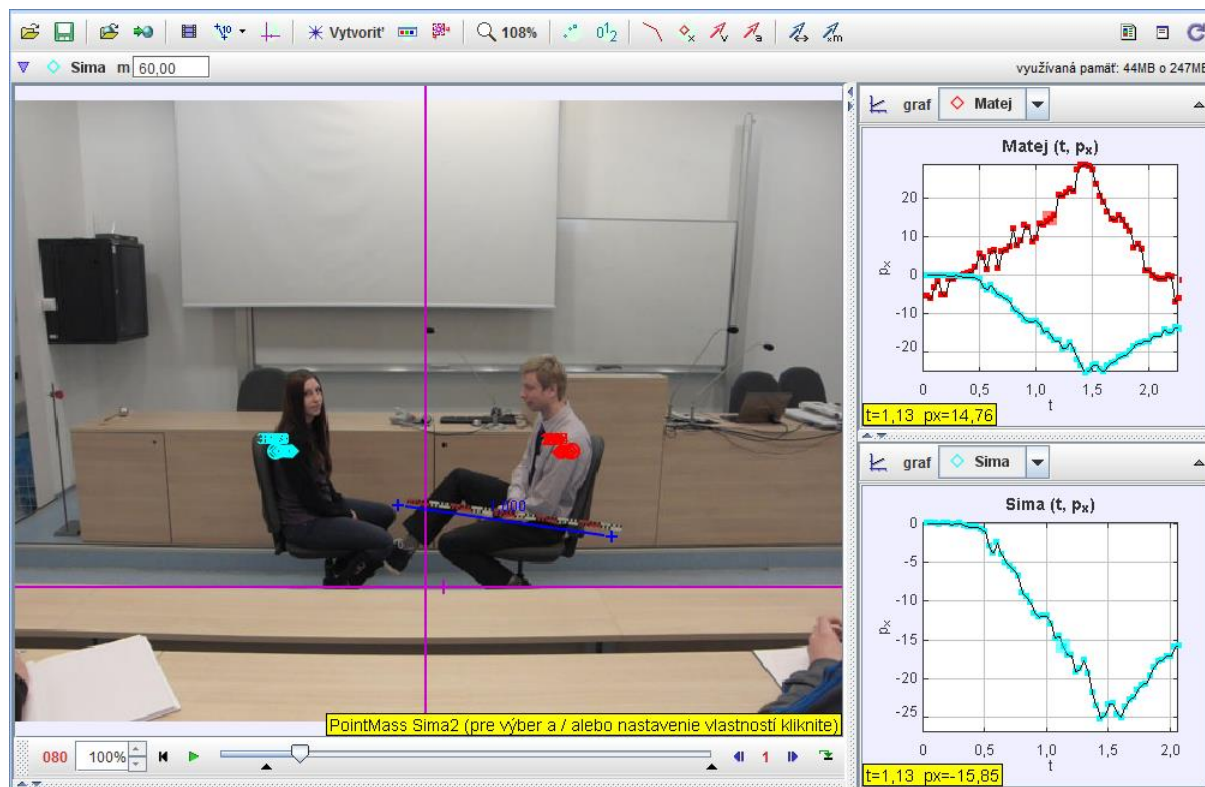
## Úloha 2-8:

Analyzujte pohyb stoličiek, na ktorých sedia študenti, keď a) študent pôsobí na stoličku, b) študentka pôsobí na stoličku, c) vzájomne pôsobia na stoličky.

(dĺžka meradla je 1 m, hmotnosť študenta 80 kg, hmotnosť študentky je 60 kg, počet obrázkov za sekundu je 30 fps).

Zdroj: [3NPZ.avi](#).

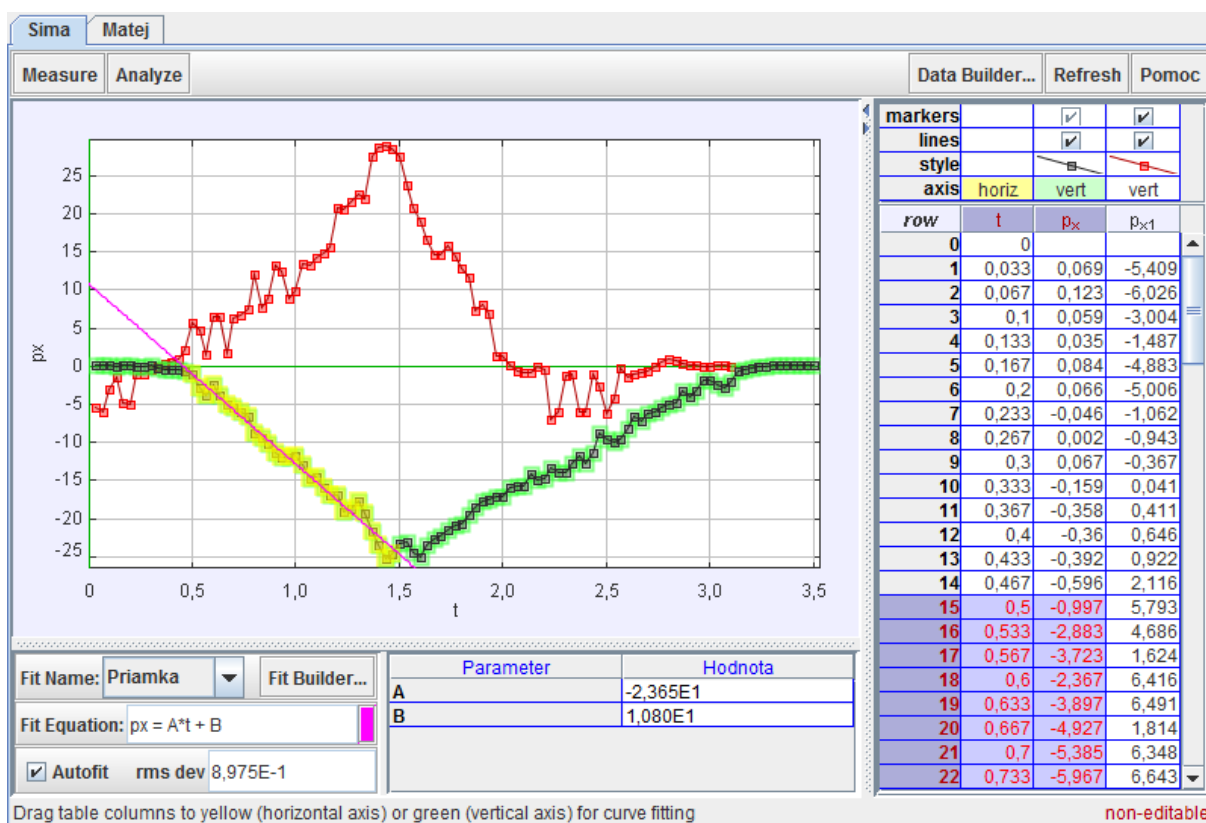
## Riešenie:



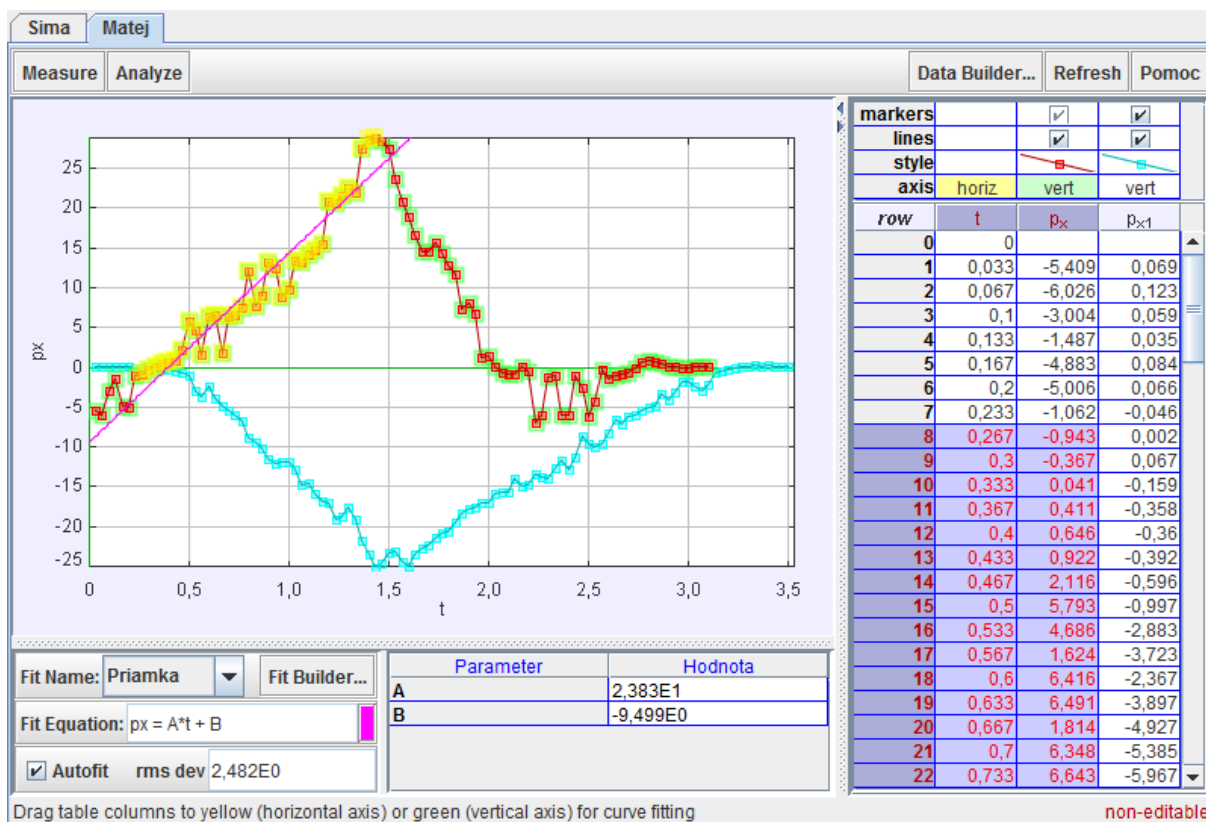
Obr. 2.20 Analýza vzájomného silového pôsobenia

Na Obr. 2.20 je znázornená časová závislosť hybnosti študenta (červená farba) a študentky (modrá farba). Analýzou oboch závislostí zistíme, že zmena hybnosti v čase a teda pôsobiaca sila je počas pôsobenia študenta rovnako veľká a vzájomná. Keď pôsobí študent (spolu so stoličkou) na študentku (so stoličkou), na študenta pôsobí študentka rovnako veľkou opačne orientovanou silou.

Výpočtom sa dopracujeme k hodnote výslednej pôsobiacej sily 24 N. (Daná hodnota môže byť v prípadoch a), b) a c) rozdielna, avšak v každom prípade je pre študenta a študentku na základe 3. Newtonoveho zákona rovnaká.)



Obr. 2.21 Analýza sily, ktorá pôsobí na študentku (so stoličkou)



Obr. 2.22 Analýza sily, ktorá pôsobí na študenta (so stoličkou)

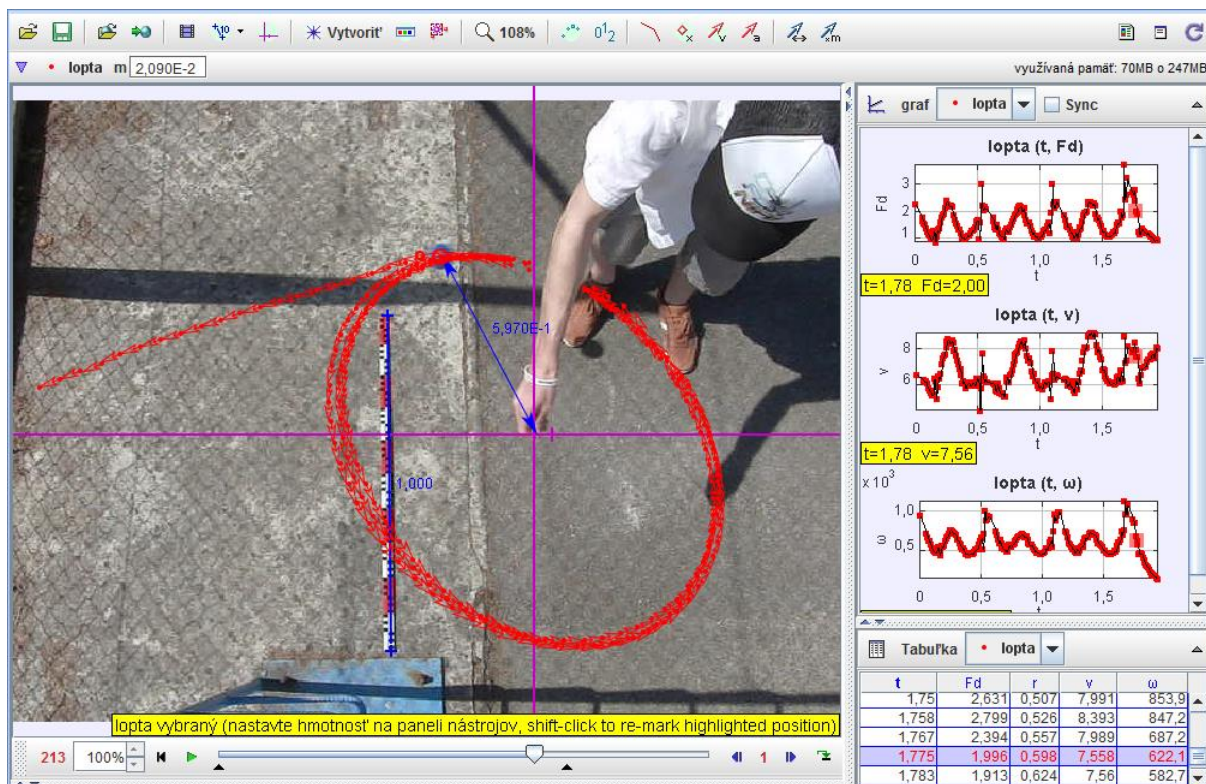
## Úloha 2-9:

Analyzujte pohyb lopty pripevnenej na vlákne, ktorá sa otáča v horizontálnej rovine. Ako sa bude lopta pohybovať, keď vlákno v určitom okamihu uvoľníme? Aká sila pôsobí na loptu tesne pred jej uvoľnením?

(dĺžka meradla je 1 m, hmotnosť lopty je 20,9 g, počet obrázkov za sekundu je 120 fps).

Zdroj: [lopta.niti.avi](http://lopta.niti.avi).

## Riešenie:



Obr. 2.23 Analýza pohybu lopty

Ako ukazuje nasledujúci Obr. 2.23, lopta sa bude po uvoľnení vlákna pohybovať v horizontálnej rovine v smere kolmom na vlákno (dotýčnici k útvaru, po ktorom sa lopta pohybuje (v prípade rovnomerného pohybu lopty je daným útvarom kružnica)). Tu sa študenti častokrát mýlia a predpokladajú, že keď prestane pôsobiť ruka na vlákno (sila na loptu), lopta sa bude pohybovať v smere vlákna. Je potrebné si ale uvedomiť, že keď prestane daná sila pôsobiť, lopta sa v zmysle Newtonových zákonov bude pohybovať rovnomerne (zanedbávame vplyv gravitačného poľa a uvažujeme len pohyb v horizontálnej rovine) v smere vektora rýchlosti, ktorú mala lopta v čase pustení vlákna. Lopta má v dôsledku svojej zotrvačnosti tendenciu pohybovať sa ďalej rovnomerne priamočiari. Avšak v dôsledku sily, ktorá na ňu pôsobí, bude sa lopta pohybovať po kruhovej dráhe (v ideálnom prípade). Čo sa týka danej sily, ktorá na loptu pôsobí pri kruhovom pohybe, uvažujeme o dostredivej sile (sila ruky pôsobiacej cez vlákno na loptu smerom do stredu kružnice), ktorá spôsobuje neustálu zmenu smeru rýchlosti. Jej veľkosť je definovaná:

$$F_D = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r, \quad (2.27)$$

kde  $m$  je hmotnosť lopty,  $v$  je veľkosť obvodovej rýchlosti,  $r$  je vzdialenosť lopty od miesta uchytenia a  $\omega$  predstavuje uhlovú rýchlosť otáčavého pohybu. Reakciou na dostredivú silu v zmysle 3. Newtonovho zákona je odstredivá sila. Dostredivá sila je sila, ktorou pôsobí na teleso ruka cez vlákno, odstredivú silu pocítujeme v ruke ako reakciu na silu dostredivú, ktorou pôsobíme na rotujúce teleso. Pojem odstredivej sily sa taktiež častokrát spája so zotrvačnou silou, ktorá pôsobí v neinerciálnej vzťažnej sústave – napr. rotujúcej. Vtedy odstredivá sila nie je skutočnou silou, ktorá by mala pôvod vo vzájomnom pôsobení medzi telesami, ale je fiktívnou silou. Celá neinerciálna vzťažná sústava sa otáča a v dôsledku zrýchleného pohybu bude z pohľadu lopty pôsobiť na ňu zotrvačná sila, ktorá ju „ťahá“ od stredu (podobne, ako keď autobus náhle vojde do zákruty a cestujúci majú pocit, ako keby ich nejaká sila ťahala smerom von zo zákruty). Pomocou zotrvačnej odstredivej sily zdôvodňujeme pohyb lopty vzhľadom na rotujúcu neinerciálnu vzťažnú sústavu. Daná zotrvačná sila existuje len z pohľadu lopty. (Viac o tejto problematike v literatúre Kluvánek, P.: Existuje odstredivá sila? Pravda o odstredivej sile.)

Po dosadení hodnôt hmotnosti, rýchlosti a polomeru dostávame pre veľkosť pôsobiacej sily tesne pred pustením vlákna hodnotu  $F_D = 1,97 \text{ N}$ .

#### *Neriešené úlohy:*

**Úloha 2-10:** *Analyzujte daný pohyb, určte veľkosť rýchlosti lopty. Aká veľká sila pôsobí na loptu pri kope a pri odraze od steny? Ako sa zmení hybnosť lopty?*  
(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,421 kg, frekvencia snímok: 120 fps) zdroj: [odkop\\_stena.avi](#)

**Úloha 2-11:** *Analyzujte pohyb jednotlivých guľôčok pri Gaussovom dele.*  
(dĺžka meradla: 0,5 m, frekvencia snímok: 1000 fps)  
zdroj: [Gauss\\_delo.avi](#)

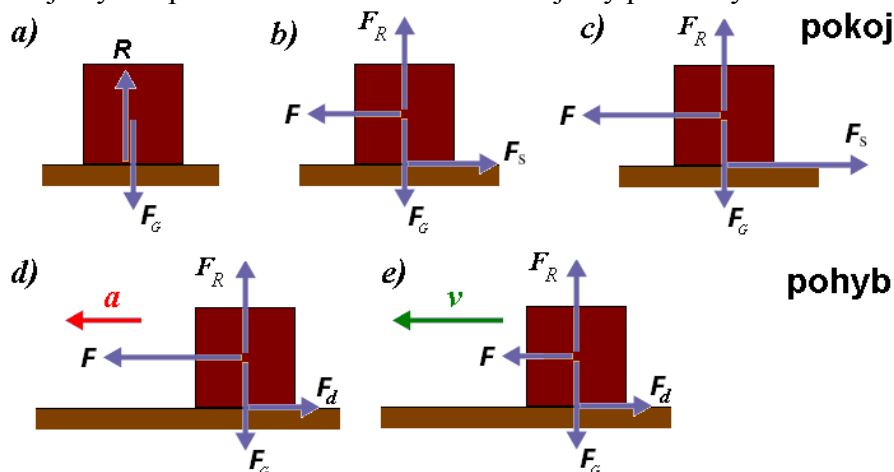
**Úloha 2-12:** *Aká veľká sila pôsobí na voľne padajúcu guľu? Akou veľkou silou pôsobí guľa pri dopade na zem?*  
(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť gule je 0,7265 kg, frekvencia snímok: 120 fps)  
zdroj: [gula.avi](#)

### 3. Trecie sily

Mnohokrát v úvodných častiach fyziky pri analýze pohybu kvôli zjednodušeniu používame formuláciu „odpor vzduchu zanedbajte“ alebo „vplyv trecích síl je zanedbateľný“. V skutočnosti sa však s trením stretávame doslova na každom kroku. Sú situácie, kedy trenie a vplyv odporových síl nie je možné zanedbať. Bez trenia by nebola možná naša chôdza, pohyb auta či bicykla, nemohli by sme písať perom, prípadne ho držať v ruke. Skrutky by nespĺňali svoj účel, utkaná látka by sa rozpadla a uzly by sa rozviazali. Na druhej strane vplyvom trenia v motore a hnacích mechanizmoch sa spotrebováva okolo 20% benzínu v automobile navyše. Nepretržitost' opakovania šmyku a kontaktu stykových plôšok môže byť niekedy doprevádzané rôznymi zvukmi, napr. pri šmyku kolies na suchej dlažbe, pri škrabaní nechtom po tabuli, ťahmi sláčka po husľovej strune, atď. Z pohľadu druhov pohybu, pri ktorých sa trenie prejavuje rozlíšujeme trenie šmykové a valivé.

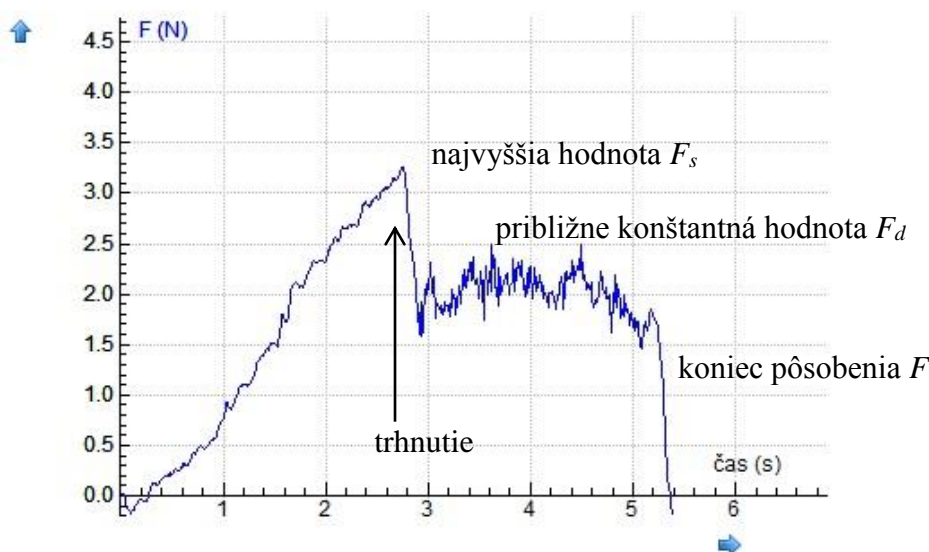
#### 3.1 Šmykové trenie

Na nasledujúcom myšlienkovom experimente si objasníme mechanizmy pôsobenia a vlastnosti síl trenia. Predstavme si krabicu, ktorá leží na podlahe. Snažíme sa ju tlačiť vodorovne stálou silou, ale krabica sa nepohne. Je to spôsobené tým, že sila, ktorou na krabicu pôsobíme je kompenzovaná vodorovnou brzdnou silou, ktorou podlaha pôsobí opačným smerom v mieste dna krabice. Zaujímavosťou je, že veľkosť a smer tejto trecej sily je taký, aby sa rušil účinok akejkoľvek sily, ktorou by sme na krabicu pôsobili. Existuje istá veľkosť sily, ktorú už brzdná sila krabice nedokáže vykompenzovať a krabica sa pohne. Trecia sila, ktorou bude podlaha pôsobiť na pohybujúcu sa krabicu, ju bude postupne spomaľovať, až kým sa krabica zastaví. Keby sme chceli, aby sa krabica pohybovala po podlahe konštantnou rýchlosťou, museli by sme ju tlačiť alebo ťahať silou, ktorá má rovnakú veľkosť ale opačný smer ako trecia sila, ktorá jej pohybu bráni. Celá situácia je podrobne rozobraná z fyzikálneho hľadiska na Obr. 3.1. Na začiatku (a), kedy je krabica v pokoji, pôsobí na krabicu tiažová sila  $\vec{F}_G$ , ktorá je vykompenzovaná reakciou  $\vec{R}$  tlakovej sily podložky na krabicu.



Obr. 3.1 Pôsobenie síl na krabicu. (a – c) Krabica je v pokoji, (d – e) krabica sa pohybuje. Keď je krabica v pokoji, vonkajšia sila  $F$  je kompenzovaná rovnako veľkou, opačne orientovanou silou statického šmykového trenia  $F_s$ . S rastúcou silou  $F$  narastá aj veľkosť sily  $F_s$  až do najvyššej hodnoty (c). Potom nastane „trhnutie“ a krabica sa začne pohybovať so zrýchlením  $a$  (d). Ak chceme, aby sa krabica pohybovala rovnomerne rýchlosťou  $v$ , musíme veľkosť sily  $F$  znížiť tak, aby kompenzovala dynamickú šmykovú treciu silu  $F_d$  (e).

V ďalších obrázkoch sme reakciu  $\vec{R}$  pre lepšiu názornosť presunuli po vektorovej priamke do ťažiska krabice ( $\vec{F}_R$ ). Ak začneme na krabicu pôsobiť silou  $\vec{F}$  (b) a snažíme sa ju odtlačiť doľava, ako odozva vznikne *statická šmyková trecia sila*  $\vec{F}_s$ , ktorá smeruje vpravo a kompenzuje silu  $\vec{F}$ . Krabica je stále v pokoji. So zväčšovaním sily  $\vec{F}$  narastá aj sila  $\vec{F}_s$  (c) až po určitú kritickú hodnotu, kedy sa krabica „trhne“, stratí svoj pokojový kontakt s podložkou a začne sa so zrýchlením  $\vec{a}$  pohybovať smerom vľavo (d). V tomto prípade už ale krabicu brzdí *dynamická (kinetická) šmyková trecia sila*  $\vec{F}_d$ , ktorá má menšiu veľkosť ako najväčšia prípustná hodnota veľkosti statickej šmykovej trecej sily pôsobiacej len v pokoji. Ak by sme chceli, aby sa krabica pohybovala rovnomerne, museli by sme v okamihu pohnutia krabice veľkosť našej pôsobiacej sily znížiť.



**Obr. 3.2 Meranie šmykovej trecej sily od začiatku pôsobenia, kedy je krabica v pokoji cez začiatok pohybu až po približne rovnomerný pohyb za pomoci systému Coach**

Obr. 3.2 ukazuje závislosť zväčšujúcej sa pôsobiacej sily na krabicu, ktorú chceme uviesť do pohybu, až do času, kedy nastane „trhnutie“ krabice a následné zmenšenie pôsobiacej sily, keďže chceme krabicu tlačiť približne rovnomerne.

Výsledky nášho myšlienkového experimentu môžeme zhrnúť nasledovne:

- Ak začneme pôsobiť silou  $\vec{F}$  na teleso, ktoré ostáva v pokoji, statická šmyková trecia sila  $\vec{F}_s$  pôsobiaca na teleso má rovnakú veľkosť ako priemet sily  $\vec{F}$  do podložky a je voči nej opačne orientovaná.
- Veľkosť sily  $\vec{F}_s$  dosahuje maximálnu hodnotu  $F_{s,max}$  danú vzťahom

$$F_{s,max} = \mu_s F_n, \quad (3.1)$$

kde  $\mu_s$  je koeficient (faktor) statického šmykového trenia a  $F_n$  je veľkosť normálovej tlakovej sily, ktorou je teleso pritlačované k podložke (veľkosť je taktiež rovná sile, ktorou pôsobí podložka na teleso). Ak prevýši veľkosť našej pôsobiacej sily  $\vec{F}$  hodnotu  $F_{s,max}$ , začne sa teleso pohybovať po podložke.



- Keď sa teleso dá do pohybu a budeme na neho pôsobiť takou silou  $\vec{F}$ , aby sa pohybovalo približne rovnomerne, klesne veľkosť šmykovej trecej sily z  $F_{s,max}$  na hodnotu  $F_d$ , ktorá je určená vzťahom

$$F_d = \mu_d F_n, \quad (3.2)$$

kde  $\mu_d$  je koeficient (faktor) dynamického šmykového trenia. Túto veľkosť  $F_d$  má dynamická trecia sila v priebehu celého pohybu.

Podľa Amontonovovho – Coulombovho zákona **veľkosť trecej sily pri šmykovom trení nezávisí na veľkosti styčnej plochy** a je úmerná len veľkosti normálovej sily  $F_n$ , ktorú v predchádzajúcom myšlienkovom experimente predstavuje tiažová sila  $\vec{F}_G = m\vec{g}$ . Treba ešte zdôrazniť, že predchádzajúce rovnice nemajú vektorový charakter, koeficienty  $\mu_s$  a  $\mu_d$  sú bezrozmerné a zisťujú sa experimentálne. Hodnoty koeficientov závisia od vlastností ako telesa, tak aj podložky, takže zvykneme hovoriť o koeficientoch trenia medzi podložkou a telesom alebo medzi dvoma materiálmi (napr. hodnota koeficientu statického šmykového trenia  $\mu_s$  medzi oceľou a ľadom je 0,027). Taktiež predpokladáme, že hodnota koeficientu dynamického trenia  $\mu_d$  nezávisí na rýchlosti pohybu telesa po podložke. Statické trenie medzi ľadom a podrážkou topánky je častokrát veľmi malé a nezabráni pošmyknutiu. Preto si statické trenie často zvyšujeme posypaním ľadu pieskom, prípadne štrkom či popolom. Na druhej strane trenie minimalizujeme, keď styčné plochy vzájomne sa pohybujúcich telies namažeme vrstvou maziva. Príčinou vzniku trecích síl sú nerovnosti styčných plôch a vzájomné pôsobenie častíc v styčných plochách.

Čo sa týka brzdenia áut, je potrebné rozlíšiť dva prípady:

- ak sa kolesá auta pri brzdení zablokujú, ide o brzdenie v šmyku, pričom sa pneumatika auta pohybuje vzhľadom k asfaltu rovnakou rýchlosťou ako auto a vtedy počítame s koeficientom kinematického trenia,
- ak brzdenie neprebíha v šmyku, je v každom okamihu bod dotyku kolesa s vozovkou v pokoji, a preto bude brzdná sila rovná hodnote sily statického trenia.

Súčasná elektronika v autách, systém ABS, zabraňuje, aby vozidlo v prípade šmyku bolo neovládateľné. Keďže koeficient kinematického trenia je vždy menší ako koeficient maximálneho statického trenia, je trecia sila medzi kolesami v šmyku menšia ako v prípade brzdenia bez šmyku, brzdná dráha z tohto dôvodu je v šmyku dlhšia, a preto aj bezpečnostné systémy v aute sa snažia neuviesť auto do šmyku. (V niektorých prípadoch na suchom asfalte však môže byť brzdná dráha s ABS dlhšia, než bez neho.)

### Úloha 3-1:

**Určte faktor dynamického šmykového trenia medzi oceľou a rôznymi materiálmi a pomocou tabuliek odhadnite, o aké materiály sa jedná.**

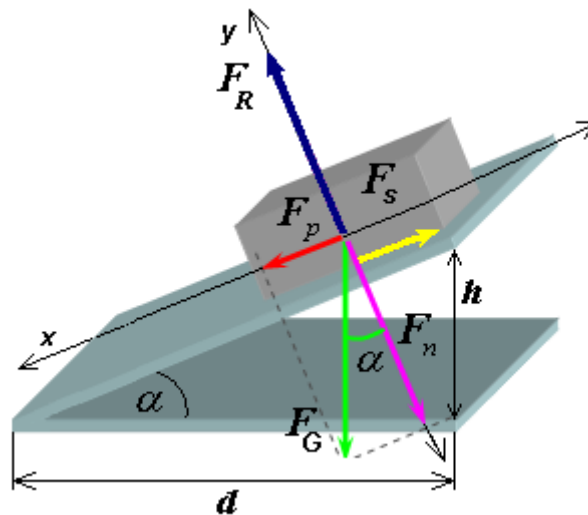
(frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [koeficient\\_trenia.avi](#)

**Riešenie:**

Je niekoľko možností, ako určiť hľadaný koeficient statického šmykového trenia. Jednou z nich by mohlo byť využitie silomeru a odmeranie veľkosti pôsobiacej sily v momente, kedy sa krabica dá do pohybu. Pri rovnomernom pohybe zo znalosti hmotnosti krabice, veľkosti pôsobiacej sily a využitím vzťahov (3.1) a (3.2) by sme určili hľadaný koeficient statického a dynamického trenia.

Iným spôsobom riešenia tejto úlohy bez silomeru a znalosti hmotnosti krabice je využitie naklonenej roviny. Ak by bolo možné podložku (napr. stôl) postupne nakláňať, pri určitom uhle sa krabica na stole pohne. Rozoberieme si túto situáciu z fyzikálneho hľadiska.



**Obr. 3.3** Krabica na naklonenej rovine a znázornenie síl, keď je krabica v pokoji ( $F_t = F_d$  pri rovnomernom pohybe)

Na Obr. 3.3 je znázornená krabica na naklonenej rovine v momente, kedy sa práve začína pohybovať. Na krabicu bude pôsobiť tiažová sila  $\vec{F}_G$ , tlaková sila od podložky  $\vec{F}_R$  v smere kolmom na naklonenú rovinu a trecia sila  $\vec{F}_s$  v smere pozdĺž naklonenej roviny. Keďže je krabica tesne pred začatím pohybu v pokoji, musí podľa druhého Newtonového pohybového zákona platiť, že výslednica síl pôsobiacich na krabicu je rovná nule

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_R + \vec{F}_s = m\vec{a} = 0. \quad (3.3)$$

Túto rovnicu budeme riešiť zvlášť pre  $x$ -ovú a  $y$ -ovú zložku. Pre  $x$ -ovú zložku môžeme predchádzajúcu vektorovú rovnicu prepísať do tvaru pre veľkosti síl

$$\sum F_x = F_p - F_s = ma = 0, \quad (3.4)$$

kde  $F_p$  predstavuje veľkosť priemetu tiažovej sily  $\vec{F}_G$  do smeru osi  $x$  ( $F_p = F_g \sin \alpha$ ). Pre  $y$ -ovú zložku dostávame

$$\sum F_y = F_R - F_n = 0, \quad (3.5)$$

kde  $F_n$  je normálová sila a predstavuje veľkosť priemetu tiažovej sily  $\vec{F}_G$  do smeru osi  $y$  ( $F_n = F_G \cos \alpha$ ). Keďže pohyb krabice je realizovaný vždy len v smere osi  $x$  (po splnení istých podmienok), bude predchádzajúca rovnica vždy rovná nule, to znamená, že normálová sila  $\vec{F}_n$

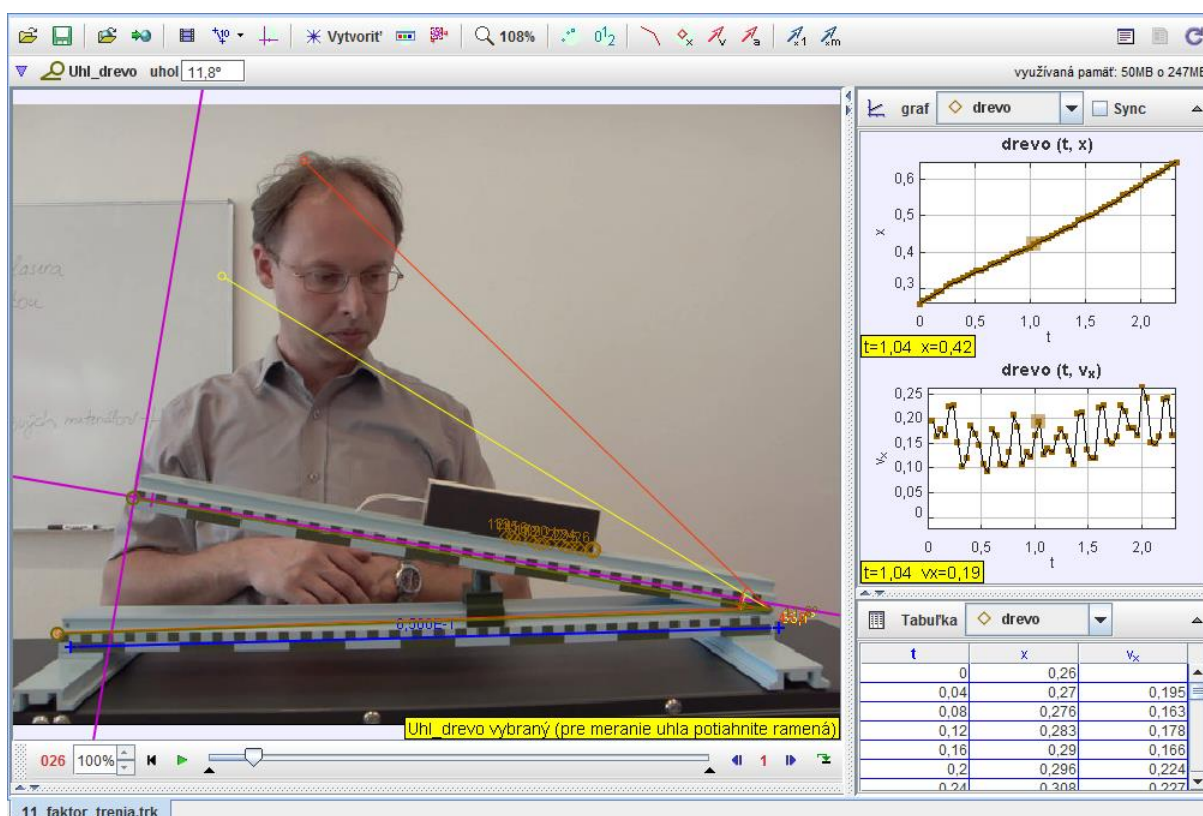
je vždy vykompenzovaná reakciou podložky  $\vec{F}_R$ . V závislosti od toho, ako sa bude krabica pohybovať, bude pravá strana rovnice (3.4) nenulová (v prípade zrýchleného pohybu so zrýchlením  $\vec{a}$ ) alebo tak ako v našom prípade rovná nule (rovnomerný pohyb krabice, prípadne krabica je v pokoji). V okamihu, kedy sa krabica začína pohybovať, nadobúda veľkosť statickej šmykovej trecej sily  $\vec{F}_s$  maximálnu hodnotu, teda  $F_{s,max} = \mu_s F_n$ , kde  $F_n = F_G \cos \alpha$ . Úpravou rovnice (3.4) teda dostávame

$$F_p = F_{s,max}, \quad (3.6)$$

$$F_G \sin \alpha = \mu_s F_G \cos \alpha, \quad (3.7)$$

odtiaľ

$$\mu_s = \tan \alpha. \quad (3.8)$$



Obr. 3.4 Analýza pohybu telesa na naklonenej rovine v programe Tracker

Ako teda jednoducho určiť hodnotu súčiniteľa šmykového trenia  $\mu_s$ ? Stačí zmerať hodnoty  $d$  a  $h$  charakterizujúce naklonenú rovinu (Obr. 3.4), a tak vypočítať  $\tan \alpha = h/d$ , ktorý predstavuje hodnotu koeficientu statického šmykového trenia. (Riešenie ponechávame na samotnom čitateľovi po analýze videa v programe Tracker.)

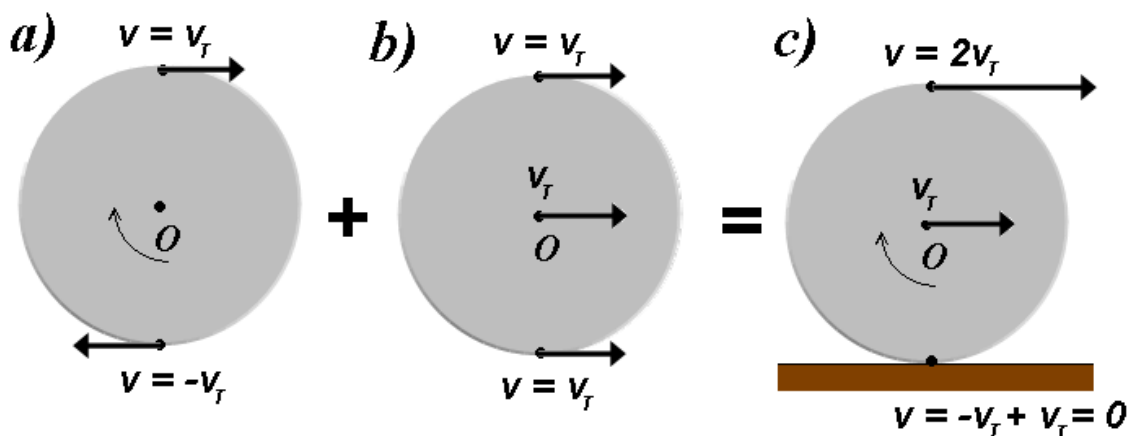
### 3.2 Valivé trenie

Keďže sila trenia spomaľuje pohyb, snažíme sa ju zmenšiť. Preto sa medzi trecie plochy často umiestňujú guľôčky alebo valčeky, pretože sila valivého odporu je ďaleko menšia ako

sila šmykového trenia (tento poznatok sa využíva v ložiskách). Pod valivým pohybom rozumieme taký pohyb, pri ktorom sa teleso otáča okolo okamžitej osi danej dotykovou priamkou na povrchu druhého telesa (napr. podložke). Ak budeme pozorovať pohyb bicyklového kolesa, ktoré sa pohybuje stálou rýchlosťou (presnejšie povedané geometrický stred kolesa sa pohybuje stálou rýchlosťou) po priamej dráhe a neprešmykuje, môžeme tento pohyb považovať za valivý pohyb. V prípade valenia kolesa bez prešmykovania platí vzťah (3.9)

$$v_T = \omega R, \quad (3.9)$$

kde  $v_T$  predstavuje obvodovú rýchlosť pohybu stredu kolesa,  $\omega$  je uhlová rýchlosť otáčania kolesa okolo osi prechádzajúcej stredom kolesa, ktorá je rovnobežná s podložkou a  $R$  je polomer kolesa.



Obr. 3.5 Valenie kolesa ako zloženie a) otáčavého a b) posuvného pohybu

Ako ukazuje Obr. 3.5, môžeme tento pohyb chápať aj ako zloženie posuvného a otáčavého pohybu kolesa. Pri otáčavom pohybe, kedy os otáčania je v pokoji, ľubovoľný bod na vonkajšom obvode kolesa má obvodovú rýchlosť  $v_T$  danú vzťahom (3.9). Všetky body kolesa majú rovnakú uhlovú rýchlosť  $\omega$ . Pri posuvnom pohybe (bez otáčania) sa všetky body kolesa pohybujú rovnakou rýchlosťou  $v_T$ . Zložením týchto dvoch pohybov dostaneme valivý pohyb. Zaujímavosťou je, že body nachádzajúce sa v blízkosti dotyku kolesa s podložkou sú v pokoji, zatiaľ čo body na vrchole kolesa sa pohybujú najväčšou rýchlosťou  $v = 2v_T$  (Obr. 3.5c).

### Úloha 3-2:

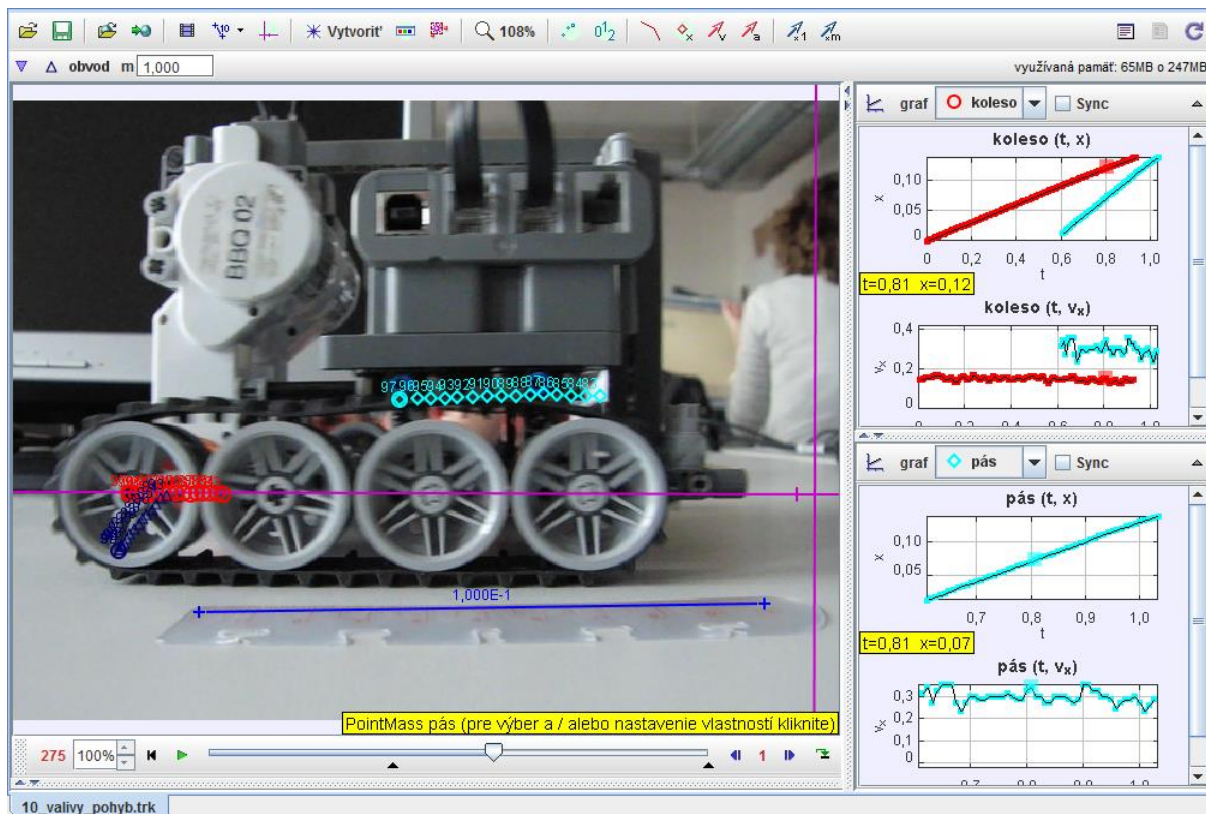
**Analyzujte pohyb pásu vozíka. Akou rýchlosťou sa pohybuje vrch a spodok pásu vzhľadom k rýchlosti pohybu ťažiska kolesa?**

(frekvencia snímok: 120 fps),

zdroj: [lego\\_robot.avi](#)

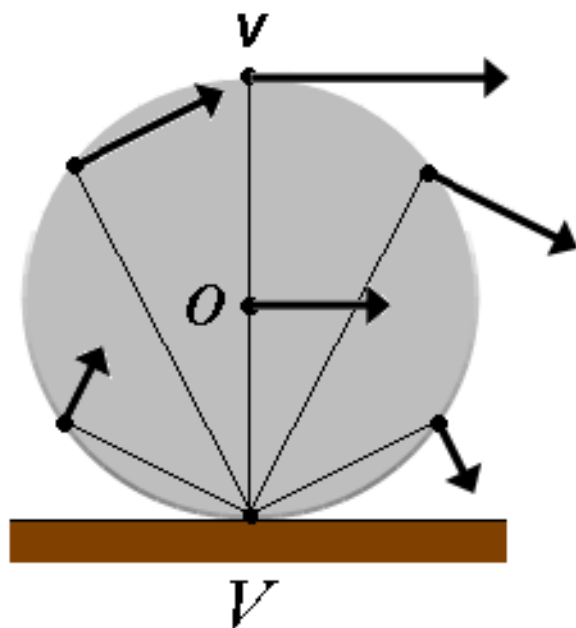
### Riešenie:

Analýza rýchlosti v programe Tracker poukazuje na zaujímavé súvislosti medzi rýchlosťami vrchnej a spodnej časti pásu vo vzťahu k rýchlosti pohybu stredu kolesa Obr. 3.6 (porovnanie hodnôt ponechávame na samotnom čitateľovi.)



Obr. 3.6 Analýza a grafy časových závislostí rýchlosti vrchnej časti pásu a kolesa

Iný spôsob pohľadu na valivý pohyb ukazuje Obr. 3.7. Tento pohyb môžeme totiž interpretovať ako otáčanie okolo okamžitej osi, ktorá prechádza bodom dotyku kola  $V$  s podložkou a je kolmá na rovinu kola. Okamžité rýchlosti jednotlivých bodov valiaceho sa kola sú na obrázku Obr. 3.7 označené šípkami.



**Obr. 3.7** Valivý pohyb kola môžeme chápať aj ako otáčavý pohyb okolo osi, ktorá v každom okamihu prechádza bodom  $V$  dotyku podložky s kolesom.

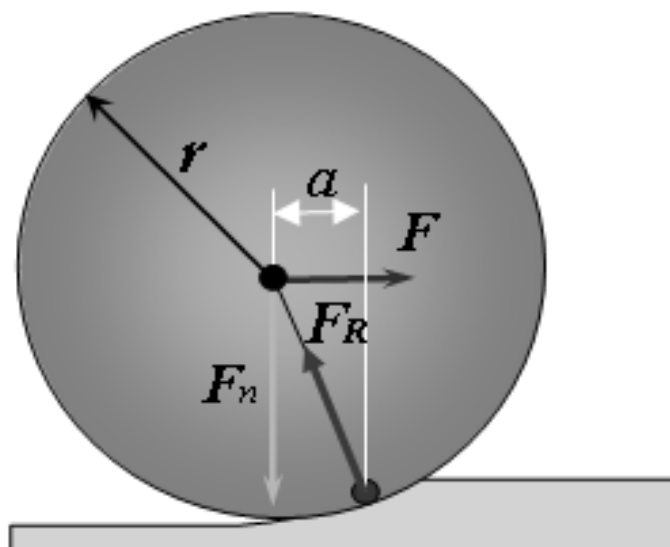
Aj pri valivom pohybe zohrávajú úlohu trecie sily. Je vôbec možné, aby sa koleso otáčalo po dokonale hladkej podložke? Ak by sme roztočili koleso uhlovou rýchlosťou  $\vec{\omega}$  a udelili mu vodorovnú rýchlosť veľkosti  $v = \omega R$ , kde  $R$  je polomer kola, možnože by sa to podarilo tak, aby v mieste dotyku kola s podložkou koleso neprekĺzavalo a nešmykalo sa po podložke. Podobným spôsobom môžeme uviesť koleso do valivého pohybu bez klzania i v prípade, že podložka nebude dokonale hladká.

Ak by sa koleso pohybovalo po podložke rovnomerne (pričom zatiaľ zanedbávame valivý odpor podložky proti pohybu) a žiadna ďalšia vodorovná sila by pohyb neudržiavala, musela by byť aj statická trecia sila nulová. Iná situácia však nastane, keď sa pokúsime zmeniť postupnú alebo uhlovú rýchlosť kola. V tomto prípade však musíme na koleso pôsobiť vodorovnou silou a pripustiť, že sa koleso v mieste dotyku s podložkou môže aj šmykať. Pokiaľ k šmyku nedôjde, bude podložka pôsobiť statickou trecou silou  $\vec{F}_s$ , ktorá bude smerovať „proti snahe“ kola prešmykovať. Ak k šmyku dôjde, dynamická trecia sila  $\vec{F}_d$  bude namierená proti skutočnému sklzu.

Doteraz sme uvažovali dokonalý kontakt medzi kolesom a podložkou, po ktorej by sa koleso v prípade rovnomerného pohybu po vodorovnej podložke valilo bez trenia. V skutočnosti však v dôsledku miernych deformácií oboch objektov (a posunu reakcie podložky oproti priamke prechádzajúcej stredom kola) vzniká valivý odpor podložky proti pohybu kola. Pohyb kola môže nastať len vtedy, keď moment reakcie vzhľadom na bod dotyku kola s podložkou ( $F_n a$ ) bude vykompenzovaný momentom ťažnej sily ( $Fr$ ), t.j. keď bude splnená podmienka

$$Fr = F_n a, \quad (3.10)$$

kde  $a$  je vzdialenosť pôsobiska reakcie podložky od zvislej priamky prechádzajúcej stredom kola a  $r$  je polomer kola (Obr. 3.8).



Obr. 3.8 Vznik valivého trenia

Z predchádzajúcej rovnice vyplýva vzťah pre valivé trenie pri valivom pohybe jedného telesa po inom

$$F_v = \frac{a}{r} F_n = \mu_{val} F_n, \quad (3.11)$$

kde  $\mu_{val}$  je *súčiniteľ (koeficient) valivého trenia*, ktorý je vždy menší ako koeficient šmykového trenia, zvlášť ak sú valiace sa teleso a podložka z tvrdého a pružného materiálu. Dôsledkom toho je zhotovovanie guľových a valčekových ložísk, používanie kolies na vozidlách, atď. Z predchádzajúcej definície vyplýva, že podhustené pneumatiky automobilu zvyšujú valivé trenie. So zvyšovaním valivého trenia sa zároveň zvyšuje opotrebenie pneumatík a taktiež aj spotreba paliva (až o 5%). Sila valivého trenia je omnoho menšia ako šmykového trenia, preto je lepšie napr. sud valiť ako šmýkať. Valivé trenie teda spomaľuje pohyb v menšej miere ako šmykové trenie.

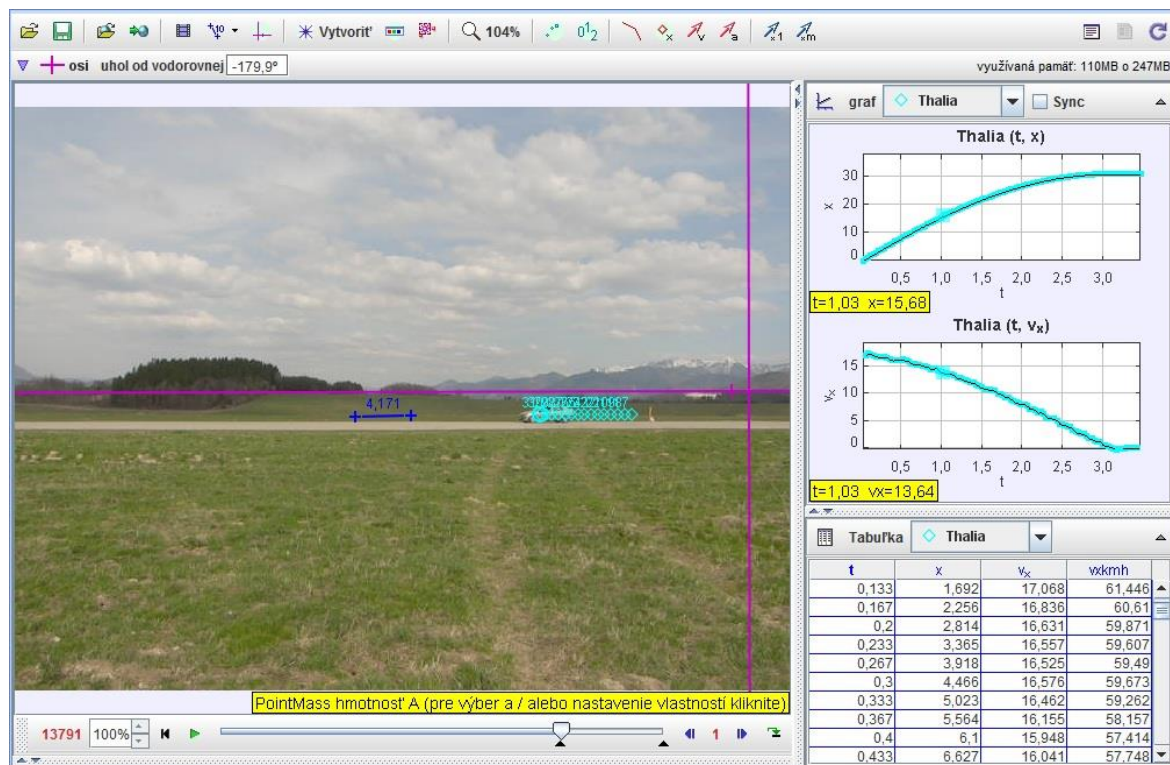
### Úloha 3-3:

**Určte brzdné dráhy auta Renault Thalia pri brzdení s rôznymi počiatocnými rýchlosťami na suchej vozovke a zimných pneumatikách.**

(frekvencia snímok: 30 fps),

zdroj: [Thalia.sucho.wmv](http://Thalia.sucho.wmv)

## Riešenie:



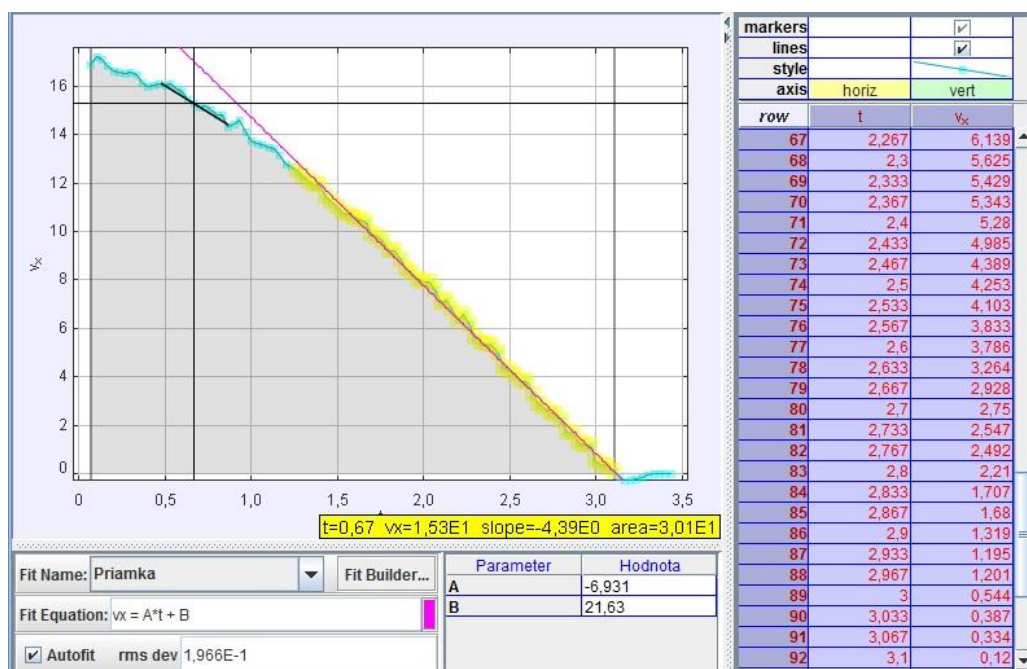
Obr. 3.9 Grafy časových závislostí brzdné dráhy a rýchlosti auta so zimnými pneumatikami

Obr. 3.10, auto sa od začiatku nasnímaného deja pohybovalo spomaleným pohybom, pričom v úvodnom procese brzdenia (približne do 1 s) veľkosť spomalenia narastala (v čase  $t = 0,67$  s malo hodnotu  $a = -4,39$   $m/s^2$ ) a v záverečnej fáze brzdenia dosahovalo priemernú hodnotu  $a = -6,931$   $m/s^2$ . (Danú skutočnosť možno vysvetliť „jemnejším“ stlačením brzdného pedálu, keďže auto šoférovala žena.) Čo sa týka prejdenej dráhy pri brzdení automobilu s počiatočnou rýchlosťou  $v = 16,898$   $m/s = 60,83$   $km/h$ , tú možno určiť ako obsah plochy pod grafom závislosti rýchlosti na čase  $s = 30,1$  m. Podobným spôsobom boli analyzované procesy brzdenia pri rôznych počiatočných rýchlostiach, pričom bola určovaná rýchlosť, pri ktorej auto brzdilo a prejdená dráha. Dané hodnoty boli zaznamenávané do tabuľky a vnesené do grafu závislosti brzdné dráhy od rýchlosti, pri ktorej auto začalo brzdiť (Obr. 3.11). Fitovaním nameraných údajov pomocou závislosti  $s = P1 \cdot v^2 + P2$  boli určené parametre  $P1$  a  $P2$ . Zo závislosti

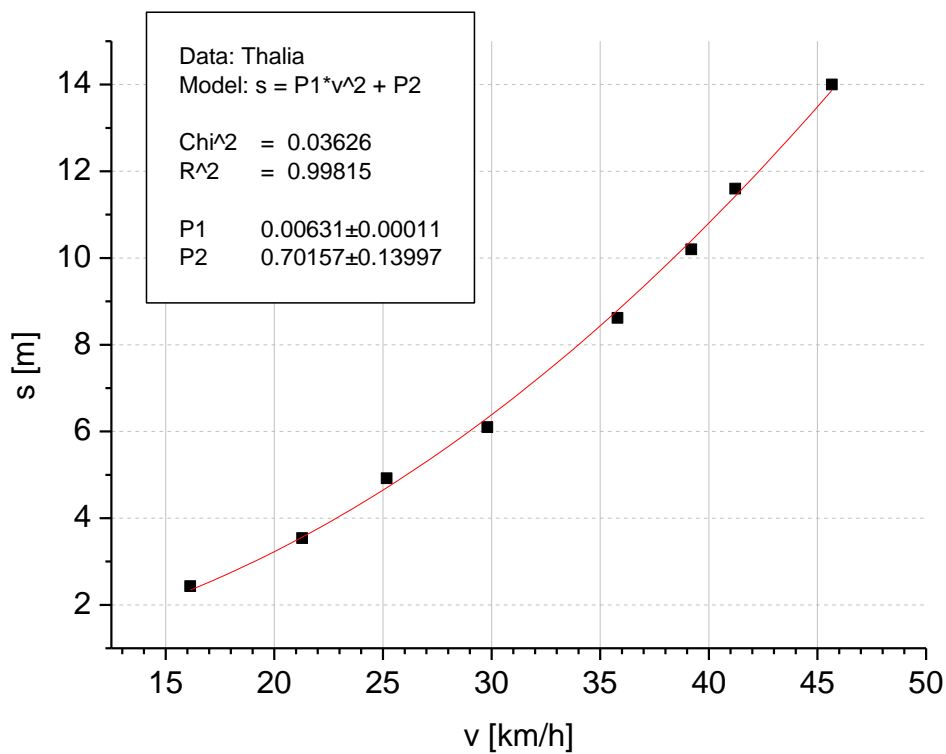
$$s = \frac{v^2}{2g\mu} \quad (3.12)$$

bol určený faktor statického trenia medzi miestami mokrým asfaltom po topiacom sa snehu a gumenými zimnými pneumatikami, ktorého vypočítaná hodnota bola  $\mu = 0,62$ .



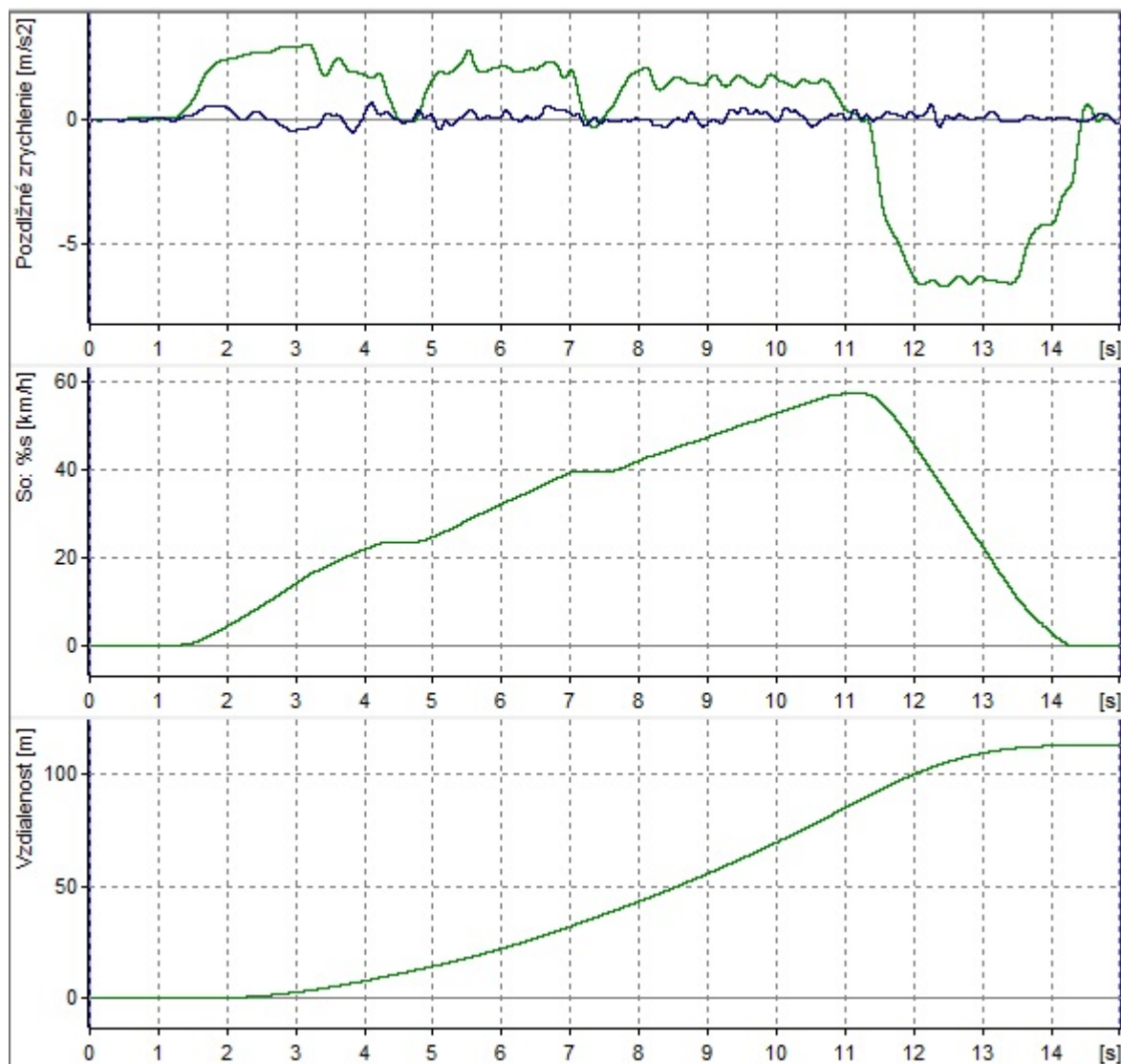


Obr. 3.10 Graf časovej závislosti rýchlosti v procese brzdenia auta so zimnými pneumatikami



Obr. 3.11 Graf závislosti brzdenj dráhy od rýchlosti, pri ktorej začalo auto brzdiť na miestami mokrej vozovke po topiacom sa snehu so zimnými pneumatikami.

Podobným spôsobom bolo analyzované aj ďalšie video (Renault Thalia, mokrý asfalt po topiacom sa snehu, zimné pneumatiky, iný šofér), pričom bolo jednak natáčané video a vo vnútri auta bol profesionálny prístroj XL meter, ktorý zaznamenával celý proces pohybu (od rozbehu až po zastavenie) a po spracovaní nameraných dát vypisoval hodnotu priemerného spomalenia, počiatkovej rýchlosti, pri ktorej sa začalo brzdiť, brzdné dráhy a času, ktorý auto brzdilo. Dané údaje boli zaznamenané do grafu spolu aj s údajmi, ktoré boli zistené pomocou videoanalýzy. Možno ukázať, že výsledné priebehy určené z videomerania pomocou programu Tracker a XL metra sú takmer identické (Hockicko, 2013).



**Obr. 3.12** Analýza brzdného procesu použitím prístroja XL meter a využitím softwaru XL Vision

Obr. 3.12 znázorňuje časové závislosti pozdĺžneho (pričného) zrýchlenia, rýchlosti a vzdialenosti od rozbehu automobilu až po samotný proces brzdenia. Za pomoci prístroja XL meter boli určené parametre brzdného procesu: brzdná dráha  $s = 23,85 \text{ m}$ , počiatková rýchlosť, pri ktorej auto začalo brzdiť  $v_0 = 58,60 \text{ km/h}$ , čas brzdenia  $t_{br} = 3,03 \text{ s}$  a veľkosť priemerného spomalenia  $a = 6,48 \text{ m/s}^2$ .

Ak by sme chceli byť ešte presnejší v určovaní brzdnéj dráhy, museli by sme k celkovej brzdnéj dráhe započítať aj dráhu prejdenu v dôsledku reakčného času a nábehu plného brzdného účinku (reakčný čas je približne  $t = 0,6 - 0,7 \text{ s}$  (ak je vodič pripravený brzdiť), prípadne  $t = 1,6$

(1,8) s pre indisponovaného (nepozorného) vodiča, čas oneskorenia brzd  $t = 0,05$  s a čas nábehu brzdného účinku  $t = 0,15$  s (pre brzdné systémy s hydraulickým prenosom síl) (Rievaj a kol., 2013)).

### Úloha 3-4:

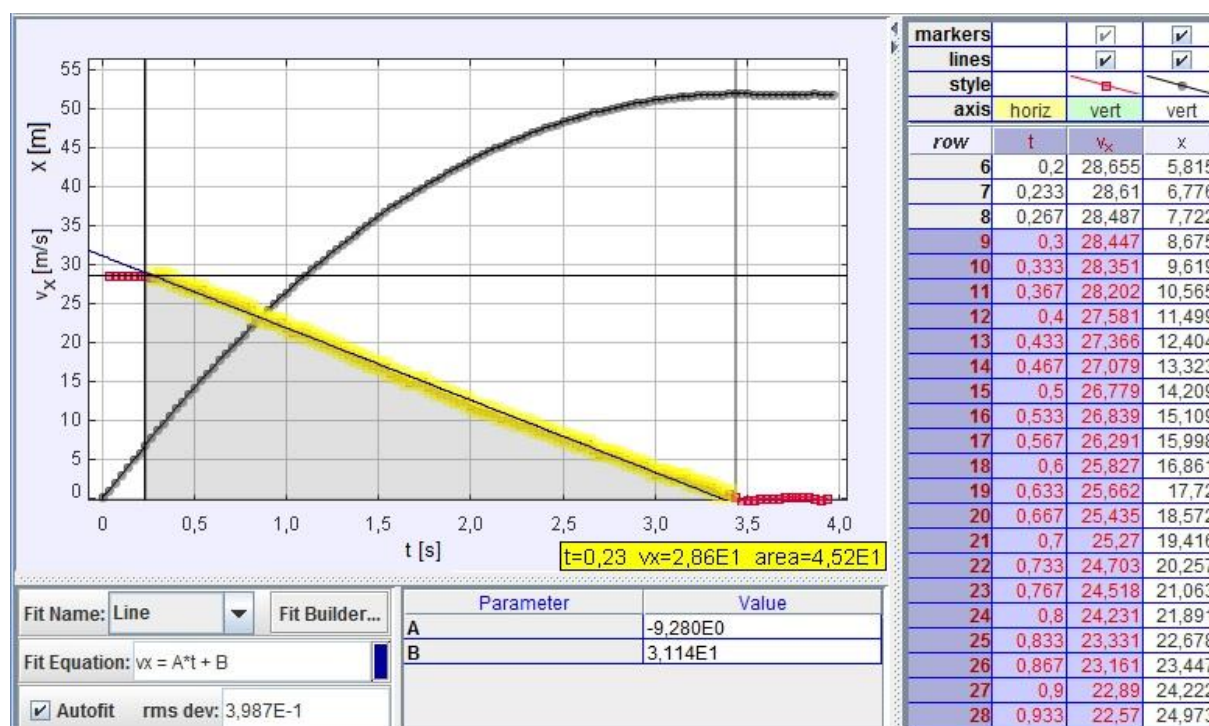
Určte brzdné dráhy auta Citroen C6 pri brzdení na suchej a mokrej vozovke pri rôznych počiatkových rýchlostiach. (Hodnoty spracujte graficky.) Určte priemerné spomalenia a faktor šmykového trenia.

(dĺžka auta: 4,908 m, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [Citroen.wmv](#), [Citroen.mokro.wmv](#)

### Riešenie:

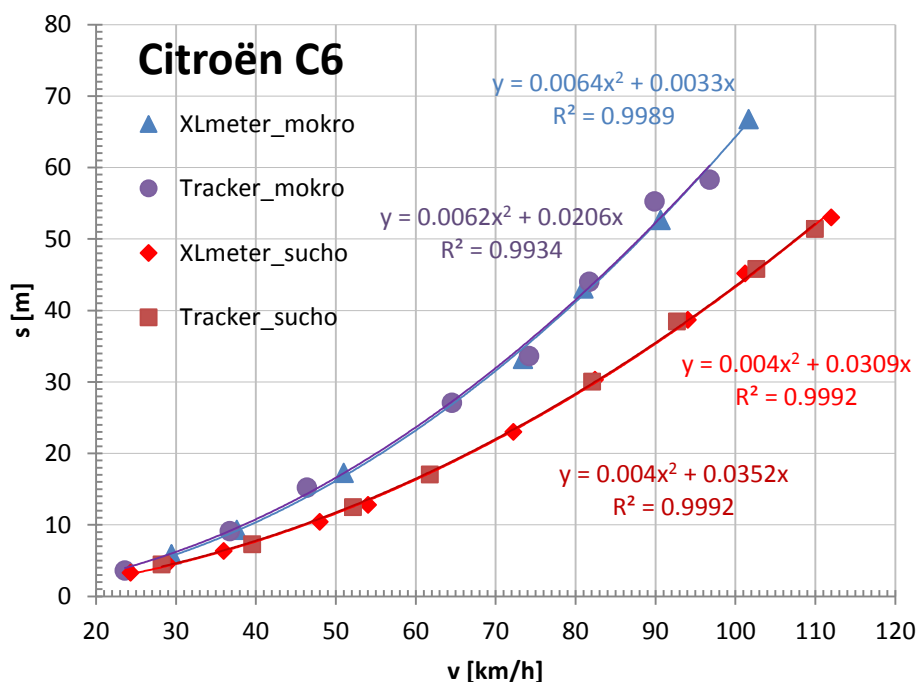
Nasledujúci Obr. 3.13 znázorňuje analýzu časových priebehov prejdenej dráhy a rýchlosti pri plnom zošliapnutí brzdného pedálu. Z analýzy bolo určené, že auto začína brzdiť pri počiatkovej rýchlosti 28,6 m/s (102,96 km/h), brzdí so spomalením  $a = -9,28$  m/s<sup>2</sup> a prejde pri tom dráhu 45,2 m.



Obr. 3.13 Analýza časových závislosti dráhy a rýchlosti pri brzdení C6

Analýzou brzdného procesu pri rôznych počiatkových rýchlostiach je možné zostrojiť graf závislosti brzdného dráhy od počiatkovej rýchlosti, pri ktorej začína auto brzdiť. Pre ďalšiu analýzu boli použité výsledky získané pomocou videoanalýz brzdného procesu pri rôznych počiatkových rýchlostiach na suchej a mokrej vozovke a analýzy dát z prístroja XLmeter. Ako možno vidieť na Obr. 3.14, výsledky získané pomocou videoanalýz a XLmetra navzájom korešponujú. Závislosť prejdenej brzdného dráhy od počiatkovej rýchlosti, pri ktorej začína auto brzdiť je parabolická, pričom ako z grafov vyplýva, na mokrej vozovke je brzdná dráha vyššia a so zvyšujúcou rýchlosťou sa rozdiel medzi brzdnou dráhou na suchej a mokrej vozovke výrazne zväčšuje. Z analýzy dát boli určené hodnoty statického trenia medzi suchým a mokrým

asfaltom a univerzálnymi gumenými pneumatikami, ktorých vypočítané hodnoty boli  $\mu = 0,98$  a  $\mu = 0,63$ .



Obr. 3.14 Analýza brzdných dráh auta C6 na mokrej a suchej vozovke pri rôznych počiatkových rýchlostiach za pomoci videoanalýz a XLmetra

### Úloha 3-5:

Porovnajete brzdné dráhy domiešavača MAN ( $m = 22$  ton) a Mazdy3 ( $m = 1,2$  tony) pri brzdení na suchej vozovke pri rôznych počiatkových rýchlostiach. (Hodnoty spracujte graficky.) Určte faktor šmykového trenia. Závisí dĺžka brzdných dráh od hmotnosti?

(dĺžka osobného auta, pri ktorom brzdí domiešavač: 4,605 m, výška: 1,430 m, frekvencia snímok: 30 fps)

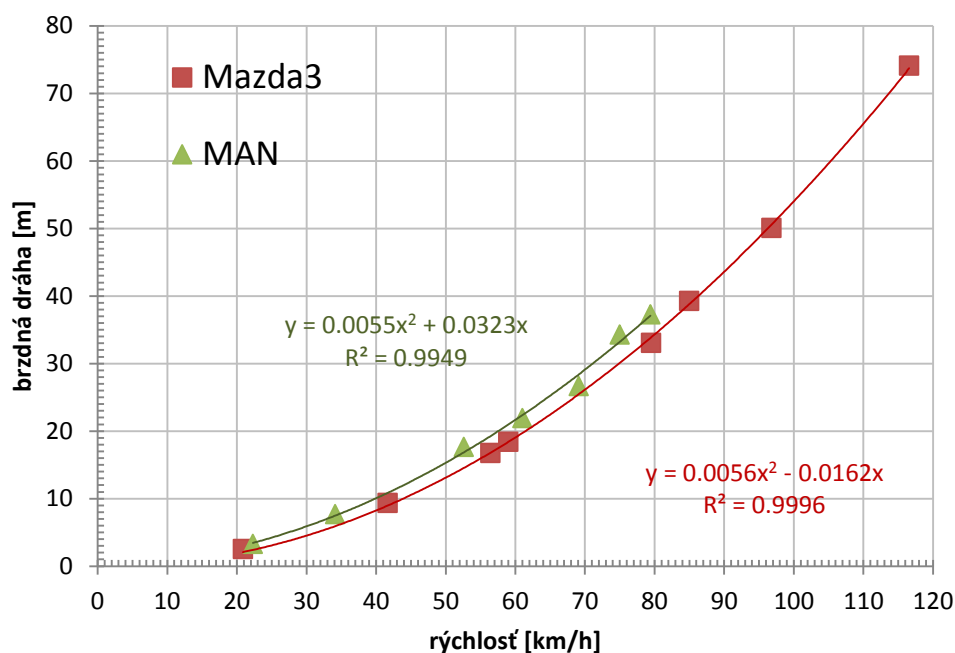
zdroj: [domiesavac.wmv](#)

(dĺžka auta Mazda3: 4,505 m, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [Mazda3.wmv](#)

### Riešenie:

Analýza tohto príkladu a počiatkové odhady brzdných dráh automobilov pri rovnakých rýchlostiach sa v mnohých prípadoch u študentov stretávajú s miskoncepciou: dĺžka brzdných dráh výrazne závisí od hmotnosti vozidla. Až 85% opýtaných študentov si myslí, že brzdná dráha domiešavača bude výrazne dlhšia ako brzdná dráha osobného auta pri rovnakej počiatkovej rýchlosti, 15% študentov si myslí opak. Aká je realita? Využitím videoanalýz brzdného procesu pri rôznych počiatkových rýchlostiach boli do spoločného grafu zaznamenávané hodnoty brzdných dráh 22 tonového domiešavača a 1,2 tonovej Mazdy3. Výsledok je znázornený na Obr. 3.15. Ako možno z daného grafického znázornenia brzdných dráh vidieť, brzdné dráhy sú takmer porovnateľné aj napriek výraznému hmotnostnému rozdielu medzi vyšetrovanými vozidlami. Z grafických závislostí boli určené hodnoty statického trenia medzi suchým asfaltom a gumenými pneumatikami, ktorých vypočítané hodnoty boli  $\mu_{MAN} = 0.72$  and  $\mu_{mazda} = 0.70$ .

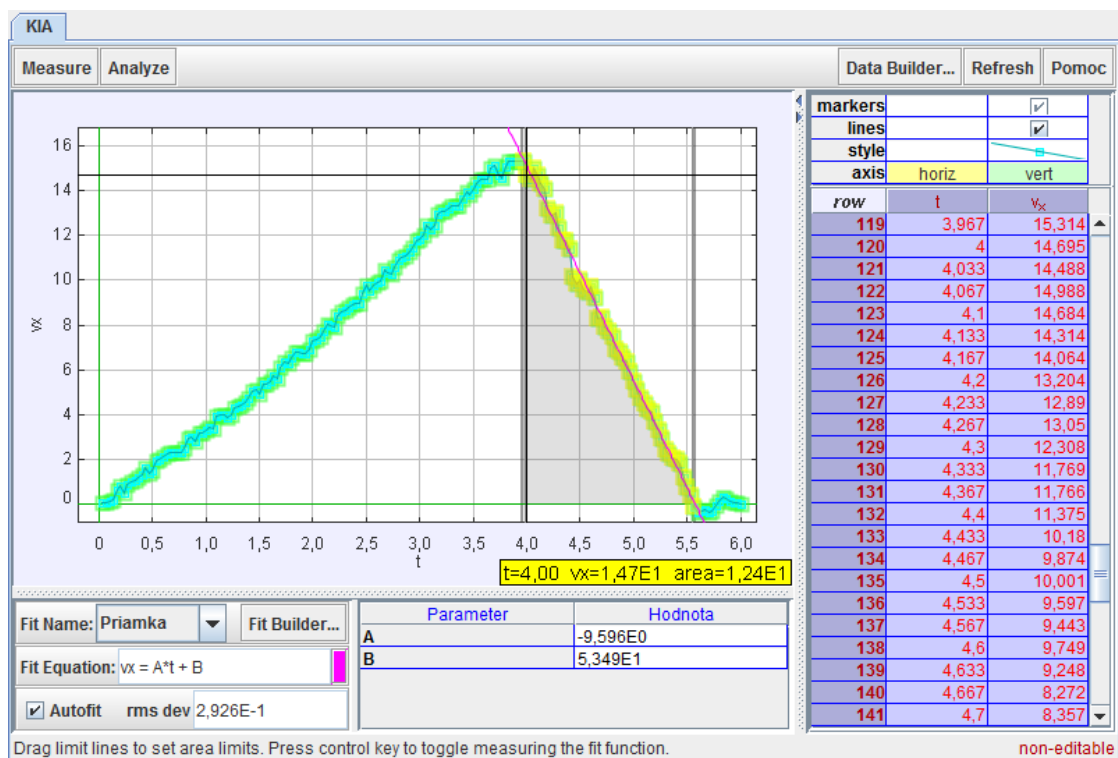


Obr. 3.15 Analýza brzdných dráh pre Mazdu3 a MAN

## Úloha 3-6:

Určte brzdnú dráhu auta Kia Soul a priemerné brzdné spomalenie.  
(dĺžka auta 4,140 m, hmotnosť auta je: 2040 kg, frekvencia snímok: 30 fps)  
zdroj: [kia.avi](#)

## Riešenie:



Obr. 3.16 Analýza brzdného spomalenia a brzdnjej dráhy

Analýzou Obr. 3.16 bolo určené, že auto začína brzdiť pri rýchlosti  $14,7 \text{ m/s}$  ( $52,9 \text{ km/h}$ ), priemerné spomalenie auta je  $a = -9,60 \text{ m/s}^2$  a auto prejde dráhu  $12,4$  metra.

**Neriešené úlohy:**

**Úloha 3-7:** Porovnajete brzdné dráhy auta Citroen C6 pri brzdení na vozovke s posypom (štrk po zimnej údržbe) a po úprave vozovky (odstránení posypu). Hodnoty spracujte graficky.

(dĺžka auta:  $4,908 \text{ m}$ , frekvencia snímok:  $120$  ( $30$ ) fps)

zdroj: [Citroen\\_posyp.wmv](#)

**Úloha 3-8:** Určte brzdné dráhy domiešavača ( $m = 22 \text{ ton}$ ) pri brzdení na suchej a mokrej vozovke pri rôznych počiatočných rýchlostiach. (Hodnoty spracujte graficky.) Určte priemerné spomalenia a faktor šmykového trenia. Závisí dĺžka brzdnjej dráhy od hmotnosti?

(dĺžka osobného auta:  $4,605 \text{ m}$ , výška:  $1,430 \text{ m}$ , frekvencia snímok:  $30$  fps)

zdroj: [domiesavac.wmv](#)

**Úloha 3-9:** Určte brzdné dráhy auta Mazda3 pri brzdení na suchej vozovke. Určte priemerné zrýchlenie a počiatočnú rýchlosť pri začatí brzdenia.

(dĺžka auta:  $4,505 \text{ m}$ , frekvencia snímok:  $30$  fps)

zdroj: [Mazda3.wmv](#)

**Úloha 3-10:** Určte brzdné dráhy áut pri brzdení na zasneženej vozovke pri rôznych počiatočných rýchlostiach. Určte priemerné spomalenia áut.

(frekvencia snímok:  $30$  fps)

zdroj: [auta\\_sneh.wmv](#)

**Úloha 3-11:** Určte brzdné dráhy auta Renault Thalia pri brzdení s rôznymi počiatočnými rýchlosťami na mokrej vozovke po topiacom sa snehu.

(dĺžka auta:  $4,171 \text{ m}$ , frekvencia snímok:  $30$  fps)

zdroj: [Thalia\\_mokro.wmv](#)

## 4. Gravitačné pole

Naša skúsenosť hovorí, že telesá voľne pustené z ruky, budú padať zvyčajne zvislo nadol (voľne pustená guľôčka, loptička). Telesá položené na vodorovnej podložke, pôsobia na ňu tlakovou silou, zavesené telesá pôsobia ťahovou silou na záves. Príčinou týchto javov je sila, ktorou Zem pôsobí na telesá nachádzajúce sa v jej okolí. Silové pôsobenie medzi Zemou a telesami je vzájomné (na základe 3. Newtonovho zákona). To, že sa prejavuje len pohybový účinok sily, ktorou Zem pôsobí na teleso, je spôsobené tým, že Zem má omoho väčšiu hmotnosť ako samotné teleso. Vzájomné silové pôsobenie Zeme a telesa je jednou zo všeobecných vlastností telies, ktorú nazývame **gravitácia**.

### 4.1 Newtonov gravitačný zákon

S prítomnosťou gravitačného poľa sa stretávame každý deň. Gravitačná sila je príťažlivou silou a pôsobí medzi každými dvoma hmotnými telesami. Jej smer je totožný so spojnicou ťažísk telies. Veľkosť a smer gravitačnej sily charakterizuje **Newtonov gravitačný zákon**, ktorý hovorí, že **dva hmotné body sa navzájom priťahujú rovnako veľkými gravitačnými silami, ale opačného smeru** ( $\vec{F}_{g1} = -\vec{F}_{g2}$ ). Pre gravitačnú silu teda platí:

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{mM}{r^3} \vec{r}, \quad (4.1)$$

kde  $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  je gravitačná konštanta,  $M$ ,  $m$  sú hmotnosti telies a  $r$  je ich vzdialenosť. Vzhľadom na nízku hodnotu gravitačnej konštanty môžeme konštatovať, že gravitačné sily sa prejavujú len vtedy, keď hmotnosť aspoň jedného telesa je veľmi veľká.

Každé hmotné teleso okolo seba vytvára gravitačné pole, ktoré sa prejavuje silovým pôsobením na iné hmotné telesá. Silové pôsobenie gravitačného poľa v danom mieste charakterizuje fyzikálna veličina **intenzita gravitačného poľa**. Definujeme ju ako podiel gravitačnej sily  $\vec{F}_g$  pôsobiacej na teleso s hmotnosťou  $m$  v danom mieste poľa a hmotnosti  $m$  tohto telesa:

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3} \vec{r}. \quad (4.2)$$

Intenzita gravitačného poľa je vektorová veličina, ktorej smer a orientácia je daná vektorom gravitačnej sily, pričom rozmer intenzity gravitačného poľa v SI je  $[K] = \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Jej jednotka je totožná s jednotkou zrýchlenia. Gravitačné pole udeľuje v každom mieste poľa telesu zrýchlenie veľkosti  $K$ . Ak sa teleso nachádza v poli viacerých hmotných telies, výsledná intenzita v mieste daného telesa je daná súčtom – superpozíciou intenzít jednotlivých telies  $\vec{K} = \sum \vec{K}_i$ .

Najznámejším a pre nás najdôležitejším gravitačným poľom je gravitačné pole Zeme. Pre jednoduchosť najprv predpokladajme, že naša Zem je guľa s homogénne rozloženou hmotnosťou. Pre veľkosť intenzity gravitačného poľa na povrchu Zeme platí:

$$K = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} = 9,8065 \text{ m/s}^2 = g. \quad (4.3)$$

**Intenzita gravitačného poľa** v danom mieste poľa sa teda rovná **gravitačnému zrýchleniu**. Veľkosť gravitačného zrýchlenia nezávisí od hmotnosti telesa  $m$ , ktoré sa v danom poli nachádza. Vzhľadom k tomu, že Zem má tvar geoidu (je na póloch sploštená) a rotuje, skutočné zrýchlenie, ktoré je telesám na zemskom povrchu udelené Zemou, sa nazýva **tiažové zrýchlenie**. Veľkosť tiažového zrýchlenia závisí od zemepisnej šírky.

Ďalšia veličina, ktorá charakterizuje gravitačné pole je **gravitačný potenciál**  $\varphi_g$ . Gravitačný potenciál v danom bode definujeme ako podiel gravitačnej potenciálnej energie  $E_p$  s hmotnosťou  $m$  v tomto bode poľa a hmotnosti tohto telesa

$$\varphi_g = \frac{E_p}{m}, \quad (4.4)$$

kde  $E_p = m K h$ . Potenciál gravitačného poľa v istom bode je teda určený podielom práce, ktorú vykoná gravitačná sila pri premiestnení telesa s hmotnosťou  $m$  z daného bodu poľa na povrch Zeme a hmotnosti tohto telesa. Jednotkou gravitačného potenciálu je  $J \cdot kg^{-1}$ . pomocou potenciálu vytvárame skalárne pole ako ďalší matematický model gravitačného poľa.

## 4.2 Pohyby telies v gravitačnom poli Zeme

Podľa Newtonovho gravitačného zákona vzťah  $F_g = m K$  (4.2) predstavuje silu, ktorou Zem pôsobí na teleso hmotnosti  $m$  vo vzdialenosti  $r > R_Z$  od stredu Zeme. Na teleso, ktoré sa nachádza na povrchu Zeme, pôsobí **tiažová sila**  $F_G = mg$ . Veľkosť tiažovej a gravitačnej sily Zeme sa líši z nasledujúcich dôvodov:

- Gravitačná sila závisí od vzdialenosti telesa od stredu Zeme, ale Zem nie je dokonalá guľa, je to elipsoid sploštený na póloch. Tiažové zrýchlenie rastie smerom od rovníka k pólu - mení sa so zemepisnou šírkou.
- Hustota Zeme sa mení v jednotlivých oblastiach pod povrchom Zeme. Preto tiež tiažové zrýchlenie je rôzne na rôznych miestach Zeme.
- Najväčší vplyv má však rotácia Zeme. Na teleso na povrchu Zeme pôsobí gravitačná sila  $F_g$  a súčasne aj odstredivá sila  $F_o = m \omega^2 r$ , pretože Zem rotuje uhlovou rýchlosťou  $\omega$  (uvažujeme o neinerciálnej vzťažnej sústave). Uhlová rýchlosť rotácie Zeme je na všetkých zemepisných šírkach rovnaká, no polomer otáčania  $r$  sa smerom od rovníka ( $r = R_Z$ ) znižuje. Výsledná tiažová sila pôsobiaca na teleso je daná vektorovým súčtom gravitačnej a odstredivej sily, ak zanedbáme ostatné sily:

$$\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_o$$

Keďže veľkosť odstredivej sily  $\vec{F}_o$  sa mení so zemepisnou šírkou polohy telesa na povrchu Zeme (najväčšia je na rovníku a nulová je na zemepisných póloch), mení sa so zemepisnou šírkou aj veľkosť tiažovej sily  $\vec{F}_G$  a tiažového zrýchlenia  $\vec{g}$ . Na rovníku má tiažové zrýchlenie veľkosť  $9,780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , na póloch  $9,833 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Na metrologické účely bolo na druhej generálnej konferencii pre váhy a miery v roku 1901 zavedené **normálne tiažové zrýchlenie**, ktoré má hodnotu

$$g = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

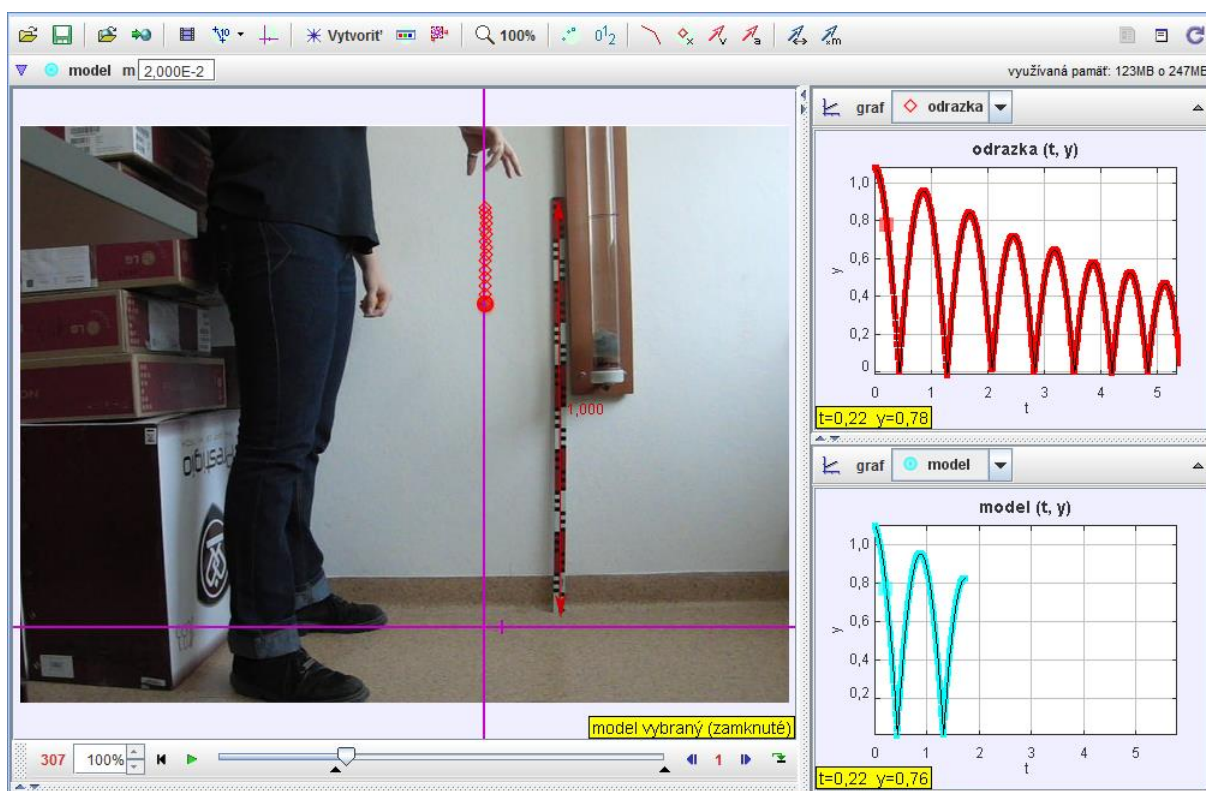
Táto hodnota odpovedá severnej zemepisnej šírke  $45^\circ$  na úrovni mora. U nás má tiažové zrýchlenie hodnotu približne  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Okrem pojmu tiažová sila sa používa aj pojem **tiaž telesa**  $\vec{G}$ . Tiaž telesa sa prejavuje buď ako tlaková sila, ktorou pôsobí teleso na nehybnú vodorovnú podložku, alebo ako ťažná sila, ktorou teleso pôsobí na nehybný zvislý záves. Pôsobisko tiažovej sily leží v ťažisku, pôsobisko tiaže dávame do dotykovej plochy telesa s podložkou alebo do pevného bodu závesu.



Hmotnosť telies dokážeme určiť vážením telies na rovnoramenných váhach. Ak na jednu misku pôsobí tiaž telesa  $\vec{G}_1 = m_1 \vec{g}$ , rovnováha nastane, ak na druhú misku dáme závažie tiaže  $\vec{G}_2 = m_2 \vec{g}$ , pričom  $\vec{G}_1 = \vec{G}_2$ , a teda aj  $m_1 \vec{g} = m_2 \vec{g}$ . Keďže tiažové zrýchlenie  $\vec{g}$  je pre obe misky rovnaké, bude platiť aj  $m_1 = m_2$ . Z rovnosti tiaže telesa a tiaže závažia vyplýva aj rovnosť hmotností oboch telies.

V ďalšej časti sa sústreďíme na pohyby v blízkosti zemského povrchu. Rovnice popisujúce rovnomerne zrýchlený pohyb platia pre zvislý vrh v blízkosti zemského povrchu (ak je odpor vzduchu zanedbateľný), t.j. do výšok zanedbateľne malých oproti zemskému polomeru, teda  $h \ll 6.10^3 \text{ km}$ . Medzi tieto pohyby patria tzv. vrhy ako šikmý vrh, vodorovný vrh, zvislý vrh nahor, zvislý vrh nadol a voľný pád. Pre ne sa odvodí všeobecný tvar pohybovej rovnice, z ktorej je možné jednoduchým dosadením počiatočných podmienok určiť výsledné vzťahy pre príslušný druh pohybu.



Obr. 4.1. Analýza pohybu v tiažovom poli Zeme v súradnicovom systéme  $x, y$

#### 4.2.1 Pohybová rovnica pre popis v malých výškach

Pri riešení všetkých pohybov v klasickej mechanike vychádzame z II. Newtonovho pohybového zákona matematicky sformulovaného vzťahom (2.1). Z daného zákona pre zrýchlenie teda platí

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i, \quad (4.5)$$

kde  $\vec{F}$  je výslednica všetkých síl pôsobiacich na teleso. Jednotlivé sily  $\vec{F}_i$  sú sily, ktoré jednak spôsobujú pohyb a tiež pôsobia proti pohybu. Často pohyby telies analyzujeme

v pravouhlom súradnicovom systéme  $(x, y, z)$ . V našom prípade budeme uvažovať len pôsobenie tiažovej sily

$$\vec{F}_G = (0, -mg, 0), \quad (4.6)$$

pričom vodorovný smer sme označili  $x$ , smer zvislo nahor sme označili  $y$ . Keďže rovnica (4.5) je vektorová rovnica, predstavuje vlastne trojicu algebraických rovníc, pričom budeme uvažovať len tiažovú silu (4.6). V kartézskom súradnicovom systéme majú algebraické rovnice vektorovej rovnice (4.5) tvar

$$a_x = 0, \quad a_y = -g, \quad a_z = 0, \quad (4.7)$$

kde  $a_x, a_y, a_z$  sú zložky vektora  $\vec{a}$  a  $F_x, F_y, F_z$  sú zložky výslednice vektora  $\vec{F}$ .

Na to, aby sme mohli určiť rýchlosť  $\vec{v}$  a dráhu  $\vec{s}$  ako funkcie času  $t$  pre dané teleso potrebujeme vedieť okrem pôsobiacich síl aj *počiatočné podmienky*. Tie vo všeobecnosti určujú, akú malo teleso počiatočnú rýchlosť  $\vec{v}_0$  a počiatočnú polohu  $\vec{r}_0$  v čase  $t = 0$ ,

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}), \quad \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad (4.8)$$

t.j. v okamihu, keď na teleso začala pôsobiť sila  $\vec{F}$ .

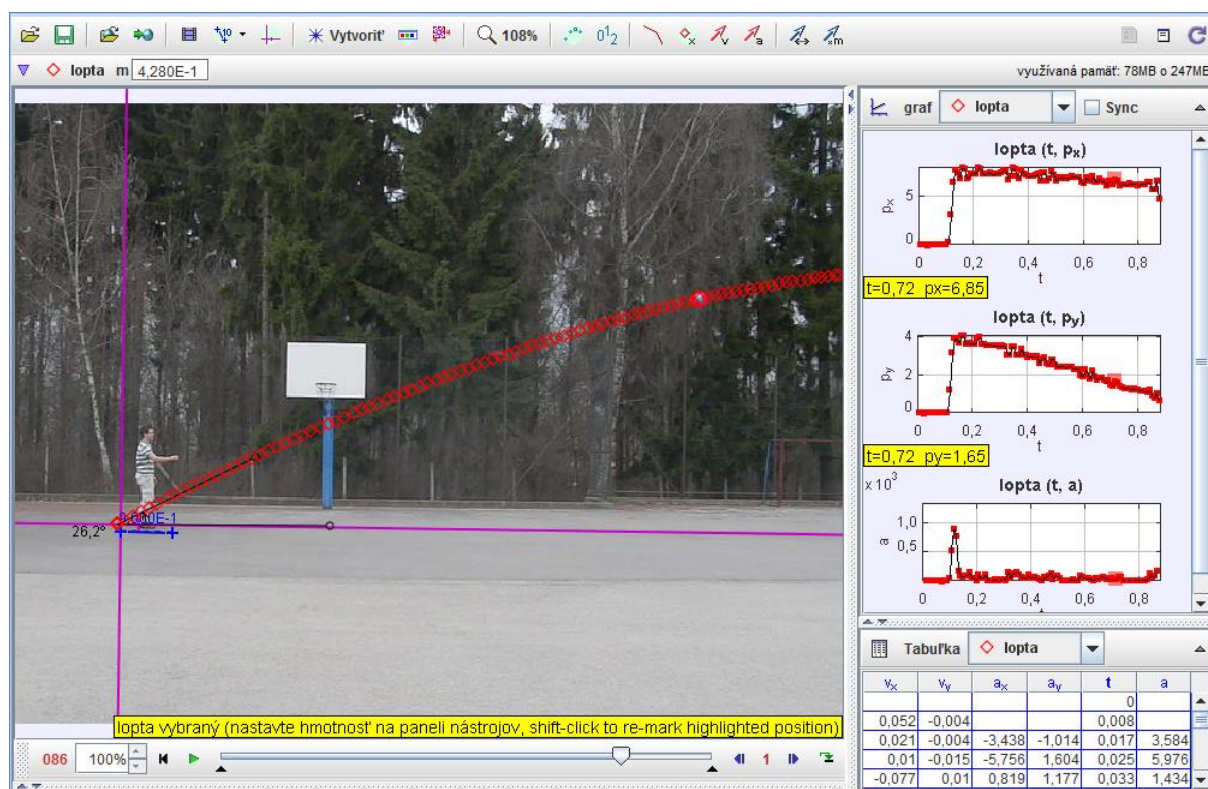
Riešenie pohybových rovníc (4.7) s počiatočnými podmienky (4.8) si budeme ilustrovať na popise pohybu telies v tiažovom poli Zeme. Predpokladajme, že máme hmotný bod, ktorý sa môže nachádzať v nie príliš veľkých výškach nad zemským povrchom vo výške menšej ako 100 m. Tento predpoklad zabezpečí, že tiažovú silu pôsobiacu na teleso môžeme považovať za konštantnú (4.6). Ďalej predpokladajme, že hmotný bod sa nachádza vo vákuu. Takýto predpoklad zase zabezpečí, že nemusíme uvažovať odporové sily, ktoré by pôsobili na teleso pohybujúce sa v atmosfére. Pre ďalšie zjednodušenie budeme uvažovať len dvojrozmerný súradnicový systém  $xy$  tak, že os  $x$  bude rovnobežná so zemským povrchom a os  $y$  bude na ňu kolmá (viď. Obr. 4.1). Pre výsledné všeobecné vyjadrenia rýchlosti a dráhy hmotného bodu v smere osi  $x$  a  $y$  môžeme písať

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x}, & v_y &= v_{0y} - gt, \\ x &= x_0 + v_{0x}t, & y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Zo všeobecných rovníc pre rýchlosť a dráhu v smere osi  $x$  a  $y$  môžeme podrobnejšie charakterizovať jednotlivé špeciálne prípady pohybu hmotného bodu v spomínanom poli a určiť špecifiká daných pohybov.

### 4.2.2 Šikmý vrh

Šikmý vrh je pohyb, kedy je teleso vrhnuté počiatočnou rýchlosťou  $\vec{v}_0$  v rovine  $xy$  pod určitým uhlom  $\alpha$  s osou  $x$ , t.j. so zemským povrchom (Obr. 4.2).



Obr. 4.2. Šikmý vrh

Pohyb telesa aj v tomto prípade popisujú rovnice (4.9) s určitými počiatocnými podmienkami: v čase  $t = 0\text{s}$  sa  $\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$  a taktiež  $x_0 = y_0 = 0$ . Keď dosadíme dané počiatocné podmienky do rovníc (4.9), následne dostaneme:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (4.10)$$

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2, \quad (4.11)$$

pričom uvažujeme o pohybe len v rovine  $xy$ . Po matematických úpravách je možné dopracovať sa k rovnici:  $y = x \tan \alpha - x^2 g / (2 v_0^2 \cos^2 \alpha)$ , čo predstavuje rovnicu paraboly.

V prípade šikmého vrhu je viacero dôležitých parametrov, ktoré môžeme vypočítať jednoduchou úpravou:

- čas dosiahnutia maximálnej výšky  $H$  (kedy platí, že  $y$ -ová zložka rýchlosti je rovná 0):

$$t_H = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (4.12)$$

- súradnice vrcholu  $H$ :

$$x_H = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2g}, \quad y_H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad (4.13)$$

- čas dopadu:

$$t_D = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2t_H, \quad (4.14)$$

- vzdialenosť dopadu od miesta odkopu lopty:

$$x_D = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (4.15)$$

Výslednú rýchlosť dopadu vypočítame využitím  $x$ -ovej zložky rýchlosti  $v_x = v_0 \cos \alpha$  a  $y$ -ovej  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ . Výsledná rýchlosť je teda daná vzťahom:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha + (gt)^2 - 2v_0gt \sin \alpha} = \\ &= \sqrt{v_0^2 + (gt)^2 - 2v_0gt \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

### 4.2.3 Zvislý vrh nahor

Zvislý vrh nahor predstavuje vyhodenie napr. lopty smerom nahor ([vrh\\_nahor2.avi](#)). Tento pohyb môžeme považovať za šikmý vrh, pričom uhol  $\alpha$ , pod ktorým sa lopta vyhadzuje je  $90^\circ$ . Dosadením daných parametrov do rovníc (4.9) a (4.10) a počiatočných podmienok  $v_{0x} = 0 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 0 \text{ m}$  (teleso sa pohybuje len v smere osi  $y$ , teda  $x$ -ová zložka rýchlosti a polohy sa rovná 0),  $y_0 = h$  (pohyb sa uskutočňuje v smere osi  $y$  s počiatočnou rýchlosťou  $v_0 > 0$ ) dostaneme

$$v_x = 0 \text{ m}, \quad v_y = v_0 - gt, \quad (4.17)$$

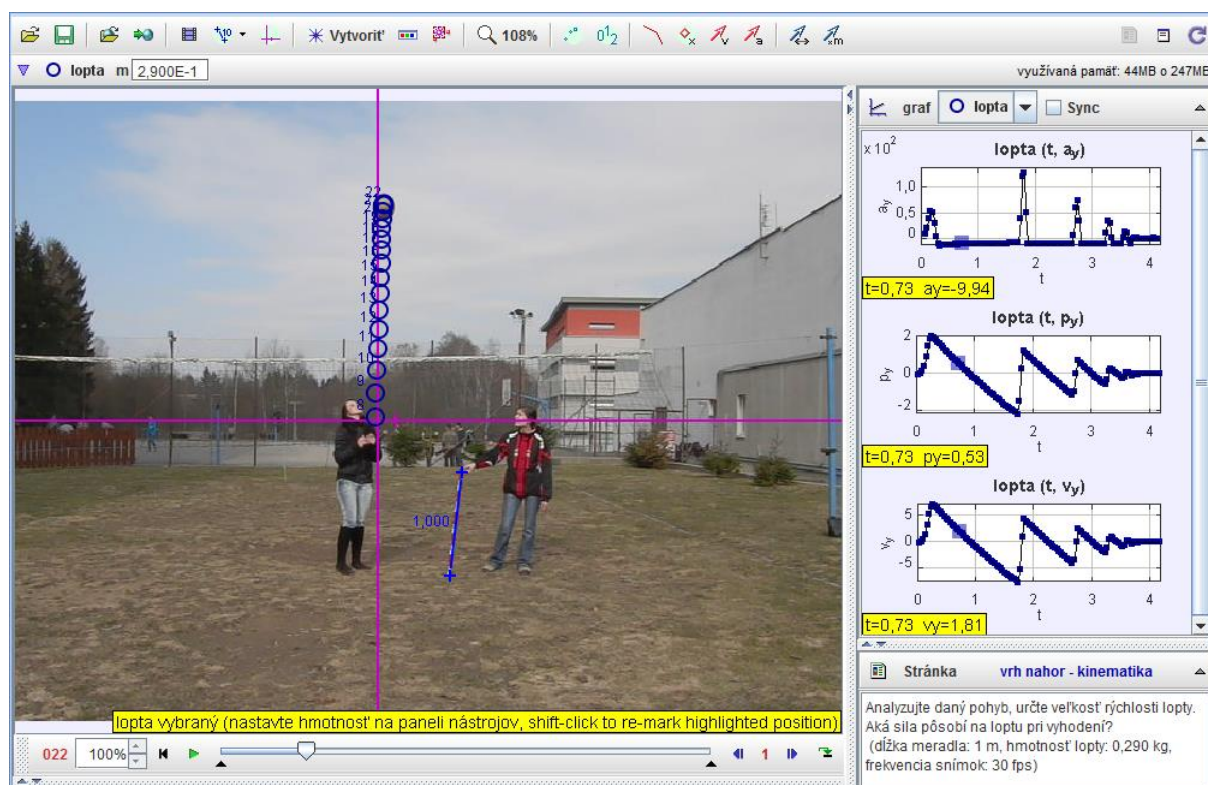
$$x = 0 \text{ m}, \quad y = h + v_0t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (4.18)$$

Zo skúsenosti vieme, že teleso postupne spomaľuje, až nakoniec zastane v najvyššom bode svojho pohybu a potom začne voľne padať smerom nadol. Keďže teleso v najvyššom bode  $h_{\max}$  má nulovú rýchlosť  $v_y(h_{\max}) = 0 \text{ m/s}$ , dá sa z tejto informácie vypočítať, za aký čas dosiahne teleso maximálnu výšku:

$$t_V = \frac{v_0}{g}. \quad (4.19)$$

Ak do vzťahu pre dráhu v smere osi  $y$  (4.18) dosadíme čas  $t_V$ , pre maximálnu výšku  $h_{\max}$  dostaneme vzťah

$$h_{\max} = h + \frac{v_0^2}{2g}. \quad (4.20)$$



Obr. 4.3 Vrh zvislo nahor

#### 4.2.4 Zvislý vrh nadol

Pri zvislom vrhu nadol udelíme lopte počiatočnú rýchlosť v zápornom smere osi  $y$  ( $v_0 < 0$ ) a loptu vrháme pod uhlom  $\alpha = -90^\circ$ . Dosadením daných parametrov do rovníc (4.9) a (4.10) a počiatočných podmienok  $v_{0x} = 0$  m/s,  $x_0 = 0$  m (teleso sa pohybuje len v zápornom smere osi  $y$ , teda  $x$ -ová zložka rýchlosti a polohy sa rovná 0),  $y_0 = h$ , dostaneme

$$v_x = 0 \text{ m}, \quad v_y = -v_0 - g t, \quad (4.21)$$

$$x = 0 \text{ m}, \quad y = h - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (4.22)$$

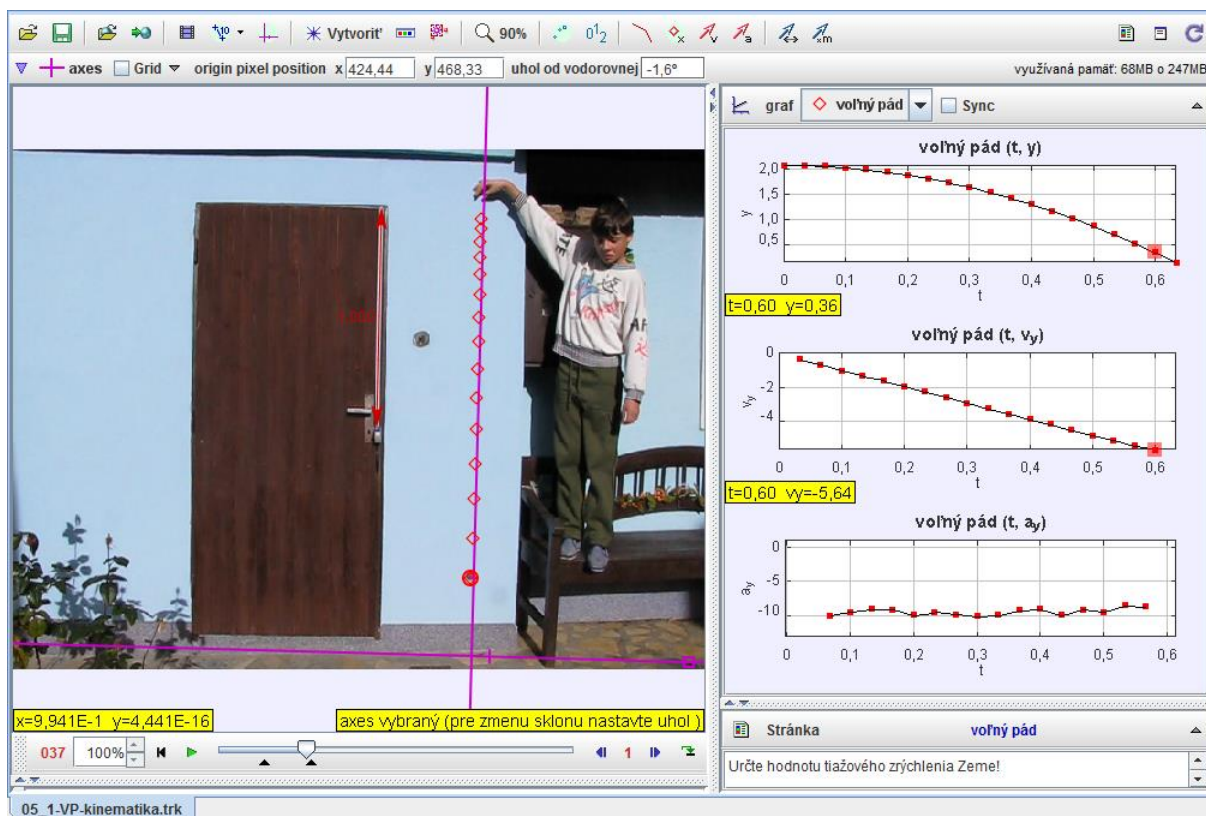
#### 4.2.5 Voľný pád

Voľný pád je pohyb, ktorý vykonáva predmet voľne spustený z určitej výšky  $h$  nad zemským povrchom (Obr. 4.4), pričom predpokladáme homogénne gravitačné pole. V tomto prípade neuvažujeme o odpore vzduchu. Predpokladajme, že v čase  $t = 0$  s boli počiatočné podmienky voľného pádu nasledovné:  $v_{0x} = v_{0y} = 0$  (nulová rýchlosť)  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = h$ . Z našich všeobecných rovníc (4.9) pre voľný pád dostaneme

$$v_x = 0, \quad v_y = -g t, \quad (4.23)$$

$$x = 0, \quad y = h - \frac{1}{2} g t^2. \quad (4.24)$$

Z týchto rovníc vyplýva, že pri voľnom páde pohyb prebieha len v smere  $y$ -ovej osi a jedná sa o pohyb rovnomerne zrýchlený smerom nadol. Jednoduchými výpočtami sa dajú určiť aj niektoré ďalšie vlastnosti voľného pádu.



Obr. 4.4 Voľný pád

Čas dopadu telesa  $t_d$  môžeme určiť z rovnice pre  $y$ -ovú súradnicu (4.24). Keď teleso dopadne na povrch Zeme, tak  $y = 0$  m a potom pre čas dopadu platí:

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}} . \quad (4.25)$$

Ďalším dôležitým parametrom je rýchlosť dopadu  $v_d$ , ktorou teleso dopadne na zemský povrch. Môžeme ju určiť zo vzťahu pre rýchlosť (4.23) tak, že za čas  $t$  dosadíme predchádzajúci vzťah  $t_d$ . Pre absolútnu hodnotu rýchlosti potom dostaneme:

$$v_d = \sqrt{2gh} . \quad (4.26)$$

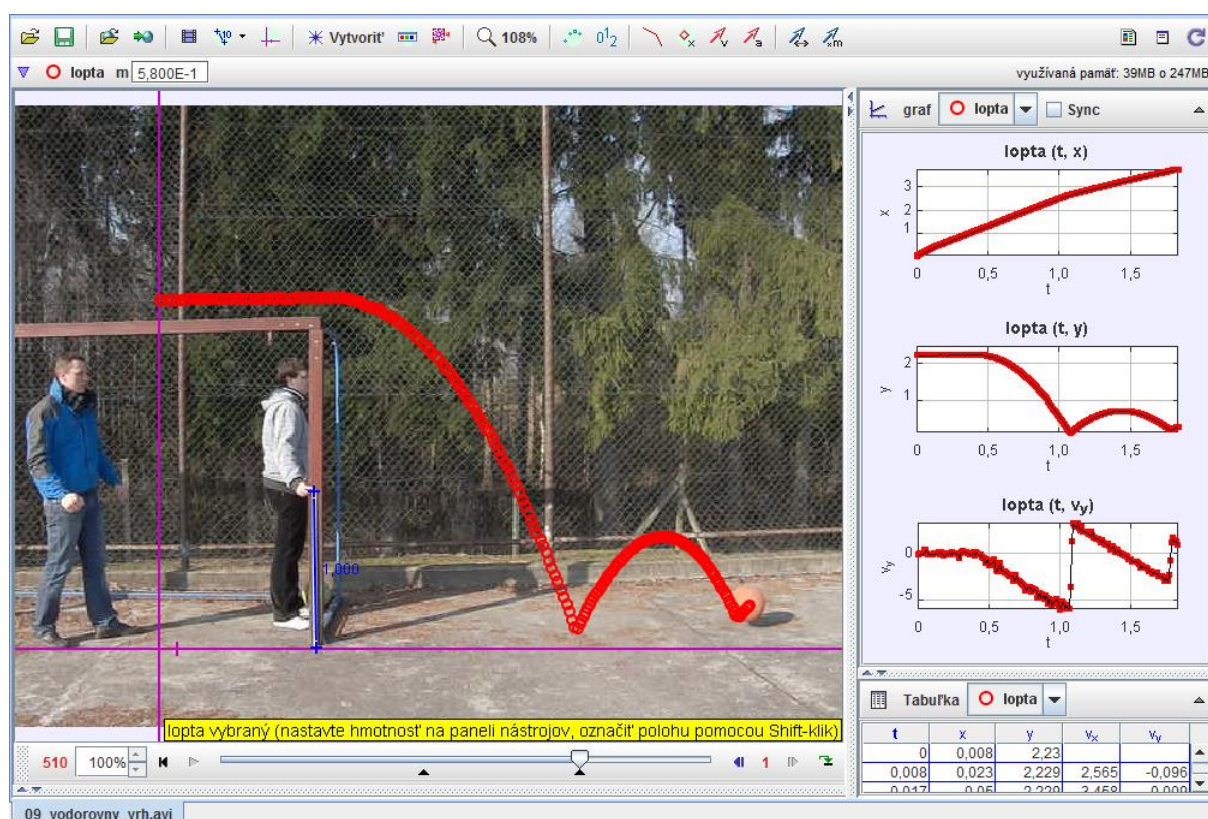
Na vzťahoch (4.25) a (4.26) je zaujímavé, že sa v nich nevyskytuje hmotnosť telesa. To ale znamená, že telesá s rôznymi hmotnosťami (napr. pierko sliepky a 1 kg kniha) spustené z rovnakej výšky, by za našich predpokladov, ktoré sme si stanovili na začiatku (bezodporové prostredie a malá výška nad zemským povrchom), dopadli naraz a s rovnakými rýchlosťami. Vplyv odporovej sily na pohyb reálnych telies budeme riešiť neskôr v kapitole Modelovanie reálnych dejov v programe Tracker.

Riešenie voľného pádu a vrhu nahor je možné aj z pohľadu zákona zachovania energií. V prípade voľného pádu i vrhu nahor uvažujeme o dvoch stavoch: I. maximálna výška a II.

poloha telesa tesne pred dopadom. V I. stave uvažujeme len polohovú energiu telesa  $E_I = E_p = m g h$ , pretože teleso na začiatku pohybu má nulovú rýchlosť a v II. stave zase uvažujeme len kinetickú energiu  $E_{II} = E_k = \frac{1}{2} m v^2$ , polohová energia je nulová ( $h = 0$ ). Keď dáme do rovnosti tieto energie dostávame vzťah buď pre rýchlosť dopadu pri voľnom páde (4.26) alebo pre maximálnu výšku vrhu nahor (4.20).

### 4.2.6 Vodorovný vrh

Vodorovný vrh je pohyb, kedy je teleso v určitej výške  $h$  nad zemským povrchom vrhnuté vodorovne s počiatkovou rýchlosťou  $v_0$  (Obr. 4.5).



Obr. 4.5. Vodorovný vrh

Jeho pohyb popisujú tie isté rovnice (4.9) ako pri vrhu zvislo nahor, nadol a voľnom páde, len s inými počiatkovými podmienkami. Oproti predošlým pohybom, tento pohyb sa uskutočňuje v rovine  $x, y$ . Vodorovný vrh je možné zložiť z dvoch pohybov: rovnomerný pohyb v smere osi  $x$  a voľný pád v smere osi  $y$ . Počiatkové podmienky pre tento pohyb sú nasledovné: teleso je vystrelené v smere osi  $x$  ( $x = 0$ ) s počiatkovou rýchlosťou  $v_0 = v_x$  z počiatkovej výšky  $y_0 = h$ . Po dosadení týchto počiatkových podmienok do rovníc (4.9) dostaneme

$$v_x = v_0, \quad v_y = -g t, \quad (4.27)$$

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{1}{2} g t^2. \quad (4.28)$$

Pri vodorovnom vrhu sa teleso pohybuje po krivke, ktorá sa dá popísať parabolou v tvare:  $y = h - x^2 g / (2 v_0^2)$ . Čas dopadu sa zhoduje s časom určeným pri voľnom páde  $t_d = \sqrt{2h/g}$

(4.25). Vzďialenosť dopadu pri vodorovnom vrhu je možné určiť zo vzťahu pre  $x$ -ovú súradnicu (4.28) tak, že za čas  $t$  dosadíme čas dopadu  $t_d$ . Pre vzďialenosť dopadu  $x_d$  potom platí:

$$x_d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} . \quad (4.29)$$

Výpočet rýchlosti dopadu je v tomto prípade zložitejší, lebo výsledná rýchlosť sa skladá z  $x$ -ovej zložky rýchlosti  $v_x = v_0$  a  $y$ -ovej  $v_y = -gt_d = \sqrt{2gh}$ . Výsledná rýchlosť je teda daná vzťahom:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} , \quad (4.30)$$

pričom s osou  $x$  zvierá uhol

$$\beta = \arctan(v_y / v_x) = \arctan(\sqrt{2gh} / v_0) . \quad (4.31)$$

#### Úloha 4-1:

**Analyzujte daný pohyb, určte rýchlosti lopty a veľkosť tiažového zrýchlenia v jej maximálnej výške.**

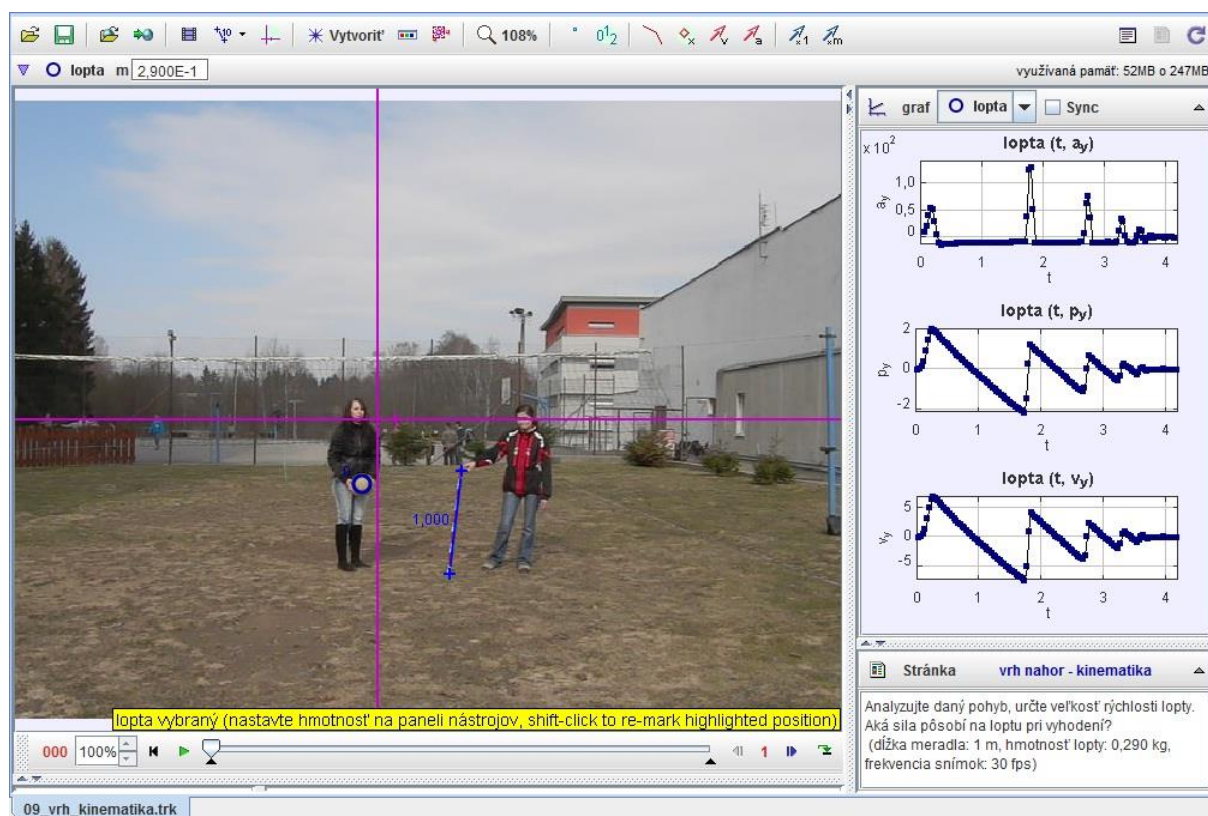
**(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,290 kg, frekvencia snímok: 30 fps)**

**zdroj: [vrh\\_nahor2.avi](#)**

#### Riešenie:

Na Obr. 4.6 je znázornená analýza pohybu lopty vyhodenej zvislo nahor. Hodnotu rýchlosti a zrýchlenia v maximálnej polohe lopty je možné určiť z časových závislostí. Ako zo skúseností vieme, rýchlosť lopty v maximálnej polohe bude nulová (v čase blízko 1s), problém však robí určenie zrýchlenia, ktoré mnohí študenti v maximálnej polohe lopty považujú za nulové. Hodnotu okamžitého zrýchlenia možno určiť aj ako smernicu dotyčnice ku grafu závislosti rýchlosti na čase a tá bude rovnaká pre prípad pohybu lopty nahor (po opustení rúk) aj pre pohyb nadol (pokiaľ sa lopta neodrazí od zeme) a taktiež aj v maximálnej polohe lopty. Pre určenie hodnoty priemerného zrýchlenia je možné použiť lineárnu regresiu.





Obr. 4.6 Analýza zvislého vrhu smerom nahor

**Neriešené úlohy:**

**Úloha 4-2:** Určte hodnotu tiažového zrýchlenia Zeme. Akou rýchlosťou je lopta vyhodená a akou rýchlosťou dopadne?  
(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,580 kg, frekvencia snímok: 120 fps) zdroj: [vrh\\_nahor.avi](#)

**Úloha 4-3:** Určte hodnotu tiažového zrýchlenia Zeme. Akou rýchlosťou sa lopta pohybuje vo vodorovnom smere? Aká sila pôsobí na loptu?  
(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,580 kg, frekvencia snímok: 120 fps) zdroj: [vodorovny\\_vrh.avi](#)

**Úloha 4-4:** Analyzujte daný pohyb, určte veľkosť rýchlosti lopty vo vodorovnom a zvislom smere. Aká veľká sila pôsobí na loptu pri kopnutí?  
(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,421 kg, frekvencia snímok: 120 fps) zdroj: [sikmy\\_vrh.avi](#)

**Úloha 4-5:** Analyzujte rýchlosť daného pohybu lopty, aká veľká sila pôsobí pri odrazoch?  
(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,610 kg, frekvencia snímok: 120 fps) zdroj:  
[vrh\\_nadol.avi](#)

**Úloha 4-6:** Analyzujte daný pohyb, určte veľkosť rýchlosti lopty. Aká veľká sila pôsobí na loptu pri hodení dole?  
(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,580 kg, frekvencia snímok: 120 fps) zdroj:  
[vrh\\_nadol2.avi](#)

## 5. Tuhé teleso

Pri niektorých úvahách a fyzikálnej interpretácii nevystačíme s mysleným pojmom hmotného bodu (napríklad pri otáčavom pohybe). Môžeme však zanedbať zmeny tvaru a objemu telies, ktoré nastávajú pôsobením vonkajších síl, a tak zavádzame pojem **tuhé teleso**. **Tuhé teleso je ideálne teleso, ktorého objem a tvar sa účinkom ľubovoľne veľkých síl nemení.**

Bod, v ktorom sila pôsobí na teleso, nazývame *pôsobisko sily*. Účinok sily pôsobiacej na teleso nezávisí len od veľkosti a smeru sily, ale aj od jej pôsobiska. Pri tuhom telese budeme skúmať otáčavý pohyb daného telesa. Na rozdiel od posuvného pohybu, kedy všetky body telesa majú rovnakú okamžitú rýchlosť, pri otáčavom pohybe budú mať všetky body tuhého telesa rovnakú uhlovú rýchlosť.

### 5.1 Moment sily

Schopnosť sily  $\vec{F}$  otáčať teleso okolo pevnej osi závisí nielen na veľkosti a smere sily, ale aj od polohového vektora  $\vec{r}$  pôsobiska sily vzhľadom na os otáčania a charakterizuje ho fyzikálna veličina nazývaná **moment sily**  $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (5.1)$$

Moment sily je vektorovou veličinou a jeho smer je kolmý k rovine vektorov  $\vec{r}$  a  $\vec{F}$ . Jeho smer určíme podľa pravidla pravej ruky: ak položíme pravú ruku na povrch telesa tak, aby prsty ukazovali smer pôsobiacej sily, ktorá spôsobuje otáčavý pohyb, vztýčený palec nám ukáže smer momentu sily. Jednotkou momentu sily je newton meter  $[M] = \text{N} \cdot \text{m}$ . Tak, ako hybnosť  $\vec{p}$  charakterizuje posuvný pohyb hmotného bodu, charakteristikou otáčavého pohybu okolo osi neprechádzajúcej hmotným bodom je **moment hybnosti**  $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}), \quad (5.2)$$

kde  $\vec{r}$  je polohový vektor hmotného bodu vzhľadom na os otáčania.

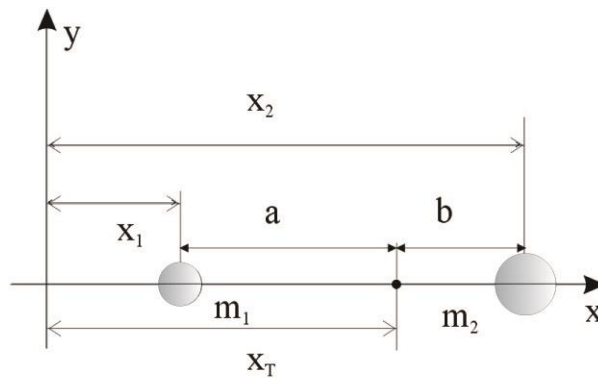
Tuhé teleso, ktoré sa môže otáčať okolo osi, bude v rovnovážnej polohe, keď vektorové súčty všetkých síl a všetkých momentov síl, ktoré na teleso pôsobia, budú nulové vektory.

### 5.2 Ťažisko telesa

Ťažisko telesa je definované ako pôsobisko tiažovej sily. Možno ho určiť ako priesečník ťažníc v telese. Ťažisko pravidelných rovnorodých telies, ktoré majú geometrický stred súmernosti: guľa, valec, obruč, kváder a pod. je v strede súmernosti daných telies. Ťažisko nerovnorodých telies alebo geometricky nepravidelných určujeme zvyčajne pokusom. Ťažisko môže ležať aj mimo telesa, napr. ťažisko prstenca, dutej gule, nádoby.

#### 5.2.1 Ťažisko sústavy dvoch a viacerých hmotných bodov

Pod pojmom ťažisko sústavy dvoch hmotných bodov budeme rozumieť taký bod, na spojnici daných bodov (Obr. 5.1), pre ktorý platí daná podmienka:



Obr. 5.1 Určenie polohy ťažiska sústavy dvoch hmotných bodov

$$\frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (5.3)$$

Keďže z daného obrázka vyplýva, že  $a = x_T - x_1$  a  $b = x_2 - x_T$ , po dosadení za  $a$  a  $b$  a úprave predošlej rovnice dostaneme:

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.4)$$

Daný vzťah je možné zovšeobecniť aj pre sústavu  $n$  bodov. Ak je poloha  $i$ -tého bodu  $x_i$  a jeho hmotnosť je  $m_i$ , potom pre  $x$ -ovú polohu ťažiska danej sústavy platí:

$$x_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad (5.5)$$

kde  $m$  je celková hmotnosť sústavy rovná súčtu hmotností jednotlivých hmotných bodov  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ .

Keďže v trojrozmernom karteziánskom priestore je každý hmotný bod určený trojicou súradníc  $(x_i, y_i, z_i)$ , aj pre charakteristiku ťažiska by bolo potrebné určiť súradnice  $y_T$  a  $z_T$ , obdobne, ako tomu bolo v prípade  $x_T$  a pre polohový vektor ťažiska môžeme teda písať:

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (5.6)$$

V prípade, že sústavu hmotných bodov nahradíme dokonale tuhým telesom so spojitou rozloženou hmotnosťou, môžeme pre polohový vektor ťažiska tuhého telesa písať:

$$\vec{r}_T = \frac{\int \vec{r} dm}{\int_m dm}. \quad (5.7)$$

**Úloha 5-1:**

**Analyzujte pohyb kladiva ako pohyb dvoch častí: poriska a kovovej časti kladiva, čo platí pre pohyb ich ťažiska?**

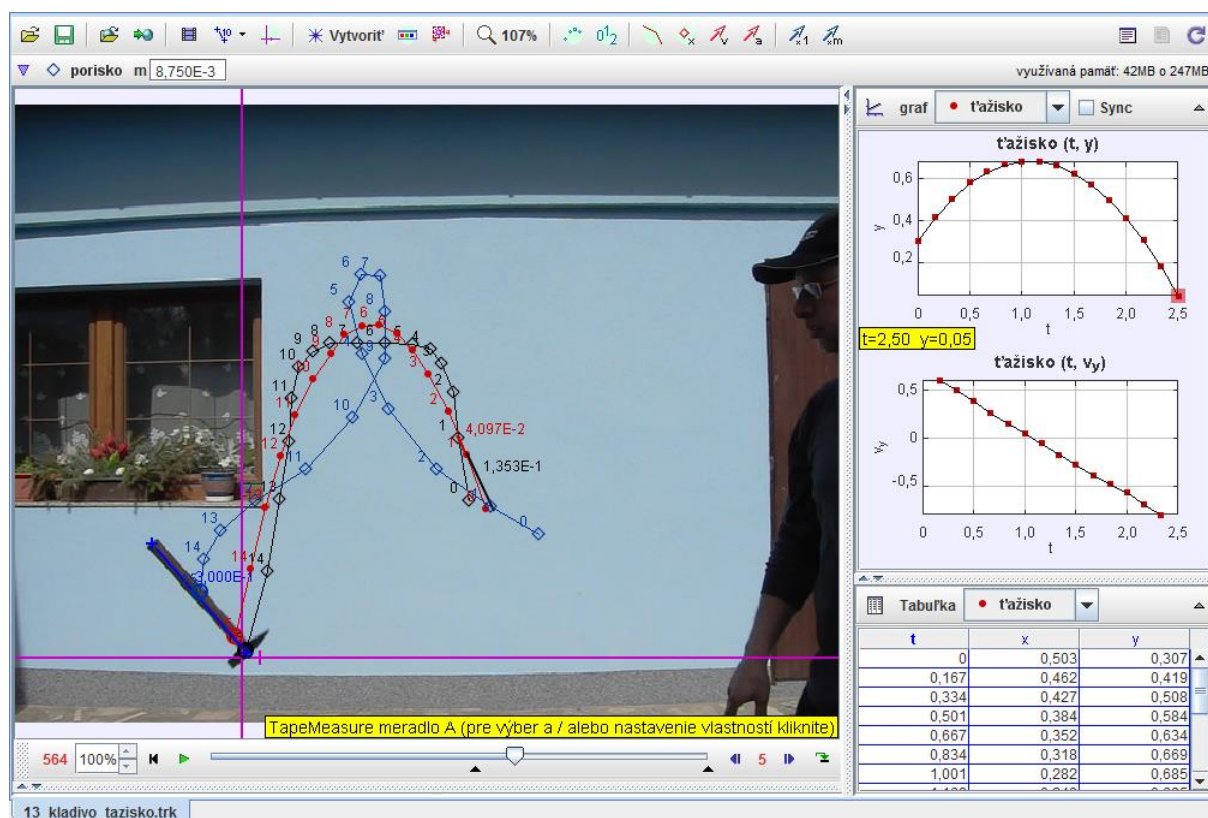
(dĺžka kladiva: 0,3 m, hmotnosť kladiva: 0,35 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [kladivo.avi](#)

**Riešenie:**

Pohyb kladiva môžeme chápať ako pohyb dvoch hmotných bodov sústredených v ťažiskách poriska a kovovej časti. Program Tracker umožňuje analyzovať pohyb dvoch hmotných bodov a následne určiť, ako sa bude pohybovať ich ťažisko.

Na Obr. 5.2 je analyzovaný samostatne pohyb kovovej časti kladiva (čierny kosoštvorec) a drevenej časti poriska (modrý kosoštvorec) (obe časti považujeme za homogénne). Keďže poznáme celkovú hmotnosť kladiva a vieme určiť vzdialenosti medzi ťažiskami poriska a drevenej časti od ťažiska celého kladiva za pomoci meradla v programe Tracker, využitím vzťahu (5.3) dokážeme odhadnúť hmotností samostatnej kovovej a drevenej časti kladiva. Pokiaľ sme to správne určili, ťažisko sústavy dvoch hmotných bodov určené programom Tracker (červený bod) by sa malo pohybovať po ťažisku kladiva – bude na kladive označenom bielou páskou.



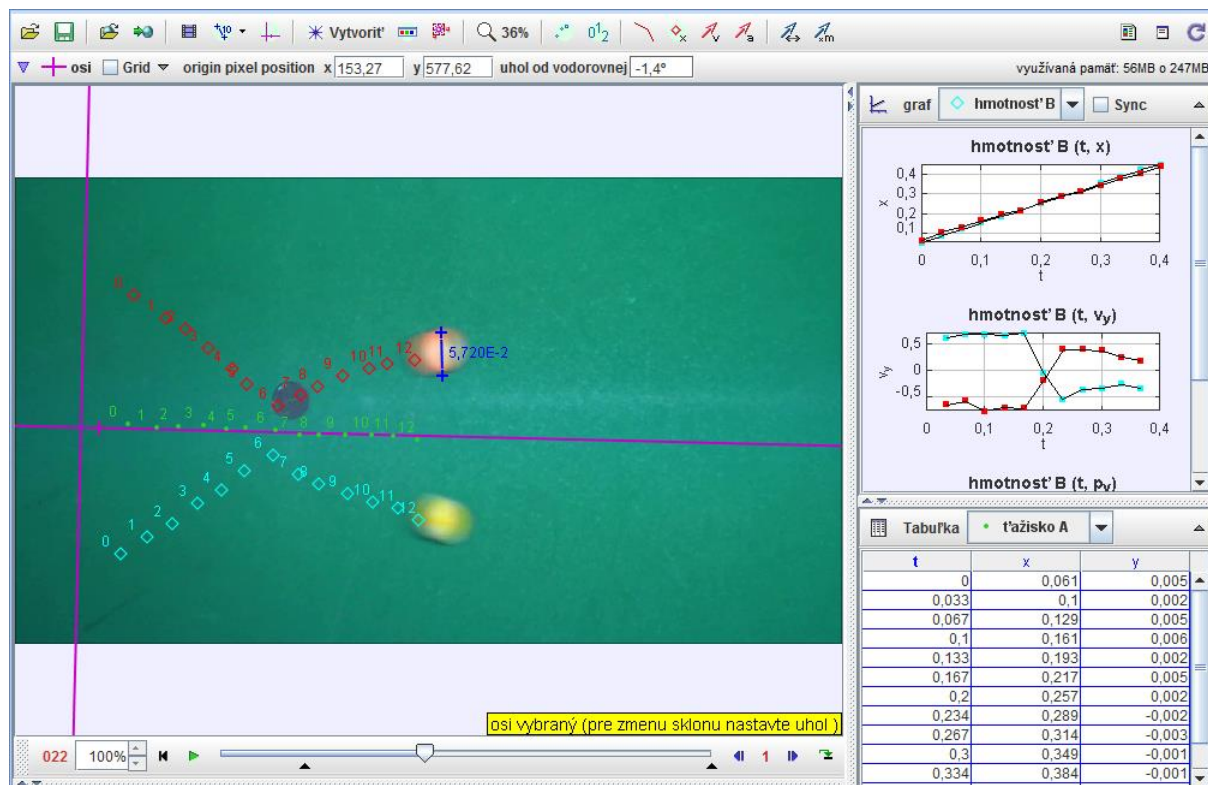
Obr. 5.2 Analýza pohybu kladiva ako sústavy dvoch hmotných telies

**Úloha 5-2:**

**Analyzujte pohyb biliardových gúľ pred a po zrážke a pohyb ich ťažiska.**

(priemer biliardovej gule je 5,72 cm, počet obrázkov za sekundu je 30 fps).

Zdroj: [kulecnik.mp4](#).

**Riešenie:****Obr. 5.3** Analýza pohybu biliardových gúľ pred a po zrážke

Ako možno na Obr. 5.3 vidieť, ťažisko gúľ sa pohybuje po priamke, rýchlosť gúľ sa v smere osi  $x$  nemení, v smere osi  $y$  sa rýchlosť po zrážke zmenší.

### 5.3 Moment zotrvačnosti a kinetická energia otáčavého pohybu

Budeme uvažovať o rovnomernom otáčavom pohybe tuhého telesa okolo osi. Keď sa tuhé teleso rovnomerne otáča uhlovou rýchlosťou  $\omega$ , pohybujú sa všetky jeho častice, ktoré považujeme za hmotné body, uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Pre veľkosť rýchlosti  $i$ -tej častice platí

$$v_i = \omega r_i, \quad (5.8)$$

kde  $v_i$  je veľkosť rýchlosti  $i$ -tej častice a  $r_i$  je vzdialenosť  $i$ -tej častice od osi otáčania. Pre kinetickú energiu  $i$ -tej častice môžeme písať

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = m_i r_i^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_i \omega^2}{2}, \quad (5.9)$$

kde veličina  $J_i$  predstavuje **moment zotrvačnosti**  $i$ -tej častice vzhľadom na os otáčania. Výslednú kinetickú energiu telesa, ktoré koná rovnomerný otáčavý pohyb okolo nehybnej osi určíme súčtom kinetických energií jeho jednotlivých častíc:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (5.10)$$

kde  $J = J_1 + J_2 + \dots + J_n$  sa nazýva moment zotrvačnosti telesa a je rovný súčtu momentov všetkých jeho častíc.

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (5.11)$$

Jednotkou momentu zotrvačnosti je  $[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

Vo všeobecnosti výpočty momentov zotrvačností nie sú triviálne, a preto v tejto učebnici budeme pracovať len s momentami zotrvačností niektorých homogénnych telies: tenkého rovnorodého kotúča (valca), ktorého os prechádza stredom kolmo na rovinu kotúča:  $J = \frac{1}{2} m r^2$ , kde  $m$  je hmotnosť kotúča (valca) a  $r$  je polomer kotúča (valca); rovnorodéj gule s hmotnosťou  $m$  a polomerom  $r$ :  $J = \frac{2}{5} m r^2$ ; dutéj gule s hmotnosťou  $m$  a polomerom  $r$ :  $J = \frac{2}{3} m r^2$ ; tyče s hmotnosťou  $m$  a dĺžkou  $l$ , vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu stredom tyče:  $J = \frac{1}{12} m l^2$  a koncovým bodom tyče  $J = \frac{1}{3} m l^2$ .

Ak teleso bude súčasne vykonávať posuvný pohyb s rýchlosťou ťažiska  $v_T$  a otáčavý pohyb okolo osi rotácie s uhlovou rýchlosťou  $\omega$ , jeho celková kinetická energia bude potom daná ako súčet kinetickej energie posuvného a rotačného pohybu:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (5.12)$$

#### 5.4 Pohybová rovnica telesa otáčajúceho sa okolo osi

Ak teleso vychýlime z rovnovážnej polohy a bude vykonávať kmitavý pohyb s uhlovým zrýchlením  $\varepsilon$ , potom pohybová rovnica, ktorá charakterizuje jeho pohyb má tvar:

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon}, \quad (5.13)$$

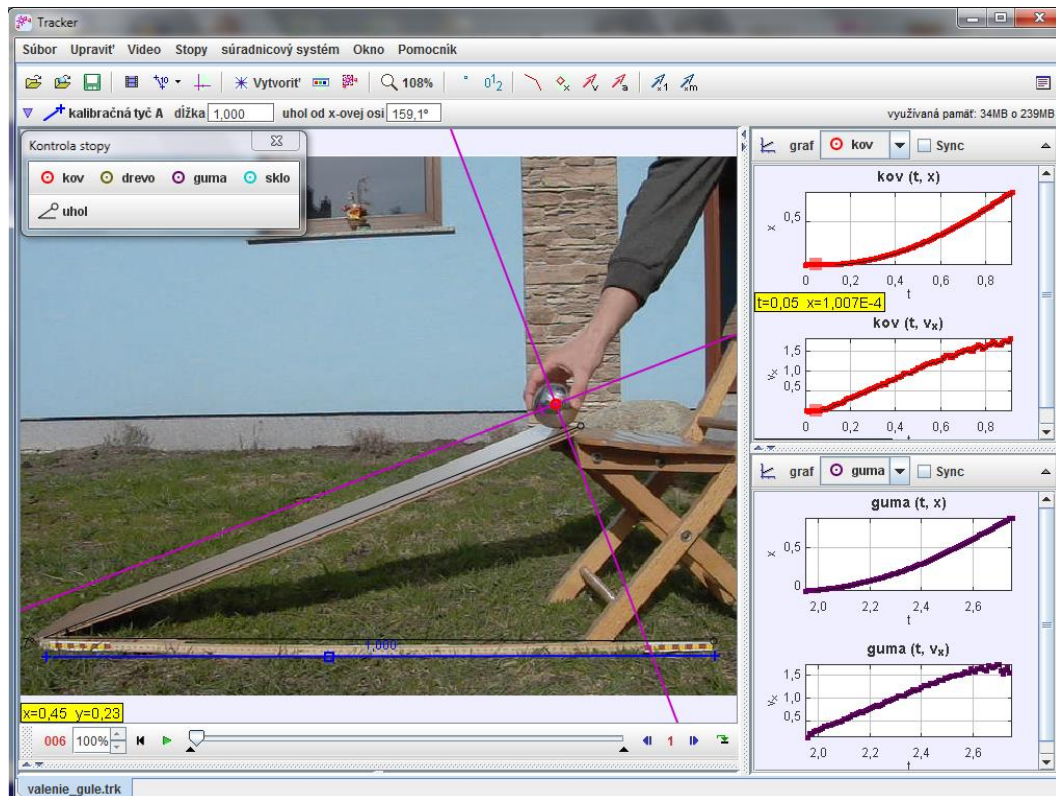
kde  $\vec{M}$  predstavuje moment všetkých síl pôsobiacich na teleso vzhľadom na os rotácie a  $J$  je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania.

#### Úloha 5-3:

**Analyzujte valivý pohyb gúľ na naklonenej rovine. Ktorá z gúľ rôznych hmotností, priemerov a materiálov (kov ( $m = 727 \text{ g}$ ,  $d = 72 \text{ mm}$ ), drevo ( $m = 5,9 \text{ g}$ ,  $d = 29 \text{ mm}$ ), guma ( $m = 6,6 \text{ g}$ ,  $d = 23 \text{ mm}$ )) dosahuje na konci naklonenej roviny najvyššiu rýchlosť? Vysvetlite! (frekvencia snímok: 120 fps, dĺžka meradla: 1m)**

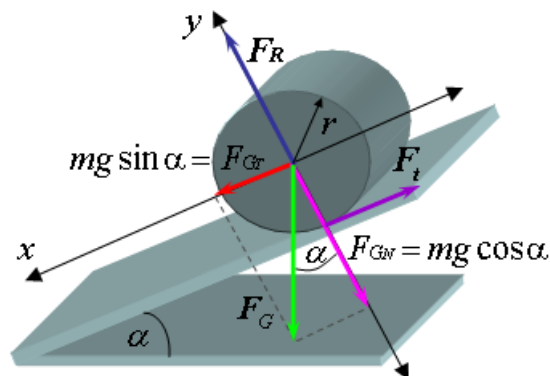
**zdroj: [valenie\\_gule.avi](#) Závisí rýchlosť valenia gúľ od hmotnosti?**

#### Riešenie:



Obr. 5.4 Analýza valivého pohybu pre kovovú a gumenú guľu

Na príklade homogénneho telesa kruhového prierezu (valec, guľa), ktoré sa valí vplyvom svojej tiaže dole po naklonenej rovine si ukážeme určenie zrýchlenia ťažiska telesa  $a_T$  a rýchlosti  $v_T$ , ktorou sa pohybuje teleso po prejdení dráhy  $s$ , keď v čase  $t = 0$  s bolo v pokoji. Teleso má polomer  $r$  a hmotnosť  $m$  a naklonená rovina zvierá uhol  $\alpha$  s vodorovnou rovinou.



Obr. 5.5 Teleso valiace sa po naklonenej rovine a sily, ktoré na neho pôsobia

Na Obr. 5.5 sú znázornené sily, ktoré pôsobia na teleso: tiažová sila  $\vec{F}_G$ , reakcia podložky  $\vec{F}_R$ , ktorej pôsobisko sme posunuli pozdĺž jej vektorovej priamky do stredu telesa a trecia sila  $\vec{F}_t$  pôsobiaca v mieste dotyku podložky a telesa. Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že hmotnosť telesa je rozložená symetricky vzhľadom k osi rotácie, a teda ťažisko splyva s geometrickým stredom telesa. Keďže sa teleso dotýka podložky nepatrnou plôškou, môžeme valivé trenie zanedbať. Keďže uvažujeme o pohybe okolo osi prechádzajúcej stredom telesa, budú momenty tiažovej sily  $\vec{F}_G$  a reakcie podložky  $\vec{F}_R$  rovné nule, a teda neprispievajú k urýchľovaniu otáčavého pohybu. Roztáčanie telesa proti smeru hodinových ručičiek spôsobuje výhradne trecia sila  $\vec{F}_t$ , ktorej rameno sily je  $\vec{r}$ .



Súradnicovú sústavu sme si zvolili tak, že os  $x$  je rovnobežná s naklonenou rovinou a os  $y$  je kolmá na naklonenú rovinu. Podľa vety o pohybe ťažiska je zrýchlenie ťažiska dané pohybovou rovnicou

$$\vec{F} = m\vec{a}_T, \quad (5.14)$$

ktorú si môžeme rozpísať zvlášť pre  $x$ -ovú a  $y$ -ovú zložku

$$ma_{Tx} = m \frac{d^2 x_T}{dt^2} = \sum F_x = F_{GT} - F_t, \quad (5.15)$$

$$ma_{Ty} = m \frac{d^2 y_T}{dt^2} = \sum F_y = F_{GN} - F_R, \quad (5.16)$$

kde  $x_T$  a  $y_T$  predstavujú súradnice ťažiska telesa. Keďže pohyb telesa sa bude uskutočňovať len v smere osi  $x$  a nie v smere kolmom na podložku ( $y$ -ová os), kde je ťažisko v pokoji, môžeme rovnicu (5.16) položiť rovnú nule

$$\frac{d^2 y_T}{dt^2} = 0, \text{ takže } F_{GN} - F_R = 0, \quad (5.17)$$

čiže

$$F_{GN} = mg \cos \alpha = F_R. \quad (5.18)$$

Dostali sme, že tlaková sila podložky  $F_R$  pôsobiaca na teleso je rovnako veľká ako normálová zložka tiažovej sily  $F_{GN}$ . Keďže sily ležia na jednej priamke, navzájom sa rušia. Vzhľadom k tomu, že v prvej pohybovej rovnici sú dve neznáme ( $a_{Tx}$  a  $F_t$ ), je potrebná ešte jedna pohybová rovnica, ktorá súvisí s otáčavým pohybom telesa a momentom trecej sily vzhľadom na os otáčania, ktorá prechádza stredom či už valca alebo gule

$$I^* \varepsilon = \sum M = I^* \frac{d\omega}{dt} = F_t r. \quad (5.19)$$

Ak sa bude teleso valiť po naklonenej rovine bez šmýkania, bude pre rýchlosť ťažiska v každom okamihu platiť

$$v_T = \frac{dx_T}{dt} = \omega r. \quad (5.20)$$

Pre zrýchlenie ťažiska potom dostávame

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}. \quad (5.21)$$

Dosadením tohto výrazu do prvej pohybovej rovnice dostaneme

$$mr \frac{d\omega}{dt} = mg \sin \alpha - F_t . \quad (5.22)$$

Vyjadrením tretej sily  $F_t$  z tretej pohybovej rovnice (5.19) a dosadením do predchádzajúcej dostaneme

$$mr \frac{d\omega}{dt} = mg \sin \alpha - \frac{I_T}{r} \frac{d\omega}{dt} , \quad (5.23)$$

$$mr \frac{d\omega}{dt} \left( \frac{I_T}{mr^2} + 1 \right) = mg \sin \alpha \quad (5.24)$$

a odiaľ využitím rovnice (5.21) pre hľadané zrýchlenie dostávame

$$a_T = \frac{g \sin \alpha}{\frac{I_T}{mr^2} + 1} . \quad (5.25)$$

Vzhľadom k tomu, že zrýchlenie telesa je konštantné a teleso sa začína rozbiehať z pokoja, bude vykonávať rovnomerne zrýchlený pohyb pre dráhu ktorého platí

$$s = \frac{1}{2} a_T t^2 . \quad (5.26)$$

Odtiaľ pre čas, za ktorý prejde dráhu  $s$  môžeme písať

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} . \quad (5.27)$$

Pre hľadanú rýchlosť ťažiska telesa  $v_T$  pohybujúceho sa z pokoja rovnomerne zrýchleným pohybom po prejení dráhy  $s$  potom platí

$$v_T = a_T t , \quad (5.28)$$

$$v_T = a_T \sqrt{\frac{2s}{a_T}} = \sqrt{2sa_T} , \quad (5.29)$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2sg \sin \alpha}{\frac{I_T}{mr^2} + 1}} . \quad (5.30)$$

Ak teraz budeme uvažovať, že po naklonenej rovine sa valí guľa ( $I_{Tg} = 2/5mr^2$ , v prípade valca by to bolo  $I_{Tg} = 1/2mr^2$ ), pre hľadané zrýchlenie ťažiska valca  $a_{Tv}$  a rýchlosť  $v_{Tv}$  dostávame

$$a_{Tg} = \frac{g \sin \alpha}{\frac{2}{5} \frac{mr^2}{mr^2} + 1} = \frac{5}{7} g \sin \alpha. \quad (5.31)$$

$$v_{Tg} = \sqrt{\frac{2sg \sin \alpha}{\frac{2}{5} \frac{mr^2}{mr^2} + 1}} = \sqrt{\frac{10}{7} sg \sin \alpha}. \quad (5.32)$$

Ako si môžeme všimnúť, zrýchlenie/rýchlosť homogénnej gule (valca) na naklonenej rovine vôbec nezávisí od jej (jeho) polomeru a hmotnosti!

Z predchádzajúcich vzťahov je možné vyjadriť veľkosť trecej sily  $F_t$

$$F_t = \frac{I_T a_T}{r^2} = \frac{I_T \frac{g \sin \alpha}{\frac{I_T}{mr^2} + 1}}{r^2} = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mr^2}{I_T}}. \quad (5.33)$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že veľkosť trecej sily  $F_t$  je menšia ako priemet tiažovej sily do smeru naklonenej roviny  $F_{GT}$ , ktorej veľkosť je  $mg \sin \alpha$ . Preto sa teleso bude valiť dole naklonenou rovinou zrýchleným pohybom. Valivý pohyb však nastane iba v tom prípade, ak trecia sila bude menšia ako maximálna statická trecia sila, čiže

$$F_t < \mu_s F_n = \mu_s mg \cos \alpha. \quad (5.34)$$

Pre veľký uhol sklonu naklonenej roviny môže teda dôjsť k čiastočnému sklzávaniu telesa.

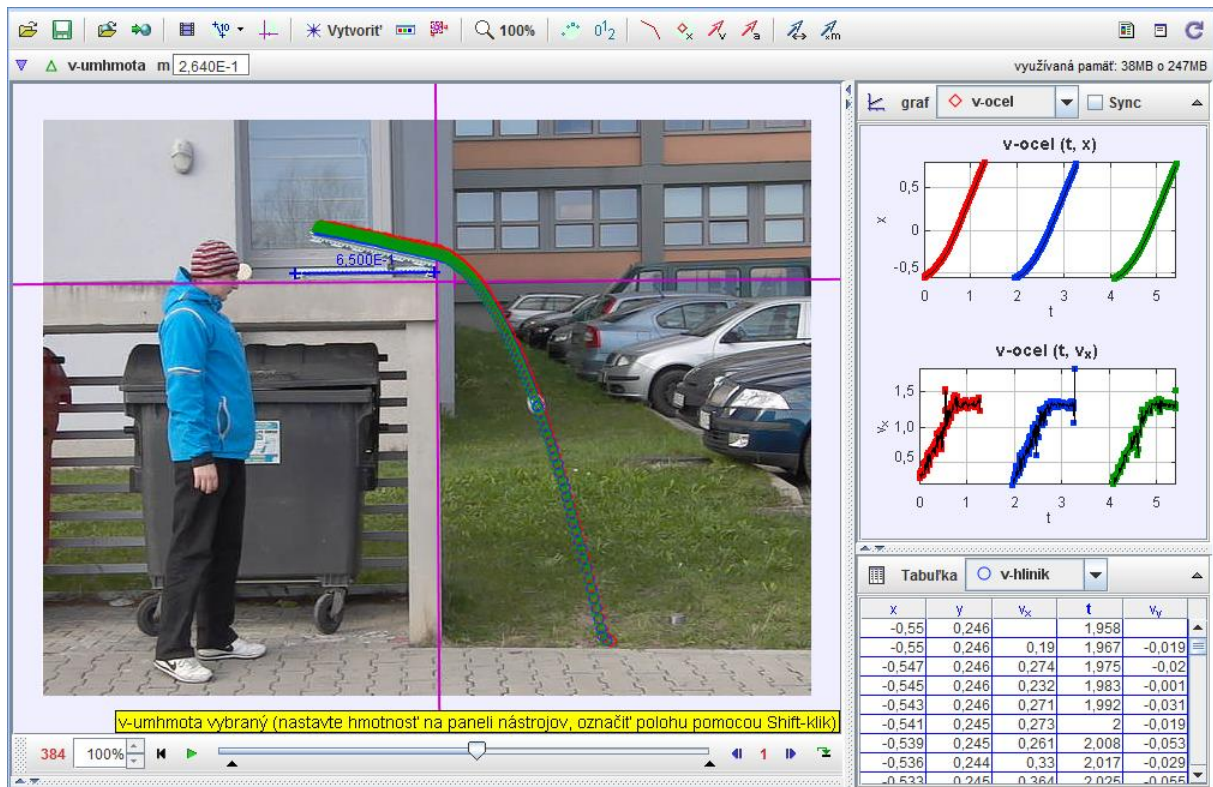
#### Úloha 5-4:

**Valce sa valia po naklonenej rovine a na konci roviny pokračujú pádom na zem. Čo platí pre ich vzdialenosti od podstavy múru pri ich dopade na zem? Analyzujte pre rôzne ťažké valce. (dĺžka meradla: 1 m, hmotnosti valcov: oceľový: 1,807 kg, hliníkový: 0,640 kg, plastový: 0,264 kg, frekvencia snímok: 120 fps)**

zdroj: [strecha\\_valce\\_120.avi](#)

#### Riešenie:

Nasledujúci Obr. 5.6 znázorňuje trajektórie pohybu valcov rôznych hmotností. Aj keď majú valce rôzne hmotnosti, ich rýchlosť rovnomerne narastá pri pohybe po naklonenej rovine a na jej konci dosahuje pre všetky valce rovnakú hodnotu, ktorú si valce zachovávajú pri pohybe v smere osi  $x$ , pričom v smere osi  $y$  sa pohybujú voľným pádom. Výsledná vzdialenosť miesta dopadu valcov od zvislej roviny (múra) je teda nezávislá od hmotností jednotlivých valcov.



Obr. 5.6 Analýza pohybu a pádu rôzne ťažkých valcov

**Úloha 5-5:**

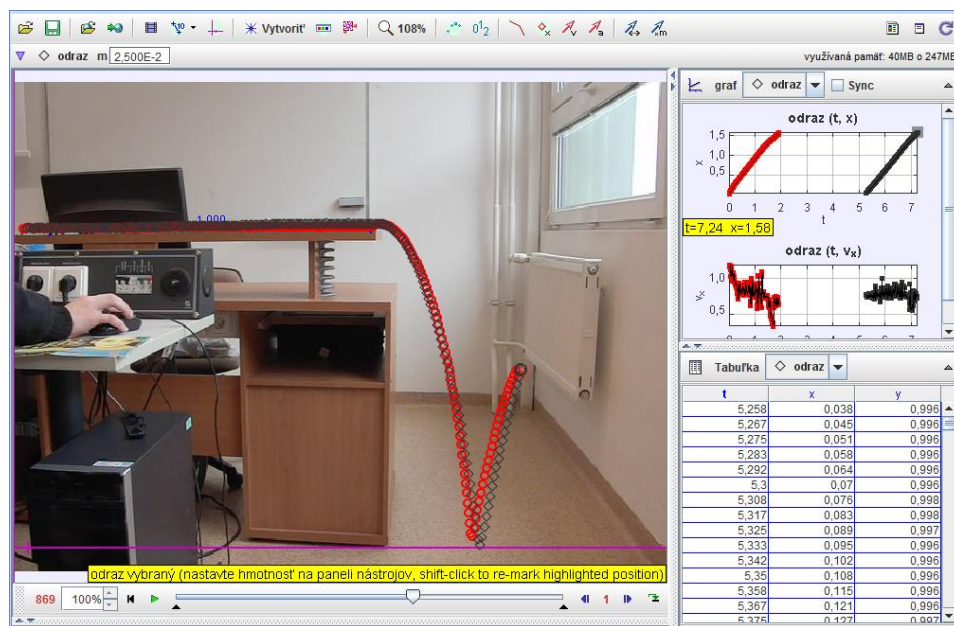
*Jedna z gúľ je 10 násobne ťažšia ako druhá. Gule sa valia po vodorovnej rovine približne rovnakou rýchlosťou. Na konci stola padnú na zem. Čo platí pre ich vzdialenosti od podstavy stola pri dopade?*

*(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť svetlejšej lopty: 0,0025 kg, tmavšej: 0,025 kg, frekvencia snímok: 120 fps)*

*zdroj: [vodorovny\\_vrh.avi](#)*

**Riešenie:**

Prvotné odhady študentov naznačujú, že ich predstava o danom deji je mnohokrát Aristotelovská, teda že ťažšie teleso bude padať rýchlejšie, a teda padne aj bližšie k podstave stola. Ďalšia časť študentov si myslí, že ťažšia guľa dopadne ďalej od stola, keďže pri dopade naberie väčšiu rýchlosť. Aká je však skutočnosť? Reálny priebeh deja znázorňuje Obr. 5.7, z ktorého možno vyčítať, že keď je počiatočná rýchlosť gúľ tesne pred pádom približne rovnaká, dopadnú gule do takmer rovnakej vzdialenosti od podstavy stola, a teda vzdialenosť od podstavy stola nezávisí od ich hmotnosti. (Aj keď síce odpor vzduchu zanedbávame, v prípade pádu stolnotenisovej loptičky môže odpor vzduchu zohrať svoju úlohu, z čoho vyplývajú isté nepresnosti.)



Obr. 5.7 Analýza valivého pohybu loptičiek a ich pádu

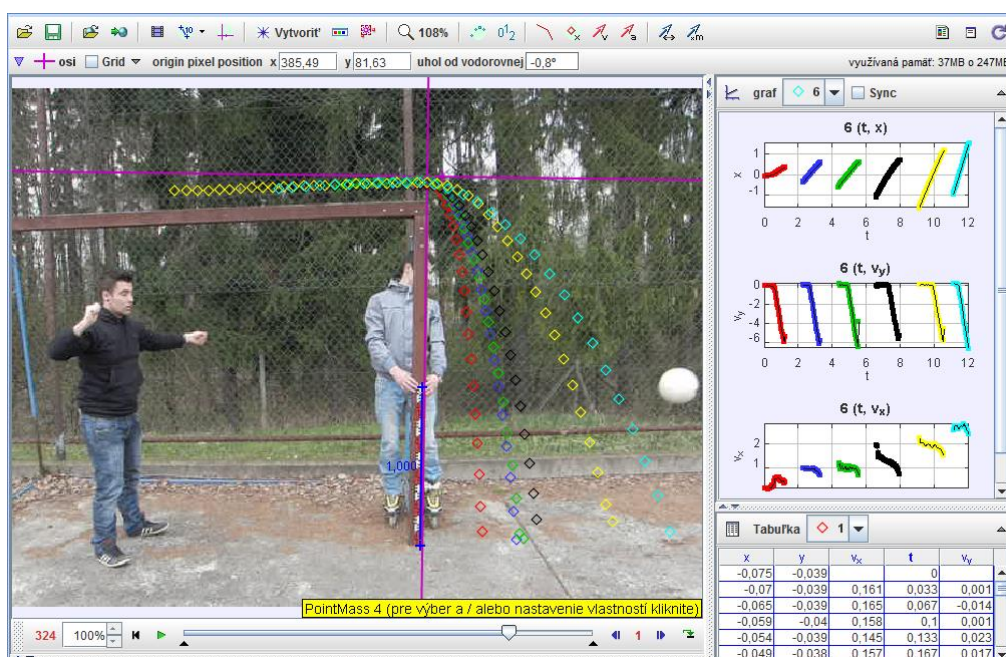
## Úloha 5-6:

Lopta sa valí po vodorovnej podložke rôznymi rýchlosťami a na konci podložky pokračuje pádom na zem. Čo platí pre jej vzdialenosť od konca podložky pri jej dopade na zem? (dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 415 g, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [lopta.avi](#)

## Riešenie:

Ako ukazuje nasledujúci Obr. 5.8, ak sa rýchlosť valivého pohybu lopty zvyšuje (v smere červená, modrá, zelená, čierna, žltá a svetlo modrá farba), zvyšuje sa aj vzdialenosť dopadu lopty od brvna bránky.



Obr. 5.8 Analýza pohybu lopty pri rôznych počiatkových rýchlostiach

**Neriešené úlohy:**

**Úloha 5-7:** Analyzujte pohyb sekery ako pohyb dvoch častí: poriska a kovovej časti sekery, čo platí pre pohyb ich ťažiska?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť sekery: 1,5 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [sekera\\_tazisko.avi](#)

**Úloha 5-8:** Analyzujte pohyb plechovic na naklonenej rovine. Ktorá z plechovic je plná ( $m = 523,2$  g) a prázdna ( $m = 15,8$  g)? Určte momenty zotrvačností daných plechovic. (frekvencia snímok: 120 fps, dĺžka meradla: 1m, priemer plechovice  $d = 65,6$  mm)

zdroj: [plechovice.avi](#)

Závisí rýchlosť pohybu valcov na naklonenej rovine od ich hmotností? Vysvetlite!

**Úloha 5-9:** Analyzujte pohyb pukov po naklonenej rovine. Určte zrýchlenie a silu, ktorá pôsobí na puky.

(1 dielik: 1cm, frekvencia snímok: 120 fps, hmotnosť oranžového puku: 50 g, modrého: 157 g, lopty: 60,4 g)

zdroj: [naklonena\\_rovina\\_puky.avi](#), [naklonena\\_rovina\\_puk\\_lopta.avi](#)

**Úloha 5-10:** Gule sa valia po naklonenej rovine a na konci roviny pokračujú pádom na zem. Čo platí pre ich vzdialenosti od podstavy stola pri ich dopade na zem? Analyzujte pre rôzne ťažké gule a s rôznou výplňou (plné, duté).

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť svetlejšej lopty: 0,0025 kg, tmavšej: 0,025 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [zo\\_strechy.avi](#), [zo\\_strechy2.avi](#) ( $m_{\text{sivá}} = 18,7$  g;  $m_{\text{oranžová}} = 60,4$  g).

**Úloha 5-11:** Gule rôznych hmotností sa valia po naklonenej rovine. Na konci naklonenej roviny začnú padat' na zem. Čo platí pre ich vzdialenosti od steny pri dopade?

(120fps, hmotnosti gúl: 727 g, 870 g, 25 g, 5,9 g, 6,6 g),

zdroj: [strecha\\_gule.avi](#),

(120 fps, hmotnosti diskov: 233 g, 86 g, 55 g)

[strecha\\_disky.avi](#),

**Úloha 5-12:** Gul'a a valec sa valia po naklonenej rovine a na konci roviny pokračujú pádom na zem. Čo platí pre ich vzdialenosti od podstavy stola pri ich dopade na zem?

(dĺžka dielika: 1 cm, frekvencia snímok: 120 fps,  $m_{\text{gule}} = 727$  g,  $m_{\text{valca}} = 640$  g)

zdroj: [strecha\\_gula\\_valec.avi](#)

## 6. Kvapaliny

Samostatné postavenie v mechanike telies má mechanika kvapalín. Z hľadiska vnútornej štruktúry sa kvapaliny od látok pevného skupenstva líšia tým, že ich molekuly už nie sú viazané na istú rovnovážnu polohu a konajú neusporiadané posuvné a rotačné pohyby. Vzdialenosti medzi molekulami bývajú v kvapalinách zvyčajne väčšie ako v tuhých telesách. Kvapaliny si zachovávajú svoj objem, nezachovávajú si však určitý tvar, ich tvar je daný tvarom nádoby. Plyny na rozdiel od kvapalín nemajú ani určitý tvar, ani objem, sú rozpínavé, stlačiteľné a pružné.

### 6.1 Tlak v kvapalinách

Tlak v kvapaline  $p$  je definovaný prostredníctvom sily  $F$  pôsobiacej kolmo na rovinnú plochu a veľkosťou danej plochy  $S$ :

$$p = \frac{F}{S}. \quad (6.1)$$

Jednotkou tlaku je pascal,  $Pa$  ( $Pa = N/m^2 = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$ ).

#### 6.1.1 Pascalov zákon

Pre tlak vyvolaný vonkajšou silou platí **Pascalov zákon**, ktorý hovorí: **tlak vyvolaný vonkajšou silou pôsobiaceou na povrch kvapaliny alebo plynu je vo všetkých miestach a smeroch rovnaký**. To sa využíva hlavne v hydraulických zariadeniach, ktoré obsahujú dva valce s rôznymi priermi, čiže obsahmi plôch  $S_1 < S_2$ , ktoré sú spojené trubicou a naplnené kvapalinou. Ak na piest s obsahom  $S_1$  bude pôsobiť sila  $F_1$ , vyvolá v kvapaline tlak  $p_1 = F_1/S_1$ . Ten sa bude šíriť kvapalinou a v mieste väčšieho piestu s obsahom  $S_2$  bude kvapalina pôsobiť silou veľkosti

$$F_2 = p_2 S_2 = p_1 S_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}, \quad (6.2)$$

čiže pôsobením menšou silou  $F_1$  môžeme vyvolať väčšiu silu  $F_2$ .

#### 6.1.2 Hydrostatický tlak

Tlak v kvapaline spôsobený vlastnou tiažou kvapaliny vytvára **hydrostatický tlak**. Ak máme v nádobe kvapalinu hustoty  $\rho_k$ , tak v hĺbke  $h$  bude na plochu  $S$  pôsobiť hydrostatická tlaková sila  $F_h$

$$F_h = Sh\rho_k g, \quad (6.3)$$

ktorá v hĺbke  $h$  vyvolá hydrostatický tlak

$$p_h = \frac{F_h}{S} = h\rho_k g. \quad (6.4)$$

Veľkosť daného tlaku nezávisí od tvaru nádoby ani od množstva kvapaliny v nej (*hydrodynamický paradox*), podľa vzťahu (6.4) závisí len od hĺbky, hustoty kvapaliny a tiažového zrýchlenia.

### Úloha 6-1:

Určte, aká je hustota kvapaliny v U-trubici. (Fialová kvapalina je voda, jej hustota je rovná  $1000 \text{ kg/m}^3$ ).

zdroj: [hustota.jpg](#)

### Riešenie:

Na Obr. 6.1 je znázornená časť U-trubice, v ktorej sú naliate kvapaliny s rozdielnymi hustotami. Ak by sme urobili úsečku v mieste dielika 10 (pod 0), kde sa spájajú obe kvapaliny, mohli by sme povedať, že kvapalina v ľavej aj pravej časti pôsobí na kvapalinu pod nimi rovnakou silou, pretože je celá sústava v pokoji. Keďže prierez trubíc je rovnaký, aj plocha je v oboch trubiciach rovnaká, a teda tlak pôsobiaci v mieste dielika 10 (pod 0) je v ľavej aj pravej trubici rovnaký:

$$p_L = h_L \rho_{k1} g = p_P = h_P \rho_{k2} g, \quad (6.5)$$

odtiaľ vyplýva

$$\frac{\rho_{k1}}{\rho_{k2}} = \frac{h_P}{h_L}. \quad (6.6)$$

Odčítaním dielikov zo stupnice a vynásobením hustotou vody dostávame pre neznámu tekutinu  $\rho_{k1} = 60/75 * 1000 = 800 \text{ kg/m}^3$ .



Obr. 6.1 U trubica



## 6.2 Archimedov zákon

*Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované hydrostatickou vztlakovou silou, ktorej veľkosť je rovná tiaži kvapaliny vytlačenej ponorenou časťou telesa.* Danú formuláciu nazývame *Archimedov zákon* a matematicky to môžeme vyjadriť nasledovne:

$$F_{vz} = Sh\rho_k g = V\rho_k g, \quad (6.7)$$

kde  $V$  predstavuje objem ponorenej časti telesa (objem vytlačenej kvapaliny ponorenou časťou telesa).

**Úloha 6-2:**

*Odhadnite hustotu dreva plávajúceho vo vode.*

*(dĺžka meradla: 0,15 m)*

*zdroj: [drevo.jpg](#)*

**Riešenie:**



**Obr. 6.2 Aplikácia Archimedovho zákona**

Na Obr. 6.2 je znázornené teleso (kus dreva) plávajúce na vode. Ak označíme objem telesa  $V_T$  a hustotu telesa  $\rho_t$ , na teleso bude pôsobiť tiažová sila  $F_G = V_T \rho_t g$ . Zároveň však na teleso bude pôsobiť hydrostatická vztlaková sila, ktorej veľkosť je  $F_{vz} = V_k \rho_k g$ , kde  $V_k$  predstavuje objem vytlačenej kvapaliny (ponorenej časti telesa). Ak dáme oba vzťahy do rovnosti, dostaneme

$$V_T \rho_t g = V_k \rho_k g. \quad (6.8)$$

Odtiaľ vyplýva

$$\frac{\rho_t}{\rho_k} = \frac{V_k}{V_T} = \frac{h_k}{h_T}, \quad (6.9)$$

kde  $h_k$ ,  $h_T$  predstavujú hrúbku ponorenej časti telesa a celého telesa, keďže plocha  $S$  je pre ponorenú časť telesa a celé teleso rovnaká. Stačí už len určiť pomer hrúbky ponorenej časti telesa voči hrúbke celého telesa pomocou meracích nástrojov v programe Tracker, prenásobiť hustotou vody ( $\rho_k = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) a dostaneme hľadanú hustotu telesa.

### 6.3 Povrchová vrstva kvapaliny

Už ste sa istotne stretli s tým, že na povrchu kvapaliny sa dokážu udržať predmety z materiálov, ktorých hustota je väčšia, ako je hustota vody (tenká ihla, žiletka, hliníková minca s pod.). Aj kvapka vody na konci vodovodného kohútika sa postupne zväčšuje až kým sa nevytvorí zúžený krčok a potom sa odtrhne. Tieto javy súvisia s **povrchovou vrstvou kvapaliny**, kedy kvapalina na rozhraní voda-vzduch sa správa podobne ako tenká pružná blana. Povrchová vrstva kvapaliny pôsobí na vnútro kvapaliny tlakovou silou, ktorá vytvára tzv. molekulový (kohézny) tlak. Povrchová vrstva kvapaliny má energiu, ktorú nazývame **povrchová energia  $E$** . Ak sa zmení povrch daného objemu kvapaliny o hodnotu  $\Delta S$ , zmení sa aj povrchová energia o hodnotu

$$\Delta E = \sigma \Delta S, \quad (6.10)$$

kde veličina  $\sigma$  sa nazýva **povrchové napätie**. Povrchové napätie závisí od druhu kvapaliny a prostredia nad voľným povrchom kvapaliny, pričom so zvyšujúcou teplotou sa povrchové napätie kvapaliny voči danému prostrediu znižuje. Kvapalina daného objemu má snahu nadobudnúť taký tvar, aby jej povrchová energia bola minimálna, a teda aj jej povrch bol čo najmenší. Preto aj voľné kvapky rosy alebo hmly majú guľový tvar, pretože spomedzi všetkých geometrických útvarov pri danom objeme má guľa najmenší povrch. Pri väčších kvapkách je však aj guľový tvar deformovaný v dôsledku tiažovej sily a tlakovej sily podložky.

Povrchové napätie  $\sigma$  je taktiež rovné podielu veľkosti **povrchovej sily  $F$**  a dĺžky okraja povrchovej blany  $l$ , na ktorý sila pôsobí kolmo v povrchu kvapaliny:

$$\sigma = \frac{F}{l}. \quad (6.11)$$

Jednotkou povrchového napätia je  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ . V prípade, že je povrch kvapaliny zakrivený, potom má povrchová sila smer dotýčnice k povrchu kvapaliny v danom bode.

#### Úloha 6-3:

**Voda vyteká hrubostennou kapilárou tak, že na konci kapiláry sa tvoria kvapky. Analýzou daného javu určte povrchové napätie vody v styku so vzduchom!**

(dĺžka dielik: 1 cm, frekvencia snímok: 120 fps)

Zdroj: [povrchove napatie.avi](#)

**Riešenie:**

Analýzou daného deja možno určiť moment, kedy sa kvapka „odtrháva“, t.j. moment, kedy sú v rovnováhe tiažová sila s povrchovou silou Obr. 6.3. Využitím predchádzajúcich vzťahov (6.11) možno teda písať:

$$F = \sigma l = F_g = mg, \quad (6.12)$$

kde  $m$  je hmotnosť kvapky. Využitím znalostí, že  $l$  je obvod kruhu v zúženom mieste a kvapka má tvar gule môžeme písať:

$$\sigma \pi d_k = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d_g}{2} \right)^3 \rho g. \quad (6.13)$$

Odtiaľ pre povrchové napätie dostávame

$$\sigma = \frac{d_g^3 \rho g}{6d_k}. \quad (6.14)$$

Po dosadení hodnôt zistených v programe Tracker bola určená hodnota povrchového napätia vody pri styku so vzduchom  $\sigma = 76 \text{ mN/m}$ .

The screenshot shows the Tracker software interface. The main window displays a video frame of a hand holding a glass tube with a water droplet at the tip. A yellow highlight is on the frame number '031'. The top toolbar includes various tools like 'Vytvorit', '106%', and '0.12'. The top status bar shows 'Momentálne dostupná verzia 4.87' and 'využívaná pamäť: 28MB o 247MB'. The left sidebar has input fields for 'priemer' (3,061E-3) and 'uhol od x-ovej osi' (0,0°). The right sidebar has two panels: 'Stránka Nepomenovaný' with parameters and calculations, and 'Stránka Povrchové napätie' with instructions and tube diameter.

Obr. 6.3 Určovanie povrchového napätia vody pri styku so vzduchom

### 6.3.1 Kapilarita

Zo skúseností vieme, že keď do sklenej nádoby nalejeme vodu, pri stenách nádoby nebude povrch kvapaliny kolmý na stenu, ale bude zakrivený. To zakrivenie je tým väčšie, čím je nádoba užšia (najvýraznejšie je to pri tenkých kapilárach). Dutý povrch vytvorí voda aj lieh v sklenej nádobe – hovoríme, že kvapalina zmáča steny nádoby. Ak do sklenej nádoby nalejeme ortuť, povrch kvapaliny bude pri stenách nádoby vypuklý – hovoríme, že kvapalina nezmáča steny nádoby. Zakrivenie voľného povrchu kvapaliny pri stenách nádoby (hlavne v úzkych rúrkach – kapilárach), pri kvapkách a bublinách spôsobuje, že výslednica povrchových síl, ktorá pôsobí kolmo na voľný povrch kvapaliny je nenulová. Táto sila vyvoláva **kapilárny tlak**  $p_k$ , ktorý je pre voľný povrch kvapaliny guľového tvaru daný vzťahom

$$p_k = \frac{2\sigma}{R}, \quad (6.15)$$

kde  $R$  je polomer guľového povrchu a  $\sigma$  je povrchové napätie.

Pri tenkej guľovej mydlovej bubline s polomerom  $R$  (a dvoma povrchmi kvapaliny) je kapilárny tlak vnútri bubliny rovný

$$p_{kb} = \frac{4\sigma}{R}. \quad (6.16)$$

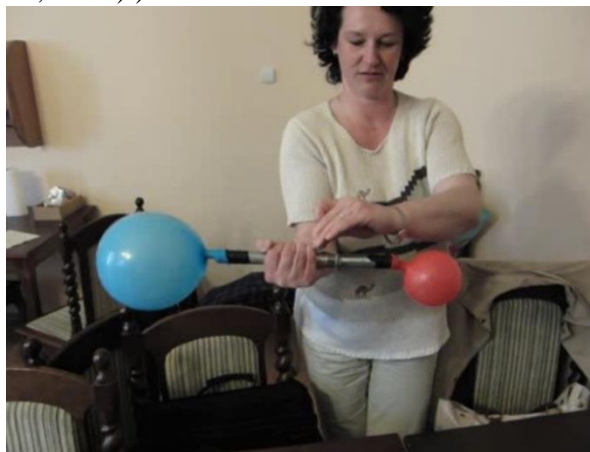
#### Úloha 6-4:

*Máme dva balóniky s rôznymi priermi nafúkané vzduchom navzájom prepojené trojcestným kohútikom. V ktorom balóniku je väčší tlak, s väčším objemom alebo menším objemom vzduchu? Čo sa stane po otvorení prepojovacieho ventilu? Vysvetlite!*

*Zdroj: [tlak plynu.avi](#)*

#### Riešenie:

Na nasledujúcom obrázku Obr. 6.4 je znázornený pokus s nafúknutými balónmi prepojenými trojcestným ventilom. Po otvorení prepojovacieho ventilu, aj keď je to pre mnohých študentov prekvapujúce a nečakané, prejde vzduch z menšieho balónika do väčšieho. (Komplexné riešenie danej úlohy však presahuje rámec tejto učebnice, viac v literatúre (Ješková a kol., 2012).)



**Obr. 6.4** Pokus s nafúknutými balónmi prepojenými trojcestným ventilom

Ak by sme mali miesto balónikov mydlové bubliny, situácia z predchádzajúceho pokusu by sa zopakovala, väčšia bublina by sa zväčšovala a menšia by sa zmenšovala až by nakoniec zanikla,

pretože v menšej bubline by bol väčší kapilárny tlak ako vo väčšej. Vo všeobecnosti možno konštatovať, že čím je polomer guľového povrchu menší a povrchové napätie väčšie, tým je kapilárny tlak vyšší, čo potvrdzuje vzťah (6.16).

Keď do širokej nádoby s vodou ponoríme kapiláru – úzku sklenú rúrku, v kapiláre vystúpi voda do výšky  $h$  nad voľnou hladinou v nádobe (Obr. 6.5). Zvýšenie voľnej hladiny kvapaliny v kapiláre sa nazýva **kapilárna elevácia** a nastáva pri kvapalinách, ktoré zmáčajú steny nádoby. Ak by sme do sklenej nádoby naliali ortuť a ponorili by sme do nej kapiláru, pozorovali by sme zníženie voľnej hladiny ortuti v kapiláre oproti voľnej hladine ortuti v nádobe. Toto zníženie voľnej hladiny ortuti v kapiláre sa nazýva **kapilárna depresia** a pozorujeme ju pri kvapalinách, ktoré nezmáčajú steny kapiláry. Kapilárna elevácia a kapilárna depresia sa súhrne nazývajú **kapilarita**.

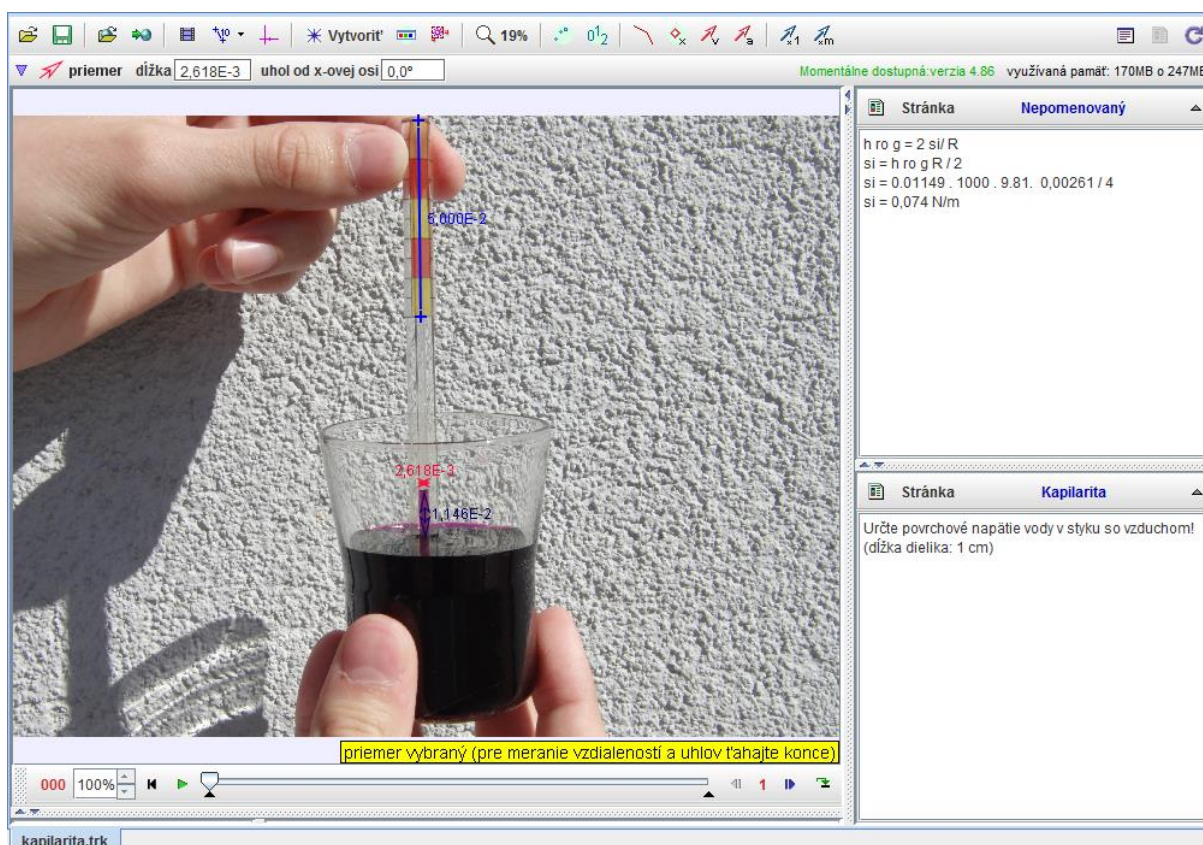
### Úloha 6-5:

**Analyzou kapilárneho javu určte povrchové napätie vody v styku so vzduchom!**

(dĺžka dielika: 1 cm)

Zdroj: [kapilarita.jpg](#)

### Riešenie:



**Obr. 6.5** Určovanie povrchového napätia vody pri styku so vzduchom za pomoci kapilarity

Ako znázorňuje Obr. 6.5, po ponorení kapiláry do vody, sa v kapiláre s polomerom  $R$  (určíme pomocou meracích nástrojov programu Tracker) vytvorí dutý povrch, ktorý po zjednodušení môžeme považovať za tvar polgule s polomerom  $R$ . Zakrivený dutý povrch kvapaliny v kapiláre pôsobí na kvapalinu silou v smere von z kvapaliny. Výška hladiny

v kapiláre sa bude zväčšovať dovedy, pokiaľ sa daná sila nevyrovná hydrostatickej tlakovej sile, teda kapilárny tlak zodpovedajúci zakriveniu povrchu sa vyrovná hydrostatickému tlaku odpovedajúcemu stĺpcu s výškou  $h$ :

$$p_k = \frac{2\sigma}{R} = h\rho g = p_h. \quad (6.17)$$

Odtiaľ pre hľadané povrchové napätie vody v styku so vzduchom dostávame:

$$\sigma = \frac{h\rho g R}{2}. \quad (6.18)$$

Po zadaní parametrov určených v programe Tracker sme vyrátali hodnotu povrchového napätia vody pri styku so vzduchom  $\sigma = 0,074 \text{ N/m}$ .

### 6.4 Rovnica spojitosti

Doteraz sme uvažovali o kvapaline v pokoji, prípadne o rovnovážnom stave po ustálení kvapaliny. Teraz budeme uvažovať o ideálnej kvapaline (bez vnútorného trenia, dokonale nestlačiteľnej), ktorá prúdi trubicou alebo potrubím. Pri prúdení ideálnej kvapaliny bude vo všetkých bodoch prierezu prúdovej trubice rovnaká rýchlosť. Ak označíme plochu prierezu vybranej prúdovej trubice  $S$  a veľkosť rýchlosti prúdenia kvapaliny v tomto priereze  $v$ , za 1 sekundu pretečie týmto prierezom objem kvapaliny, ktorý nazývame **objemový prietok**  $Q_v = S v$ .

Keďže kvapalina nemôže stenami trubice ani vytečť, ani pritečť, musí byť objemový prietok pre ľubovoľne veľký prierez rovnaký, čo môžeme vyjadriť

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (6.19)$$

Danú rovnicu nazývame **rovnicaou spojitosti (kontinuity)** pre ideálnu kvapalinu. Daná rovnica vyjadruje zákon zachovania hmotnosti v prúdiacich kvapalinách.

#### Úloha 6-6:

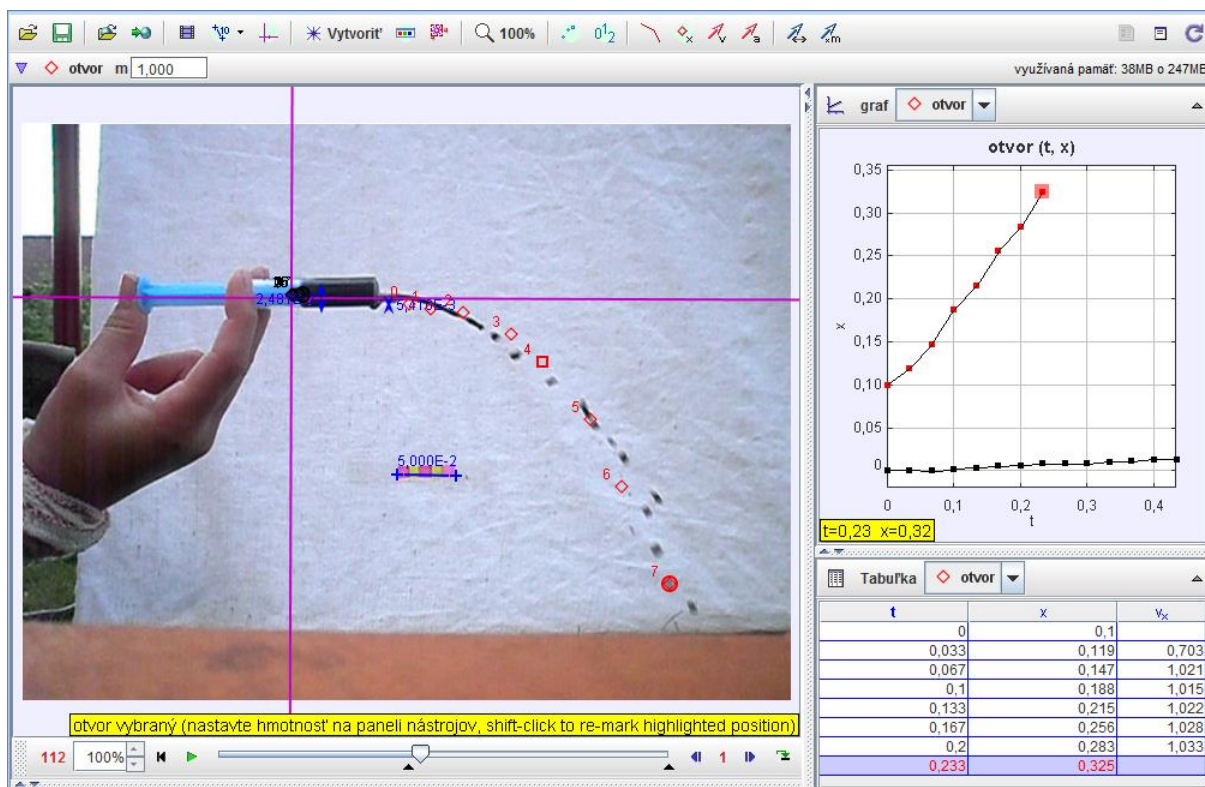
**Určte rýchlosť, akou vystrekuje kvapalina zo striekačky a porovnajte ju s rýchlosťou pohybu piesta. Overte platnosť rovnice spojitosti - kontinuity.**

**(dĺžka dielika: 0,01 m, frekvencia snímok: 30 fps)**

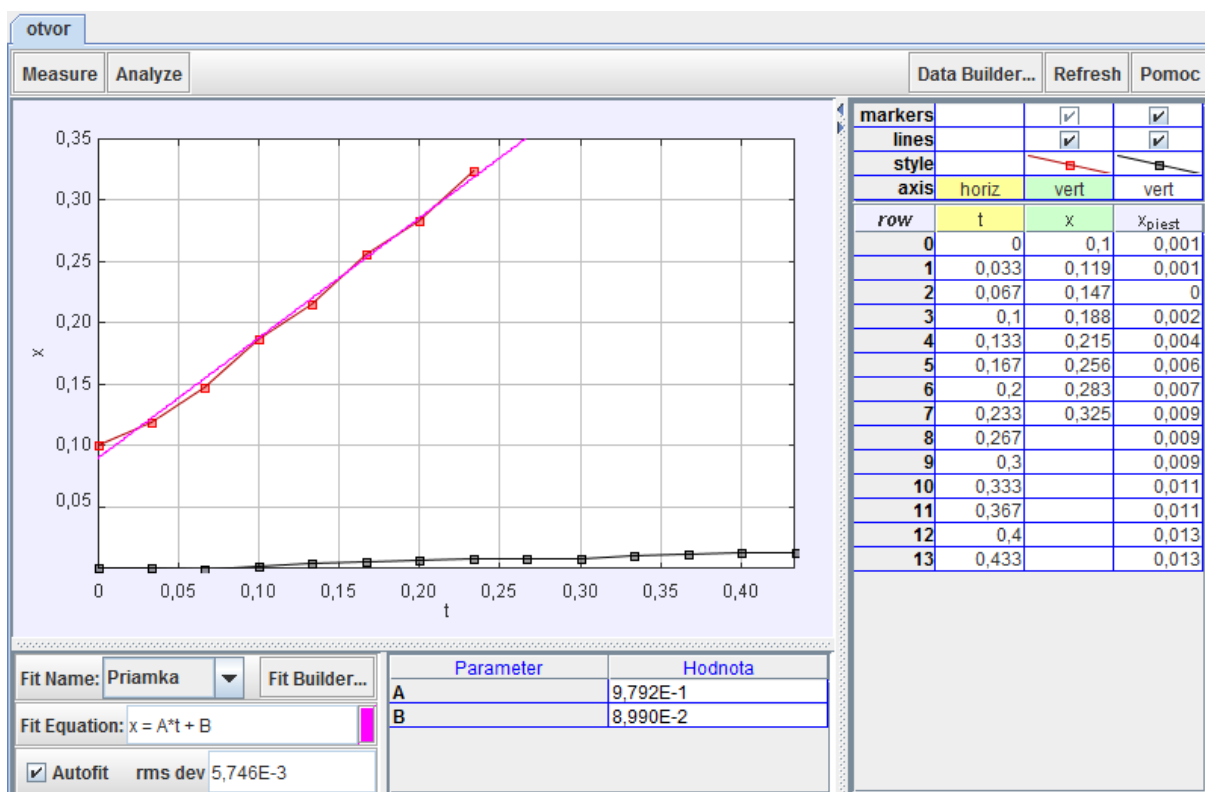
**zdroj: [rovnica spojitosti.avi](#)**

#### Riešenie:

Analýzou v programe Tracker boli vyšetované rýchlosti pohybu piesta a vytekajúcej kvapaliny v smere osi  $x$  Obr. 6.6 a Obr. 6.7. Na základe lineárnej regresie boli stanovené rýchlosť vytekajúcej kvapaliny v smere osi  $x$   $v_k = 0,9792 \text{ m/s}$  a rýchlosť pohybu piesta  $v_p = 0,0327 \text{ m/s}$ . využitím meracích nástrojov boli stanovené taktiež priemery výtokovej časti striekačky  $d_k = 0,00541 \text{ m}$  a piestu  $d_p = 0,02481 \text{ m}$ . Následne využitím vzťahu (6.19) možno potvrdiť platnosť rovnice spojitosti. (Ponechávame na samotnom čitateľovi).



Obr. 6.6 Analýza pohybu piesta a vytekajúcej kvapaliny



Obr. 6.7 Lineárna regresia a stanovenie rýchlosti

### 6.5 Bernoulliho rovnica

Keďže prúdiaca kvapalina môže prekonávať výškové rozdiely, má aj určitú potenciálnu energiu a môže konať prácu - napr. roztáčať koleso vodnej turbíny. Prúdiaca kvapalina pozostáva z častíc, ktoré majú hmotnosť aj rýchlosť, preto jej môžeme priradiť aj kinetickú energiu. Ak budeme uvažovať prúdenie ideálnej kvapaliny, zo zákonov zachovania po istých matematických úpravách by sme sa dopracovali ku vzťahu

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + h_1 \rho g + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + h_2 \rho g + p_2, \quad (6.20)$$

ktorý sa nazýva **Bernoulliho rovnica**, kde  $v_1$  a  $v_2$  predstavujú rýchlosti prúdenia kvapaliny v dvoch rôznych prierezoch trubice  $S_1$  a  $S_2$ ,  $h_1$  a  $h_2$  predstavujú výšky, v ktorých sa časti trubice s prierezmi  $S_1$  a  $S_2$  nachádzajú,  $p_1$  a  $p_2$  predstavujú tlak v kvapaline v mieste s prierezmi  $S_1$  a  $S_2$ .

Daná rovnica predstavuje zákon zachovania mechanickej energie pri prúdení ideálnej kvapaliny. Prvý člen rovnice predstavuje kinetickú energiu kvapaliny jednotkového objemu, druhý potenciálnu energiu kvapaliny jednotkového objemu a tretí člen možno interpretovať ako tlakovú potenciálnu energiu objemovej jednotky kvapaliny. Z Bernoulliho rovnice vyplýva, že súčet kinetickej, potenciálnej a tlakovej potenciálnej energie objemovej jednotky ideálnej prúdiacej kvapaliny je všade v kvapaline rovnaký.

#### Úloha 6-7:

**Aký je vzťah medzi výškou hladiny tekutiny nad dnom nádoby a výškami otvorov v stene nádoby  $h_1$  a  $h_2$  od dna nádoby, ak tekutina striekala z oboch otvorov do rovnakej vzdialenosti na vodorovnú rovinu, na ktorej je nádoba položená?**

zdroj: [vytok vody.flv](#)

#### Riešenie:

Rýchlosť vytekania kvapaliny z nádoby z otvoru v hĺbke  $h$  pod hladinou udáva **Torricelliho vzťah**

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (6.21)$$

Daná rýchlosť je rovnaká ako rýchlosť, ktorú by teleso získalo voľným pádom z výšky  $h$ . Ak označíme  $h_1$  vzdialenosť prvého (vyššieho) otvoru od dna hladiny a vzdialenosť  $h_2$  vzdialenosť druhého otvoru od dna, pre rýchlosti vytekajúcej kvapaliny z otvorov dostávame

$$v_1 = \sqrt{2g(h-h_1)} \text{ a } v_2 = \sqrt{2g(h-h_2)}. \quad (6.22)$$

Keďže podľa zadania má voda dopadať do rovnakej vzdialenosti od nádoby, musí pre  $x$ -ové vzdialenosti platiť:

$$x_1 = v_1 t_1 = x_2 = v_2 t_2, \quad (6.23)$$



kde  $t_1$  a  $t_2$  predstavujú časy voľného pádu, kedy kvapalina z daných otvorov dopadne na zem. Môžeme teda písať:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \text{ a } t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}. \quad (6.24)$$

Dosadením vzťahov (6.22) a (6.24) do rovnice (6.29) a ich úpravou dostávame

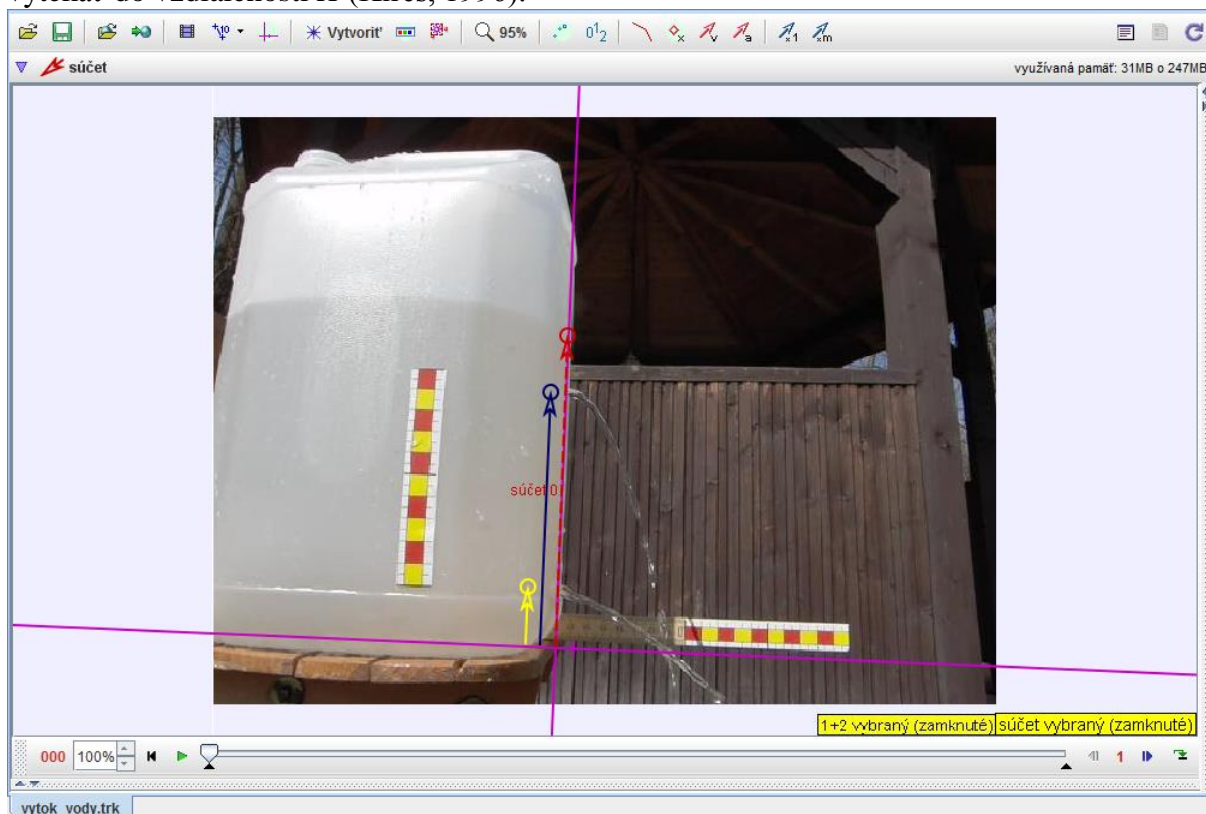
$$(h - h_1)h_1 = (h - h_2)h_2, \quad (6.25)$$

$$h(h_1 - h_2) = h_1^2 - h_2^2. \quad (6.26)$$

Odtiaľ dostávame

$$h = h_1 + h_2, \quad (6.27)$$

čo potvrdzuje aj obrázok Obr. 6.8, voda vytekajúca z otvorov v dvoch rôznych výškach odo dna bude dopadať do rovnakej vzdialenosti, keď vodná hladina bude vo výške rovnajúcej sa súčtu výšok oboch otvorov odo dna nádoby. Dá sa taktiež ukázať, že z každých dvoch symetricky vzdialených otvorov voči stredu budú vodné prúdy dopadať do rovnakej vzdialenosti od nádoby. Ak je otvor v strede medzi dnom a hladinou vo výške  $H$ , bude voda vytekať do vzdialenosti  $H$  (Kireš, 1996).



Obr. 6.8 Vytekánie kvapaliny z otvorov nádoby

## 6.6 Obtiekanie telies

Pri prúde reálnej kvapaliny sa objavujú v kvapaline sily, ktoré brzdia jej pohyb. Dané sily majú pôvod vo vzájomnom silovom pôsobení častíc kvapaliny a nazývajú sa silami vnútorného trenia. Viskózne vlastnosti kvapaliny charakterizuje koeficient dynamickej viskozity  $\eta$ . Jednotkou dynamickej viskozity je  $1\text{Pa}\cdot\text{s}$ . Koeficient dynamickej viskozity je pri väčšine kvapalín rádovo  $10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ , pričom jeho hodnota je závislá od teploty a tlaku.

### Úloha 6-8:

**Určte koeficient dynamickej viskozity kvapaliny v odmernom valci. Hustota skla, z ktorého je guľôčka vyrobená, je  $2500\text{ kg/m}^3$ , hustota glycerínu je  $1260\text{ kg/m}^3$ .**

**(dĺžka dielika: 1 cm (mierka na valci má 10 cm), frekvencia snímok: 30 fps)**

**zdroj: [viskozita.avi](#)**

### Riešenie:

Po pustení malej guľôčky do skúmanej kvapaliny sa guľôčka v kvapaline nebude pohybovať veľkými rýchlosťami, takže okolo nej nebudú vznikať víry a teda obtekanie telesa možno považovať za laminárne. V tomto prípade bude odporová sila spôsobená len viskozitou kvapaliny. Pri tomto prúde bude odporová sila daná Stokesovým zákonom, podľa ktorého je odporová sila úmerná prvej mocnine rýchlosti, koeficientu dynamickej viskozity a lineárnym rozmerom telesa. Podľa tohto zákona je odporová sila guľôčky  $F_o$  pri rovnomernom pohybe v kvapaline vyjadrená pomocou tzv. **Stokesovho vzťahu** v tvare

$$F_o = 6\pi\eta r v, \quad (6.28)$$

kde  $\eta$  je koeficient dynamickej viskozity kvapaliny,  $r$  je polomer guľôčky a  $v$  je rýchlosť jej pohybu v nepohybujúcej sa kvapaline. Na základe znalosti Stokesovho vzťahu a ustálenej rýchlosti guľôčky vo viskóznej kvapaline je možné určiť koeficient dynamickej viskozity. Guľôčka po uvoľnení v kvapaline bude padať voľným pádom. Výsledná sila pôsobiaca na guľôčku sa dá zapísať ako

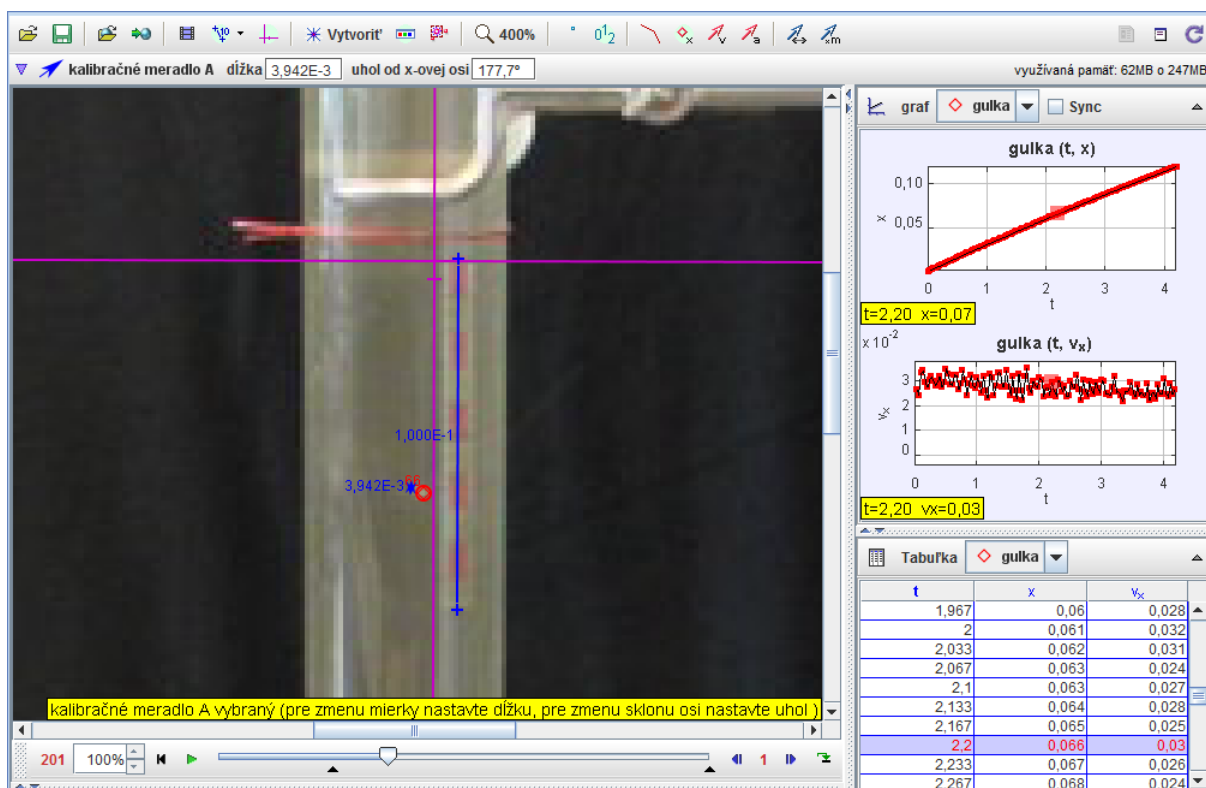
$$F = G - F_{vz} - F_o. \quad (6.29)$$

Pri páde guľôčky bude jej rýchlosť postupne rásť, no so zvyšovaním rýchlosti bude narastať aj odporová sila. V určitom okamihu dosiahne odporová sila takú veľkosť, že všetky sily sa navzájom vykompenzujú, výsledná sila pôsobiaca na guľôčku bude nulová a guľôčka sa bude pohybovať rovnomerným pohybom. Po dosadení jednotlivých síl (tiažovej  $F_G = mg = V \rho_t g$ , vztlakovej  $F_{vz} = V \rho_k g$ ) do predchádzajúceho vzťahu (6.29) a odporovej sily  $F_o$  zo vzťahu (6.28) dostaneme

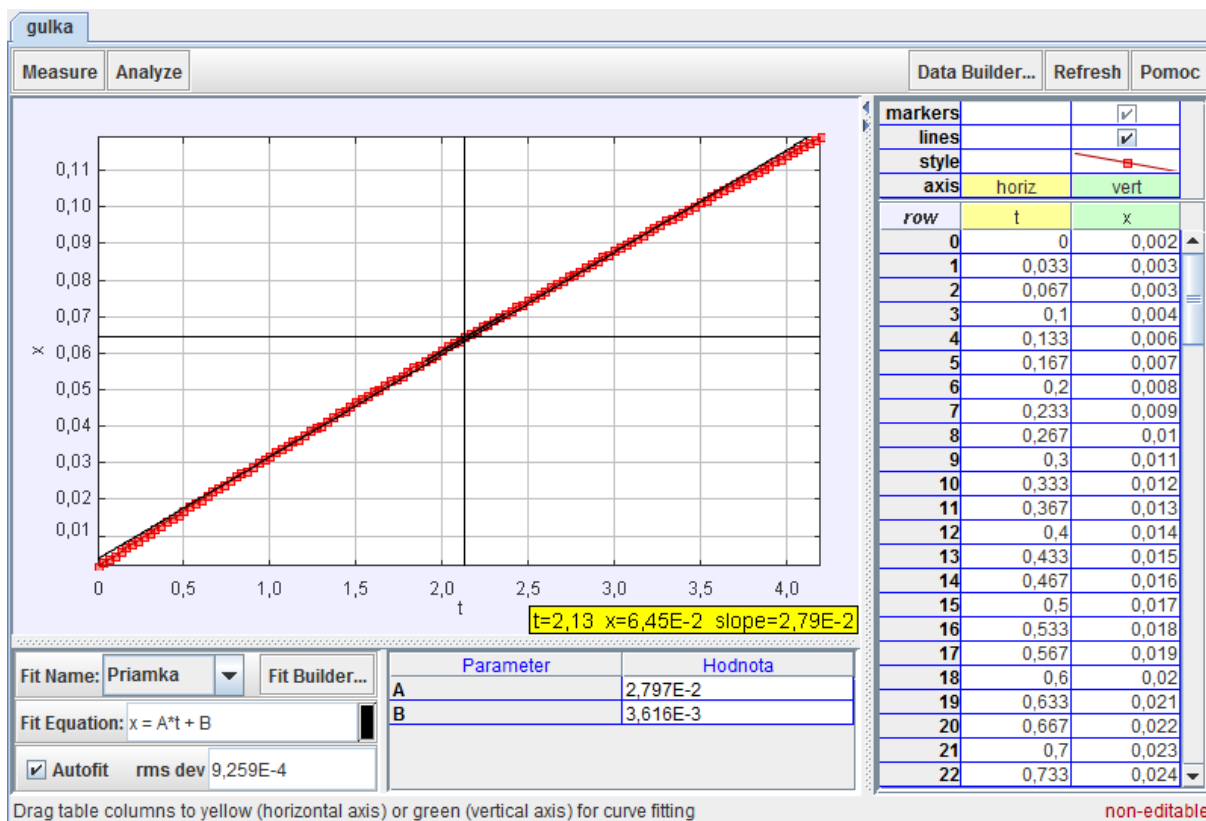
$$V\rho_t g = V\rho_k g + 6\pi\eta r v. \quad (6.30)$$

kde  $V = 4/3 \pi r^3$  je objem guľôčky (zároveň aj vytlačenej kvapaliny),  $\rho_t$  a  $\rho_k$  sú hustoty telesa a kvapaliny. Úpravou predošlého vzťahu pre hľadaný koeficient dynamickej viskozity dostávame

$$\eta = \frac{2(\rho_t - \rho_k)gr^2}{9v} \tag{6.31}$$



Obr. 6.9 Určovanie koeficientu dynamickej viskozity



Obr. 6.10 Určovanie priemernej a okamžitej rýchlosti guľôčky

Dosadením parametrov určených v programe Tracker určíme koeficient dynamickej viskozity, ktorý pre glycerín sa pohybuje v rozmedzí  $0,1 - 1,5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  v závislosti od množstva vody v danom glyceríne a okolitej teplote. (Kalkuláciu ponechávame na samotnom čitateľovi.)

**Neriešené úlohy:**

**Úloha 6-9:** Odhadnite, akou rýchlosťou dopadá voda zo strechy zámku na jeho nádvorie. (predpokladajme výšku človeka  $1,7 \text{ m}$ .)

zdroj: [wawel.jpg](#)

zdroj: [kopernik.jpg](#)

**Úloha 6-10:** Určte povrchové napätie vody v styku so vzduchom. (dĺžka dielika:  $1 \text{ cm}$ , frekvencia snímok:  $120 \text{ fps}$ )

zdroj: [kvapka.avi](#)

**Úloha 6-11:** Určte kapilárny tlak vo vnútri mydlovej bubliny.

(dĺžka dielika:  $1 \text{ cm}$ , povrchové napätie roztoku mydla vo vode v styku so vzduchom je  $40 \text{ mN/m}$ )

zdroj: [bublina.jpg](#),

**Úloha 6-12:** Z dvoch nádob vyteká voda rovnakého objemu. Na konci prvej nádoby je kratšia slamka, na konci druhej dlhšia. Z ktorej nádoby vytečie kvapalina skôr? Odôvodnite.

zdroj: [vytekanie kvapaliny.avi](#)

## 7. Kmitavý pohyb

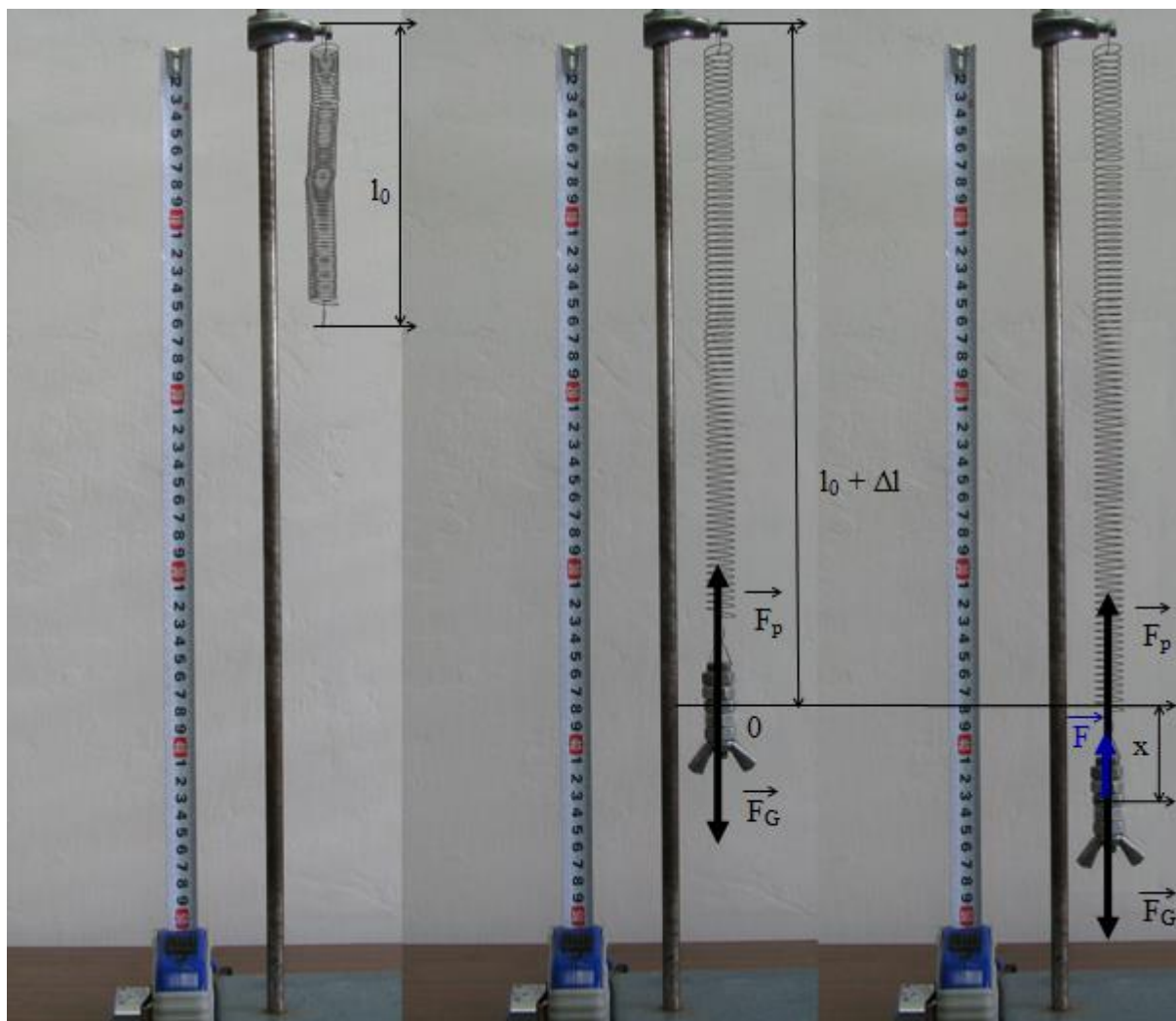
S kmitavými pohybmi sa stretávame všade okolo nás. Niekedy je kmitanie žiaduce (chvenie v prípade hudobných nástrojov), inokedy je nežiaduce (napr. kmitanie auta, práčky). Niekedy ho vnímame (chvenie struny, membrány v reproduktore), inokedy si ho uvedomujeme veľmi málo (kmitanie molekúl vzduchu, ktoré prenášajú zvuk, kmitanie kremenných kryštálov v náramkových hodinách).

V reálnom svete je kmitanie zvyčajne tlmené. Trecie sily a odpor prostredia postupne premieňajú mechanickú energiu na teplo, a tak sa pohyb postupne znižuje. Ak budeme energiu dopĺňať, nielenže zabránime stratám, ale za určitých podmienok sa môže výchylka pri kmitavom pohybe zväčšovať (napr. pohyb detí na hojdačke).

### 7.1 Harmonický pohyb

Akýkoľvek pohyb, ktorý sa opakuje v pravidelných intervaloch sa nazýva **periodický pohyb** alebo **kmitanie**. Podľa veličín, s ktorými sa pri kmitaní stretávame, hovoríme o kmitoch mechanických, elektrických, atď. Po pojmom **harmonický oscilátor** budeme rozumieť každé voľné zariadenie, ktoré môže voľne kmitať bez vonkajšieho pôsobenia, napríklad závažie zavesené na pružine po vychýlení z rovnovážnej polohy, fyzikálne kyvadlo pri malých odchýlkach a pod. Potom hovoríme, že mechanické oscilátory vykonávajú **kmitavý pohyb**. Trajektória kmitavého pohybu môže byť priamočiara aj krivočiara, ale pohyb sa vždy uskutočňuje po tej istej krivke (alebo aspoň jej časti). **Rovnovážna poloha** predstavuje polohu, v ktorej sú sily pôsobiace na oscilátor v rovnováhe, t.j. ich výslednica sa rovná nule. Je to poloha, v ktorej by sa kmitajúci objekt nachádzal, keby bol v pokoji. Kmitanie oscilátorov spôsobuje buď sila pružnosti, ktorá vzniká pri deformácii pružiny alebo tiažová sila. (Predpokladáme pri tom, že nedochádza k trvalým zmenám pružiny a pre deformáciu pružiny (predĺženie alebo stlačenie) platí Hookov zákon a deformácia pružiny je priamoúmerná pôsobiacej sile.) Na úvod sa budeme venovať jednoduchým kmitavým pohybom po priamke. Tejto požiadavke najlepšie vyhovuje kmitanie závažia zaveseného na pružine. Takýto oscilátor sa nazýva **pružinový oscilátor** (Obr. 7.1). Najjednoduchším mechanickým oscilátorom, ktorého kmitanie spôsobuje tiažová sila a pohyb sa uskutočňuje po časti kružnice je **kyvadlo**. V minulosti malo veľký význam ako zariadenie pre meranie času (kyvadlové hodiny). Hlavnou črtou oscilátora je, že po istom čase sa dostane do rovnakej polohy, má tú istú rýchlosť a zrýchlenie. Periodicky sa opakujúcu časť kmitavého pohybu nazývame **kmit**, polovička kmitu je **kyv**. Charakteristické veličiny kmitavého pohybu sú **perióda (doba kmitu)  $T$**  alebo **frekvencia (kmitočet)  $f$** , s ktorými sme sa už stretli v kinematike hmotného bodu. Perióda predstavuje dobu, za ktorú oscilátor prebehne jeden kmit a vráti sa do zvoleného počiatočného stavu. Jednotkou periódy je sekunda. Frekvencia sa rovná počtu kmitov, ktoré prebehnú za jednu sekundu. Je teda prevrátenou hodnotou periódy a udáva sa v hertzoch (Hz). Ak je možné kmitavý pohyb matematicky popísať jednou harmonickou funkciou, hovoríme, že teleso vykonáva **harmonický kmitavý pohyb**. Ak na teleso bude pôsobiť výsledná sila, ktorá je priamoúmerná jeho výchylke pri pohybe po priamke budeme takúto kmitajúcu sústavu označovať **netlmený lineárny harmonický oscilátor**. V prípade priamočiareho pohybu, kedy už uvažujeme o odpore prostredia hovoríme o kmitajúcej sústave ako o **tlmenom lineárnom harmonickom oscilátore**. Ak na takýto oscilátor bude pôsobiť vonkajšia periodická sila, hovoríme o **vynútených kmitoch**. Ak bude kmitanie prebiehať bez vplyvu vonkajších síl, budeme hovoriť o **vlastných kmitoch**.

### 7.1.1 Kinematika a dynamika kmitavého pohybu



Obr. 7.1 K vysvetleniu kmitania mechanického oscilátora

Kým pružina oscilátora nie je zaťažená závažím, má dĺžku  $l_0$  (Obr. 7.1). Keď na pružinu zavesíme závažie, pružina sa pôsobením tiaže  $\vec{G} = m\vec{g}$  závažia predĺži na dĺžku  $l = l_0 + \Delta l$ , pričom sa pružina deformuje (v inerciálnej vzťažnej sústave majú tiažová sila  $\vec{F}_G$ , ktorou je závažie priťahované k Zemi a tiaž  $\vec{G}$ , ktorou pôsobí závažie na záves, rovnakú veľkosť aj smer). V dôsledku pružnosti pružiny vznikne sila  $\vec{F}_p$ , ktorej veľkosť sa v závislosti od predĺženia zväčšuje a ktorá má opačný smer ako tiažová sila  $\vec{F}_G$ . Jej veľkosť je  $F_p = k(l - l_0) = k\Delta l$ , kde  $k$  je tuhosť pružiny. **Tuhosť pružiny**  $k = F_p / \Delta l$  odpovedá sile, ktorá spôsobí predĺženie o jeden meter. Tuhosť pružiny je tým väčšia, čím väčšia sila je potrebná na jej predĺženie, resp. skrátenie o rovnakú dĺžku. Sila  $F_p$  sa bude zväčšovať až do okamihu, pokiaľ nenastane rovnovážny stav, teda sily  $\vec{F}_G$  a  $\vec{F}_p$  sa nevyrovnajú. Pri tomto stave pôsobia na závažie sily rovnako veľké ale opačne orientované. Závažie sa ustáli v rovnovážnej polohe  $O$ , do ktorej umiestnime začiatok vzťažnej sústavy, v ktorej platí  $\vec{F}_p = -\vec{F}_G$ . Ďalším predĺžením pružiny sa rovnováha poruší. Sila pružnosti sa zväčší, kým tiažová sila ostáva konštantná. Výslednica pôsobiacich síl bude pôsobiť nahor smerom do rovnovážnej polohy. (To platí, ak predĺženie smeruje nadol, v opačnom prípade stlačenia pružiny nahor bude výslednica síl smerovať nadol, ale opäť do rovnovážnej polohy.) To znamená, že na oscilátor v prípade akejkoľvek deformácie

pružiny bude pôsobiť premenlivá sila, ktorá je príčinou kmitavého pohybu. Ak teda vychýlime závažie z rovnovážnej polohy vo zvislom smere a teleso uvoľníme, sila mu udelí zrýchlenie a závažie bude voľne kmitať. Okamžitá poloha závažia je určená súradnicou  $x$ , ktorú nazývame **okamžitá výchylka**. Okamžitá výchylka vzhľadom na rovnovážnu polohu dosahuje kladné aj záporné hodnoty. Najväčšia hodnota okamžitej výchylky sa nazýva **amplitúda výchylky** alebo **výkmit**  $x_m$ .

Pri okamžitej výchylke  $x$  bude pôsobiť na oscilátor celková sila veľkosti

$$F = F_G - F_p = mg - k(\Delta l + x). \quad (7.1)$$

Keďže platí  $mg = k\Delta l$ , je príčinou kmitania sila, ktorej priemet do osi  $x$  je

$$F = -kx. \quad (7.2)$$

Môžeme teda konštatovať, že harmonický pohyb mechanického oscilátora je spôsobený silou  $F$ , ktorá stále smeruje do rovnovážnej polohy a je priamoúmerná okamžitej výchylke. Keďže uvažujeme, že pohyb oscilátora nie je ovplyvňovaný vonkajšími silami (prípadne ich vplyv môžeme zanedbať), môžeme jeho harmonický pohyb považovať za **vlastné kmitanie**. (Vlastné kmitanie oscilátora prebieha iba s istou uhlovou frekvenciou  $\omega_0$ , ktorá súvisí s vlastnosťami oscilátora.) Sústava pružina + teleso na Obr. 7.1 sa nazýva **harmonický**, niekedy aj **lineárny harmonický oscilátor**, čo znamená, že sila je úmerná prvej (a nie inej) mocnine výchylky  $x$ .

Ak chceme riešiť pohybovú rovnicu vlastného kmitania oscilátora, prepíšeme si ju do tvaru

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (7.3)$$

Krátkou úpravou dostaneme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (7.4)$$

Keď zavedieme substitúciu  $\omega^2 = k/m$ , dostaneme rovnicu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.5)$$

Daná rovnica (7.5) je lineárnou diferenciálnou rovnicou 2. rádu. Jej spôsob riešenia presahuje rámec tejto učebnice, preto v ďalšom kroku budeme používať zovšeobecnené riešenie pohybovej rovnice pre vlastné (netlmené) kmitanie harmonického oscilátora, ktoré má tvar

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (7.6)$$

kde  $x$  predstavuje okamžitú výchylku v čase  $t$ ,  $x_m$  je maximálna výchylka (spodný index  $m$  znamená maximum) alebo aj **amplitúda kmitov**, argument  $(\omega_0 t + \varphi)$  je **fáza kmitu** a  $\varphi$  je

**fázová konštanta** (alebo začiatková fáza kmitavého pohybu v čase  $t = 0$  s.) Môže mať kladnú aj zápornú hodnotu a meria sa v zvyčajne v radiánoch. Obidve konštanty  $x_m$  a  $\varphi$  vyplývajú z počiatočných podmienok a určujú hodnotu výchylky v začiatkovom okamihu (v čase  $t = 0$  s.). Keďže funkcia kosínus v rovnici (7.6) sa mení medzi krajnými hodnotami  $\pm 1$ , výchylka  $x(t)$  sa bude meniť medzi krajnými hodnotami  $\pm x_m$ .

Vysvetlíme si teraz fyzikálny význam konštanty  $\omega_0$ . Doba, za ktorú sa teleso dostane znova do tej istej polohy a nazýva sa **perióda kmitov** ( $T_0$ ). Z toho vyplýva, že pre ľubovoľný čas  $t$  musí platiť  $x(t) = x(t + T_0)$ . Pre jednoduchosť uvažujme  $\varphi = 0$  rad a zapracujme túto úvahu do rovnice (7.6). Následne dostávame

$$x_m \cos(\omega_0 t) = x_m \cos(\omega_0(t + T_0)). \quad (7.7)$$

Keďže funkcia kosínus je periodická s periódou  $2\pi$  rad, z predchádzajúcej rovnice dostávame

$$\omega_0 t + 2\pi = \omega_0(t + T_0), \quad (7.8)$$

Odtiaľ

$$2\pi = \omega_0 T_0. \quad (7.9)$$

Ak zakomponujeme do predchádzajúceho vzťahu známy vzťah medzi periódou a frekvenciou a použijeme substitúciu z rovnice (7.5), dostávame

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.10)$$

Veľičina  $\omega_0$  definovaná predchádzajúcim vzťahom sa nazýva **uhlová frekvencia** (tiež **kruhovú frekvencia**) pohybu a jej jednotka v sústave SI je radián za sekundu, fyzikálny rozmer je  $s^{-1}$ . Jednoduchý kmitavý pohyb je periodický, priamočiary a nerovnomerný. Využitím predchádzajúceho vzťahu môžeme vyjadriť **periódu vlastných kmitov** netlmeného harmonického oscilátora

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (7.11)$$

**Frekvencia netlmených kmitov**  $f_0$  predstavuje počet kmitov za jednotku času

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.12)$$

Zaujímavosťou je, že frekvencia kmitania nijako nezávisí od toho, ako veľmi sme pružinu natiahli, čiže od veľkosti amplitúdy kmitov. Ako môžeme zo vzťahu (7.12) vidieť, závisí len od hmotnosti kmitajúceho telesa a konštanty – tuhosti pružiny. Nezávisí taktiež na veľkosti gravitačného zrýchlenia.



V literatúre sa taktiež môžeme stretnúť s riešením pohybovej rovnice (7.5) v tvare  $x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ , čo odpovedá rovnici (7.6), ibaže hodnota fázovej konštanty je posunutá o  $\pi/2$ , čo vyplýva z vlastností funkcie sínus a kosínus.

Pre vyjadrenie rýchlosti kmitavého pohybu využijeme znalosti z kinematiky hmotného bodu, kedy rýchlosť telesa pohybujúceho sa po priamke je daná ako derivácia jeho polohy podľa času. Môžeme teda písať

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = x_m \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (7.13)$$

Podobne, ako bol parameter  $x_m$  v rovnici (7.6) nazvaný amplitúdou, z predchádzajúcej rovnice vyplýva, že amplitúda rýchlosti je rovná  $v_m = x_m \omega_0$ . Zrýchlenie kmitavého pohybu telesa určíme ako deriváciu rýchlosti daného telesa podľa času (prípadne druhú deriváciu výchylky podľa času).

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = -\omega_0^2 x. \quad (7.14)$$

Kladná veličina  $x_m \omega_0^2$  predstavuje v tomto prípade amplitúdu zrýchlenia  $a_m$ . Za povšimnutie stojí, že rýchlosť predbieha výchylku vo fáze o  $\pi/2$  a zrýchlenie predbieha výchylku vo fáze o uhol  $\pi$  (Obr. 7.2). Zo vzťahu taktiež vyplýva, že zrýchlenie kmitavého pohybu je priamo úmerné okamžitej výchylke a v každom okamihu má opačný smer.

Z predchádzajúceho vzťahu pre zrýchlenie kmitavého pohybu  $a(t) = -\omega_0^2 x(t)$  a substitúcie zavedenej v rovnici (7.4) dostávame

$$a(t) = -\frac{k}{m} x(t), \text{ kde } \frac{k}{m} = \omega_0^2. \quad (7.15)$$

Zo vzťahu vyplýva, že zrýchlenie kmitajúceho telesa je úmerné jeho výchylke a má opačné znamienko, pričom konštantou úmernosti je druhá mocnina uhlovej frekvencie, ktorá zas závisí len od vlastností samotného oscilátora, t.j. od jeho hmotnosti a tuhosti pružiny (tieto veličiny sa nazývajú tiež aj parametre oscilátora). Najväčšia kladná hodnota výchylky bude odpovedať zápornému zrýchleniu s najväčšou veľkosťou a naopak. Ak bude výchylka nulová, zrýchlenie bude taktiež nulové, avšak veľkosť rýchlosti kmitavého pohybu v danom okamihu bude maximálna.

Časový priebeh harmonického kmitania telesa je znázornený na Obr. 7.2. Súradnicovú sústavu sme pre lepšiu analýzu pootočili o  $\pi/2$ , takže kladný smer osi  $x$  bude smerovať zvislo nahor.

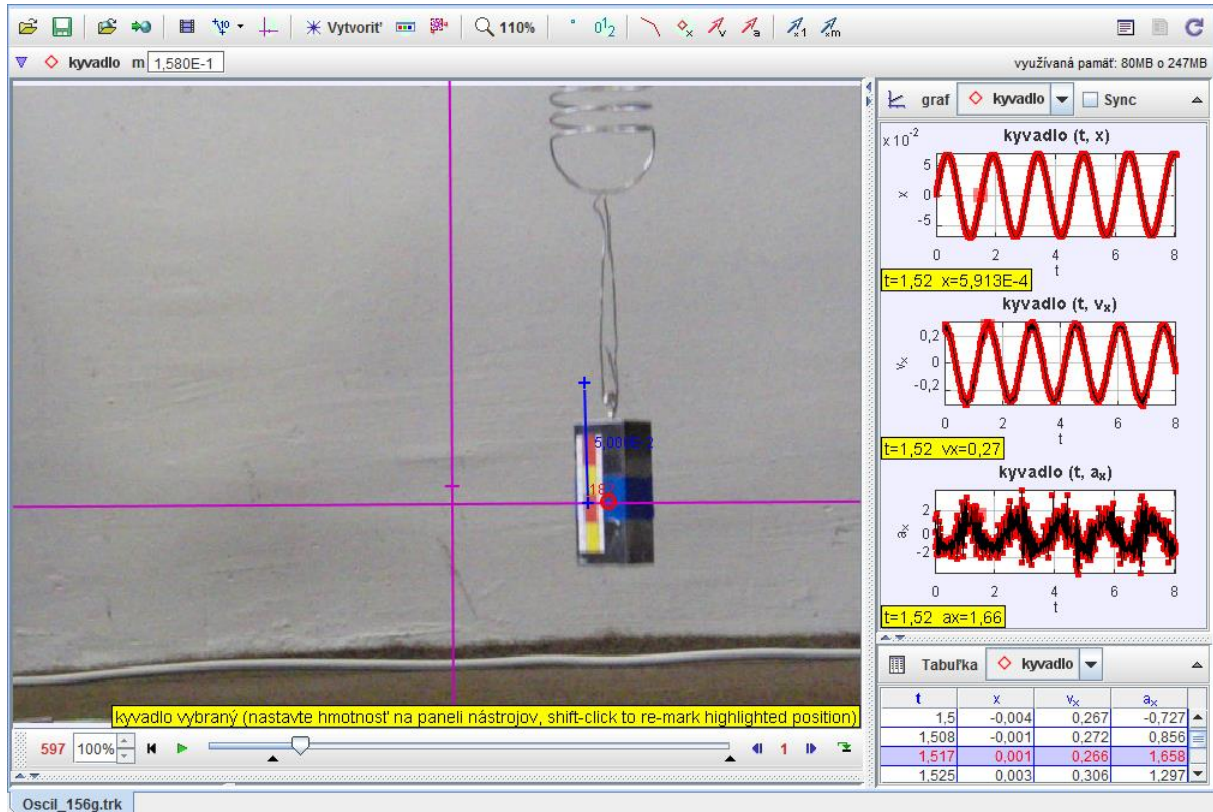
### Úloha 7-1:

**Popíšte rovnicami kmitavý pohyb telesa (vzťahy pre okamžitú výchylku, rýchlosť a zrýchlenie), určte uhlovú frekvenciu a fázovú konštantu kmitavého pohybu.**

**(frekvencia snímok: 120 fps)**

**zdroj: [kmity\\_pruzina2.avi](#)**

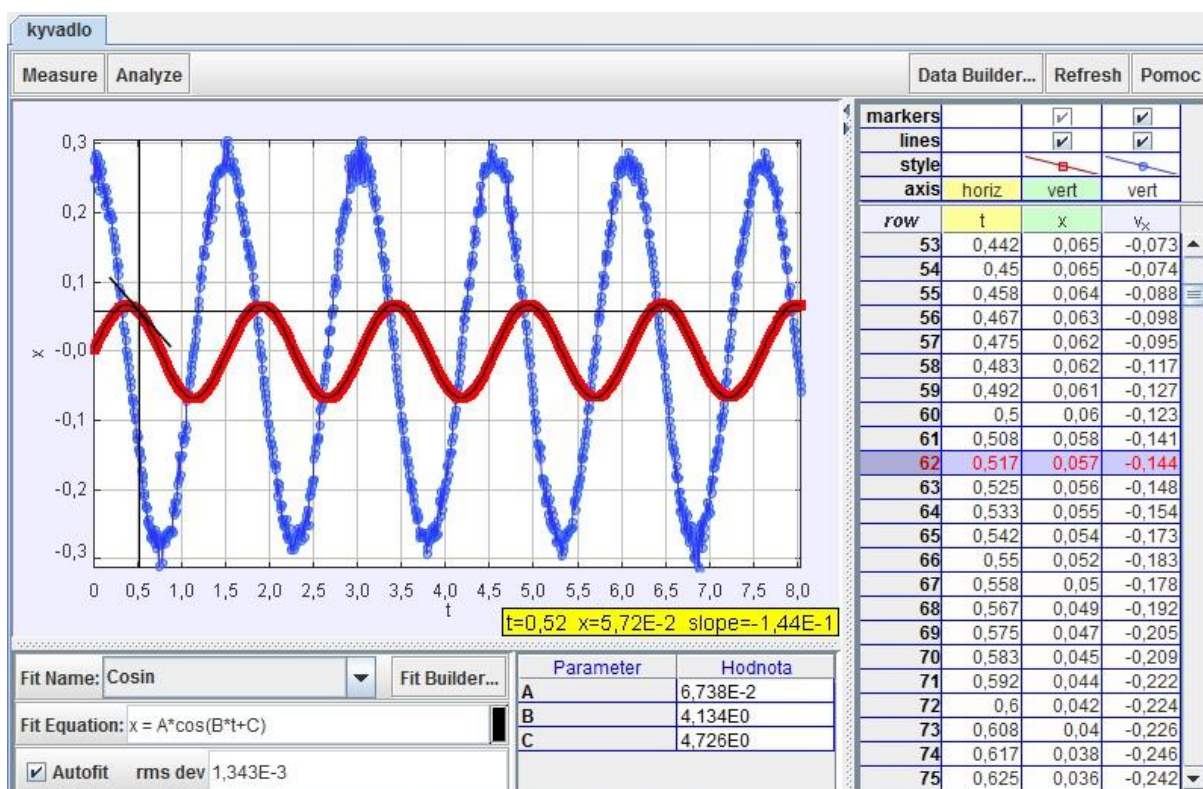
## Riešenie:



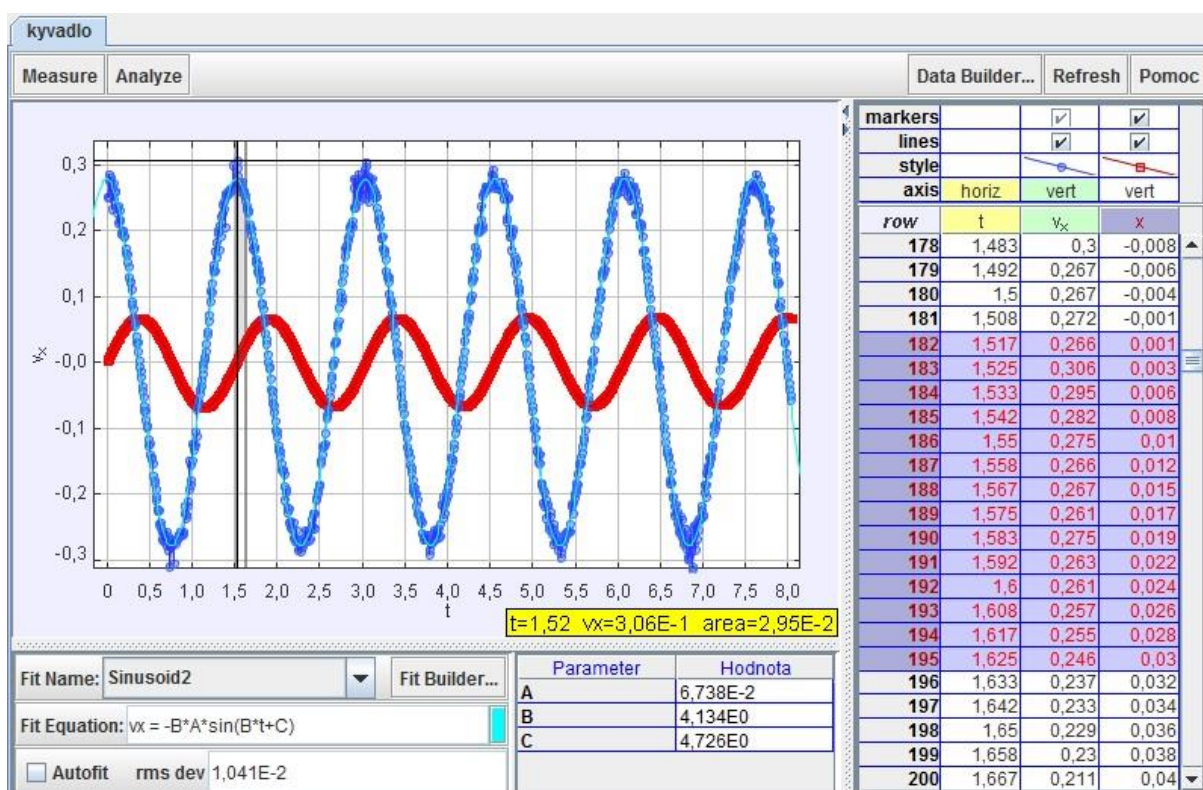
Obr. 7.2 Analýza vlastných kmitov harmonického pohybu pružinového oscilátora

Detailnejšou analýzou časových závislostí možno usúdiť (Obr. 7.3, Obr. 7.4), že kmitavý pohyb možno popísať rovnicami  $x(t) = 0,06738 \cos(4,134t + 4,726)$  (okamžitú výchylku oscilátora predstavujú štvorčeky červenej farby) a  $v_x = -4,134 \cdot 0,06738 \cos(4,134t + 4,726)$  (okamžitá rýchlosť je znázornená modrými guľôčkami), z čoho vyplýva, že amplitúda kmitov je  $x_m = 0,067m$ , uhlová frekvencia kmitavého pohybu je  $\omega_0 = 4,134 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  a fázová konštanta kmitavého pohybu je  $\varphi \approx 4,726 \text{ rad}$ .

Aj v prípade tohto pohybu možno v ktoromkoľvek okamihu určiť rýchlosť kmitavého pohybu v čase  $t$  ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode (Obr. 7.3 – v čase  $t = 0,52s$  má smernica dotyčnice hodnotu  $-0,144 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , čo odpovedá rýchlosti pohybu v danom čase určenej z tabuľky:  $v_x(0,517s) = -0,144 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) a okamžitú výchylku v danom časovom intervale ako obsah plochy pod krivkou závislosti rýchlosti na čase (Obr. 7.4 - obsah vyznačenej plochy je  $0,0295m$ , čo približne odpovedá zmene okamžitej výchylky vo vyznačenom časovom intervale  $\Delta t = t_{195} - t_{182} = 1,625s - 1,517s = 0,108s$ :  $\Delta x = x_{195} - x_{182} = 0,029m$ ).



Obr. 7.3 Analýza výchylky pružinového oscilátora z rovnovážnej polohy



Obr. 7.4 Analýza rýchlosti pružinového oscilátora z rovnovážnej polohy

Ako netlmený harmonický pohyb si s dostatočnou prednosťou môžeme predstaviť pohyb hmotnej gule zavesenej na vlákne zanedbateľnej hmotnosti oproti guli po slabom vychýlení z rovnovážnej polohy (uvažujeme o výchylkách do  $5^\circ$ , kedy  $\sin \alpha \sim \alpha$ ). Takýto oscilátor v ideálnom prípade môžeme považovať za matematické kyvadlo. Ak bude uhlová

výchylka matematického kyvadla malá, môžeme ho považovať za harmonický oscilátor, podobný sústave pružina-teleso. Úlohu tuhosti pružiny  $k$  tu bude zohrávať veličina  $mg/L$ . Pre periódu matematického kyvadla môžeme teda použiť upravený vzťah (7.11), v ktorom doba kmitu matematického kyvadla nezávisí na hmotnosti kyvadla

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (7.16)$$

### Úloha 7-2:

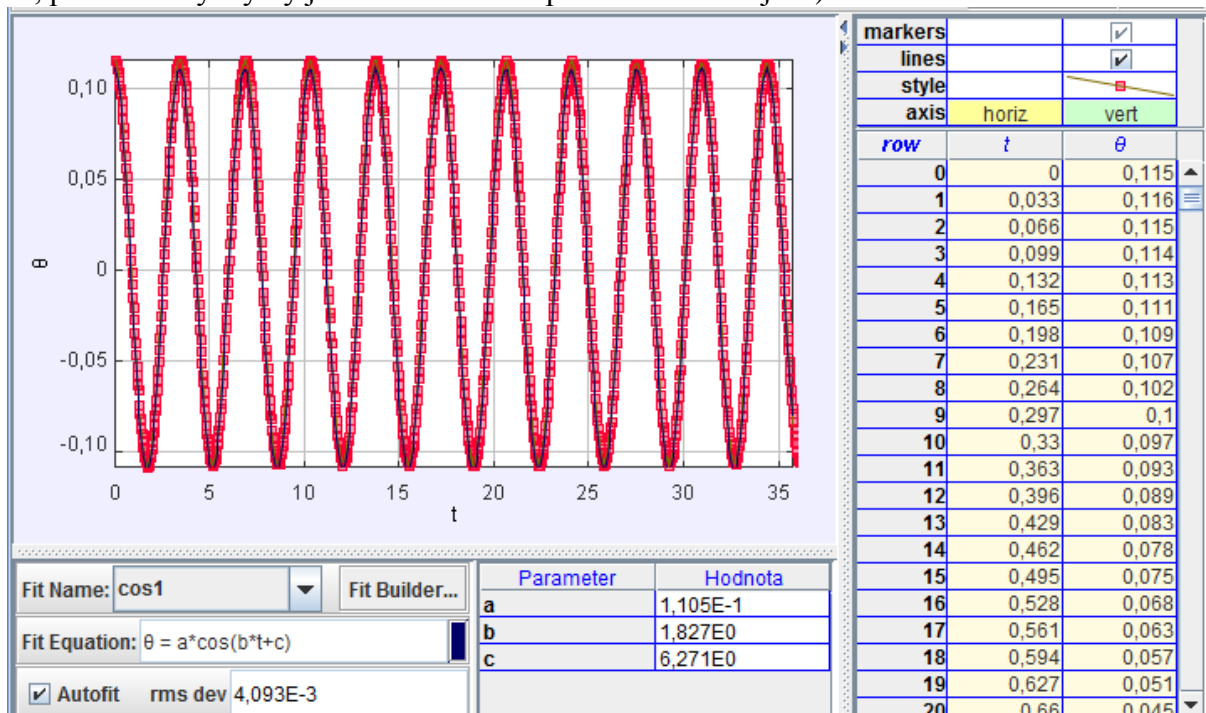
**Popíšte rovnicami pohyb matematického kyvadla (vzťahy pre uhlovú výchylku, uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie), určte uhlovú frekvenciu a fázovú konštantu kmitavého pohybu a z doby kmitu určte hodnotu tiažového zrýchlenia Zeme!**

(dĺžka meradla: 1 m, dĺžka závesu: 3 m)

zdroj: [matematicke\\_kyvadlo.avi](#)

### Riešenie:

Analýzou uhlovej výchylky  $\theta$  z rovnovážnej polohy (Obr. 7.5) (prípadne okamžitej výchylky v smere osi  $x$ ) sa možno dopracovať jednak k uhlovej frekvencii kyvadla a následne k perióde kmitov. Daný priebeh môžeme popísať rovnicou  $\theta(t) = 0,111 \cos(1,827t + 6,27)$  (prípadne pre okamžitú výchylku vo zvislom smere bude platiť  $x(t) = 0,33 \cos(1,827t + 6,27)$ ), z čoho vyplýva, že uhlová frekvencia kmitavého pohybu je  $\omega_0 = 1,827 \text{ rad s}^{-1}$  a fázová konštanta kmitavého pohybu je  $\varphi = 6,27 \text{ rad}$ . Z hodnoty uhlovej frekvencie kmitavého pohybu kyvadla môžeme určiť periódu kmitavého pohybu, ktorá je  $T_0 = 3,44 \text{ s}$ . (Tú môžeme odhadnúť aj z grafu Obr. 7.5, keď dokážeme odčítať čas desiatich kmitov.) Odtiaľ už nie je problém určiť zo vzťahu (7.16) aj hodnotu tiažového zrýchlenia Zeme, ktoré pri dĺžke daného kyvadla  $L = 3 \text{ m}$  a z určených parametrov vychádza  $g = 10,01 \text{ m.s}^{-2}$ . (Pri analýze sme uvažovali o výchylkách do  $5^\circ$ , pre veľké výchylky je riešenie daného problému zložitejšie.)



Obr. 7.5 Analýza uhlovej výchylky matematického kyvadla

### 7.1.2 Premeny energie v mechanickom oscilátore

Aby sme mechanický oscilátor uviedli do kmitavého pohybu, musíme ho vychýliť z rovnovážnej polohy. Ak teleso uvoľníme, nadobudnutá potenciálna energia natiahnutej pružiny sa premení na kinetickú energiu kmitajúceho telesa. Po prechode rovnovážnou polohou teleso začne pružinu stláčať (prípadne ťahať v závislosti od počiatočného vychýlenia) a kinetická energia pružiny sa mení na potenciálnu energiu stlačenej pružiny. Keď oscilátor dosiahne amplitúdu výchylky je potenciálna energia pružnosti oscilátora najväčšia. Potom sa oscilátor vracia späť do rovnovážnej polohy, jeho okamžitá výchylka sa znižuje, no na druhej strane sa zväčšuje rýchlosť závažia a jeho kinetická energia  $E_k$  je pri prechode rovnovážnou polohou najväčšia a rovná potenciálnej energii pri najväčšej výchylke z rovnovážnej polohy. Po prechode rovnovážnou polohou sa rýchlosť oscilátora bude opäť znižovať, pružina oscilátora sa ťahuje a zväčšuje sa jeho potenciálna energia. Keď oscilátor dosiahne amplitúdu výchylky, bude rýchlosť závažia, a teda aj kinetická energia opäť nulová. Pri harmonickom pohybe sa periodicky premieňa potenciálna energia oscilátora na kinetickú a naopak. Celková energia oscilátora je pritom konštantná a v každom okamihu sa rovná súčtu potenciálnej a kinetickej energie.

Ak budeme uvažovať o netlmenom harmonickom pohybe, celková mechanická energia v izolovanej sústave, v ktorej pôsobí iba konzervatívna sila, je konštantná a je rovná súčtu kinetickej a potenciálnej energie. V miestach s maximálnou výchylkou je rýchlosť oscilátora nulová (kinetická energia je taktiež nulová) a celková mechanická energia je rovná potenciálnej energii, pre ktorú platí:

$$E = E_{p \max} = \int_{x_m}^0 -kx \, dx = \frac{1}{2} kx_m^2. \quad (7.17)$$

Rovnakú hodnotu celkovej energie dostaneme, keď budeme analyzovať kinetickú energiu, ktorá dosahuje maximálne hodnoty pri prechode oscilátora rovnovážnou polohou, pričom potenciálna energia je nulová. Po dosadení maximálnej hodnoty rýchlosti zo vzťahu (7.13) do vzťahu pre kinetickú energiu dostaneme

$$E = E_{k \max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 = \frac{1}{2} k x_m^2. \quad (7.18)$$

Pre okamžité hodnoty kinetickej a potenciálnej energie platí

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (7.19)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (7.20)$$

Možno sa presvedčiť, že súčet okamžitých hodnôt kinetickej a potenciálnej energie harmonického oscilátora nezávisí na čase:

$$E_{\text{celk}} = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 (\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 = \frac{1}{2} k x_m^2, \quad (7.21)$$

pričom sme využili, že pre každý uhol  $\alpha$  platí

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad (7.22)$$

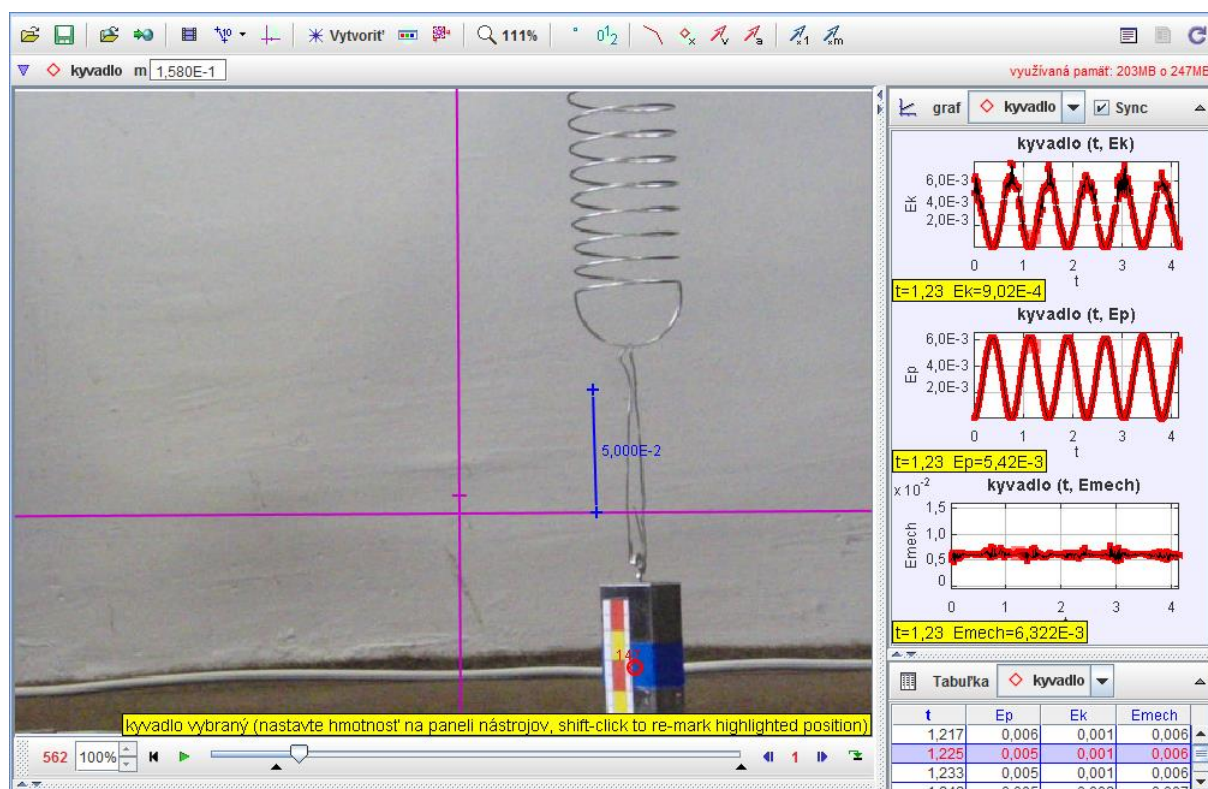
Ako z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, celková mechanická energia netlmeného harmonického oscilátora je konštantná a priamo úmerná tuhosti pružiny a štvorcu amplitúdy kmitov.

### Úloha 7-3:

Analyzujte kmitavý pohyb z hľadiska energií (kinetická, potenciálna, celková).  
(1 dielik je 1cm, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [kmity\\_pruzina2.avi](#)

### Riešenie:



Obr. 7.6 Analýza časového vývoja energií kyvadla

Ako možno z predchádzajúceho Obr. 7.6 vidieť, pri kmitavom pohybe pružinového oscilátora dochádza k periodickým zmenám kinetickej energie  $E_K$  na potenciálnu  $E_P$ , pričom v každom okamihu platí, že ich súčet  $E_{mech}$  je konštantný (odpor prostredia zanedbávame, menšie fluktuácie vznikajú pri výpočte rýchlosti kyvadla, čo sa prejaví aj pri vypočítanej kinetickej energii).

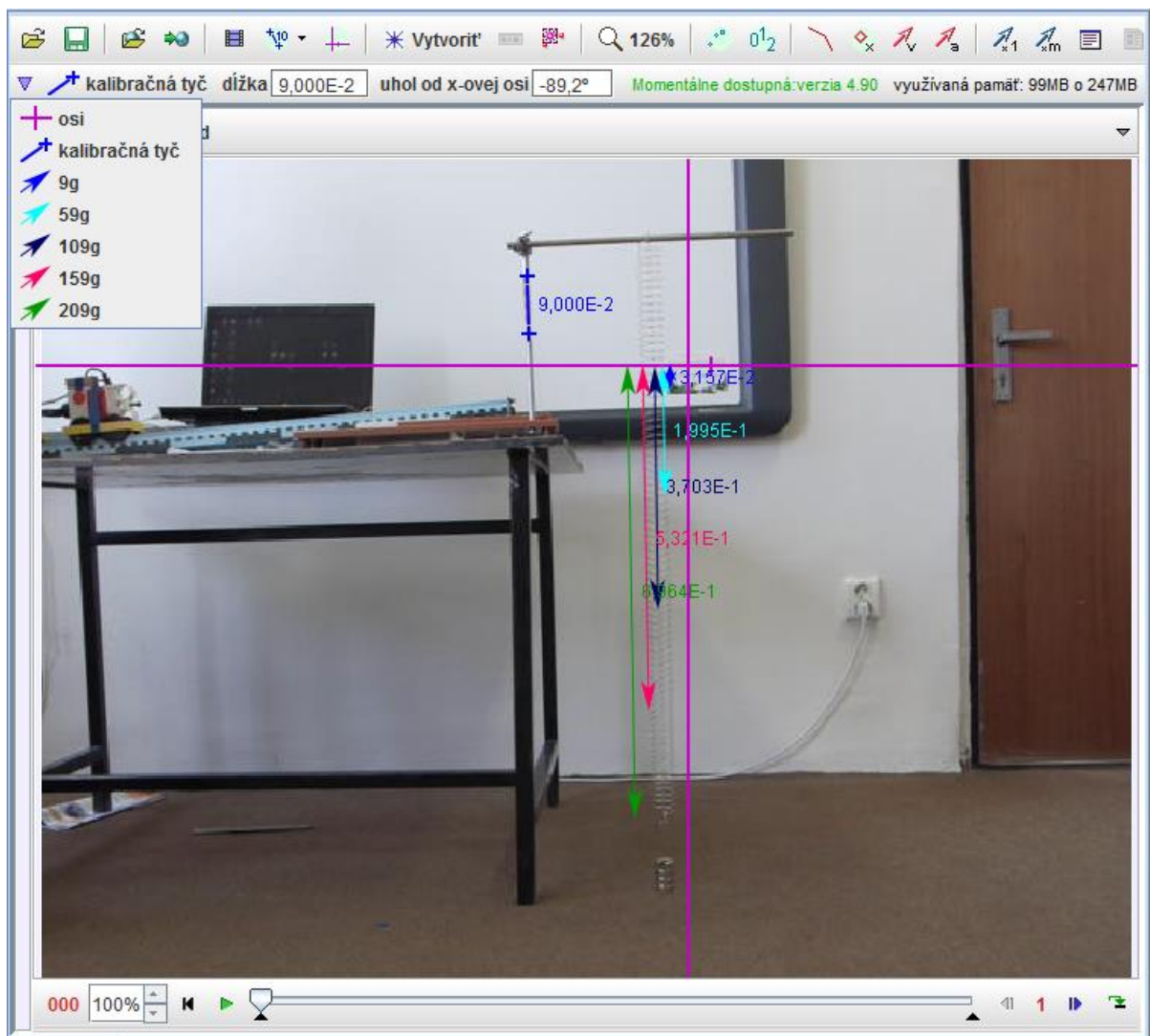
### Úloha 7-4:

Určte tuhosť pružiny.

(dĺžka meradla: 1dielik = 1cm, hmotnosť jednotlivých závaží je 50g, hmotnosť háčika je 9g)

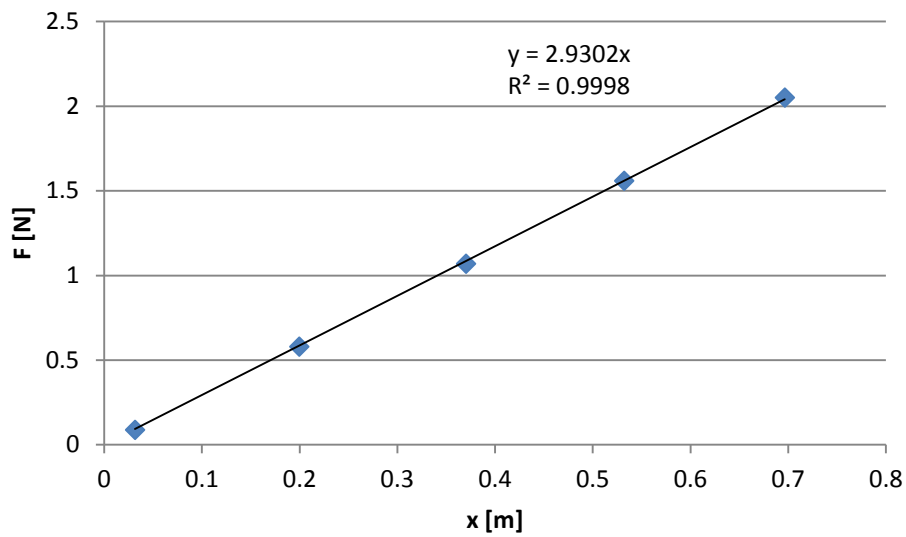
zdroj: [tuhost.avi](#)

## Riešenie:



Obr. 7.7 Analýza predĺženia pružiny

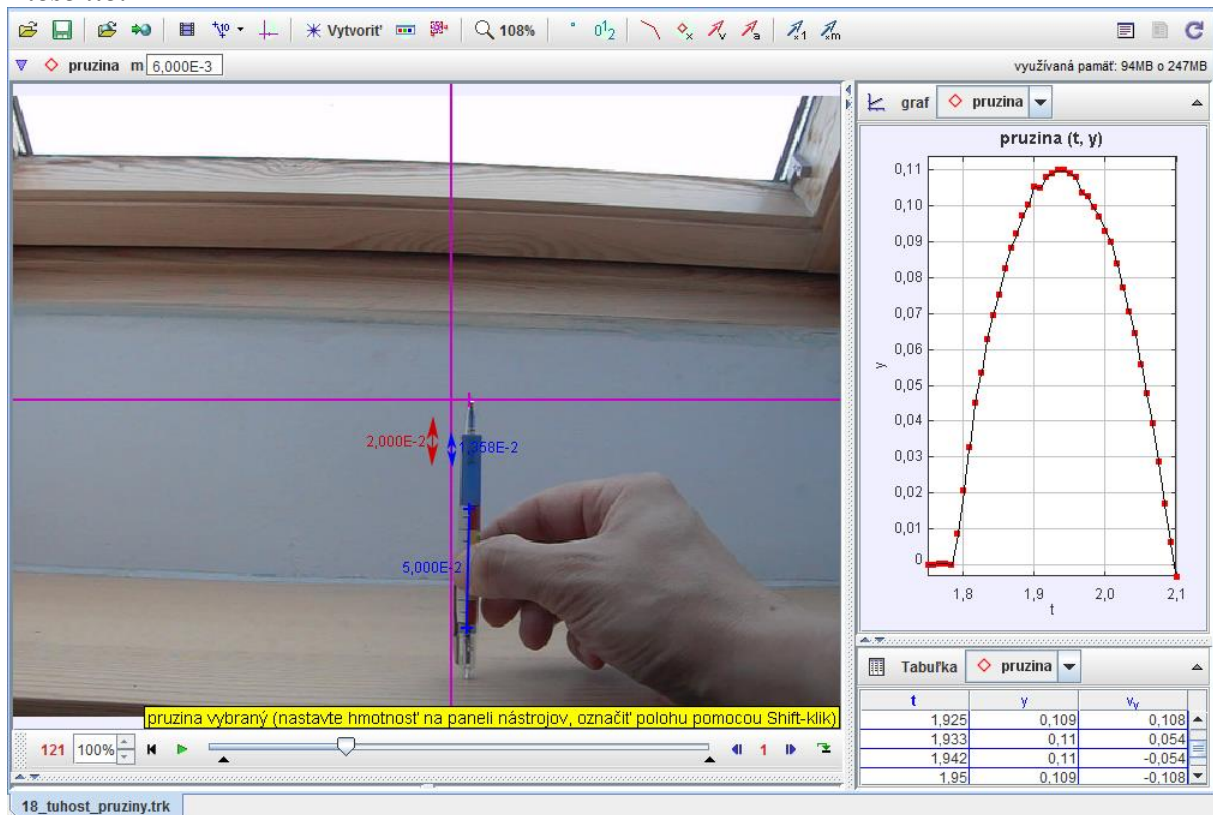
Analýzou v programe Tracker boli určené predĺženia pružiny po pridaní jednotlivých 50 gramových závaží. Dané hodnoty pôsobiacej sily  $F (= m \cdot g)$  a predĺženia boli následne spracované do grafu (Obr. 7.8), pričom využitím lineárnej regresie bola určená hodnota tuhosti pružiny  $k = 2,93 \text{ N/m}$ .



Obr. 7.8 Určenie tuhosti pružiny využitím lineárnej regresie

**Úloha 7-5:**

Určte tuhosť pružiny. Hmotnosť pera je 6 gramov. (1 dielik = 1 cm, 120 fps). zdroj: [tuhost\\_pruziny.avi](#)

**Riešenie:**

Obr. 7.9 Analýza pohybu pera

Ak využijeme znalosť vzťahu (7.18) a (2.26), dáme ich do rovnosti a pomocou analýzy v Trackeri určíme maximálne stlačenie pružiny  $x_m$  a výšku  $h$ , do ktorej vyletí pero, vieme sa dopracovať k tuhosti pružiny, ktorá v tomto prípade vychádza  $k = 311 \text{ N/m}$ .



## Úloha 7-6:

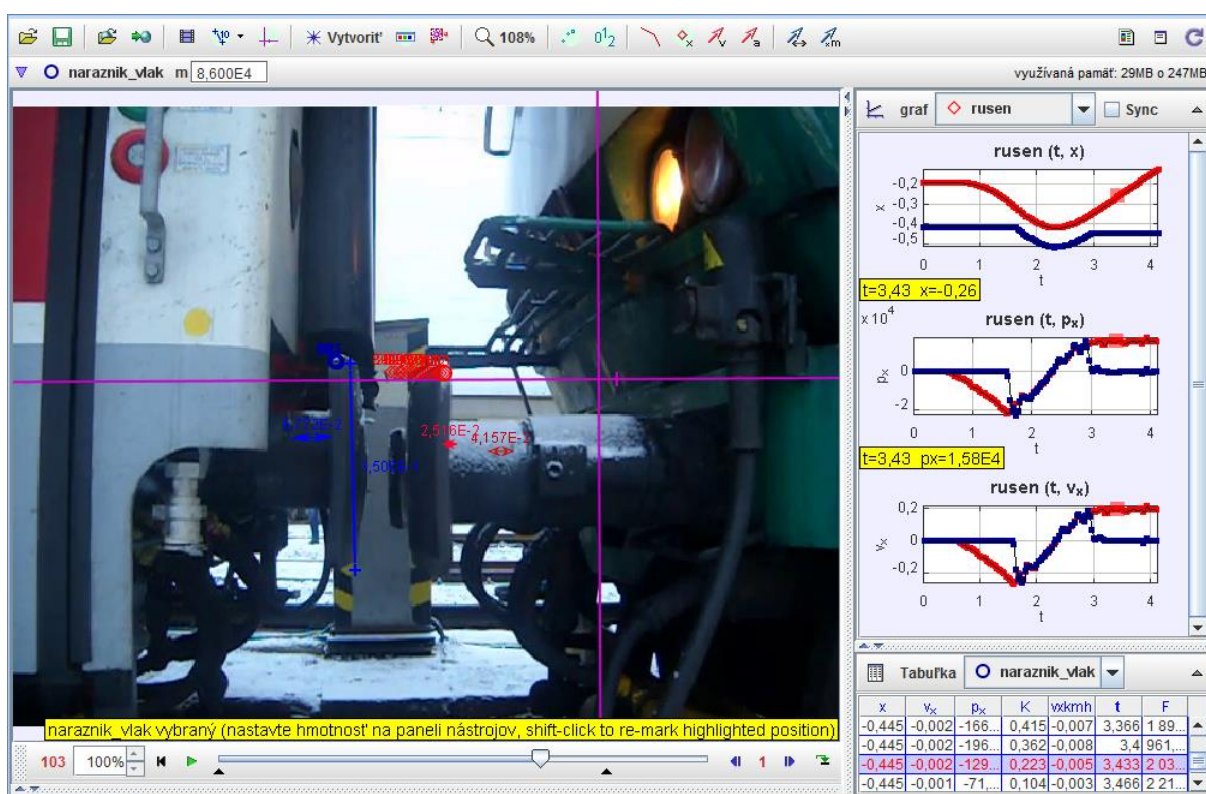
Odhadnite tuhosť pružiny rušňa a vozňa.

(výška nárazníka je 35 cm, hmotnosť rušňa 82 ton, hmotnosť vozňa je 43 ton, počet obrázkov za sekundu je 30 fps).

Zdroj: [naraz\\_vlak.avi](#).

## Riešenie:

Pri detailnejšej analýze videa si všimneme, že po náraze rušňa sa pohne aj vozeň, v skutočnosti sa náraz prejavil aj na stlačení pružín nárazníkov ďalšieho vozňa, takže budeme uvažovať o sústave šiestich pružín na vozňoch, ktoré sa stláčajú. Využijúc riešenie Úloha 7-5: a určením stlačenia pružín (v prípade vozňa 6,77 cm (dohromady 6 pružín) a v prípade rušňa 1,63 cm (2 pružiny)) sa dopracujeme k výsledkom:  $k_{rušňa} = 6 \text{ MN/m}$ ,  $k_{vozňa} = 115 \text{ kN/m}$ .



Obr. 7.10 Analýza nárazu rušňa s vagónom

## 7.2 Tlmený harmonický oscilátor a tlmené kmitanie

Predchádzajúce úvahy boli robené za predpokladu, že v priebehu harmonického kmitania nepôsobia na oscilátor žiadne iné vplyvy. Za daného ideálneho predpokladu by sa amplitúda výchylky nemenila a oscilátor by kmital neobmedzene dlho. V skutočnosti však na oscilátor pôsobia sily, ktoré sú príčinou premeny mechanickej energie na inú formu energie, zväčša na jeho vnútornú energiu. To sa prejaví postupným znižovaním amplitúdy výchylky, až postupne kmitanie zanikne. Tomuto procesu hovoríme **tlmené kmitanie**.

Príčinou tlmeného kmitania oscilátora je najčastejšie trecia sila, ktorá vzniká vzájomným pôsobením oscilátora a prostredia, v ktorom sa oscilátor pohybuje. Ak je tlmenie

oscilátora príliš veľké, kmitanie nenastane a oscilátor sa po vychýlení vráti do rovnovážnej polohy (aperiodický pohyb).

V praxi, keď sa vyžadujú malé tlmenia, príčiny tlmenia sa obmedzujú, a naopak, tam, kde je kmitanie nežiaduce, tlmenie sa umelo zväčšuje (napr. tlmiče perovania v automobiloch, tlmenie pohybu rúčok meracích prístrojov a pod.).

Vlastné kmitanie oscilátora je vždy tlmené. Časový priebeh tlmenia závisí jednak od vlastností oscilátora, ale aj od prostredia, v ktorom sa kmitanie uskutočňuje. Tlmenie ovplyvňuje amplitúdu výchylky aj periódu kmitania. Tlmený oscilátor má väčšiu periódu kmitania ako rovnaký oscilátor bez tlmenia.

Experimentálne môžeme tlmený kmitavý pohyb realizovať napríklad ponorením kmitajúcej sústavy – harmonického oscilátora do viskózne kvapaliny (prípadne nechať oscilátor kmitať dostatočne dlho na vzduchu). Predpokladajme pri danom pohybe, že odpor prostredia je priamo úmerný rýchlosti  $F_{\text{odp}} = -k'v$ , kde  $k' > 0$ . Sila odporu prostredia bude smerovať proti smeru rýchlosti, čo vyjadruje znamienko mínus v pohybovej rovnici

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k' \frac{dx}{dt}. \quad (7.23)$$

Ak použijeme substitúciu (vzťah (7.10))

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ a } \frac{k'}{m} = 2b, \quad (7.24)$$

pohybová rovnica prejde na tvar

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.25)$$

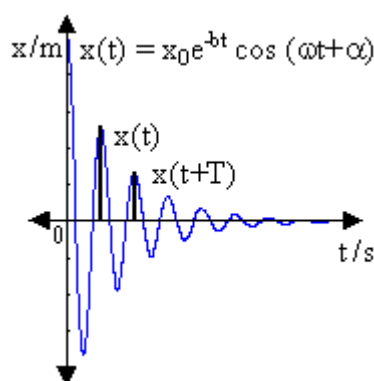
Konštantu  $b = \frac{k'}{2m}$  charakterizuje vplyv trenia a nazýva sa **koeficient útlmu**,  $\omega_0$  je vlastná uhlová frekvencia, t.j. uhlová frekvencia netlmeného harmonického oscilátora. Všeobecné riešenie predchádzajúcej pohybovej rovnice má tvar

$$x = x_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \varphi). \quad (7.26)$$

Uhlová frekvencia  $\omega$  je menšia, ako uhlová frekvencia pri netlmenom kmitaní  $\omega_0$  tej istej sústavy a mení sa aj amplitúda, ktorá s časom exponenciálne klesá:

$$x_m = x_0 e^{-bt}. \quad (7.27)$$

Priebeh kmitania a zmeny amplitúdy je znázornený na obrázku.



Obr. 7.11 Tlmené harmonické kmity

Prísne vzaté nemôžeme tlmený kmitavý pohyb pokladať za periodický pohyb, pretože kmitajúci bod nedosiahne svoju pôvodnú výchylku. Pohyb je kváziperiodický a o perióde  $T$  môžeme hovoriť iba ako o časovom intervale, za ktorý hmotný bod prechádza rovnovážnou polohou.

Pre periódu tlmených kmitov platí

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}, \quad (7.28)$$

pričom  $T > T_0$ , kde  $T_0$  predstavuje periódu vlastných kmitov. Ak je tlmenie malé, perióda kmitavého pohybu sa takmer rovná perióde netlmených kmitov a predchádzajúci vzťah sa zmení na vzťah (7.11). Pri zväčšovaní tlmenia bude aj perióda tlmených kmitov narastať. Pre mechanickú energiu tlmeného oscilátora bude platiť, že sa s časom znižuje. Pre slabé tlmenie môžeme amplitúdu  $x_m$  v rovnici (7.21) nahradiť výrazom (7.26) a získame tak závislosť

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_0^2 \exp(-2bt). \quad (7.29)$$

Podiel amplitúdy dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek na tú istú stranu nazývame **útlm** a označujeme  $\lambda$ , pričom platí

$$\lambda = \frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = \frac{x_0 e^{-bt}}{x_0 e^{-b(t+T)}} = e^{bT}. \quad (7.30)$$

Prirodzený logaritmus útlmu je **logaritmický dekrement útlmu**  $\delta$  a využijúc predchádzajúcu rovnicu môžeme písať

$$\delta = \ln \lambda = bT. \quad (7.31)$$

Čím bude väčší logaritmický koeficient útlmu, tým je potrebný menší počet kmitov na určité zníženie amplitúdy.

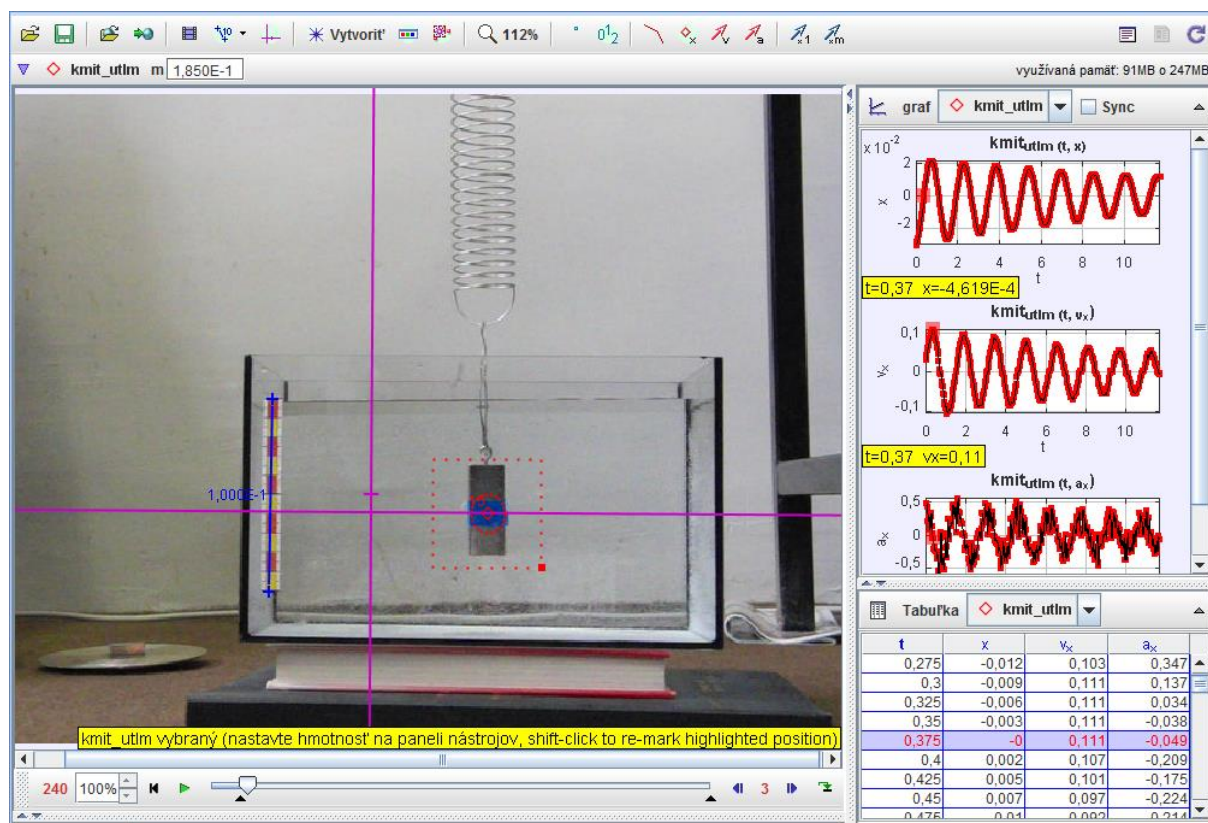
**Úloha 7-7:**

Analyzujte tlmený kmitavý pohyb (nájdite vzťahy pre okamžitú výchylku, rýchlosť a zrýchlenie, určte uhlovú frekvenciu a fázovú konštantu kmitavého pohybu).  
(dĺžka meradla: 0,1 m, frekvencia snímok: 120 fps).

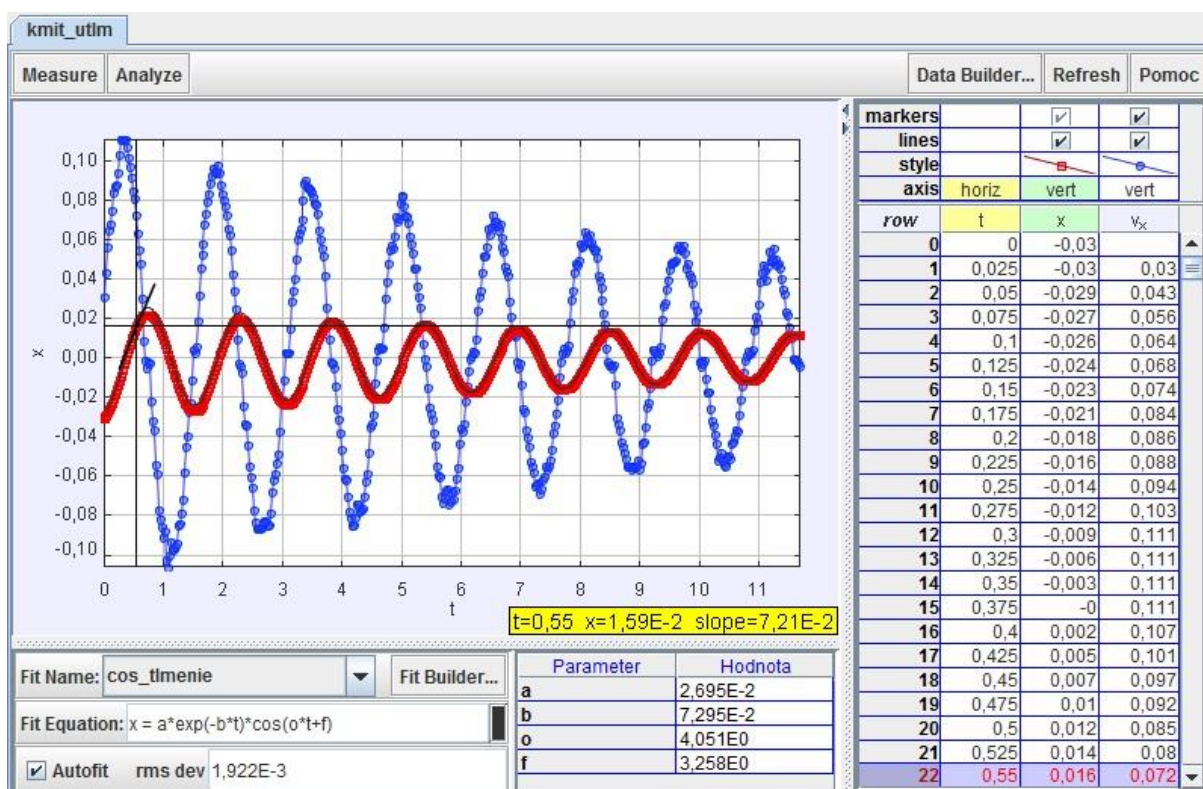
zdroj: [tlmene kmity2.avi](#)

**Riešenie:**

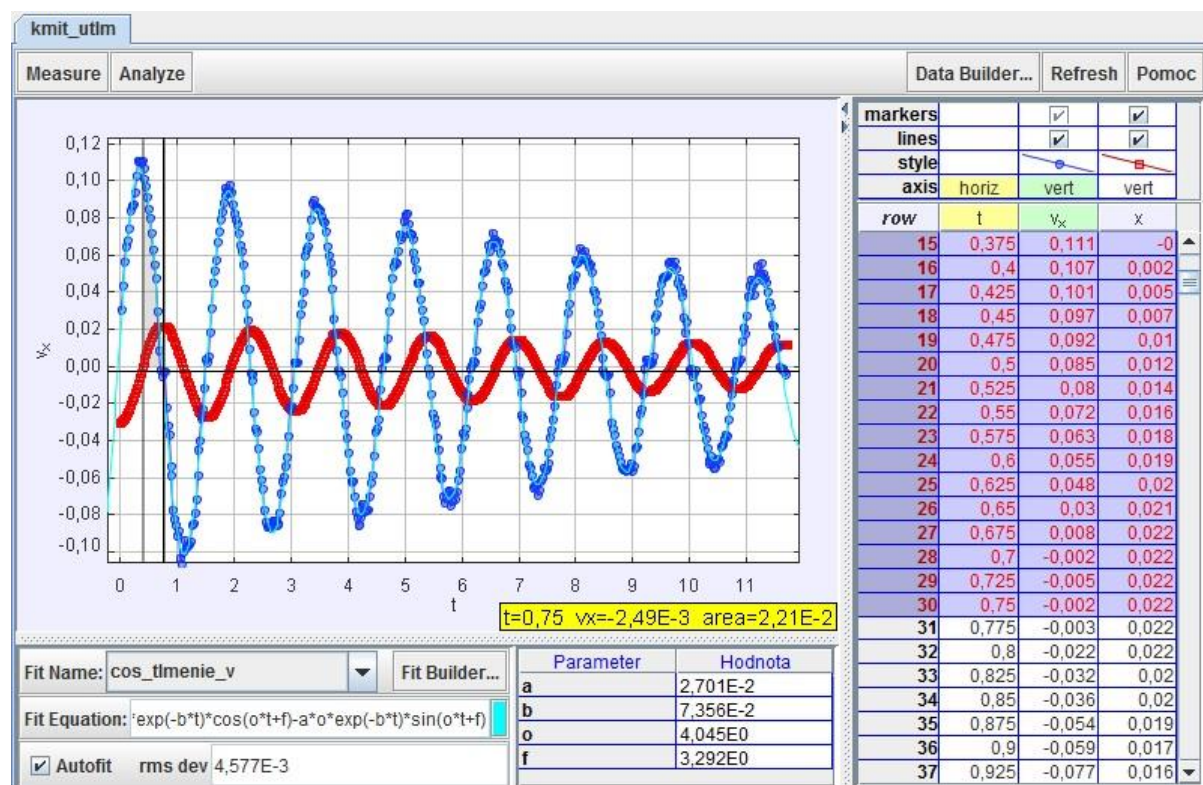
Na nasledujúcom Obr. 7.12 je prevedená analýza tlmených harmonických kmitov pružinového oscilátora – závažia z predchádzajúcej úlohy (Úloha 7-3) zaveseného na pružine a ponoreného do kvapaliny. Ako aj v predchádzajúcom prípade netlmeného pružinového oscilátora, aj v tomto prípade si môžeme všimnúť fázový posun medzi okamžitou výchylkou, rýchlosťou a zrýchlením kyvadla v danom čase.



**Obr. 7.12** Analýza tlmených kmitov harmonického pohybu kyvadla



Obr. 7.13 Analýza okamžitej výchylky tlmených harmonických kmitov kyvadla



Obr. 7.14 Analýza okamžitej rýchlosti tlmených harmonických kmitov kyvadla

Analýzou časových závislostí možno usúdiť (Obr. 7.13, Obr. 7.14), že sa jedná o tlmený harmonický pohyb, keďže amplitúda okamžitej výchylky a rýchlosti sa s časom znižuje.

Okamžitú výchylku tlmeného kmitavého pohybu možno popísať rovnicou v tvare:  $x(t) = 0,02695 \exp(-0,07295t) \cos(4,051t + 3,258)$ . Smernica dotyčnice ku grafu okamžitej výchylky má v čase  $t = 0,55s$  hodnotu  $0,0721m \cdot s^{-1}$ , čo odpovedá okamžitej rýchlosti v smere osi  $x$  určenej z tabuľky:  $v_x(t = 0,55s) = 0,072m \cdot s^{-1}$ . Analýza rýchlosti tlmeného harmonického oscilátora je v tomto prípade trochu zložitejšia, nakoľko rýchlosť tlmeného kmitavého pohybu dostaneme, keď zderivujeme výchylku kyvadla podľa času, ktorá v tomto prípade predstavuje zloženú funkciu ( $\exp() \cdot \cos()$ ). Takže danú matematickú funkciu musíme derivovať ako súčin. (Samotnú deriváciu ponechávame na čitateľovi.) Po zderivovaní výchylky tlmeného harmonického pohybu kyvadla v smere osi  $x$  ( $x(t)$ ) dostávame rovnicu v tvare:

$$v_x(t) = 0,02701 \cdot (-0,07356) \cdot \exp(-0,07356t) \cdot \cos(4,045t + 3,292) - \\ 0,02701 \cdot 4,045 \cdot \exp(-0,07356t) \cdot \sin(4,045t + 3,292).$$

(Vyjadrenie zrýchlenia ponechávame na samotnom čitateľovi, nakoľko sa jedná o dvojnásobnú deriváciu súčinu.)

Zo získaných vzťahov pre výchylku a rýchlosť kmitavého pohybu vyplýva, že amplitúda kmitov je  $x_m = 0,027m$ , uhlová frekvencia kmitavého pohybu je  $\omega = 4,05rad \cdot s^{-1}$  (menšia, ako v prípade netlmeného pohybu), koeficient útlmu  $b = 0,07295$  ( $0,07356$ )  $s^{-1}$  a fázová konštanta kmitavého pohybu je  $\varphi \approx 3,26(3,29)rad$ .

Aj pri tomto pohybe je možné v ktoromkoľvek okamihu určiť okamžitú výchylku v danom časovom intervale ako obsah plochy pod krivkou závislosti rýchlosti na čase (Obr. 7.14) - obsah vyznačenej plochy je  $0,0221m$ , čo odpovedá zmene okamžitej výchylky vo vyznačenom časovom intervale  $\Delta t = t_{30} - t_{15} = 0,75s - 0,375s = 0,375s$ :  $\Delta x = x_{30} - x_{15} = 0,022m - 0m = 0,022m$ ).

Vplyvom trenia pri kmitavom pohybe vo vode bude dochádzať k stratám mechanickej energie, ktorá sa mení na energiu tepelnú a pohyb bude postupne zanikať. Ak chceme v kmitajúcej sústave pohyb udržať, musíme sústave vhodným spôsobom dodávať energiu. Za istých podmienok je možné dosiahnuť, aby výchylky oscilátora boli väčšie, ako samotná počiatočná amplitúda kmitavého pohybu.

### 7.3 Vynútený kmitavý pohyb

V každom kmitajúcom systéme pôsobia určité trecie sily, pričom voľné kmity vyvolané v takomto systéme budú vždy tlmené. Aby sme v systéme dosiahli netlmené kmity, je potrebné kompenzovať energetické straty vyvolané trením pomocou vonkajšieho zdroja. Pod vynúteným kmitavým pohybom budeme rozumieť taký pohyb, ktorý nastane, keď na kmitajúcu sústavu bude okrem sily veľkosti  $kx$  a odporovej sily prostredia  $bv$  pôsobiť aj periodická sila. Môžeme si predstaviť napríklad dieťa na hojdačke, ktoré sa snaží hojdať jeho rodič stojaci pred(z) ním periodickým dodávaním energie. Ak by rodič postrkával hojdačku s frekvenciou rovnou vlastnej frekvencii hojdačky, dosiahol by tak veľké amplitúdy výchylky aj rýchlosti. Ako možno zo skúsenosti vieme, je možné naučiť sa takto rozhojdať hojdačku metódou pokus-omyl. Ak by sme ju rozhojďovali s inou frekvenciou, buď vyššou alebo nižšou, amplitúdy výchylky a rýchlosti by boli malé. Ak by hojdačku nerozhojďoval rodič, ale dieťa by sa hojďalo samé, pričom by sa udržiavalo stále kmitanie pravidelne sa meniacim vnútorným parametrom – napr. kývaním nôh, vtedy hovoríme o tzv. *parametrickej rezonancii*. Rezonančná frekvencia takéhoto mechanizmu hojďania sa je dvojnásobná oproti vlastnej frekvencii hojdačky. Ďalšou zvláštnosťou parametrickej rezonancie oproti vynúteným kmitom je to, že ňou možno zosilniť už existujúce kmity, ale nemožno sa ňou rozhojdať z úplného pokoja.

Uvažujme teraz o tom, že časová závislosť vynucujúcej sily má tvar  $F_v = F_0 \cos(\Omega t)$ , kde  $F_0$  je amplitúda pôsobiacej sily a  $\Omega$  je jej kruhová frekvencia. Pod vplyvom takejto sily

vzniknú v systéme kmity, ktoré nazývame **vynútené**. Výslednicu síl pôsobiacich na teleso hmotnosti  $m$  môžeme zapísať v tvare

$$F = -kx - k' \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t. \quad (7.32)$$

Pohybová rovnica má pre vynútený kmitavý pohyb tvar

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - k' \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t, \quad (7.33)$$

čo môžeme s využitím substitúcie prepísať do tvaru

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t, \quad (7.34)$$

kde  $f_0 = F_0/m$  a  $b$  a  $\omega_0$  majú ten istý význam, ako pri tlmenom kmitavom pohybe. Od predchádzajúcich pohybových rovníc sa táto rovnica líši tým, že jej pravá strana sa nerovná nule a v matematike ju poznáme pod pojmom diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami a pravou stranou. Všeobecné riešenie danej pohybovej rovnice má tvar

$$x = x_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\Omega t + \alpha). \quad (7.35)$$

Z rovnice vyplýva, že ak vonkajšia periodická sila bude pôsobiť na teleso dostatočne dlhý čas, sústava bude konať len vynútené harmonické kmity s amplitúdou  $B$  a frekvenciou rovnajúcou sa frekvencii vynucujúcej sily, pričom fáza vynútených kmitov bude posunutá o uhol  $\alpha$  vzhľadom na vonkajšiu pôsobiacu silu, keďže prvý člen rovnice exponenciálne zaniká. V ustálenom stave je riešenie kmitajúceho systému s vonkajšou silou  $F_v = F_0 \cos(\Omega t)$  dané vzťahom

$$x = B \cos(\Omega t + \alpha). \quad (7.36)$$

Pre amplitúdu vynútených kmitov platí

$$B = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}}. \quad (7.37)$$

Ako z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, amplitúda vynútených kmitov bude závisieť od amplitúdy vynucujúcej sily  $F_0$ , ale aj od vzťahu medzi vlastnou frekvenciou kmitajúceho systému  $\omega_0$  a vynucujúcou frekvenciou  $\Omega$ . Najväčšia hodnota amplitúdy  $B$  sa dosiahne, keď sa obe frekvencie budú rovnáť, t.j.  $\omega_0 = \Omega$ . Daný jav sa nazýva **rezonancia**. Kmity s maximálnou amplitúdou sa nazývajú **rezonančné kmity** a frekvencia pri ktorej dochádza k takýmto kmitom sa nazýva **rezonančná frekvencia amplitúdy**. Rezonančnú frekvenciu je možné určiť z podmienky extrému funkcie  $B(\Omega)$ . Ako si môžeme všimnúť, rezonančná frekvencia nezávisí na veľkosti tlmenia. Maximálna hodnota amplitúdy  $B$  je daná vzťahom

$$B = \frac{F_0}{2mb\Omega}. \quad (7.38)$$

Všetky mechanické sústavy vykazujú jednu alebo viacero vlastných frekvencií. Keď na ne bude pôsobiť veľká vonkajšia sila s frekvenciou blízkou jednej z vlastných frekvencií sústavy, môžu vznikajúce vynútené kmity spôsobiť mechanické porušenie. Mechanické rezonancie môžu mať veľké negatívne účinky. Už pôsobením malej sily môže dôjsť k veľkým amplitúdam kmitov, pričom sa môže porušiť pevnosť materiálov, mostov, čo môže spôsobiť ich deštrukciu (Obr. 7.15). Preto musia aj letecký konštruktéri zaistiť, aby sa vlastná frekvencia krídel líšila od frekvencie piestov pri otáčkach motora behom letu.



**Obr. 7.15** Most Tacoma Narrows Bridge v krátkych okamihoch za sebou počas fúkania vetra a silného krútenia mosta

V roku 1940 postavili v štáte Washington visutý most cez Tacomskú úžinu, ktorý otvorili 1. 7. Vietor, ktorý sa opieral do mosta, spôsobil nekontrolovateľné vlnenie vozovky. 7.11. dosiahla sila vetra rýchlosť 70 km/hod a to spôsobilo také silné krútenie mosta, že to most nevydržal a zrútil sa do rieky.

#### 7.4 Skladanie kmitov

Kmitavý pohyb môže byť niekedy vytvorený zložením rôznych pohybov v rôznych smeroch. V závere tejto časti si popíšeme, čo vznikne zložením dvoch kmitov rovnakej amplitúdy ale rôznej (prítom blízkej) frekvencie. Pre jednoduchosť budeme uvažovať kmitavé pohyby s rovnakými amplitúdami  $x_0$  a fázovými konštantami pohybu  $\varphi$ , pričom uhlová frekvencia prvého kmitania je  $\omega_1$  a druhého  $\omega_2$ . Potom pre okamžité výchylky z rovnovážnych polôh pohybov platí:

$$x_1 = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (7.39)$$

$$x_2 = x_0 \cos(\omega_2 t + \varphi). \quad (7.40)$$

Využitím vlastností goniometrických funkcií pre výchylku výsledného pohybu  $x$  zloženého z dvoch kmitavých pohybov  $x_1$  a  $x_2$  ( $x = x_1 + x_2$ ) dostaneme:



$$x = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) + x_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) = 2x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi\right), \quad (7.41)$$

pričom sme využili známy vzťah z trigonometrie

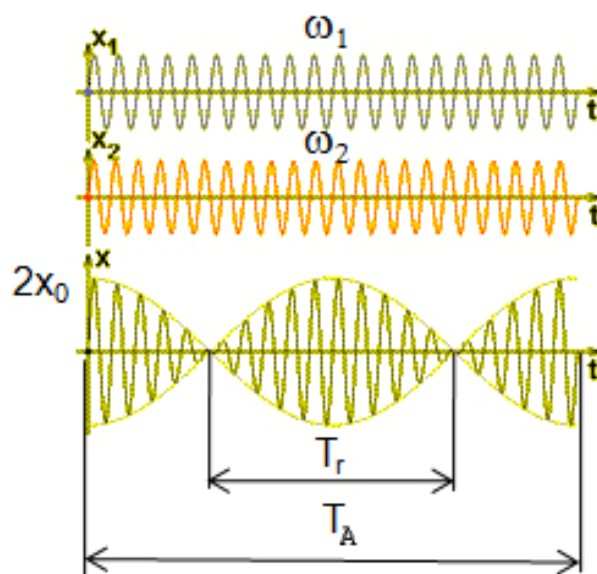
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad (7.42)$$

Prvá časť výsledného vzťahu (7.41) sa mení oveľa pomalšie a charakterizuje amplitúdu pohybu a druhá časť predstavuje fázu pohybu. Výsledný pohyb môžeme preto chápať ako kmitanie s uhlovou frekvenciou  $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$  a pomaly sa meniacou amplitúdou. Výsledný priebeh kmitania je znázornený na Obr. 7.16. Výsledná amplitúda kmitavého pohybu je kladné číslo, takže môžeme pre ňu písať

$$A(t) = \left| 2x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \right|. \quad (7.43)$$

Uhlová frekvencia výsledného pohybu bude mať tvar

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\frac{2\pi}{T_1} + \frac{2\pi}{T_2}}{2} = \frac{\pi(T_1 + T_2)}{T_1 T_2}. \quad (7.44)$$



Obr. 7.16 Vznik rázov

Pre periódu výsledného pohybu môžeme teda písať:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}. \quad (7.45)$$

Amplitúda výsledného pohybu (7.43) sa s časom mení periodicky a pre periódu jej zmeny platí:

$$T_A = \frac{2\pi}{\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}} = \frac{4\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}. \quad (7.46)$$

Keďže za jednu periódu zmeny amplitúdy vzniknú dve zosilnenia a dve zoslabenia, t.j. **rázy**, pre periódu rázov platí:

$$T_r = \frac{1}{f_r} = \frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{T_A}{2} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{2\pi}{2\pi(|f_1 - f_2|)} = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = \frac{1}{\left| \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right|} = \frac{T_1T_2}{|T_2 - T_1|}. \quad (7.47)$$

Pre výslednú frekvenciu rázov môžeme teda písať:

$$f_r = |f_2 - f_1|. \quad (7.48)$$

### Úloha 7-8:

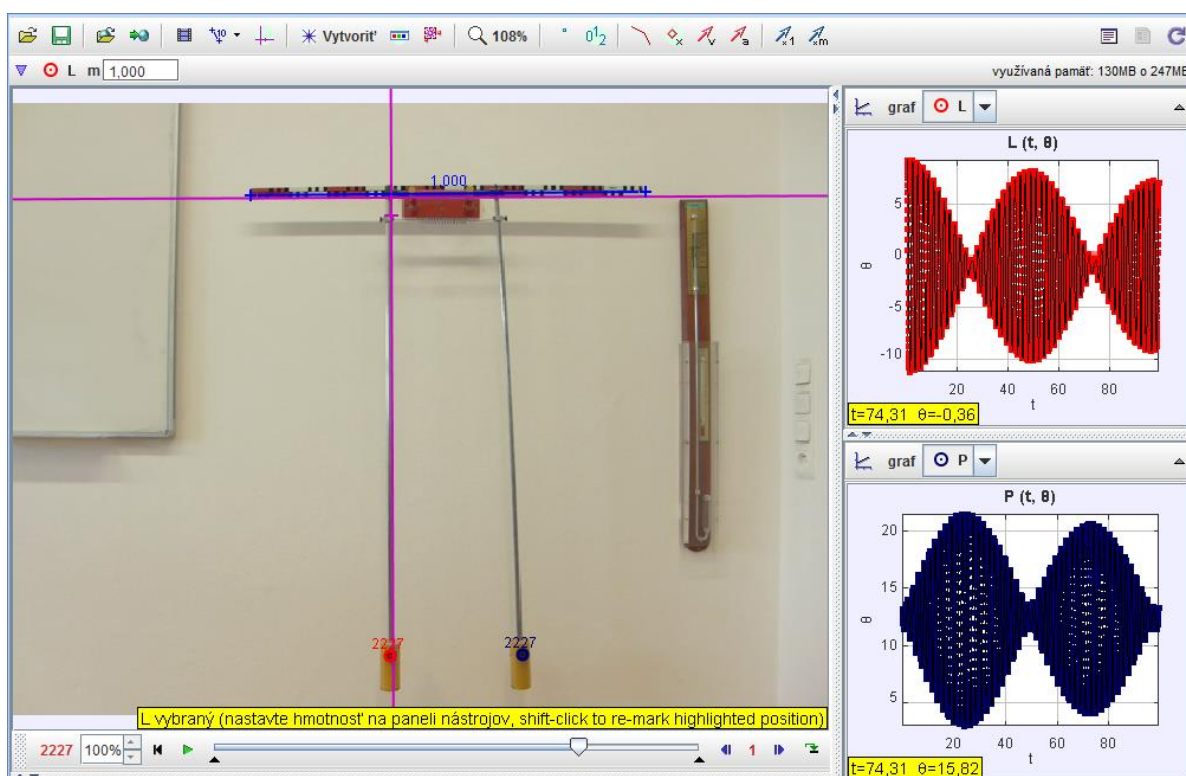
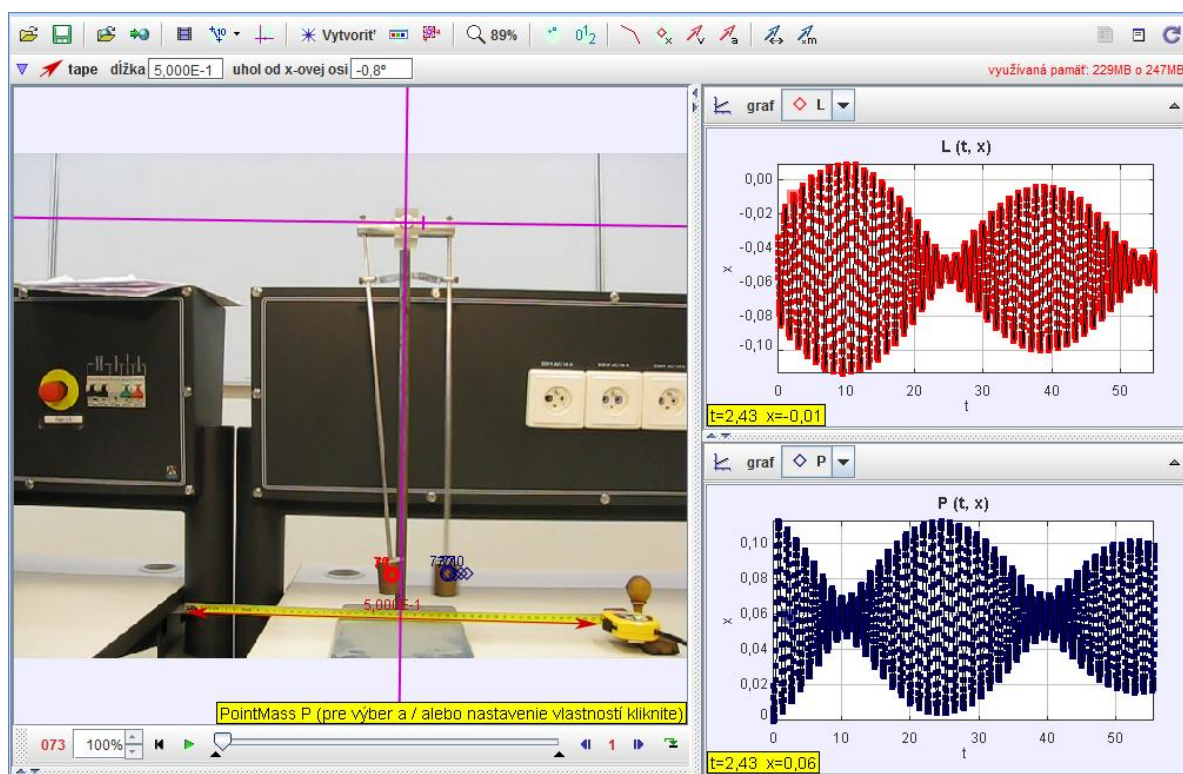
**Analyzujte pohyb spriahnutých kyvadiel, určte frekvenciu rázov!**

(dĺžka meradla: 0,5 m; 1m, frekvencia snímok = 30 fps )

zdroj: [spriahnute kyvadla.avi](#), [spriahnute kyvadla 2.avi](#)

### Riešenie:

Nasledujúci Obr. 7.17 znázorňuje analýzu spriahnutých kyvadiel v programe Tracker. Na základe vyššie uvedených vzťahov je možné určiť periódu rázov a následne hľadanú frekvenciu. (Ponechávame na samotnom čitateľovi.)



Obr. 7.17 Analýza kmitov spriahnutých kyvadiel

**Úloha 7-9:**

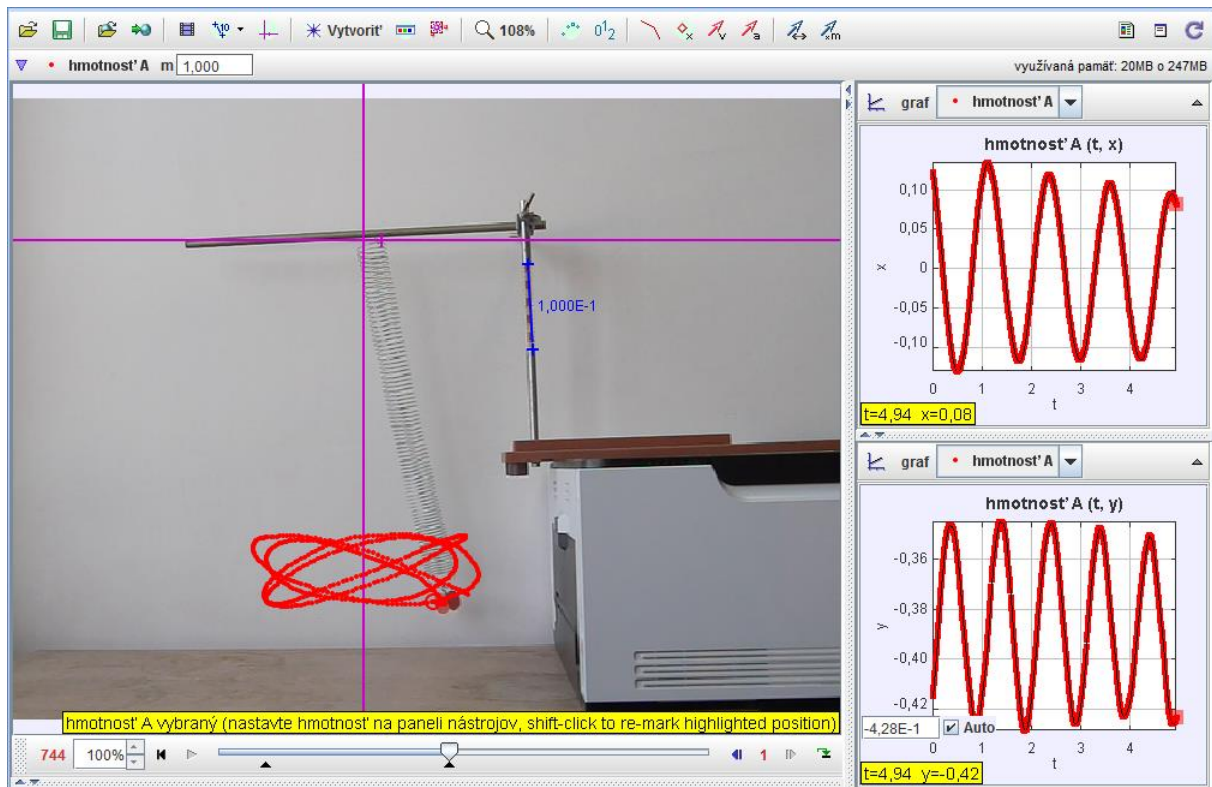
Analyzujte pohyb telesa, ktoré vykonáva súčasne pohyb v smere osi  $x$  aj  $y$ . Určte pomer frekvencií kolmých kmitov.

(dĺžka meradla: 10 cm, frekvencia snímok: 120 fps)

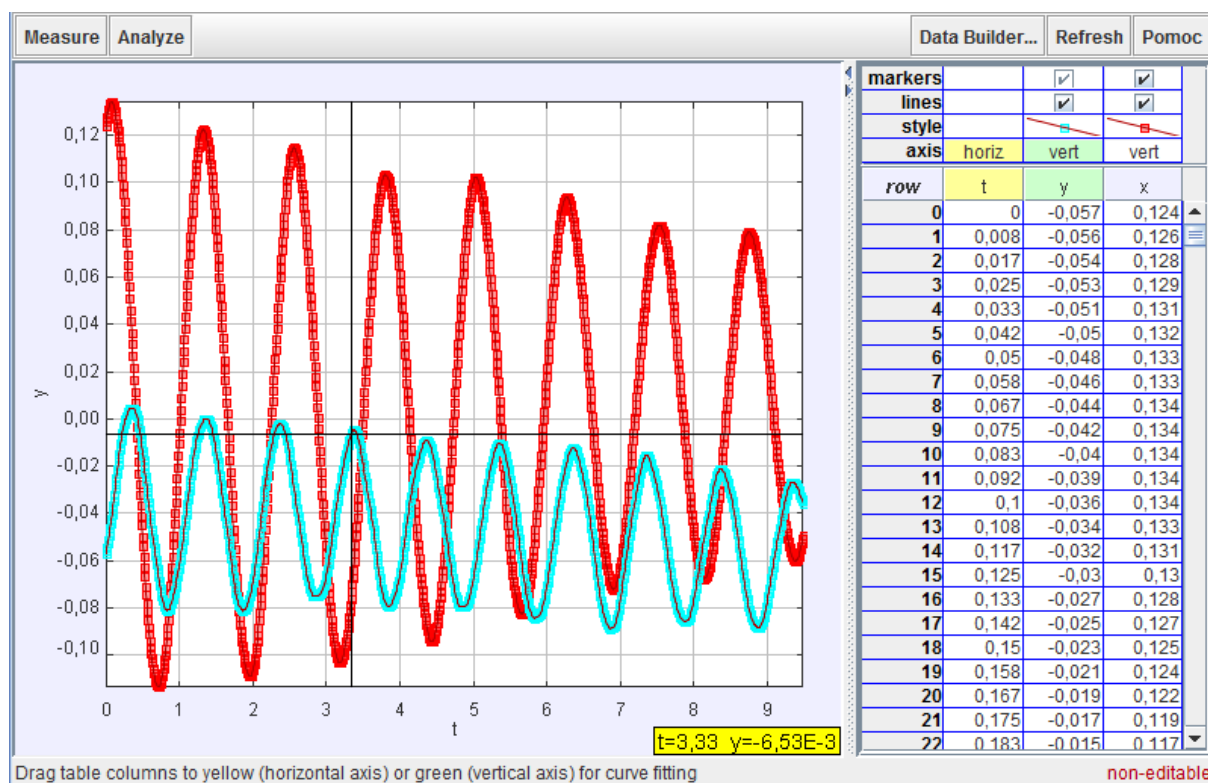
zdroj: [pruzina.avi](#)

**Riešenie:**

Ako si možno na Obr. 7.18 všimnúť, teleso zavesené na pružine vykonáva preiodický pohyb v smere osi  $x$  aj v smere osi  $y$ . V prípade, že by frekvencie daných kmitov neboli rovnaké, ale ich pomer by sa dal vyjadriť ako podiel prirodzených čísel (1:2, 1:3, 2:3), pre rôzne hodnoty fázového rozdielu ( $0, \pi/2, \pi$ ) by sa daný pohyb uskutočňoval po krivkách, ktoré nazývame **Lissajousove krivky**. (Viac o tom v literatúre Kúdelčík a kol., 2011). Pre náš prípad platí (Obr. 7.19), že perióda kmitov v smere osi  $x$  je  $T_x = 1,231 \text{ s}$  ( $f_x = 0,812 \text{ s}^{-1}$ ) a v smere osi  $y$  je  $T_y = 0,999 \text{ s}$  ( $f_y = 1,001 \text{ s}^{-1}$ ). Pomer frekvencií kolmých kmitov je  $f_x / f_y = 0,812$ .



Obr. 7.18 Analýza pohybu telesa v smere osí  $x$  a  $y$



Obr. 7.19 Časová analýza výchylky v smere osi x a y

**Úloha 7-10:**

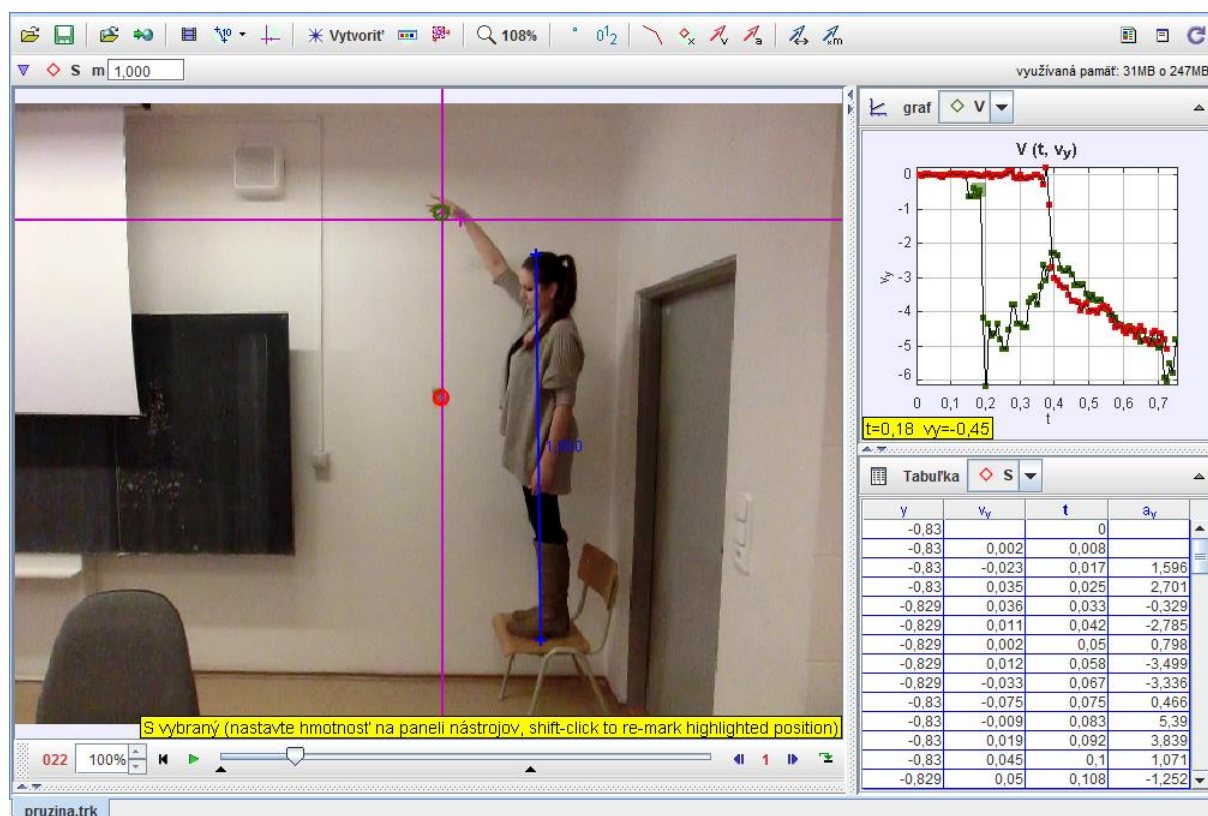
Analyzujte pohyb padajúcej pružiny na začiatku uchytenej v najvyššom bode a voľne visiacej.

(výška študentky: 180 cm, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [slinky.mov](http://slinky.mov)

**Riešenie:**

Zaujímavosťou pri tejto analýze je, že sa pružina po uvoľnení nebude pohybovať ako celok, ale pohybuje sa len jej vrchná časť a spodná časť “levituje” až do okamihu, kedy sa vrchná časť priblíži k spodnej a potom už pokračuje “nenatiahnutá” pružina (jej vrchný aj spodný koniec) voľným pádom (Obr. 7.20). Zatiaľčo v prvej časti pohybu sa začiatok pružiny po uvoľnení pohybuje so zrýchlením  $a_1 = 15,7 \text{ m/s}^2$ , spodok pružiny sa nepohybuje, t.j. jeho rýchlosť je nulová. Po stretnutí oboch koncov sa nenatiahnutá pružina bude pohybovať so zrýchlením  $a_2 = 9,84 \text{ m/s}^2$ , teda voľným pádom. (Viac o tejto analýze v príspevku Kireš, Ješková, 2007)



Obr. 7.20 Analýza pohybu voľne pustenej natiahnutej pružiny (slinky)



Obr. 7.21 Časová analýza rýchlosti horného konca pružiny (zelená farba) a spodného konca (červená farba)



Obr. 7.22 Časová analýza rýchlosti pružiny (horného a spodného konca) po stiahnutí pružiny





## 8. Mechanické vlnenie

V predchádzajúcej kapitole sme sa zaoberali kmitavým pohybom, ktorý sa zvyčajne realizuje na priamke. Ak budeme mať sústavu bodov, ktoré sú vzájomne prepojené, kmitavý pohyb jedného bodu sa bude postupne prenášať k ďalším bodom a vznikne **vlnenie**.

Zo skúsenosti vieme, že keď hodíme kameň na vodnú hladinu (Obr. 8.1), z miesta dopadu kameňa sa po vodnej hladine bude šíriť rozruch vo forme vln, ktoré majú tvar sústredných kružníc. Ak sa na vodnej hladine nachádza plávajúci predmet v istej vzdialenosti od miesta dopadu kameňa, po istom čase sa kmitavý rozruch preniesie z miesta dopadu kameňa a vyvolá kmitanie plávajúceho telesa (keď vlna dorazí na dané miesto). Vlnenie je dej, pri ktorom sa kmitavý pohyb šíri prostredím, pričom sa prostredím prenáša energia.

Prostredie, ktoré má vo všetkých smeroch rovnaké vlastnosti sa nazýva **izotropné prostredie**. Body, do ktorých sa vlnenie dostane z bodového zdroja za rovnaký čas, ležia na kružnici (v rovine) alebo na guľovej ploche (v priestore) a nazývajú sa **vlnoplocha**. Smer šírenia vlnenia v danom bode bude určovať kolmica na vlnoplochu, ktorá sa nazýva **lúč**.

Pomocou vlnenia sa šíri zvuk, svetlo, televízne aj rozhlasové signály. V nasledujúcich častiach si budeme charakterizovať **mechanické vlnenie**; elektromagnetické vlnenie, pre ktoré platí rovnaký matematický popis, avšak jeho fyzikálna podstata je iná, je nad rámec tejto publikácie.

### 8.1 Postupné mechanické vlnenie

Príčinou vzniku mechanického vlnenia, ktoré sa šíri v pevných, kvapalných aj plynných látkach, je existencia väzbových síl medzi časticami prostredia, ktorým sa vlnenie šíri. V dôsledku pružného prostredia sa kmitanie jednej častice prenáša väzbovými silami na ďalšie častice. Ak častice prostredia, v ktorom sa vlnenie šíri kmitajú v rovine a ich amplitúdy sú kolmé na smer, ktorým vlnenie postupuje, hovoríme o **postupnom priečnom vlnení**. Ak dané častice kmitajú v smere, ktorým vlnenie postupuje, hovoríme o **postupnom pozdĺžnom vlnení**. Pozdĺžne vlnenie je charakteristické zhutňovaním a zriedňovaním kmitajúcich bodov okolo miest, v ktorých sú okamžité výchylky nulové.

Vzdialenosť, do ktorej sa vlnenie šíriace sa **fázovou rýchlosťou vlnenia**  $v$  dostane za periódu  $T$  kmitania zdroja vlnenia nazývame **vlnová dĺžka**  $\lambda$  a vyjadrujeme ju vzťahom:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}, \quad (8.1)$$

kde  $f$  predstavuje frekvenciu zdroja vlnenia. Fázová rýchlosť vlnenia predstavuje rýchlosť, ktorou sa premiestňuje rovnaká fáza kmitania jednotlivých bodov, napríklad pri priečnom vlnení maximálna výchylka v smere, ktorým vlnenie postupuje. Na základe toho možno konštatovať, že **vlnová dĺžka je vzdialenosť dvoch najbližších bodov, ktoré kmitajú s rovnakou fázou**. Možina bodov, v ktorých má vlnenie v danom okamihu rovnakú fázu, vytvárajú **vlnoplochu**.

### 8.2 Rovnica postupnej vlny

Tak, ako pri kmitavom pohybe sme analyzovali výchylku hmotného bodu v ľubovoľnom čase, dokážeme aj vlnenie opísať vzťahom, pomocou ktorého určíme okamžitú výchylku  $y$  každého bodu radu v ľubovoľnom časovom okamihu  $t$ . Budeme uvažovať o vlnení, ktoré sa šíri v smere osi  $x$ , pričom výchylka jednotlivých bodov sa uskutočňuje v smere osi  $y$ .

Uvažujeme o postupnom vlnení zo zdroja, ktoré sa šíri radom hmotných bodov, pričom daný zdroj harmonicky kmitá podľa rovnice

$$y = y_m \sin(\omega t). \quad (8.2)$$

Ak sa dané vlnenie bude šíriť fázovou rýchlosťou  $v$ , tak do bodu vzdialeného od zdroja vlnenia  $x$  sa dostane za čas  $\tau = x/v$ . Z toho vyplýva, že kmitanie daného bodu bude mať rovnakú okamžitú výchylku ako zdroj o dobu  $\tau$  neskôr. Okamžitú výchylku daného bodu určíme podľa vzťahu:

$$y = y_m \sin(\omega(t - \tau)) = y_m \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right). \quad (8.3)$$

Využitím vzťahu  $\omega = 2\pi/T$  a vzťahu (8.1) dostaneme rovnicu postupnej vlny pre rad bodov:

$$y = y_m \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right). \quad (8.4)$$

Daná rovnica postupnej vlny charakterizuje vlnenie, ktoré sa šíri homogénnym prostredím zo zdroja kmitajúceho harmonicky. Keďže neuvažujeme o stratách mechanickej energie, amplitúda  $y_m$  všetkých bodov je rovnaká a vlnenie považujeme za netlmené. Veličinu  $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$  označujeme ako **fáza vlnenia**. Daná rovnica predstavuje vlnenie, ktoré sa šíri v kladnom smere osi  $x$ , teda napravo od zdroja vlnenia. Ak by sa vlnenie šírilo naľavo od zdroja vlnenia, teda v zápornom smere, vo výraze pre fázu by vystupovalo znamienko  $+$ . Rovnica (8.4) platí aj pre priečne aj pre pozdĺžne vlnenie.

Na rozdiel od kmitania, veličiny, ktoré popisujú vlnenie sú funkciami miesta aj času.

### 8.3 Interferencia vlnenia

V prípade, že sa pružným prostredím budú šíriť dve alebo viacero vlnení rovnakého druhu, budú sa šíriť navzájom nezávisle. Za istých podmienok v mieste prekrytia vznikne zosilnenie alebo zoslabenie vlnenia, amplitúda vzniknutého výsledného vlnenia sa bude periodicky meniť a vlnenia budú postupovať ďalej tak, akoby sa šírili samostatne. Vzniká tu skladanie alebo **interferencia vlnenia**, čo sa prejavuje tak, že výsledný kmitavý pohyb hmotných bodov prostredia je určený superpozíciou kmitaní vyvolaných vlneniami.

V tom najjednoduchšom prípade budeme uvažovať o skladaní dvoch vlnení s rovnakou vlnovou dĺžkou a amplitúdou, ktoré postupujú radom bodov s rovnakou fázovou rýchlosťou a rovnakým smerom. Pre fázy dvoch vlnení, ktoré sa do istého bodu vzdialeného od zdroja vlnenia o  $x_1$  a  $x_2$  dostanú z dvoch zdrojov platí:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi x_1}{\lambda} \text{ a } \varphi_2 = \frac{2\pi x_2}{\lambda}. \quad (8.5)$$

V ľubovoľnom bode majú obidve vlnenia konštantný **fázový rozdiel**

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}d, \quad (8.6)$$

kde výraz  $d = (x_2 - x_1)$  sa nazýva **dráhový rozdiel**, pričom predstavuje vzdialenosť dvoch bodov, v ktorých majú obidve vlnenia rovnakú fázu. Dve vlnenia nazývame **koherentné**, ak ich fázový rozdiel je konštantný. Ak sa na dráhový rozdiel zmestí párny počet polvln

$$d = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (8.7)$$

kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ , vzniká vlnenie s amplitúdou, ktorá je rovná súčtu amplitúd oboch vlnení. Keď je dráhový rozdiel rovný nepárnemu počtu polvln

$$d = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (8.8)$$

kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ , vzniká vlnenie s amplitúdou, ktorá je rovná absolútnej hodnote rozdielu amplitúd dvoch vlnení. Pri interferencií dvoch vlnení (Obr. 8.1) je výsledná amplitúda vzniknutého vlnenia najväčšia v miestach, v ktorých sa vlnenia stretávajú s rovnakou fázou a najmenšia v miestach, v ktorých majú vlnenia opačnú fázu.



Obr. 8.1 Interferencia dvoch vlnení

## 8.4 Odraz vlnenia

Častokrát je potrebné riešiť, čo sa stane s vlnou, keď dorazí na prekážku.

### Úloha 8-1:

*Analyzujte pohyb vln, určte ich rýchlosť. Ako sa odrážajú vlny na pevnom konci? Zmení sa rýchlosť vlny, keď sa zmení napnutie pružiny? (dĺžka meradla: 1 m, frekvencia snímok: 120 fps).*

zdroj: [vlny.avi](#)

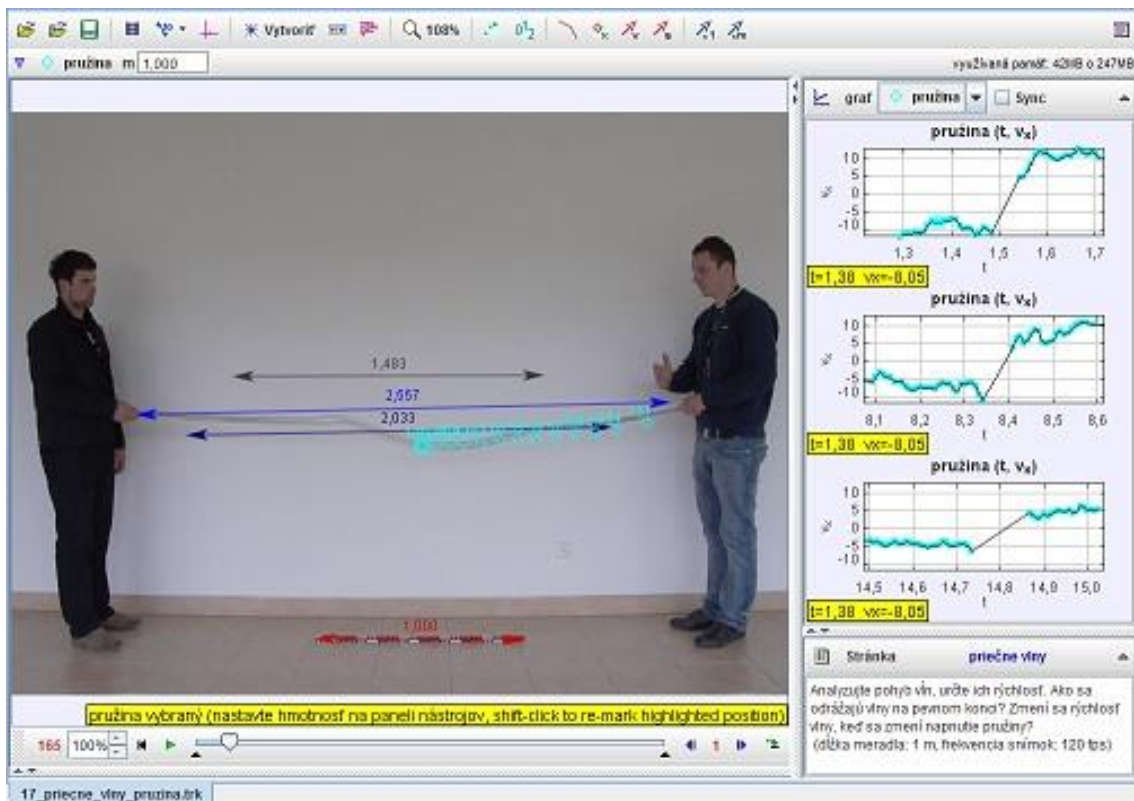
### Riešenie:

Na Obr. 8.2 je znázornená analýza vlnenia, ktoré sa šíri v kovovej pružine po udretí na koniec jednej jej časti. Ako si môžeme z obrázku všimnúť, po udretí na jednom konci pružiny vznikne dol, ktorý sa pohybuje pozdĺž pružiny od jedného študenta k druhému. Ak vlna dorazí na koniec, odrazí sa a ako je možné na spomalenom videu vidieť, postupuje naspäť ako vrch. Vlnenie po odraze má rovnakú vlnovú dĺžku, ale jeho fáza sa zmenila o  $\pi$ .

Ak by sme medzi pružinu a študentovu ruku vložili ľahké pružné vlákno a po napnutí pokus opakovali, na voľnom konci by sa dol odrážal a vracal späť ako dol.

Výsledky daných experimentov môžeme zovšeobecniť nasledovne:

**Na pevnom konci nastáva odraz vlnenia s opačnou fázou, na voľnom konci nastáva odraz vlnenia s rovnakou fázou.**



Obr. 8.2 Priechne vlny

Z analýzy videa na Obr. 8.2 si môžeme všimnúť zmeny rýchlosti vlnenia šíriaceho sa pružinou po zmene napnutia pružiny.

**Úloha 8-2:**

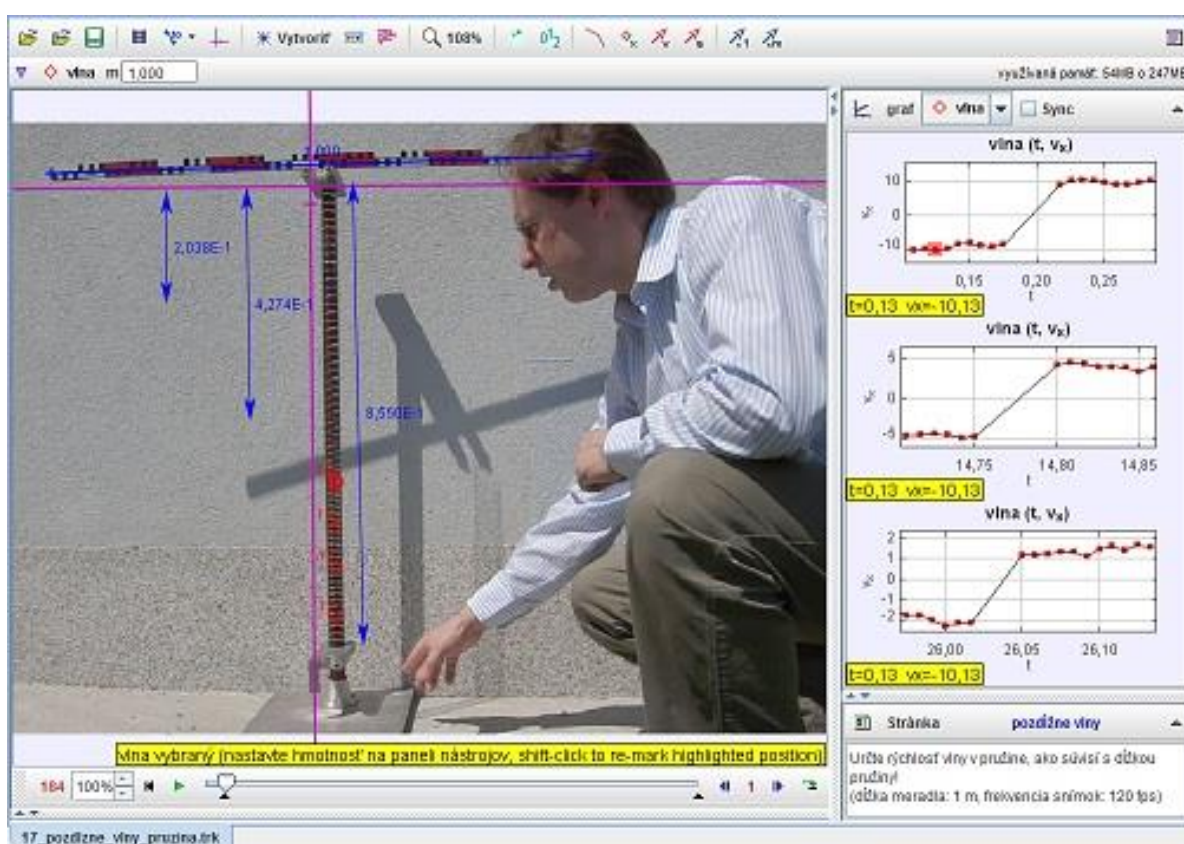
Analyzujte pozdĺžne vlnenie v pružine, určte rýchlosť vlny v pružine a ako súvisí s dĺžkou pružiny!

(dĺžka meradla: 1 m, frekvencia snímok: 120 fps).

zdroj: [pružina\\_vlny.avi](#)

**Riešenie:**

Ako z Obr. 8.3 vyplýva, aj pozdĺžna vlna sa na pevnom konci bude odrážať, pričom rýchlosť šírenia vlny v napnutej pružine bude závisieť od jej dĺžky, teda napnutia danej pružiny. Závislosť rýchlosti vlny od samotnej dĺžky vlny ponechávame na samotnom čitateľovi.



Obr. 8.3 Pozdĺžne vlny

### 8.5 Stojaté vlnenie a chvenie sústav

V predchádzajúcom príklade sme analyzovali pohyb vlny pružným prostredím po údere na pružinu. Teraz nás bude zaujímať, ako sa bude správať dané pružné prostredie, keď koniec pružiny bude kmitať harmonicky a druhý koniec bude upevnený. Po vygenerovaní vlny bude vlna postupovať z miesta vygenerovania na opačný koniec, na ktorom sa odrazí s opačnou fázou a bude sa vracieť späť. Súčasne bude oproti postupovať novo vygenerovaná vlna s rovnakou amplitúdou a vlnovou dĺžkou, t.j. **priame a odrazené vlnenie**. Zložením priameho a odrazeného vlnenia vzniká nový druh vlnenia, pri ktorom jednotlivé body kmitajú s rozličnou amplitúdou výchylky, ktorá bude pre daný bod konštantná. Toto vlnenie sa nazýva **stojaté vlnenie**, pričom nevnímame pohyb vlnenia, ale len preklápanie častí, ktoré kmitajú s maximálnou amplitúdou. Body, v ktorých, kmitanie dosahuje najväčšiu amplitúdu výchylky sa nazývajú **kmitne** stojatého vlnenia, body, ktoré sú trvalo v pokoji sa

nazývajú **uzly stojateho vlnenia**. Poloha kmitní a uzlov pri stojatom vlnení sa nemení, vzdialenosť susedných kmitní (prípadne susedných uzlov) je rovná polovici vlnovej dĺžky ( $\lambda/2$ ) stojateho vlnenia, pričom polohy kmitní a uzlov sú navzájom posunuté o  $\lambda/4$ .

Pri postupnom vlnení kmitajú všetky body radu hmotných bodov s rovnakou amplitúdou, ale rozličnou fázou. Fáza vlnenia sa šíri fázovou rýchlosťou. Postupným vlnením sa prenáša mechanická energia. Pri stojatom vlnení však kmitajú všetky body medzi dvoma uzlami s rovnakou fázou, ale s rozličnou amplitúdou výchylky, ktorá závisí od polohy daného hmotného bodu. Stojatým vlnením sa energia neprenáša, pričom nastáva len periodická zmena potenciálnej energie pružnosti na kinetickú energiu hmotných bodov.

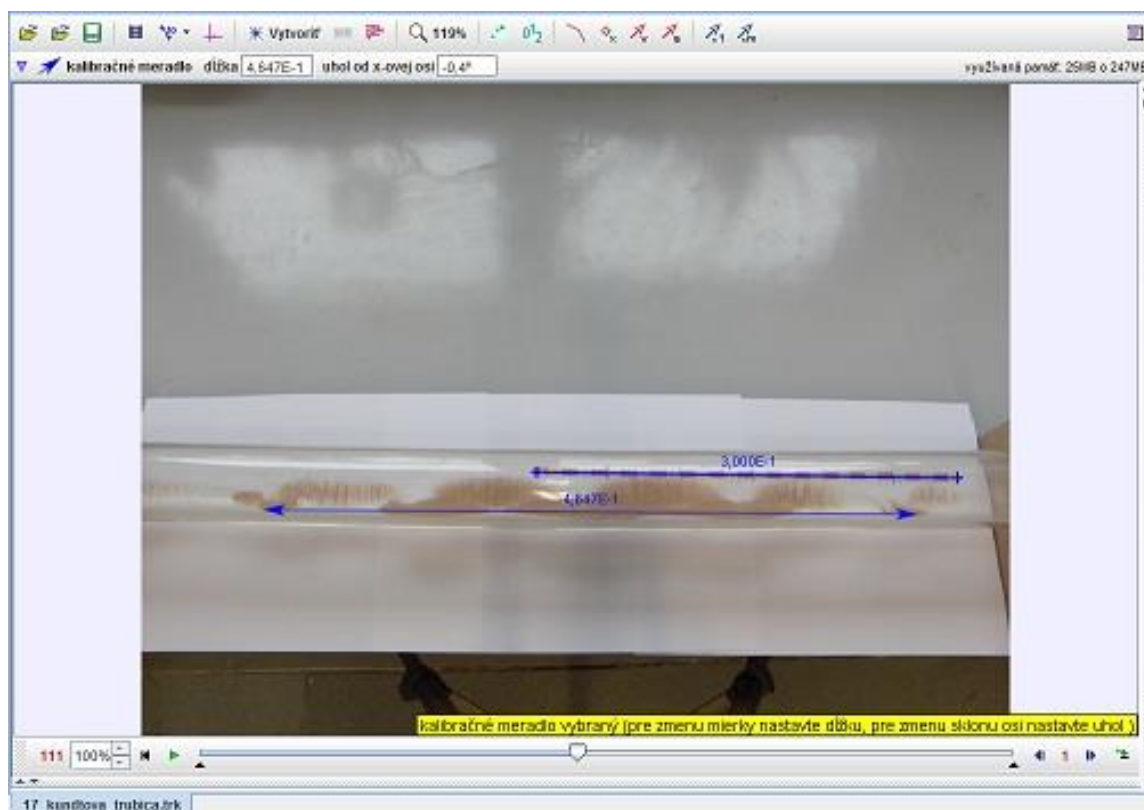
### Úloha 8-3:

**Z polohy maxím (miním) zvukových vln šíriacich sa trubicou určte vlnovú dĺžku vlnenia. (jeden dielik: 1 cm, meradlo: 30 cm)**

zdroj: [Kundtova trubica 1.avi](#), [Kundtova trubica 2.avi](#),

### Riešenie:

Nasledujúci obrázok Obr. 8.4 znázorňuje usporiadané korkové piliny po prechode stojatej zvukovej vlny. Miesta, v ktorých ostali piliny nepohnuté, predstavujú uzly. Keďže vzdialenosť dvoch uzlov predstavuje polovicu vlnovej dĺžky  $\lambda$  vlnenia, ktoré sa šíriло trubicou, výslednú vlnovú dĺžku vlnenia určíme jednoduchou matematickou úpravou. Z obrázku vyplýva (vzdialenosť 4 uzlov), že  $\lambda = 0,465/2 \text{ m} = 0,2325 \text{ m}$ .



**Obr. 8.4 Kundtova trubica**

Výrazné stojaté vlnenie vzniká vtedy, keď je prostredie ohraničené z oboch strán (napr. Obr. 8.4), vtedy sa vlnenie odráža z obidvoch strán. Pri stojatom vlnení bude na pevnom konci

vždy uzol vlnenia, na voľnom konci bude kmitňa vlnenia. Uvažujeme teraz o strune na gitare. Keďže konce struny sú pevné, vzniká v nich uzol a sú stále v pokoji. Ostatné body struny budú kmitať s rozličnou amplitúdou výchylky. Na strune môže vzniknúť stojaté vlnenie, ak je splnená podmienka

$$l = k \frac{\lambda}{2}, \quad (8.9)$$

kde  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Keďže rýchlosť vlnenia  $v$  je v strune konštantná, vznikne v strune stojaté vlnenie pri základnej frekvencii

$$f_z = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l}, \quad (8.10)$$

a pri všetkých frekvenciách vyjadrených vzťahom

$$f_k = kf_z, \quad (8.11)$$

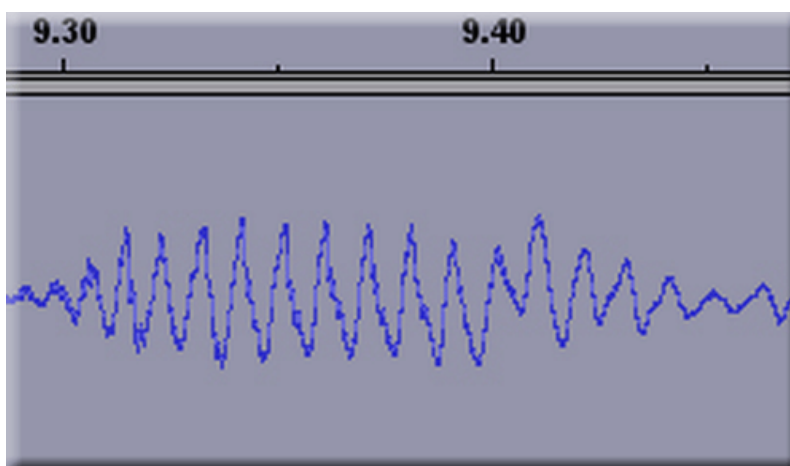
kde  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Frekvencie, pri ktorých  $k > 1$ , nazývame **harmonické frekvencie**. Stojaté vlnenie, ktoré vzniká iba pri istých frekvenciách, ktoré sú určené rozmermi telesa, rýchlosťou vlnenia v materiáli, z ktorého je teleso vyrobené a závisí od spôsobu upevnenia materiálu sa nazýva **chvenie**. Chvenie je charakteristické pre telesá v tvare tyčí, vzduchových stĺpcov, platní. Na ploche dosiek sa tvoria súmerne rozložené uzlové čiary, ktoré nazývame *Chladniho obrazce*.

## 8.6 Zvuk a jeho vlastnosti, rýchlosť zvuku

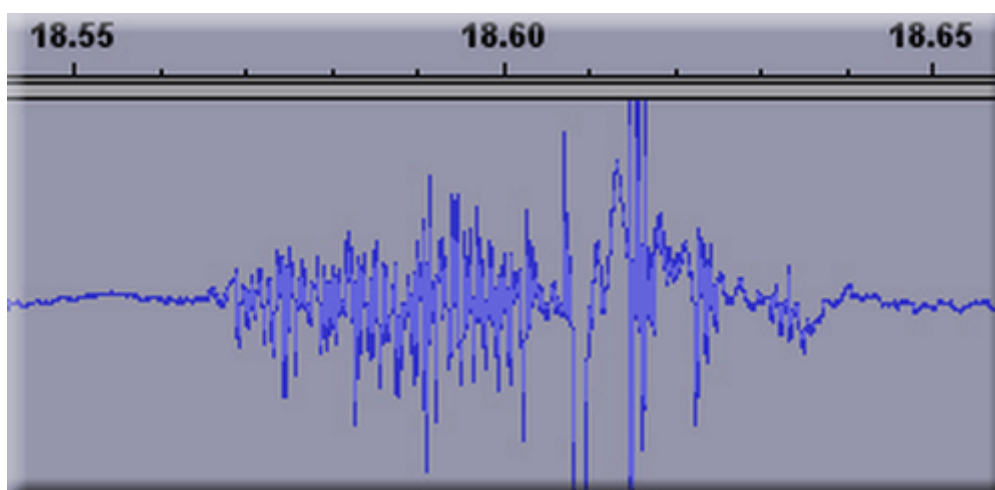
**Zvukom** nazývame každé mechanické vlnenie hmotného prostredia, ktoré pôsobí na ľudské ucho a vyvolá v ňom sluchový vnem (mechanické vlnenie s frekvenciou v intervale 16 až 16 000 Hz, podľa inej literatúry od 20 – 20 000 Hz, každé ľudské ucho je individuálne a s vekom sa hranica počuteľnosti znižuje). Mechanické vlnenie s frekvenciou nižšou ako 16 Hz nazývame **infrazvuk**, s frekvenciou vyššou ako 20 000 Hz nazývame **ultrazvuk**. Pretože je vlnová dĺžka ultrazvuku malá, šíri sa prostredím priamočiario. Súčasne sa uplatňuje malá absorpcia ultrazvuku v pevných látkach a kvapalinách. Pomocou ultrazvuku môžeme merať hĺbku morí. Ultrazvuk sa taktiež využíva pri zisťovaní skrytých kazov materiálu (*ultrazvuková defektoskopia*). Infrazvukové vlny sa dobre šíria vo vode. Infrazvuk vo veľkej miere využívajú mnohé morské živočíchy. Ak je frekvencia infrazvuku približne rovnaká ako frekvencia tlkotu srdca, môže to mať pre človeka negatívny účinok.

Zdrojom zvuku je chvenie pružných telies, ktoré sa prenáša do okolitého prostredia ľubovoľného skupenstva len ako pozdĺžne vlnenie. Zvukové vlnenie má v rôznych látkach rozličnú rýchlosť, pričom prechod prostredím ho zoslabuje – nastáva pokles amplitúdy, čo súvisí s pohlcovaním alebo absorpciou zvuku.

Sluchom dokážeme rozlíšiť predovšetkým periodické zvuky – **hudobné zvuky** alebo **tóny**. Medzi ne patria nielen zvuky hudobných nástrojov, ale aj samohlásky reči (Obr. 8.5).

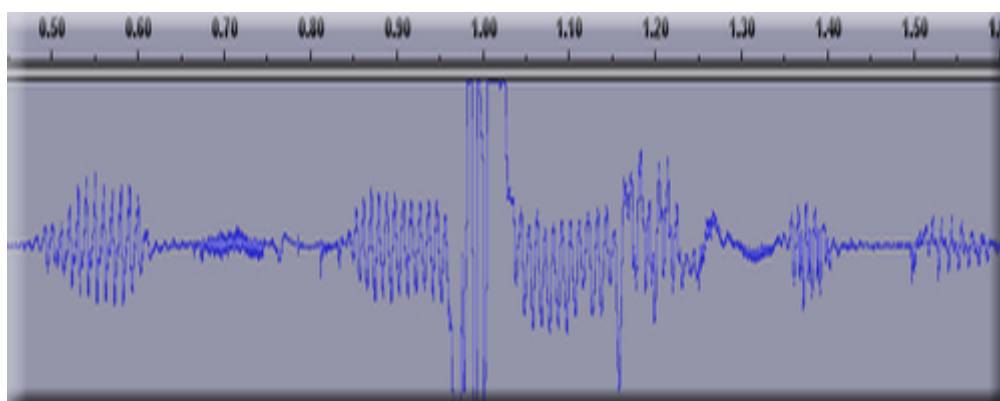


Obr. 8.5 Zvukový záznam samohlásky e (doba trvania bola 0,2 sekundy)



Obr. 8.6 Neperiodický zvuk – buchnutie 0,1 sekundy

Neperiodické zvuky vnímame ako **hluk** (Obr. 8.6) (praskot, buchot), náhodné chaotické vnemy nazývame **šum**. Nasledujúci Obr. 8.7 znázorňuje časový priebeh zvuku, keď sa povie „detská univerzita“ (na *y-ovej* osi je priebeh amplitúdy zvuku (v ľub. jednotkách))



Obr. 8.7 Časový záznam zvuku, keď sa povie "detská univerzita". (Čísla hore predstavujú čas v sekundách, celé vyslovenie trvalo približne 1,1 sekundy.)



Pri vnímaní zvuku prisudzujeme zvuku tým väčšiu výšku, čím vyššia je frekvencia chvenia zdroja zvuku. **Výšku zvuku** určuje jeho frekvencia. Pri zvukoch s harmonickým priebehom (jednoduchý tón) určuje frekvencia **absolútnu výšku tónu**. Ak zvuk nie je harmonický (**zložený tón**), obsahuje zložky s rôznymi frekvenciami a výšku zvuku určuje základná – najnižšia frekvencia. Zvyčajne výšku tónov navzájom porovnávame a určujeme **relatívnu výšku tónu**, ktorá predstavuje pomer frekvencie daného tónu k frekvencii základného tónu. **Základný tón** bol v hudobnej akustike stanovený medzinárodnou dohodou ako tón s frekvenciou 440 Hz ( $a^1$ ), v technickej praxi sa ako základný tón používa tón s frekvenciou 1000 Hz, tzv. **referenčný tón**. **Farba zvuku** charakterizuje daný zdroj zvuku, ktorý vplyvom vyšších harmonických tónov má charakteristický zvuk. To nám umožňuje rozlíšiť dva zložené tóny, ktoré majú rovnakú výšku, ale vydávajú ich rozličné zdroje zvuku, napr. rôzne hudobné nástroje.

Ľudské ucho má takú citlivosť, že dokáže vnímať tlakové zmeny  $\Delta p \sim 10^{-5}$  Pa. Táto najnižšia hranica sa nazýva **prah počuteľnosti**. Veľmi hlasným zvukom odpovedajú tlakové zmeny až  $\Delta p \sim 10^2$  Pa. Keď sa táto hranica prekročí, vznikne v uchu pocit bolesti, hovoríme o **prahu bolesti**. Ľudské ucho je najcitlivejšie na zvuky s frekvenciou 700 – 6 000 Hz.

Zvuky hodnotíme veličinou, ktorá sa nazýva **intenzita zvuku** a je definovaná vzťahom:

$$I = \frac{P}{S}, \quad (8.12)$$

kde  $P$  je výkon zvukového vlnenia a  $S$  je plocha, ktorou vlnenie prechádza. Jednotkou intenzity zvuku je  $W \cdot m^{-2}$ . Rozsah intenzít zvuku, ktoré môžeme vnímať sluchom je veľký, prahu počuteľnosti pre tón s frekvenciou 1 000 Hz zodpovedá intenzita zvuku o veľkosti  $I_0 = 10^{-12} W \cdot m^{-2}$ , prahu bolesti  $I_0 = 10^0 W \cdot m^{-2}$ , celkový rozsah intenzít je teda  $10^{12}$ . Na vyjadrenie úrovne intenzít rôznych zvukov bola vytvorená logaritmická stupnica, ktorej jednotkou je **bel**, v praxi sa používa 10-krát menšia jednotka – **decibel [dB]**. Najnižšej intenzite určenej prahom počuteľnosti zvuku s frekvenciou 1 kHz zodpovedá úroveň 0 dB, prah bolesti je určený hodnotou 120 dB. Je teda výhodnejšie namiesto intenzity zvuku hovoriť o **hladine intenzity zvuku** alebo **hladine akustického tlaku**, ktorá je definovaná:

$$\beta = (10\text{dB}) \log \frac{I}{I_0} = (20\text{dB}) \log \frac{\delta p}{p_0}, \quad (8.13)$$

kde  $\delta p$  predstavuje efektívnu hodnotu meranej amplitúdy tlaku a  $p_0 = 20 \mu\text{Pa}$  je prahová hodnota akustického tlaku zodpovedajúca prahovej intenzite tónu s frekvenciou 1 kHz. Hodnota  $\beta$  sa zvýši o 10 dB vždy, keď intenzita zvuku narastie o jeden rád (zväčší sa 10-násobne). Hodnota  $\beta = 50$  odpovedá intenzite  $10^5$ -krát väčšej ako je referenčná hladina. **Hlasitosť zvuku** je teda náš subjektívny vnem súvisiaci s hladinou intenzity zvuku, určuje sa porovnávaním vyšetrovaného zvuku s referenčným tónom výšky 1 000 Hz.

Rýchlosť šírenia zvuku má v rôznych látkach rozdielne hodnoty. Rýchlosť zvuku vo vzduchu závisí od zloženia vzduchu (vlhkosť, nečistoty), ale hlavne od teploty. Pre rýchlosť zvuku vo vzduchu platí vzťah:

$$v_t = (331,82 + 0,61\{t\}) m \cdot s^{-1}, \quad (8.14)$$

kde  $t$  je teplota vzduchu v  $^{\circ}\text{C}$ . pri bežných teplotách je rýchlosť zvuku vo vzduchu približne  $340 m \cdot s^{-1}$ . Rýchlosť zvuku nezávisí od tlaku vzduchu.

V kvapalinách a pevných látkach je rýchlosť zvuku väčšia ako vo vzduchu. Napr. vo vode pri teplote 20 °C je rýchlosť zvuku 1 482 m/s (v morskej vode 1 522 m/s), v oceli pri teplote 0 °C je rýchlosť zvuku 5 941 m/s.

Pri známej frekvencii zvukového vlnenia  $f$  vieme určiť vlnovú dĺžku stojatej vlny  $\lambda$  a rýchlosť zvuku  $v$  vypočítať podľa vzťahu

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (8.15)$$

#### Úloha 8-4:

Z polohy maxim (miním) zvukových vln a zistenej frekvencie zvuku určte rýchlosť zvuku vo vzduchu!

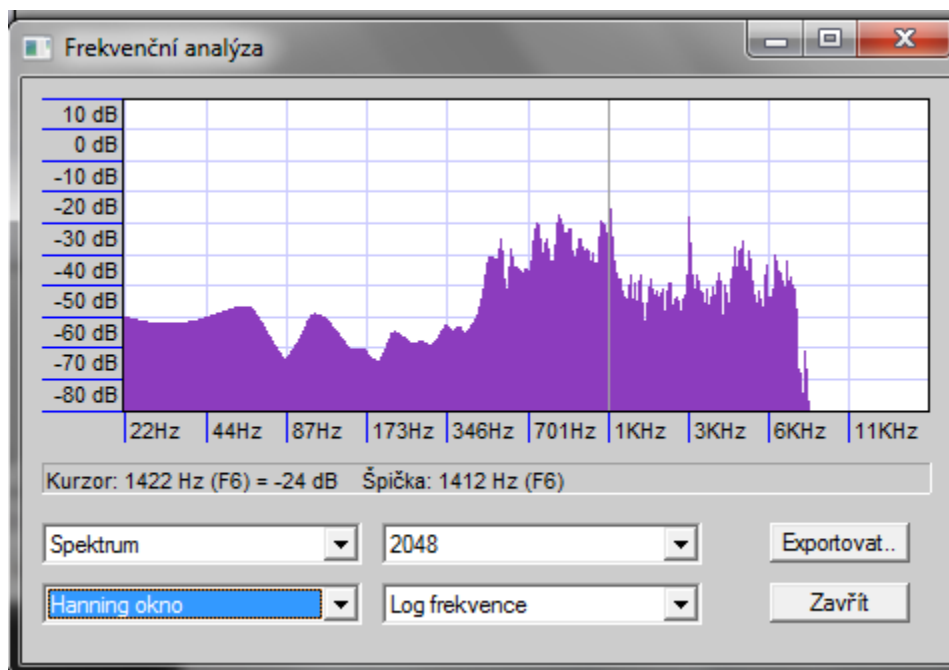
(jeden dielik: 1 cm, meradlo: 30 cm)

zdroj: [Kundtova trubica 1.avi](#), [Kundtova trubica 1.mp3](#), [Kundtova trubica 2.avi](#), [Kundtova trubica 2.mp3](#),

pre analýzu použite program [Audacity](#)

#### Riešenie:

Využitím predchádzajúceho vzťahu (8.15) a výsledku úlohy (Úloha 8-3:) ( $\lambda = 0,2325$  m) dokážeme rýchlosť zvuku určiť, ak budeme poznať frekvenciu vlnenia šíriaceho sa Kundtovou trubicou. Na určenie frekvencie zvukového vlnenia stačí použiť program *Audacity*. Z analýzy zvuku sme určili  $f = 1412$  Hz. Pre výslednú rýchlosť zvuku teda platí:  $v = \lambda \cdot f = 328$  m/s.



Obr. 8.8 Frekvencná analýza

#### Úloha 8-5:

Určte rýchlosť zvuku v tyči dĺžky 37,2 cm a 110 cm a odhadnite, z akého materiálu sú tyče vyrobené!

zdroj: [tyč.avi](#), [tyč.mp3](#), pre analýzu frekvencie zvuku použite program [Audacity](#)

**Riešenie:**

Tak, ako v predchádzajúco príklade, tak aj tu využijeme program *Audacity* (určenie frekvencie zvukového vlnenia) a vlastností chvejúcich sa telies upevnených v strede (uzol, na konci tyči sú kmitne), z čoho vyplýva, že vlnová dĺžka zvukovej vlny je rovná dvojnásobku rozmeru tyče. Využitím vzťahu (8.15) dospejeme k hľadanej hodnote.

**8.6.1 Dopplerov efekt**

Mnohí z nás sa určite stretli s húkajúcou sanitkou, prípadne trúbiacim autom prechádzajúcim okolo nás. Už s deťmi v primárnom vzdelávaní možno analyzovať daný jav, pričom deti samotné prichádzajú na to, že zvuk, ktorý počujú, nie je stále rovnaký, ale sa mení. Tí, ktorí dobre počujú, aj prídu na to, ako sa mení, kedy ako pozorovatelia stojaci na chodníku vnímame vyšší a kedy nižší zvuk. So študentami možno po realizácii frekvenčnej analýzy s využitím programov (napr. *Audacity*) určiť, zvuk akých frekvencií vnímame, keď sa auto k nám približuje a neskôr sa od nás vzdáľuje.

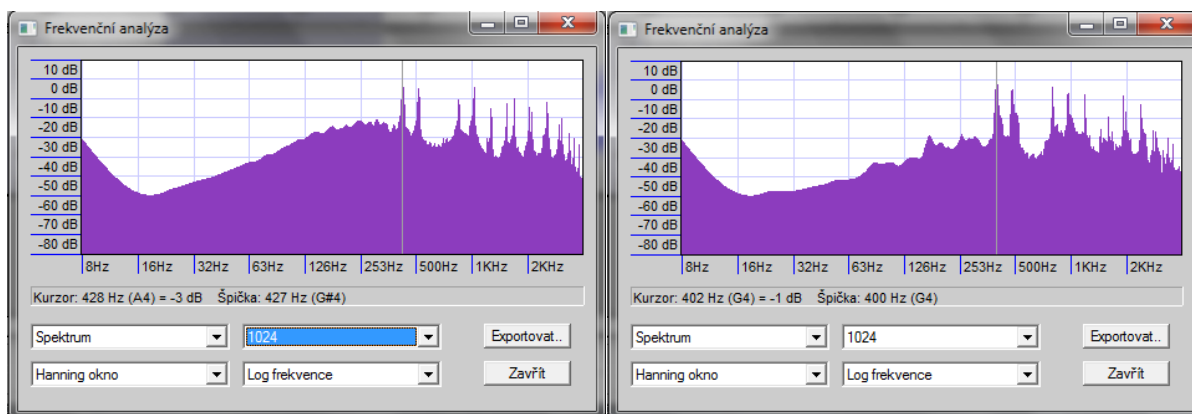
**Úloha 8-6:**

*Určte, akou rýchlosťou sa pohybuje auto, keď rýchlosť zvuku vo vzduchu je približne 340 m/s.*

*zdroj: [video 1](#), [video 2](#), [:auto trubenie.mp3](#), [doppler.mp3](#), pre analýzu použite program [Audacity](#)*

**Riešenie:**

Na Obr. 8.9 je znázornená frekvenčná analýza zvuku trúbiaceho prichádzajúceho a odchádzajúceho auta tou istou rýchlosťou. Z analýzy zvuku bolo určené, že zvuk prichádzajúceho trúbiaceho auta má frekvenciu 427 Hz a odchádzajúceho 400 Hz.



**Obr. 8.9** Frekvenčná analýza prichádzajúceho a odchádzajúceho trúbiaceho auta

Využitím známeho vzťahu pre Dopplerov efekt

$$f' = \frac{f}{1 \pm \frac{v}{c}} = f \frac{c}{c \pm v}, \quad (8.16)$$

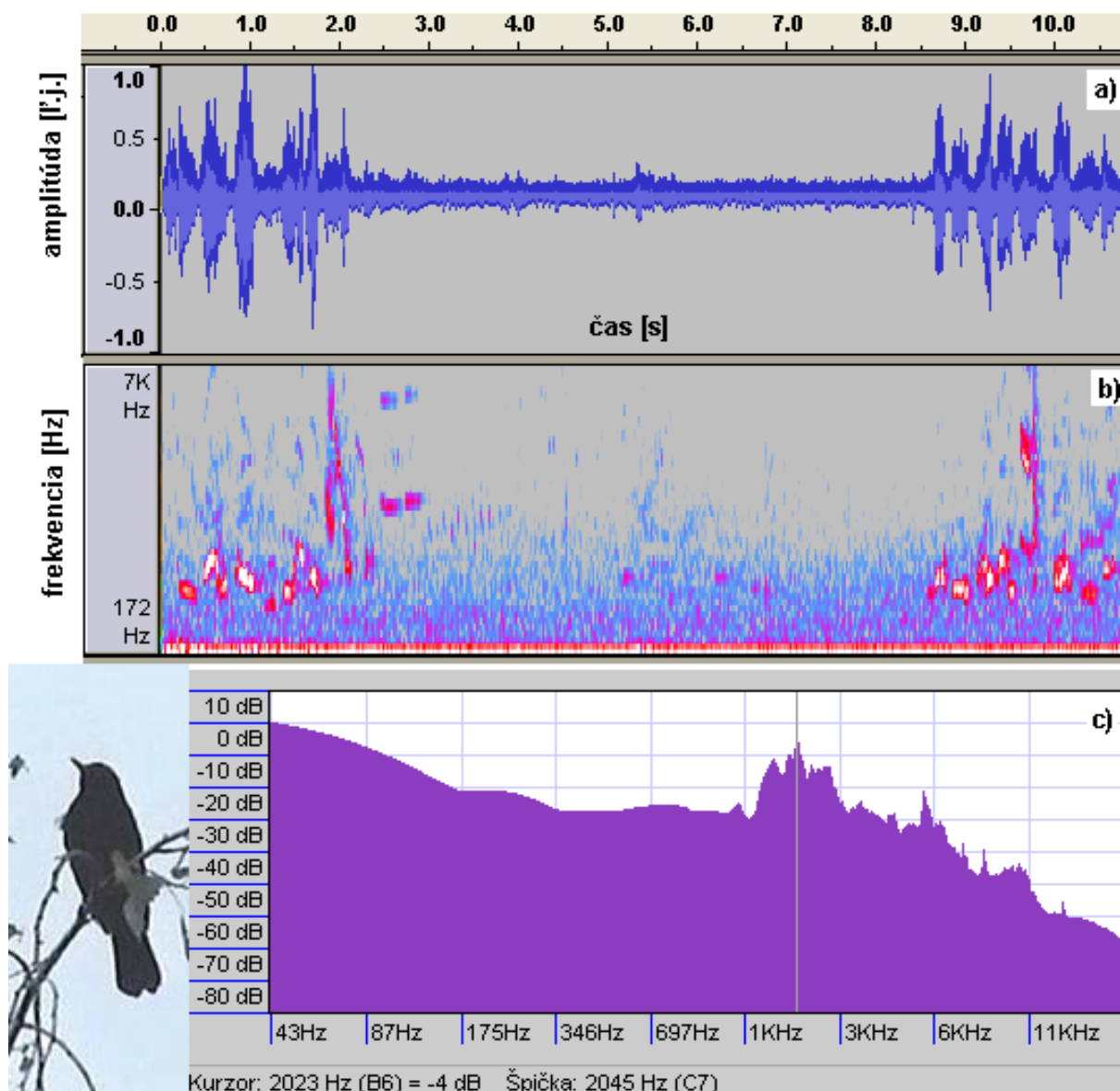
kde  $f'$  je frekvencia zvuku zaznamenaná stojacim pozorovateľom na chodníku a  $f$  je frekvencia, ktorú zaznamená šofér v aute, možno určiť rýchlosť pohybujúceho sa trúbiaceho auta  $v$ , keď rýchlosť zvuku vo vzduchu odhadneme pri bežných letných teplotách na  $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$ . Analýzou videozáznamu pohybujúceho sa trúbiaceho auta sme zo znalosti frekvencií zvuku trúbiaceho približujúceho sa a odchádzajúceho auta (Obr. 8.9) a riešením dvoch rovníc (8.16) (keď sa auto približuje, bude v rovnici (8.16) znamienko  $-$ , keď sa vzdáľuje, bude znamienko  $+$ ), určili, že auto sa pohybovalo rýchlosťou približne  $v = 41 \text{ km/h}$ . Ďalšou analýzou v zimných mesiacoch sa možno so študentami dopracovať k tomu, že aj keď auto ide rovnakou rýchlosťou ako v predchádzajúcom prípade, je zaznamenaná frekvencia zvuku trúbiaceho auta o niečo iná, čo už ale súvisí so zmenou rýchlosti zvuku v závislosti od teploty.

### 8.6.2 Frekvenčná analýza zvukov zvierat

Okolo roku 1940 sa skupina vedcov rozhodla rozvíjať metódu pre lepšie zviditeľnenie a pochopenie detailov reči. Oscilogramy boli úspešne použité pre štúdium zvukov hmyzu, avšak nie veľmi úspešné pre komplexnejšiu frekvenčnú analýzu spevu vtákov a ľudskej reči. O niekoľko rokov sa zvukový spektrogram reči stal základným nástrojom lingvistov. Pre vizualizáciu zvukov sa zvyčajne využívajú tri typy grafov. Tieto grafy sú ilustrované na nasledujúcom Obr. 8.10, ktorý pozostáva z grafov a), b), c), ktoré predstavujú záznam toho istého zvuku zvierat'a. Prvý graf a) predstavuje fluktuáciu intenzity zvuku v čase – tvar amplitúdy vlny – **oscilogram**. X-ová os reprezentuje čas, zatiaľ čo hlasitosť je vyjadrená vo výške špičky nad alebo pod časovou osou. Zvyčajne y-ová os reprezentuje relatívnu amplitúdu. Najhlasnejší zvuk dosahuje maximálne zvýšenie na grafe.

Ďalší graf (b) je nazývaný **sonogram**. Sonogram zahŕňa informáciu o výške alebo presnejšie o frekvencii zvuku. X-ová os reprezentuje čas, y-ová frekvenciu, nízkofrekvenčné zvuky sa nachádzajú blízko základnej čiary, vysokofrekvenčné zvuky sú vyššie. Frekvencie spevavých vtákov sa zvyčajne nachádzajú v rozmedzí 500 až 10 000 Hz. Vo frekvenčno-časovom grafe informácia o amplitúde je znázornená tmavou farbou v stupňoch sivej, pričom čierna odráža frekvencie s najvyššími amplitúdami. Tieto stupne sivej často zanikajú pri tlači, pričom sú nahradené čierno-bielou verziou. Preto vo viacerých počítačových programoch sú stupne sivej nahradené farebnou škálou.

Ak by sme jednotlivé harmonické zložky znázornili radou zvislých úsečiek, ktorých vodorovné vzdialenosti by udávali kmitočty a ktorých veľkosti by boli úmerné amplitúdam, dostali by sme tzv. frekvenčné spektrum. Tretí graf (c) predstavuje **spektrogram**, ktorý znázorňuje amplitúdu versus frekvencia, buď pre celý zaznamenaný zvuk alebo len pre označený segment zvuku. Neperiodické deje sa vyznačujú tým, že spektrálne čiary vyplňujú spojitě buďto celý frekvenčný obor alebo len niektoré jeho časti. Získané spektrum, ktoré číselne udáva amplitúdu pripadajúcu na frekvenčné pásmo o šírke 1 Hz vyjadruje spektrálnu hustotu amplitúd spojitého frekvenčného spektra.



Obr. 8.10 Drozd čierny (*Turdus merula*, Kos čierný, Eurasian Blackbird). Oscilogram (a), sonogram (b) a spektrogram (c) zvukového záznamu, pomocou ktorého bola určená ako dominantná frekvencia 2045 Hz.

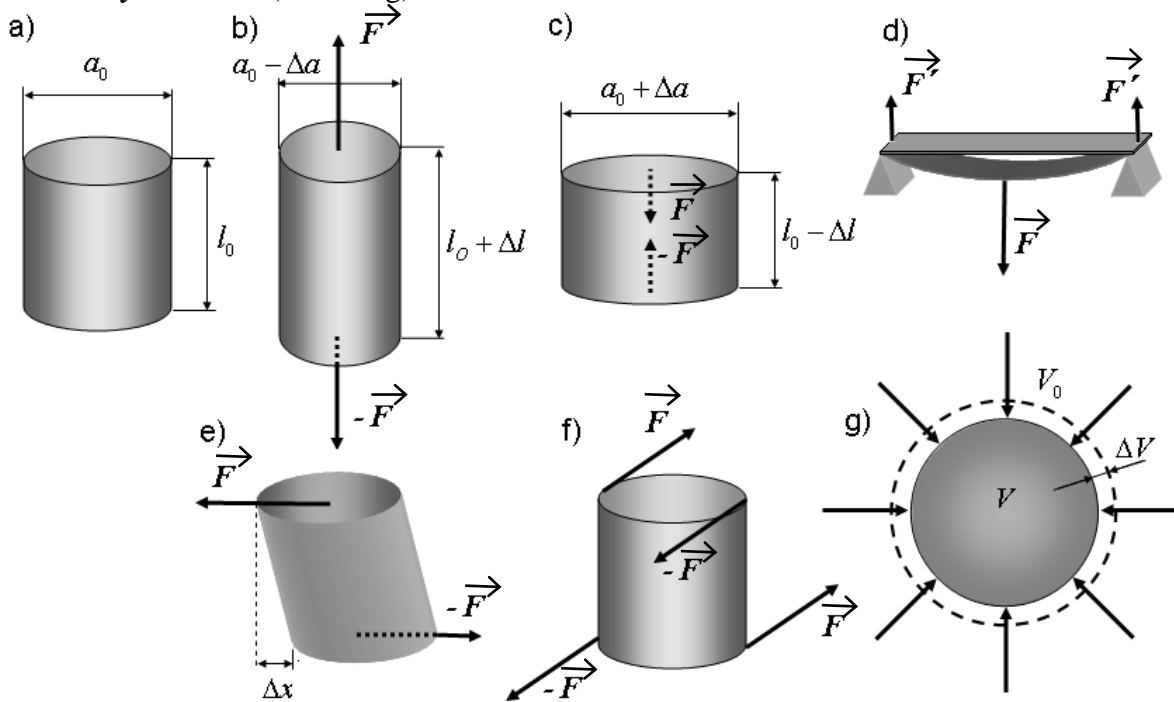


## 9. Deformácia tuhého telesa

Pod mechanickými vlastnosťami tuhých látok rozumieme také vlastnosti, ktoré súvisia so zmenou tvaru telesa, jeho objemom pod účinkom vonkajších síl. Tieto zmeny nazývame deformáciou. Keď pevné telo nadobudne pôvodný tvar po pôsobení vonkajších síl, hovoríme o **pružnej (elastickej) deformácii** (napr. napríklad skrátenie pružiny v pere), kedy je deformácia dočasná. Pri **tvárnej (plastickej) deformácii** nastane trvalá zmena telesa (napr. pri valcovaní alebo kovaní kovového predmetu).

Z mikroskopického hľadiska je deformácia tuhého telesa výsledkom zmien vo vzájomnom rozložení častíc tvoriacich telo účinkom vonkajších síl.

Poznáme päť jednoduchých deformácií (Obr. 9.1): **ťahom, tlakom, ohybom, šmykom a krútením**. **Deformácia ťahom** vznikne, keď na telo budú pôsobiť dve rovnako veľké opačne orientované sily smerom von z telesa (Obr. 9.1b) (napr. závesné lano výťahu). Ak sily budú smerovať dovnútra telesa, hovoríme o **deformácii tlakom** (Obr. 9.1c) (napr. deformácia pilierov a podpier). **Deformácia ohybom** nastane napr. na nosníku podopretom na oboch koncoch, ak naň pôsobí sila kolmá na jeho pozdĺžnu os súmernosti (Obr. 9.1d). Dolné vrstvy nosníka budú deformované ťahom, horné tlakom. Pri **deformácii šmykom** budú sily pôsobiť na hornú a dolnú podstavu a v rovinách podstáv (Obr. 9.1e). Sily spôsobia posunutie jednotlivých vrstiev – šmyk, pričom sa ich vzdialenosť nezmení (napr. deformácia nitu alebo skrutky). Keď na koncoch tyče budú pôsobiť dve silové dvojice, pričom ich momenty budú rovnako veľké ale opačného smeru, vznikne **deformácia krútením** (Obr. 9.1f) (napr. deformácia vrtákov). V technickej praxi sa však častejšie vyskytujú deformácie zložené z niekoľkých jednoduchých deformácií. Kryštalické materiály, špeciálne monokryštály sú vzhľadom k deformácii tlakom alebo ťahom zväčša anizotropné, polykryštalické materiály s náhodnou distribúciou monokryštálov prejavujú izotropné vlastnosti. Telo vystavené tlaku zo všetkých strán bude deformované **všestranným tlakom** (Obr. 9.1g).



Obr. 9.1 Deformácia telesa. a) nedeformovaný valec, b) deformácia valca ťahom, c) tlakom, d) deformácia kovovej dosky ohybom, e) deformácia valca šmykom, f) krútením, g) deformácia všestranným tlakom

### 9.1 Hookov zákon a krivka deformácie

Pri pružne deformovanom pevnom telese budú na plochu ľubovoľného priečneho rezu pôsobiť z oboch strán sily pružnosti. V telese pri deformácii vznikne stav napätosti, ktorý charakterizujeme pomocou veličiny **normálové napätie**  $\sigma_n$  definované vzťahom

$$\sigma_n = \frac{F_p}{S}, \quad (9.1)$$

kde  $F_p$  je veľkosť sily pružnosti pôsobiacej kolmo na plochu prierezu s obsahom  $S$ . Jednotkou normálového napätia je pascal (Pa). Deformujúce sily spôsobia zmenu rozmerov deformovaného telesa. Ak napríklad pri deformácii ťahom sa tyč pôvodnej dĺžky  $l_0$  predĺži na dĺžku  $l$ , zmenu dĺžky tyče charakterizuje veličina

$$\Delta l = l - l_0, \quad (9.2)$$

ktorú nazývame **predĺženie**. V praxi sa častejšie používa **pomerné (relatívne) predĺženie**  $\varepsilon$  definované vzťahom

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (9.3)$$

Za pomoci trhacieho stroja a skúšobnej tyče sa v praxi experimentálne sleduje závislosť normálového napätia od pomerného predĺženia, pričom zaznamenaný graf funkcie  $\sigma_n = f(\varepsilon)$  sa nazýva **krivka deformácie**. Na Obr. 9.2 je znázornená krivka deformácie skúšobnej tyče z mäkkej ocele. Na začiatku (oblasť pružnej (elastickkej) deformácie – 1) je normálové napätie priamo úmerné deformácii (pomernému predĺženiu). Tento poznatok objavil v roku 1676 anglický fyzik Robert Hooke (1635 – 1702), preto sa nazýva **Hookov zákon: V oblasti lineárnej deformácie je deformácia pružných telies priamoúmerná pôsobiacim silám.**

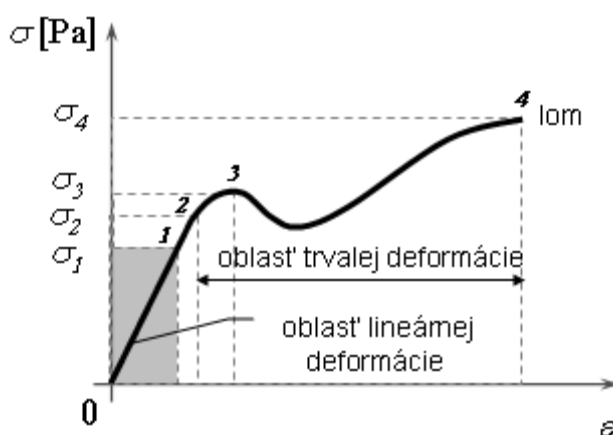
$$\sigma_n = E\varepsilon. \quad (9.4)$$

kde konštanta úmernosti  $E$  je modul pružnosti (tiež nazývaný Youngov modul), ktorého rozmer je rovnaký, ako rozmer normálového napätia a udáva sa v  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$  (prípadne v Pa) (napr. pre oceľ  $E = 220 \cdot 10^9$  Pa). Bod 1 na krivke deformácie sa nazýva **medzou úmernosti**  $\sigma_1$ . Hookov zákon teda platí len pre normálové napätia, kedy  $\sigma_n \leq \sigma_1$ . Časť krivky, 1-2 zodpovedá **dopružovaniu**. Keď na deformované teleso prestanú pôsobiť vonkajšie sily, deformácia nezanikne hneď, ale až po istom čase. Napr. ak zaťažime na istý čas gumenú hadicu a následne odstránime záťaž, hadica sa skráti na dĺžku o niečo väčšiu, ako bola jej pôvodná dĺžka a až po istom čase deformácia zmizne. Dopružovanie však nastane iba v telesách, v ktorých nebolo vyvolané väčšie normálové napätie ako **medza pružnosti**  $\sigma_2$  (bod 2). Pre niektoré látky je medza úmernosti a pružnosti rovnako veľká. V technickej praxi sa pod medzou pružnosti rozumie také napätie, pri ktorom zostáva trvalé predĺženie menšie ako 0,01 až 0,003 % pôvodnej dĺžky. V tomto rozsahu je väčšina technicky dôležitých materiálov pružná, zvlášť oceľ. Medza pružnosti ohraničuje oblasť pružných deformácií. Pri vyšších napätiach nezamizne deformácia po odstránení deformačného napätia úplne, čo sa prejaví ako zvyšková deformácia. Teleso sa teda bude deformovať nepružne (plasticky) a dôjde k trvalej deformácii telesa. Oblasť plastickej deformácie predstavuje časť 2-3 krivky deformácie. Napätie  $\sigma_3$ , pri ktorom nastáva náhle



predĺženie materiálu, sa volá **medza klzu (medza priet'ažnosti)**. Počiatočný úsek 3-4 zodpovedá **tečeniu materiálu**, kedy pri malej zmene normálového napätia dochádza k veľkej zmene relatívneho predĺženia, prípadne k nárastu deformácie dochádza aj bez zmeny napätia. Na konci tohto úseku dochádza k značnej zmene fyzikálnych vlastností deformovaného telesa a k spevneniu materiálu, ktoré končí dosiahnutím **medze pevnosti**  $\sigma_4$ . Prekročením medze pevnosti sa súdržnosť materiálu poruší, pričom sa tyč pretrhne (pre oceľ je medza pevnosti 350 – 800 MPa).

Znalosť medze pružnosti a pevnosti má dôležitý význam pri výbere materiálov pre stavby a konštrukcie. Látka je pružná, keď pri veľkom relatívnom predĺžení je vyvolané normálové napätie menšie, ako je medza pružnosti (napr. oceľ je pružná do relatívneho predĺženia  $\varepsilon = 1\%$ ). Ak sa bude medza pružnosti približovať medzi pevnosti, potom materiál patrí medzi krehké látky (napr. sklo, porcelán, mramor, liatina, ktorá sa pretrhne pri  $\varepsilon = 0,45\%$ ).



**Obr. 9.2** Krivka deformácie tyče z ocele. Časť grafu ležiaca v sivom obdĺžniku predstavuje oblasť lineárnej deformácie – platnosti Hookovho zákona. Medzou pružnosti  $\sigma_2$  končí oblasť pružných deformácií a začína oblasť plastických deformácií, ktorá končí medzou pevnosti  $\sigma_4$ , kedy dochádza k porušeniu celistvosti materiálu.

Pri pôsobení ťahom na tyč dochádza popri jej predĺžení v smere pôsobiacej sily a súčasne aj k zmenšeniu jej priečného rezu. Pre **pomerné (relatívne) priečne skrútenie**

$$\eta = \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{a_0 - a}{a_0}, \quad (9.5)$$

kde  $a_0$  je jej priečný rozmer pred deformáciou a  $a$  je po deformácii (Obr. 9.1b), platí

$$\eta = \frac{1}{m} \varepsilon = \frac{\sigma_n}{mE}, \quad (9.6)$$

kde  $m$  je **Poissonova konštanta** a jej prevrátená hodnota sa nazýva **Poissonovo číslo** (pomer)

$$\mu = \frac{1}{m} = \frac{\eta}{\varepsilon}, \quad (9.7)$$

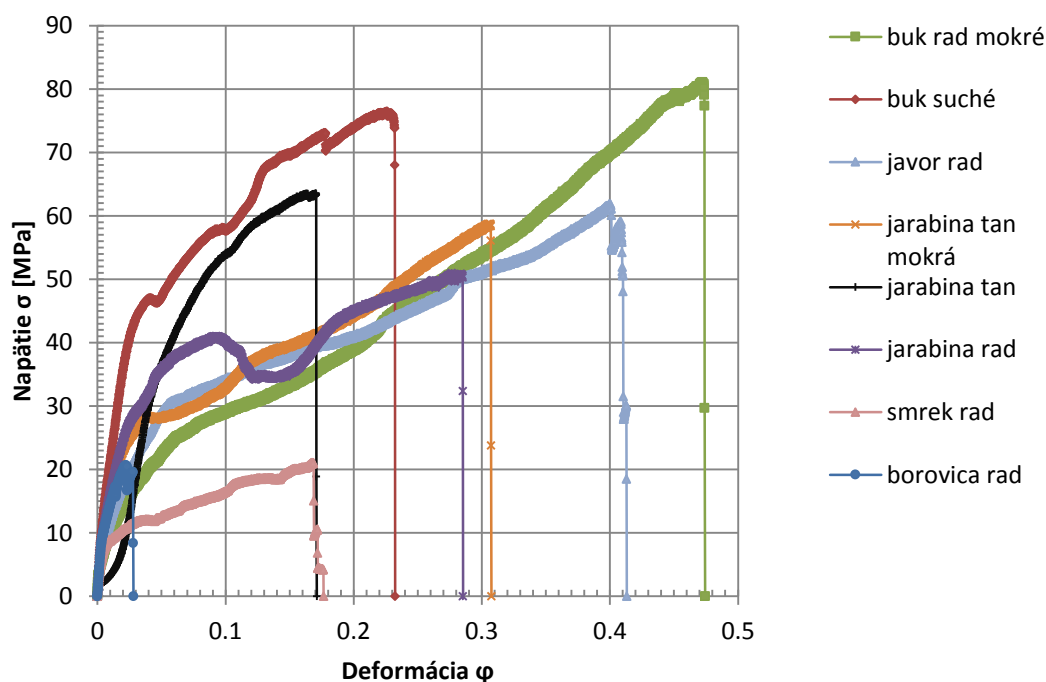
ktoré charakterizuje pomer priečného skrátene k pozdĺžnemu predĺženiu. Tyč kruhového prierezu o rozmere  $a_0$  a pôvodnej dĺžke  $l_0$  deformovaná ťahom nadobudne nové rozmery  $a$  a  $l$ , pre ktoré zo vzťahov (9.2), (9.3) a (9.5) platí

$$l = l_0(1 + \varepsilon) = l_0 \left( 1 + \frac{\sigma_n}{E} \right), \quad (9.8)$$

Predchádzajúce vzťahy, ktoré boli popísané pri namáhaní tyče ťahom platia aj pre namáhanie tlakom (predpokladáme ale tyč dostatočne krátku), pričom veličiny  $\sigma_n$ ,  $\varepsilon$  a  $\eta$  majú záporné číselné hodnoty, čiže tyč sa tlakom v smere dĺžky skrátuje a v priečnom smere predlžuje.

Podľa pôsobenia vonkajšej sily možno deformácie rozdeliť do dvoch základných skupín. Pôsobiacu silu možno rozdeliť na zložku, ktorá pôsobí kolmo na povrch a na zložku rovnobežnú s povrchom telesa. Kolmá zložka spôsobuje deformáciu telesa, ktorá sa prejavuje rozšírením alebo stlačením telesa (*deformácia normálovým napätím*). Druhá zložka sily, ktorá pôsobí rovnobežne s povrchom telesa spôsobuje posunutie (*deformácia šmykovým napätím*).

### Ťahová skúška

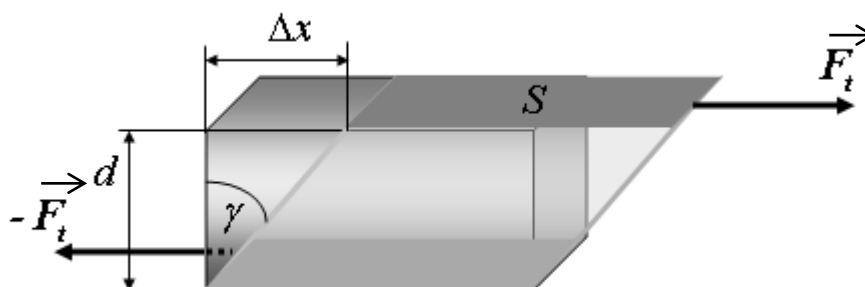


**Obr. 9.3 Napätovo-deformačný diagram – ťahové skúšky pre drevené vzorky**

Nasledujúci Obr. 9.3 znázorňuje pôsobenie deformačných ťahových síl na rôzne materiály (drevo – ihličnaté, listnaté, suché, mokré, rad – v radiálnom smere, tan – v tangenciálnom smere). Analýza fyzikálnych veličín spojených s deformáciou telesa poukazuje na rozdiely v správaní sa jednotlivých materiálov. Dáta boli namerané na SjF ŽU v Žiline.

## 9.2 Deformácia šmykom

Ak sa jednotlivé vrstvy namáhaného materiálu budú posúvať po sebe bez toho, žeby sa menila ich vzájomná kolmá vzdialenosť, hovoríme o *deformácii šmykom*. Takáto deformácia nastane, keď napr. na hranol dostatočne malej výšky (aby nenastal ohyb) bude pôsobiť dotyčnicová sila  $\vec{F}_t$  (Obr. 9.4).



Obr. 9.4 Deformácia šmykom

Vplyvom tejto sily dôjde pri hranole o ploche podstavy  $S$  a hrúbke  $d$  k posunutiu hornej steny voči spodnej podstave o hodnotu  $\Delta x$ . Podľa Hookovho zákona bude táto deformácia úmerná pôsobiacej sile. Je zrejmé, že veľkosť posunu  $\Delta x$  pri stálej pôsobiacej sile bude úmerná hrúbke hranolu  $d$ , pretože dotyčnicové sily medzi jednotlivými vrstvami musia byť rovnako veľké, keď nastane rovnováha a vrstvy budú v pokoji. Preto je posunutie medzi dvoma susednými vrstvami v celom hranole rovnaké a posun hornej vrstvy je úmerný vzdialenosti od pevnej podstavy. Pôsobením tangenciálnej sily  $\vec{F}_t$  na hornú stenu hranola o ploche  $S$  vznikne *šmykové napätie*  $\tau$

$$\tau = \frac{F_t}{S}. \quad (9.9)$$

Vplyvom pôsobiacej sily sa dĺžky jednotlivých strán hranola nemenia, dôjde však k *skoseniu*  $\gamma$  (natočeniu o uhol  $\gamma$  niekedy označované aj *pomerné posunutie*)

$$\gamma = \frac{\Delta x}{d}, \quad (9.10)$$

pretože pre malé uhly platí  $\text{tg } \gamma \approx \gamma = \Delta x/d$ . *Hookov zákon pre šmyk* potom nadobúda tvar

$$\gamma = k\tau = \frac{1}{G}\tau \text{ alebo } \tau = G\gamma, \quad (9.11)$$

kde  $G$  je *modul pružnosti v šmyku* (niekedy nazývaný aj *modul tuhosti* prípadne *Coulombov modul*) a jeho rozmer je taký istý ako pri ostatných moduloch, čiže  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$  (Pa). Z predchádzajúcej rovnice vyplýva (*Hookov zákon pre šmyk*):

**Šmykové napätie je priamoúmerné skoseniu, pričom konštantou úmernosti je modul pružnosti v šmyku.**

Z teórie pružnosti, ktorá skúma deformáciu bez prihliadnutia na molekulové procesy prebiehajúce v telese vyplýva vzťah medzi modulom pružnosti v ťahu  $E$ , modulom pružnosti v šmyku  $G$  a Poissonovým číslom  $\mu$  (prípadne Poissonovou konštantou  $m$ )

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{mE}{2(m+1)}. \quad (9.12)$$

Keďže u pružných telies má Poissonovo číslo veľkosť  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ , z predchádzajúceho vzťahu všeobecne pre modul pružnosti v šmyku platí

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}. \quad (9.13)$$

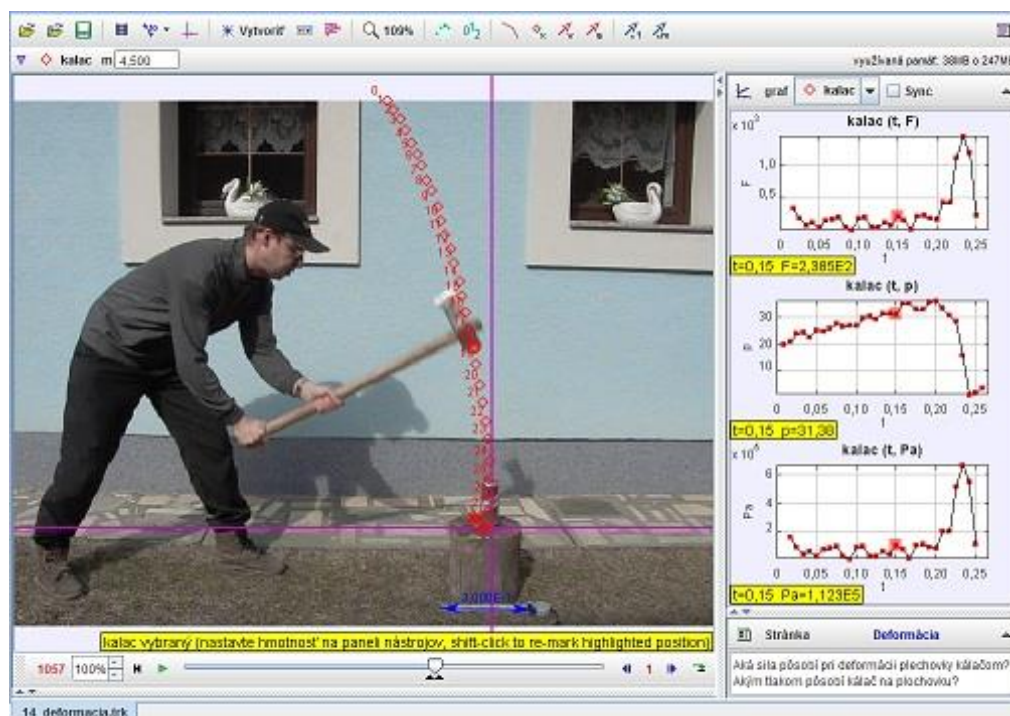
### Úloha 9-1:

**Odhadnite, akou silou a tlakom pôsobí kálač pri údere na plechovku?**  
(dĺžka meradla: 0,3 m, hmotnosť kálača: 4,1 kg, rozmery dotykovej časti plechovice:  $d = 52$  mm, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [kalac.avi](#)

### Riešenie:

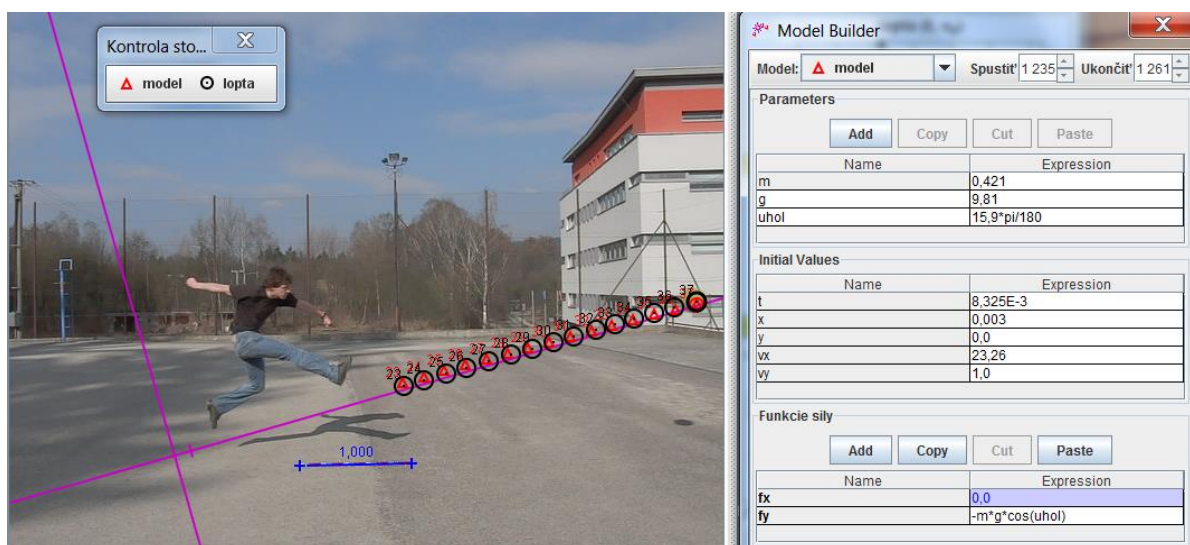
Využitím parametrov kálača a plechovice (hmotnosť a dotyková plocha) dokážeme určiť pôsobiacu silu na plochu, a tým aj následne aj tlak. Nasledujúci (Obr. 9.5) ponúka viaceré možnosti, ako určiť maximálnu pôsobiacu silu využijúc II. Newtonov pohybový zákon, buď pomocou zrýchlenia alebo hybnosti. Veľkosť maximálnej pôsobiacej sily využitím programu Tracker bola vypočítaná  $F = 1643$  N, veľkosť maximálneho tlaku na povrch plechovice bola  $p = 6,67 \cdot 10^5$  Pa.



Obr. 9.5 Deformácia telesa

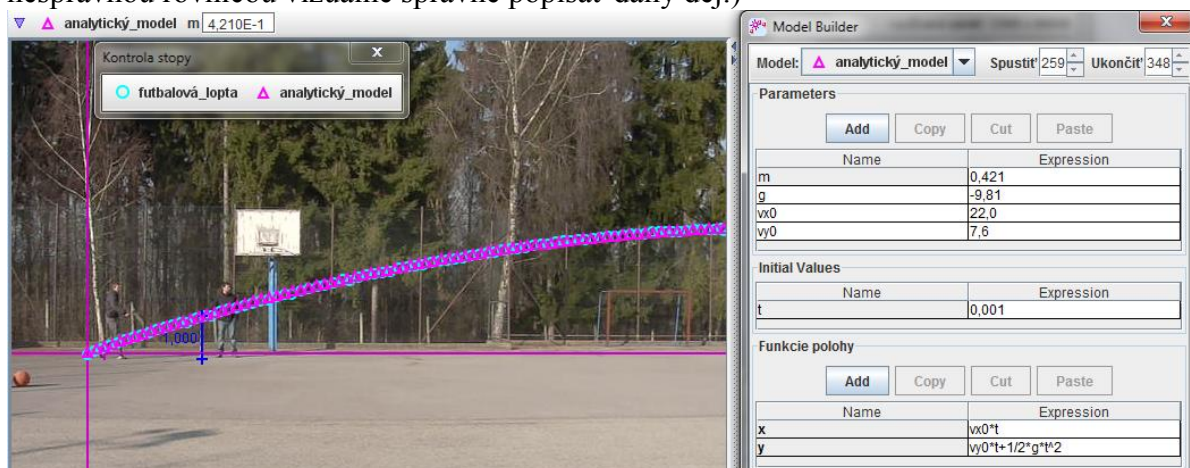
## 10. Modelovanie reálnych dejov v programe Tracker

Program Tracker umožňuje taktiež modelovať daný dej využitím analytického modelu (určenie rovníc pre  $x(t)$  a  $y(t)$ ) alebo dynamického (rovnice  $F_x$ ,  $F_y$ ). Po kliknutí na položku *Vytvoriť* sa nám otvorí okno, kde môžeme vybrať **Analytický časticový model**, prípadne **Dynamický časticový model**. To je pre študentov príležitosť overiť si, do akej miery ich predstava o prebiehajúcom deji zodpovedá skutočnosti. Takto možno korigovať mylné predstavy o tom, že lopta sa v smere x-ovej osi pohybuje preto, lebo na ňu pôsobí konštantná sila. Ako možno vidieť z dynamického modelu deja po kopnutí do lopty (noha už nie je v kontakte s loptou) (Obr. 10.1), uvažovali sme o nulovej sile v smere osi  $x$  (ak samozrejme zanedbávame vplyv odporu prostredia a zložku tiažovej sily v smere osi  $x$  v takto zvolenej sústave, ktorá má predsa len nejakú hodnotu (po prepočte veľkosť vychádza  $F_x = 0,020\text{ N}$ )).



Obr. 10.1 Dynamické modelovanie deja ( $\Delta$  - model, O – reálny dej)

Pri tvorbe dynamického modelu (Obr. 10.1) je nutné na začiatku zadať konštanty a parametre ( $m$ ,  $g$  a pod.) a počiatočné hodnoty pre polohu a rýchlosť v smere osi  $x$ ,  $y$ . V tomto prípade sú dané hodnoty taktiež individuálne a závisia od počiatočného navolenia súradnicovej sústavy. Pokiaľ model odpovedá jednotlivým polohám hmotného bodu v časových intervaloch, je dosť veľká pravdepodobnosť, že daná funkcia správne popisuje daný dej. Odporúča sa však vykonať rozmerovú analýzu, aby dané rovnice mali rozmer sily. (Teoreticky je možné aj nesprávnou rovnicou vizuálne správne popísať daný dej.)



Obr. 10.2 Analytické modelovanie deja ( $\Delta$  - model, O – reálny dej)

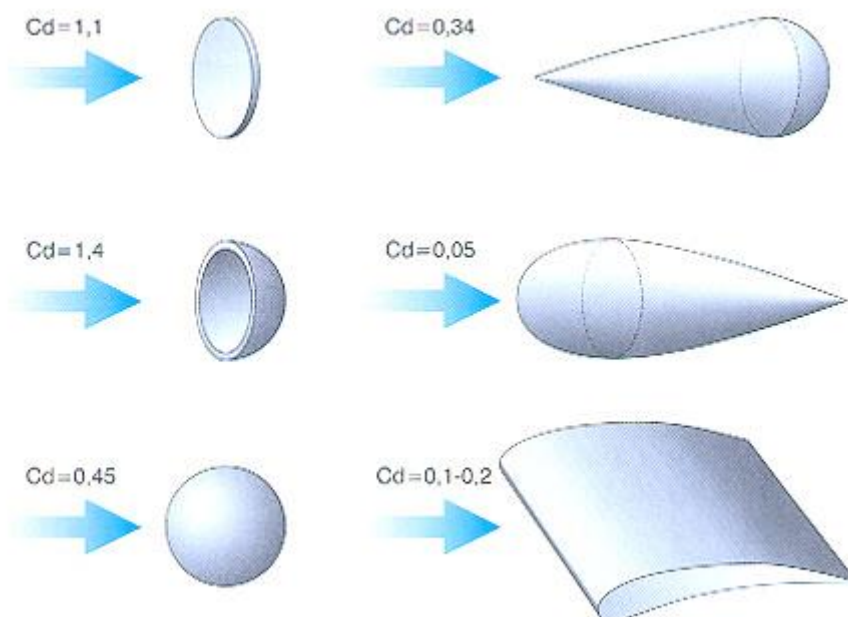
Zmenou parametrov možno sledovať, ako sa mení modelovaný dej oproti reálnemu, prípadne, čo by sa dialo, ak by sa zmenila pôsobiaca sila, či by priebeh deja ovplyvnilo zarátanie odporu vzduchu.

Na Obr. 10.2 je prezentovaný vytvorený analytický model (pomocou rovníc pre pohyb v smere osi  $x$  a  $y$ ) inej situácie a jeho porovnanie s reálnou situáciou pri odkope futbalovej lopty. Taktiež je potrebné v úvode zadať parametre (a ich hodnoty), ktoré sa vyskytnú pri popise polohy v smere osi  $x$  a  $y$ . Tiež aj v tomto prípade odporúčame vykonať rozmerovú analýzu. Z navrhovaného analytického modelu vyplýva, že v smere osi  $x$  koná lopta pohyb rovnomerný (ak zanedbávame vplyv odporu prostredia, v ktorom sa teleso pohybuje) s počiatočnou rýchlosťou  $v_{x0} = 22 \text{ m/s}$  a v smere osi  $y$  je daný pohyb modelovaný ako rovnomerne spomalený s počiatočnou rýchlosťou  $v_{y0} = 7,6 \text{ m/s}$ . Ak teraz hľadáme odpoveď na otázku, akú počiatočnú rýchlosť mala lopta v čase kopu, je ešte potrebné využiť poznatky z vektorového počtu. Po krátkom výpočte by sme sa dopracovali k hodnote  $v = 23,28 \text{ m/s}$ , čo je podobné, ako pri videu na Obr. 10.1.

V predchádzajúcich prípadoch bolo možné zanedbať odpor vzduchu. Avšak niekedy sa stretne s prípadmi, kedy to možné nie je. V reálnom prípade musíme uvažovať aj o odpore vzduchu, ktorý je spôsobený vírovým obtekaním vzduchu okolo lopty, aj keď to nie sú veľké rýchlosti. Veľkosť odporovej sily je daná vzt'ahom:

$$F_0 = \frac{1}{2} C S \rho v^2 \quad (10.1)$$

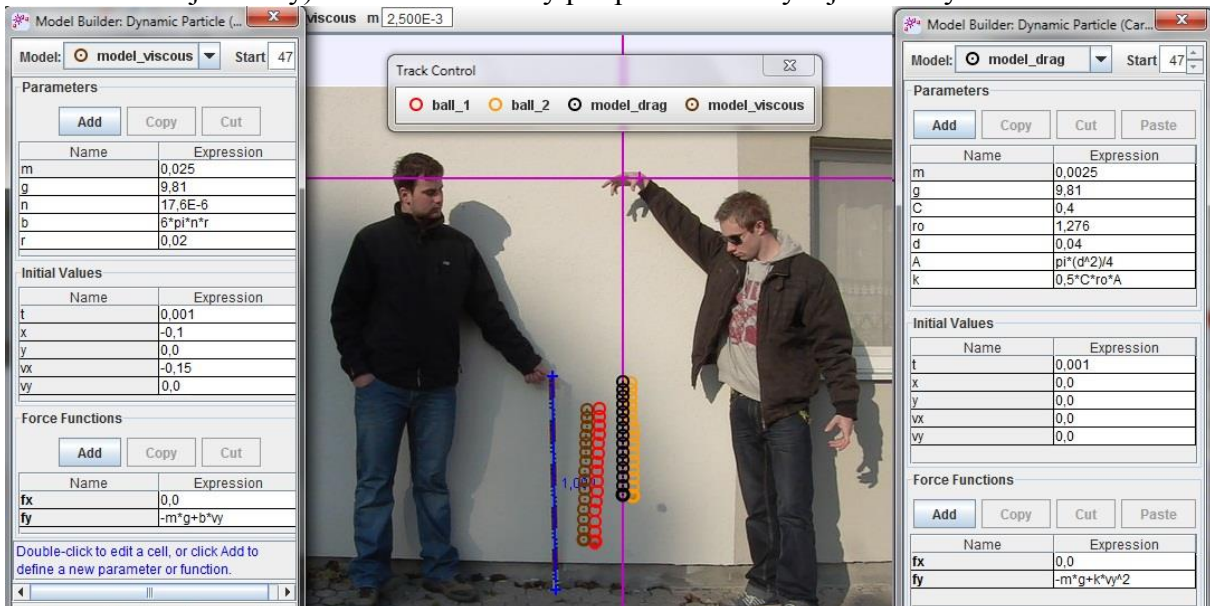
kde  $S$  je čelný prierez telesa (vzhľadom k smeru jeho rýchlosti),  $\rho$  je hustota prostredia,  $v$  je rýchlosť a  $C$  je tzv. koeficient aerodynamického odporu. Obtekanie telesa pri turbulentnom prúdení je veľmi komplikovaný problém, hodnotu koeficientu odporu zložitejšieho tvaru  $C$  je preto potrebné určovať experimentálne v tzv. veternom tuneli. Najčastejšie používané tvary sú zakreslené na Obr. 10.3 spolu aj s odpovedajúcimi koeficientmi odporu.



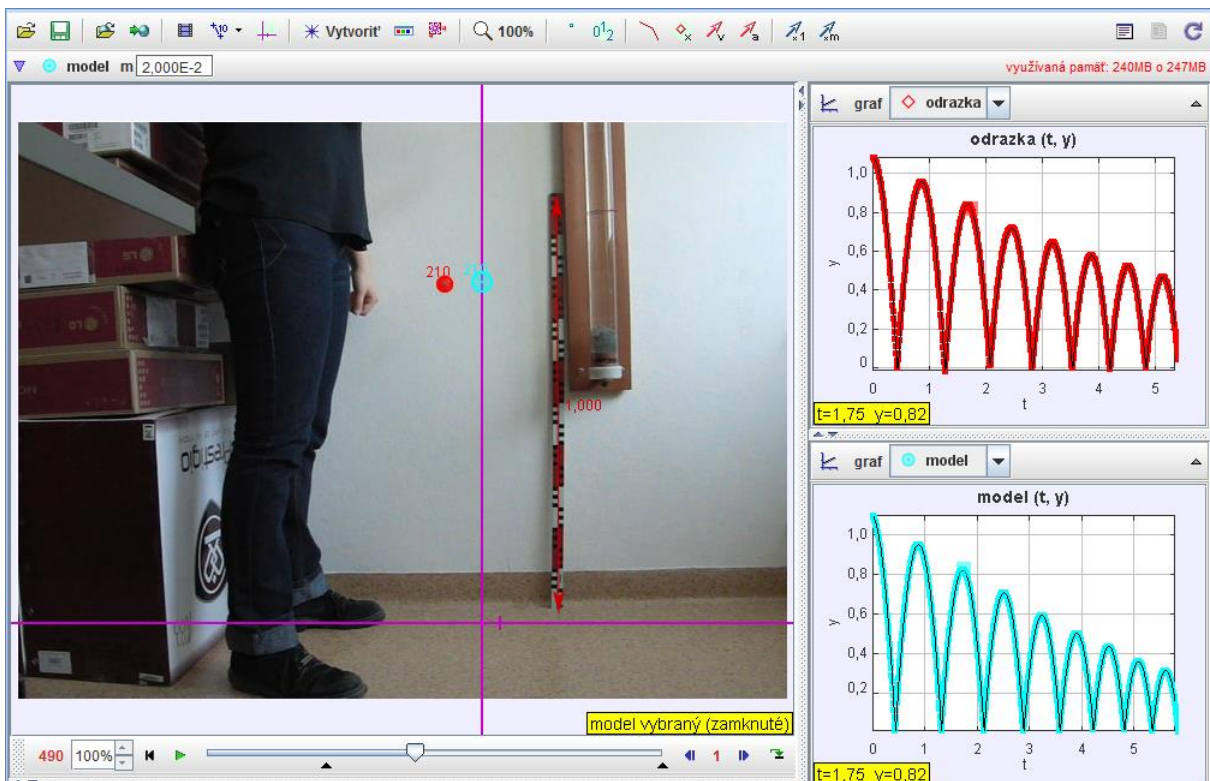
Obr. 10.3 Veľkosť koeficientu odporu pre rôzne tvary telies  
[\[http://cs.autolexicon.net/articles/aerodynamika/\]](http://cs.autolexicon.net/articles/aerodynamika/)

Na nasledujúcom obrázku Obr. 10.4 je znázornená analýza pohybu dvoch voľne pustených guľôčok a porovnanie s modelmi – viskóznym a odporovým, prvý súvisí so Stokesovou silou (6.28) a druhý s odporovou silou (10.1), ktorá sa využíva aj pri pohybe telies vysokými rýchlosťami.

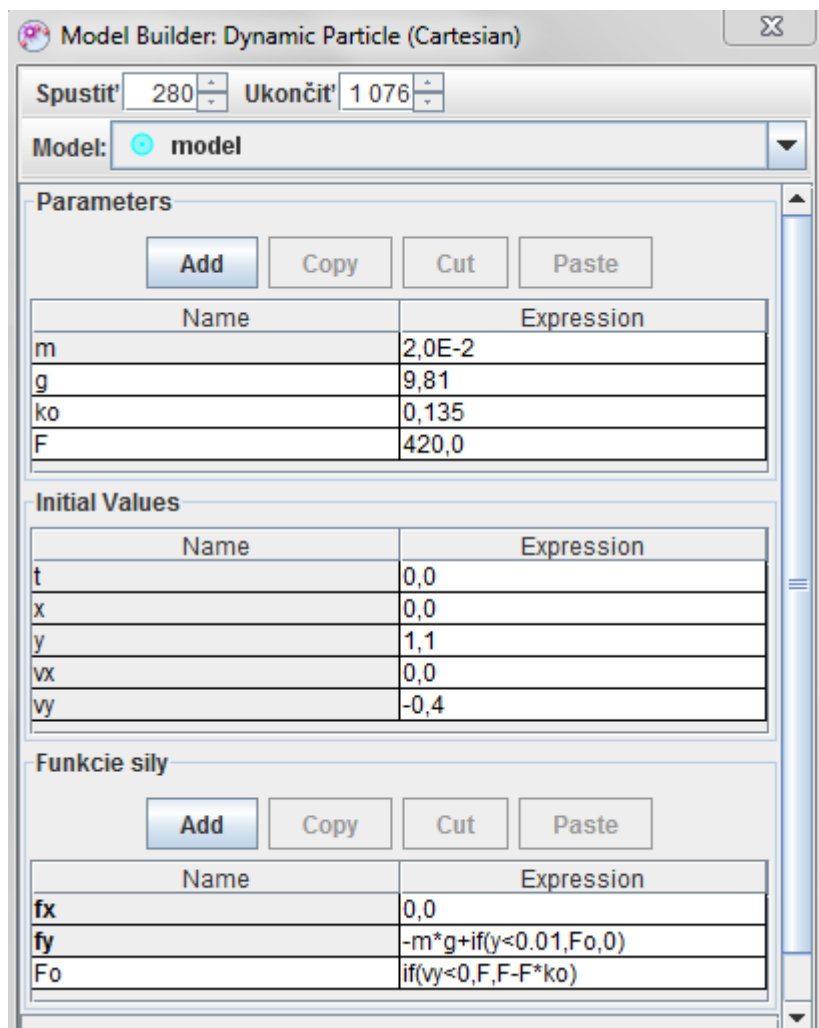
Tak, ako aj v predchádzajúcich prípadoch, je potrebné v dynamickom modeli nadefinovať parametre – hmotnosť guľôčky, tiažové zrýchlenie, polomer/priemer guľôčky, koeficient dynamickej viskozity vzduchu, hustotu vzduchu, koeficient odporu a pod. Zadať tiež treba počiatočné hodnoty polohy a rýchlosti v jednotlivých smeroch (závisia na počiatočnej voľbe vzťažnej sústavy) a nakoniec vzťahy pre pôsobiace sily v jednotlivých smeroch.



Obr. 10.4 Analýza a modelovanie pohybu pre voľný pád dvoch guľôčok



Obr. 10.5 Analýza a modelovanie pohybu odrážajúcej sa guľôčky



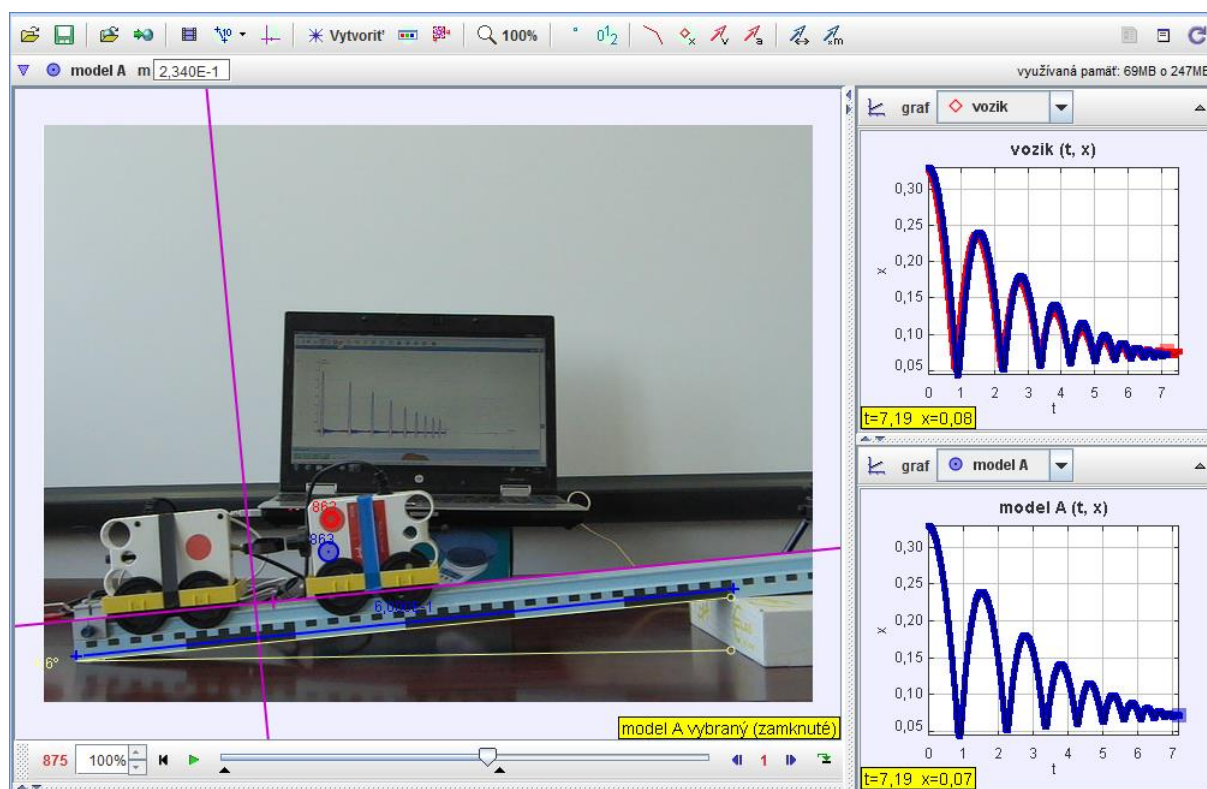
Obr. 10.6 Dynamický model pre odrážajúcu sa guľôčku

Na Obr. 10.5 a Obr. 10.6 je znázornené modelovanie a popis samotného modelu charakterizujúceho odrazu guľôčky. Na to, aby sme vytvorili model, ktorý v dostatočnej miere bude popisovať skutočný priebeh deja, je potrebné správne analyzovať dej – o aký pohyb sa jedná a zakomponovať podmienku (if), ktorá hovorí, že pri istej fyzikálnej veličine nastane zmena. Konkrétne v tomto prípade (závisí na voľbe súradnicovej sústavy) – ak loptička dosiahne výchylku menšiu ako  $0,01\text{ m}$ , nech pôsobí navyše na loptičku v opačnom smere sila  $F_o$ , ktorá je inak nulová. Keďže sa pri odrazoch loptičky časť energie nevratne premieňa na iné formy energie, je aj to potrebné zakomponovať do charakteristiky sily  $F_o$ , ktorá sa po každom odraze zmenší. Pokiaľ je rýchlosť loptičky záporná (loptička padá), sila  $F_o$  má počiatočnú hodnotu  $F$  (vieme určiť zo zmeny hybnosti v čase) a po odraze nech sa táto sila zmení o istú hodnotu súvisiacu so stratami energie a tlmením (koeficient  $ko$ ).

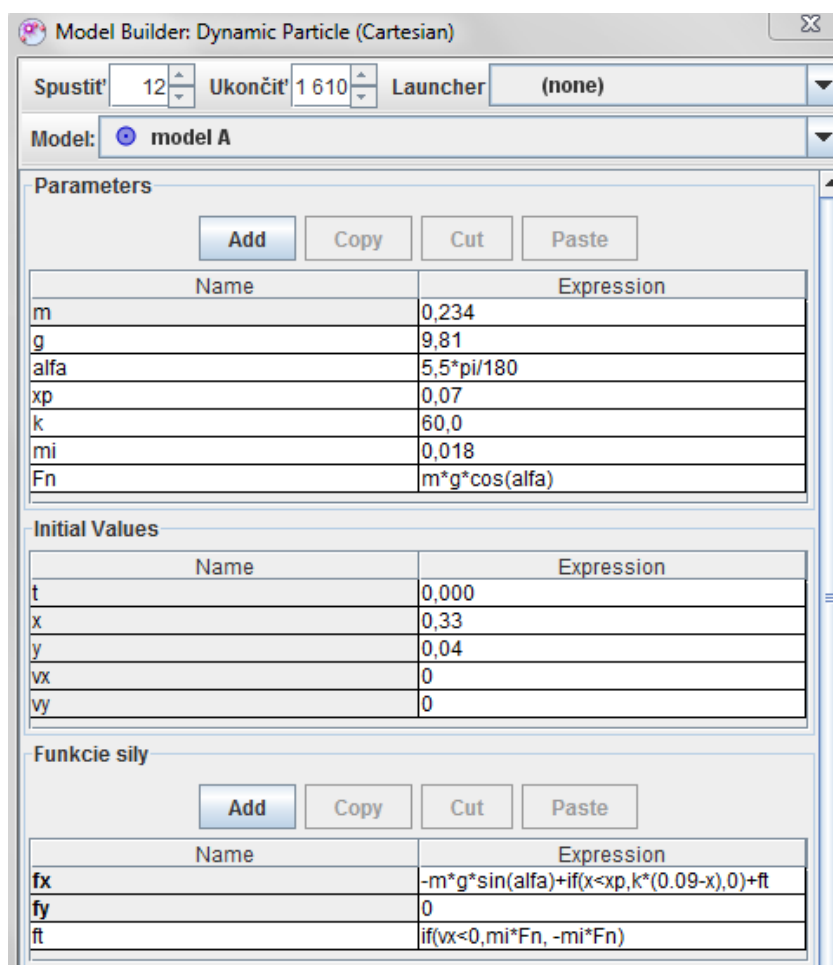
Na nasledujúcich Obr. 10.7 a Obr. 10.8 je znázornená analýza a modelovanie pohybu vozíka po naklonenej rovine po niekoľkonásobných odrazoch. Porovnanie pohybu vozíka – reálneho deja (červená farba) a modelovaného deja (modrá farba) naznačuje, do akej miery sa podarilo stotožniť namodelovaný dej s reálnym dejom. V tomto prípade je do pohybu zakomponovaný aj odpor prostredia pri pohybe vozíka (odporová sila  $f_i$ ), ktorá sa mení v závislosti na smere pohybu vozíka. Pri náraze vozíka na pružinu pôsobí sila pružnosti, ktorá závisí od veľkosti stlačenia danej pružiny.

Obr. 10.9 a Obr. 10.10 znázorňujú analýzu a modelovanie tlmeného kmitavého pohybu prostredníctvom analytického a dynamického modelu.

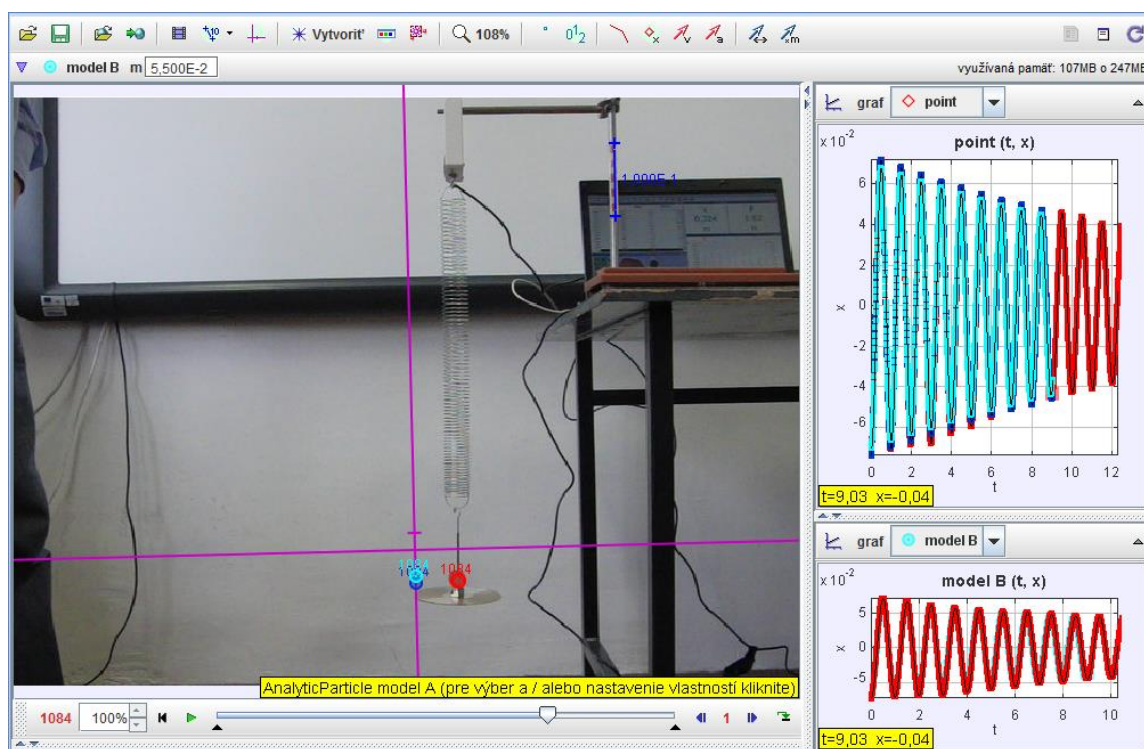




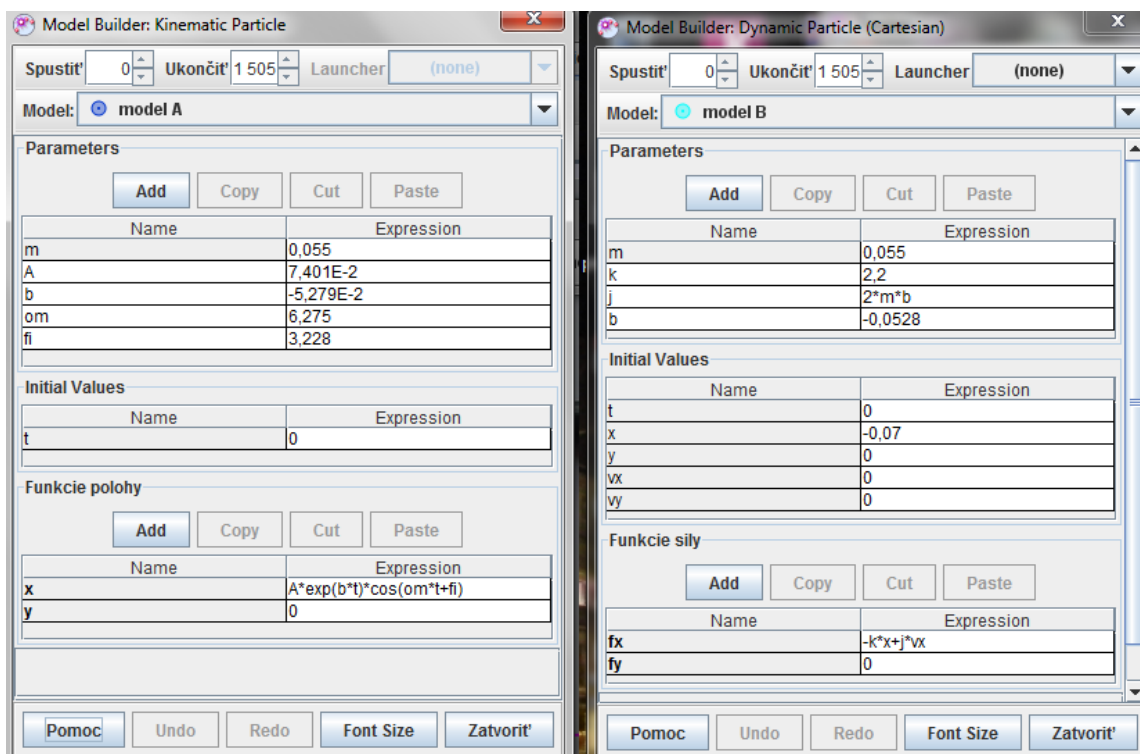
Obr. 10.7 Analýza pohybu a odrazov vozíka



Obr. 10.8 Dynamický model pohybu a odrazov vozíka



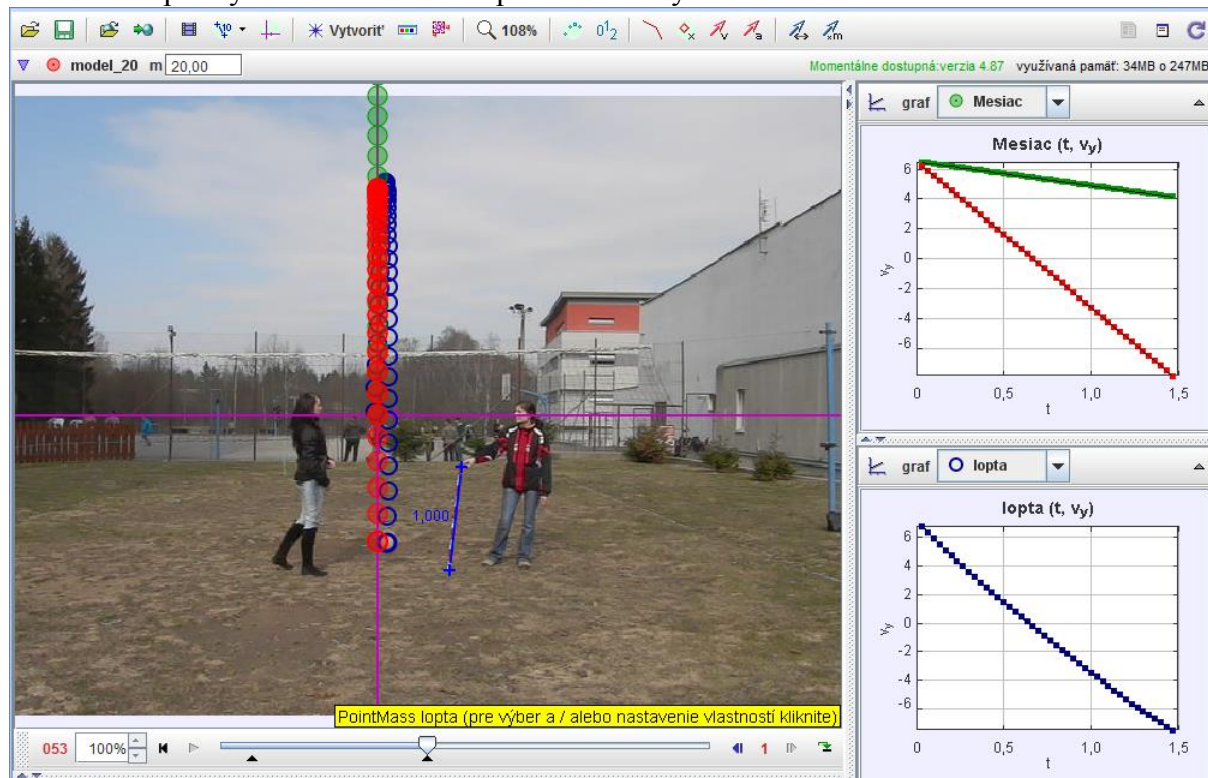
Obr. 10.9 Analýza tlmeného kmitavého pohybu



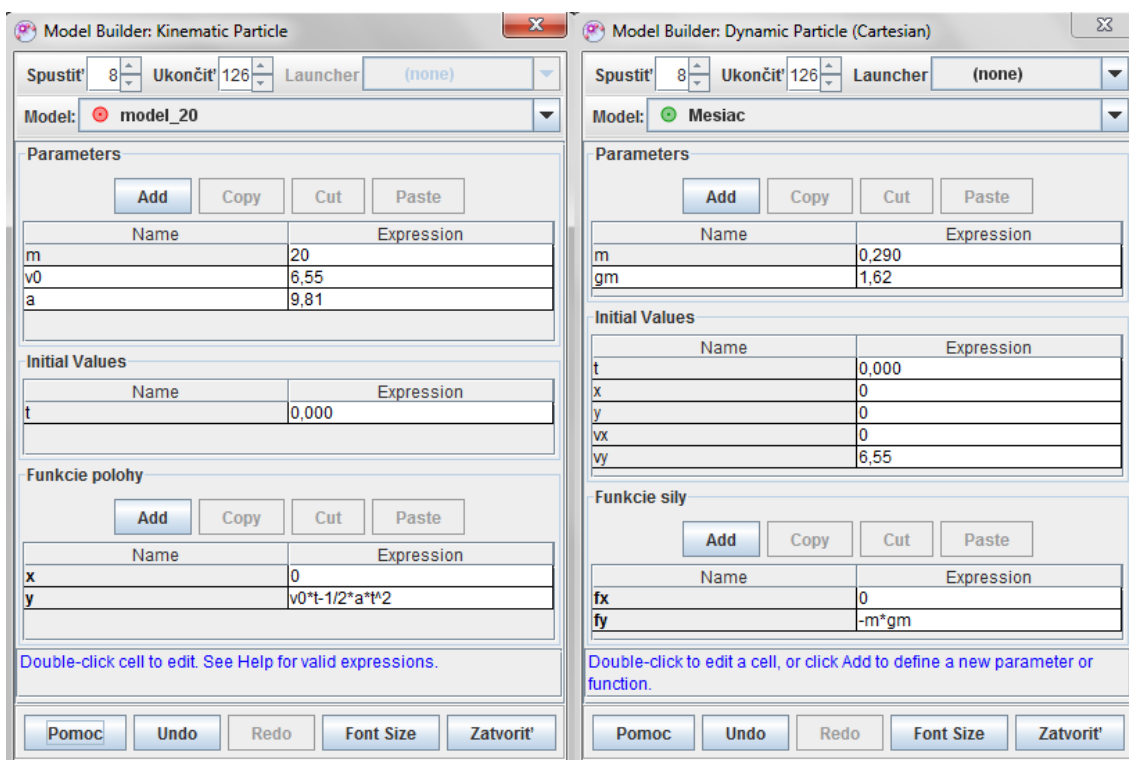
Obr. 10.10 Analytický a dynamický model tlmeného kmitavého pohybu

Vizuálne porovnanie modelu s reálnym dejom nám ukáže, do akej miery sme sa dokázali priblížiť skutočnosti. Je však treba pamätať aj na to, že matematickými vzťahmi dokážeme popísať čokoľvek, čo však nemusí mať správnu fyzikálnu interpretáciu. Preto je potrebné naučiť sa správne charakterizovať elementárne fyzikálne deje a vedieť ich aj exaktne matematicky popísať.

Ďalšou z užitočných vlastností programu Tracker je zmena parametrov vystupujúcich v modeli pre skúmanie vlastností sústavy, t.j. čo by sa zmenilo, keby sa zmenili parametre systému. Napríklad pri zvislom vrhu nahor (Obr. 4.6): Zmenilo by sa niečo, keby vzduchom letela lopta hmotnosti nie 290 gramov ale 20 kilogramov? Prípadne, čo by sa zmenilo, ak by sme danú loptu vyhadzovali tou istou počiatkovou rýchlosťou na Mesiaci?



Obr. 10.11 Analýza a modelovanie zvislého vrhu nahor



Obr. 10.12 Analytický a dynamický model pre vrh 20 kg lopty na Zemi a 290g na Mesiaci

Nasledujúci obrázok (Obr. 10.11) znázorňuje analýzu pohybu vyhodenej lopty (modrá guľa) a porovnanie so situáciou, keby rovnakou počiatkovou rýchlosťou letela 20 kilogramová guľa na Zemi (červená guľa) a rovnako ťažká guľa na Mesiaci (zelená guľa). Ako si možno všimnúť z časových závislostí rýchlosti vo zvislom smere, hmotnosť lopty neovplyvní jej pohyb na Zemi pri danej počiatkovej rýchlosti. Ak by sme však loptu rovnakou počiatkovou rýchlosťou vyhodili na Mesiaci, jej časová zmena výšky by bola odlišná v porovnaní s pohybom na Zemi. V čase 1,5 sekundy je už lopta pri povrchu Zeme, na Mesiaci by pokračovala v rovnomernej spomalenom pohybe smerom nahor (v čase 1,5 s by mala rýchlosť 4 m/s).

Obdobnú analýzu možno použiť aj pri analýze brzdných dráh automobilov.

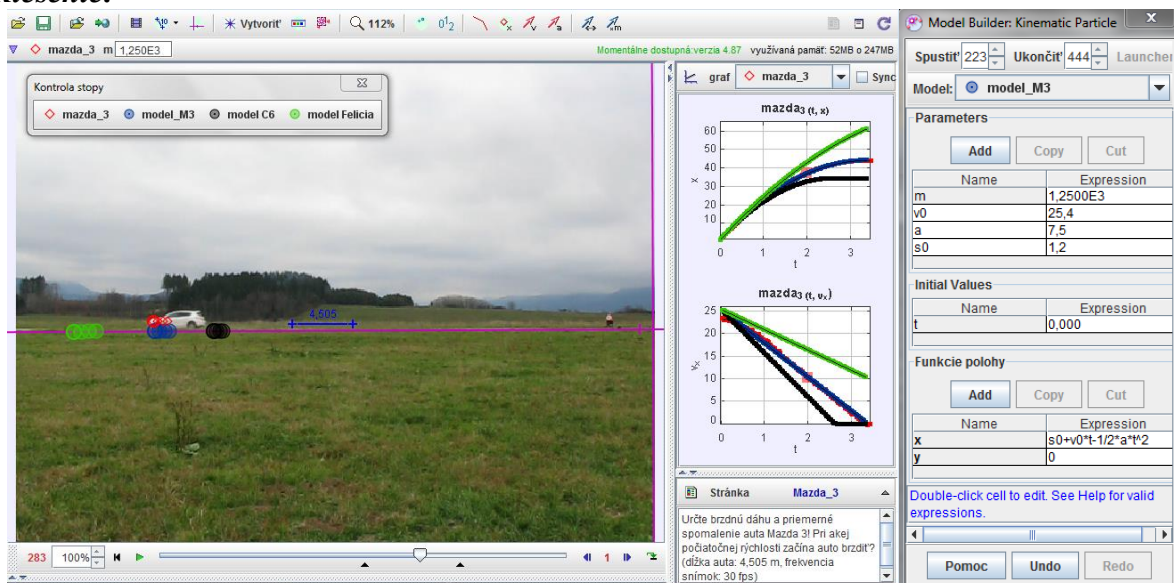
### Úloha 10-1:

*Na akej dráhe a za aký čas zabrzdí automobil (Mazda 3, Citroen C6, Škoda Felicia) pri počiatkovej rýchlosti 91 km/h, ak vodič brzdí maximálnym zošliapnutím brzdového pedálu a to tak, aby auto nešlo do šmyku?*

(frekvencia snímkov = 30 fps)

zdroj: [Citroen.wmv](#), [Mazda3.wmv](#), [felicia mokro.avi](#)

### Riešenie:



Obr. 10.13 Analýza brzdných dráh: Mazda3 a porovnanie s modelom Citroen C6 a Škoda Felicia

Ako si možno všimnúť z Obr. 10.13, model pre Mazdu 3 (modrá farba) odpovedá hmotnému bodu, ktorý zastupuje vyšetrované auto (červená farba). Ak však využijeme brzdné spomalenia, ktoré boli získané videoanalýzou ďalších automobilov (pre C6 bolo maximálne spomalenie  $a = 9,7 \text{ m/s}^2$  a pre Feliciu  $a = 4,5 \text{ m/s}^2$ ) zistíme, že kým C6 už je v pokoji (čierna farba), Mazda3 má rýchlosť okolo  $5 \text{ m/s}$  a Felícia (zelená farba) viac ako  $13 \text{ m/s}$ . Kým C6 zastaví za čas  $2,67 \text{ s}$ , Mazde 3 to bude trvať  $3,33 \text{ s}$  a Škoda Felicia zastaví po takmer  $5,8 \text{ s}$ . (Určenie brzdných dráh ponechávame na samotnom čitateľovi.) (Je potrebné ešte pripomenúť, že dané parametre ovplyvňuje povrch vozovky a samotné pneumatiky áut, predchádzajúca analýza bola prevedená pri brzdení na suchej vozovke, pri brzdení na mokrej a zasneženej vozovke ako aj pri brzdení šmykom (autá bez ABS) sa časy brzdenia a súčasne aj brzdné dráhy áut predlžujú.)

## Dodatky

### Dodatok A: Medzinárodná sústava jednotiek SI

Medzinárodnú sústavu jednotiek SI zahŕňa:

- sedem základných jednotiek, ktoré zodpovedajú siedmim základným veličinám

**Tab. 0.1 Základné veličiny a ich jednotky**

Základná veličina	Značka veličiny	Základná jednotka	Značka jednotky
dĺžka	<i>l</i>	meter	m
hmotnosť	<i>m</i>	kilogram	kg
čas	<i>t</i>	sekunda	s
elektrický prúd	<i>I</i>	ampér	A
termodynamická teplota	<i>T</i>	kelvin	K
látkové množstvo	<i>n</i>	mól	mol
svietivosť	<i>I</i>	kandela	cd

Definície základných jednotiek:

- *Sekunda (s)* predstavuje časový interval zodpovedajúci 9 192 631 770 periódam kmitov žiarenia, ktoré vzniká pri prechode medzi dvoma hyperjemnými hladinami základného stavu atómu <sup>133</sup>Cs (13. CGPM, 1967).
- *Meter (m)* je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo vo vákuu za časový interval 1/299 792 458 sekundy (17. CGPM, 1983).
- *Kilogram (kg)* je hmotnosť platino-irídiového valca (medzinárodného prototypu kilogramu) uloženého v Sèvres. (3. CGPM, 1901) Tento štandard je platný od 1. konferencie CGPM od r. 1889.
- *Ampér (A)* je stály elektrický prúd pretekajúci dvoma priamymi rovnobežnými nekonečne dlhými vodičmi zanedbateľného kruhového prierezu umiestnenými vo vákuu vo vzájomnej vzdialenosti 1 meter, ktorý vytvára medzi týmito vodičmi silu  $2 \times 10^{-7}$  newtona na 1 meter dĺžky vodiča (9. CGPM, 1948).
- *Kelvin (K)* je 1/273,16 časť termodynamickej teploty trojného bodu vody (13. CGPM, 1967).
- *Kandela (cd)* je svietivosť zdroja, ktorý v danom smere emituje monochromatické žiarenie s frekvenciou  $540 \times 10^{12}$  Hz a ktorého žiarivosť v tomto smere je 1/683 wattov na steradián (16. CGPM, 1979).
- *Mól (mol)* je látkové množstvo sústavy, ktorá obsahuje práve toľko elementárnych entít (atómov, molekúl, iónov, iných častíc), koľko je atómov v 0,012 kg izotopu uhlíka <sup>12</sup>C (14. CGPM, 1971). V 0,012 kg izotopu uhlíka <sup>12</sup>C sa nachádza  $6,02214199 \times 10^{23}$  atómov.

- odvodené jednotky SI vrátane doplnkových jednotiek SI

**Tab. 0.2 niektoré odvodené jednotky vrátane doplnkových**

Odvodená veličina	jednotka	Názov jednotky
plošný obsah	$m^2$	štvorcový meter
objem	$m^3$	kubický meter
rýchlosť	$m/s$	meter za sekundu
uhlová rýchlosť	$rad/s$ alebo $s^{-1}$	radián za sekundu
zrýchlenie	$m/s^2$	meter za sekundu na druhú
hustota	$kg/m^3$	kilogram na kubický meter
špecifický objem	$m^3/kg$	kubický meter na kilogram
hustota el. prúdu	$A \cdot m^{-2}$	ampér na štvorcový meter
koncentrácia látky	$mol/m^3$	mol na kubický meter
tlak	$Pa = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$	pascal
energia	$J = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	joule
výkon	$W = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$	watt
sila	$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$	newton
elektrický náboj	$C = A \cdot s$	coulomb
svetelný tok	$lm = cd \cdot sr$	lumen
osvetlenie	$lx = lm/m^2$	lux
rovinný uhol	rad	radián
priestorový uhol	sr	steradián

- predpony SI

**Tab. 0.3 Násobky jednotiek**

Názov	Značka	Násobok	Faktor
yotta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000	$10^{24}$
dzéta	Z	1 000 000 000 000 000 000 000	$10^{21}$
exa	E	1 000 000 000 000 000 000	$10^{18}$
peta	P	1 000 000 000 000 000	$10^{15}$
tera	T	1 000 000 000 000	$10^{12}$
giga	G	1 000 000 000	$10^9$
mega	M	1 000 000	$10^6$
kilo	k	1 000	$10^3$
hekto	h	100	$10^2$
deka	da	10	$10^1$
deci	d	0,1	$10^{-1}$
centi	c	0,01	$10^{-2}$
mili	m	0,001	$10^{-3}$
mikro	$\mu$	0,000 001	$10^{-6}$
nano	n	0,000 000 001	$10^{-9}$
piko	p	0,000 000 000 001	$10^{-12}$
femto	f	0,000 000 000 000 001	$10^{-15}$
atto	a	0,000 000 000 000 000 001	$10^{-18}$
zepto	z	0,000 000 000 000 000 000 001	$10^{-21}$
yokto	y	0,000 000 000 000 000 000 000 001	$10^{-24}$

- jednotky mimo sústavy SI uznané a používané spolu s SI

**Tab. 0.4 Niektoré z ďalších jednotiek mimo SI, ktoré sú akceptované a používané s SI**

Veličina	Názov	Značka	Vzťah k jednotkám SI
čas	minúta	min	60 s
	hodina	h	3600 s
	deň	d	86400 s
rovinný uhol	stupeň	°	$(\pi/180)$ rad
	minúta	'	$(\pi/10800)$ rad
	sekunda	"	$(\pi/648000)$ rad
dĺžka	astronomická jednotka	AU	$1,495\,978\,7 \cdot 10^{11}$ m
	parsek	pc	$30,85678 \cdot 10^{15}$ m
	svetelný rok	ly	$9,460730 \cdot 10^{15}$ m
	Celziov stupeň	°C	$T = (t + 273,15)$ K
plošný obsah	hektár	ha	$10^4$ m <sup>2</sup>
	ár	a	$10^2$ m <sup>2</sup>
objem	liter	l	$10^{-3}$ m <sup>3</sup>
hmotnosť	tona	t	$10^3$ kg
	atómová hmotnostná jednotka	u	$1,660\,54 \cdot 10^{-27}$ kg
optická mohutnosť	dioptria	D	$1$ m <sup>-1</sup>
energia	elektrónvolt	eV	$1,602\,177 \cdot 10^{-19}$ J

System SI nie je statický, vyvíja sa tak, aby spĺňal neustále zvyšujúce sa požiadavky na meranie.

### Dodatok B: Operácie s vektormi

Vektorové fyzikálne veličiny - **vektory** (z lat. vektor - nosič, jazdec) sú jednoznačne určené veľkosťou (číselnou hodnotou a jednotkou) a smerom. Medzi vektorové fyzikálne veličiny patrí napr. sila  $\vec{F}$ , moment sily  $\vec{M}$ , rýchlosť  $\vec{v}$  a iné.

Vektory  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  sú v trojrozmernom Euklidovom súradnicovom systéme (systém troch navzájom kolmých osí v priestore pretínajúcich sa v jednom bode) definované pomocou zložiek  $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$  a  $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$  a možno ich zapísať ako lineárnu kombináciu jednotkových vektorov  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},\end{aligned}\tag{0.1}$$

pričom **veľkosť vektora**  $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$  je definovaná

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},\tag{0.2}$$

takže pre **jednotkové vektory**  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  platí

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.\tag{0.3}$$

Výsledkom **skalárneho súčinu** vektorov  $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$  a  $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$  je hodnota, ktorú dostaneme ako súčin absolútnych hodnôt vektorov a kosínusu uhla, ktorý zvierajú

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha.\tag{0.4}$$

Skalárny súčin dvoch vektorov  $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$  a  $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$  možno taktiež vyjadriť nasledujúco (výsledkom je číslo)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.\tag{0.5}$$

Uhol dvoch vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  je zo vzťahu (0.4) definovaný nasledovne

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.\tag{0.6}$$

Výsledkom **vektorového súčinu** dvoch vektorov  $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$  a  $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$  je vektor  $\vec{c}$ . Symbolicky sa vektorový súčin zapíše

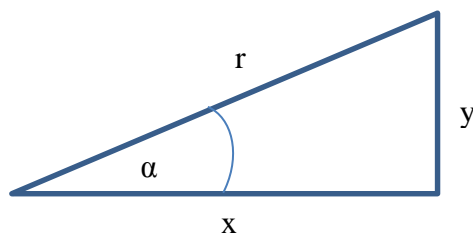


$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (0.7)$$

Pre veľkosť vektorového súčinu dvoch vektorov  $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$  a  $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$  platí

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha. \quad (0.8)$$

Výsledný vektor  $\vec{c}$  je kolmý na rovinu určenú vektormi  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$ . Vektor  $\vec{c}$  má taký smer, že z jeho konca sa stotožnenie prvého vektora súčinu s druhým vektorom po kratšom oblúku javí ako pohyb proti chodu hodinových ručičiek. Praktickejší spôsob pre určenie smeru je definícia pomocou pravidla pravej ruky, podľa ktorej vektor  $\vec{c}$  smeruje na tú stranu roviny, na ktorú ukazuje vztýčený palec, ak zahnuté prsty pravej ruky smerujú po kratšom oblúku od prvého vektora k druhému.

**Dodatok C: Goniometrické funkcie**

$$\sin \alpha = \frac{y}{r},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

Vzt'ahy medzi goniometrickými funkciami:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \pm \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

### Dodatok D: Základné matematické operácie: derivácie a integrály

Názorný význam **derivácie** a **integrálu** bol popísaný v predchádzajúcich kapitolách, kde deriváciu si možno predstaviť ako smernicu krivky a integrál ako plochu pod grafom funkcie.

V nasledujúcich vzťahoch vystupujú  $a$  a  $b$  ako konštanty,  $u$ ,  $v$  predstavujú funkcie premennej  $x$ ,  $w$  je premenou  $y$ ,  $c$  predstavuje integračnú konštantu súvisiacu s neurčitým integrálom.

- Zápis:

$$\frac{d}{dx}(au \pm bv) = a \frac{d}{dx} u \pm b \frac{d}{dx} v = a \frac{du}{dx} \pm b \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d}{dx} uv = \frac{du}{dx} v \pm u \frac{dv}{dx} \text{ - derivácia súčinu,}$$

$$\frac{d}{dt} w(y(t)) = \frac{dw}{dy} \frac{dy}{dt} \text{ - derivácia zloženej funkcie,}$$

$$\frac{d}{dx} \int u(x) dx = u(x),$$

$$\int (au \pm bv) dx = a \int u dx \pm b \int v dx .$$

- Základné derivácie:

$$\frac{d}{dx}(a) = \frac{da}{dx} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{dx}{dx} = 1,$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x, \quad \frac{d}{dy}(e^x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x .$$

- Základné integrály:

$$\int dx = x + c,$$
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1),$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,$$
$$\int e^x dx = e^x + c,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$
$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + c$$

## Použitá a odporúčaná literatúra

Haertel, H., Kireš, M., Ješková, Z., Degro, J.: Aristotle still wins over Newton. *EUROCON 2003: computer as a tool : proceedings* vol. 1., s. 7-11, 2003, Ľubľana. ISBN 078037763X.

Halliday, D., Resnik, R., Walker, J.: Fyzika. VUTIUM a PROMETES 2000.

Hockicko, P.: Useful computer software for physical analysis of processes. Proceedings of the 2009 Information and Communication Technology in Education (ICTE) Annual Conference, 15th – 17th September 2009, Rožnov pod Radhoštěm, 103-107, ISBN 978-80-7368-459-4.

Hockicko, P.: Fyzikálna analýza reálnych dejov využitím videozáznamov. Zborník referátov zo XVII. medzinárodnej konferencie DIDFYZ 2010, Nitra 2011, 94 – 99, ISBN 978-80-8094-988-4.

Hockicko, P.: Rozvoj kľúčových kompetencií využitím akustických experimentov, Proceedings of the 5th International Symposium Material-Acoustic-Place 2010, Zvolen 2010, 69-72, ISBN 978-80-228-2121-6.

Hockicko, P.: Forming of Physical Knowledge in Engineering Education with the Aim to Make Physics More Attractive. Proceedings of international conference Physics Teaching in Engineering Education PTEE 2011, Mannheim, Germany, 2011, ISBN 978-3-931569-18-1.

Hockicko, P.: Rozvoj kľúčových kompetencií študentov použitím fyzikálnej analýzy pomocou programu Tracker. Poznatky modernej fyziky a ich aplikácia do vyučovania fyziky, Verbum Ružomberok 2011, 112-117, ISBN 978-80-8084-798-2.

Hockicko, P.: Rozvoj manuálnych zručností a intelektuálnych spôsobilostí študentov použitím videoanalýzy pohybov. Zborník príspevkov z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky IV Národný festival fyziky 2011, Kongresové centrum SAV Smolenice, 2011, vydala Slovenská fyzikálna spoločnosť, Bratislava 2011, 85-91, ISBN 978-80-970625-3-8.

Hockicko, P.: Development of key competencies using video analysis of motions by Tracker, Proceedings GIREP-EPEC Conference 2011 Physics Alive, August 1 – 5, Jyväskylä, Finland, University of Jyväskylä 2012, 55 – 61. ISBN 978-951-39-4801-6.

Hockicko, P.: Alternatívne laboratórne a výpočtové cvičenia. Nové trendy akustického spektra – vedecký recenzovaný zborník. Zvolen, Technická univerzita vo Zvolene, 2012, 87 – 91, ISBN 978-80-228-2371-5.

Hockicko, P.: Attractiveness of Learning Physics by Means of Video Analysis and Modeling Tools. Proceedings of the 40th SEFI Annual Conference Engineering Education 2020: Meet the Future, 23 - 26 September 2012, Thessaloniki, Greece, ISBN 978-2-87352-005-2.

Hockicko, P.: Využitie videoanalýzy reálnych dejov vo výučbe fyziky. Zborník príspevkov z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky V Národný festival fyziky 2012, Kongresové centrum SAV Smolenice, 15. - 18. 4. 2012, Vydala Slovenská fyzikálna spoločnosť, Bratislava 2012, 102-108. ISBN 978-80-970625-7-6.

Hockicko, P.: Analýza brzdných dráh automobilov. Zborník referátov z XVIII. medzinárodnej konferencie DIDFYZ 2012 Fyzikálne vzdelávanie v systéme reformovaného školstva, Vydala Univerzita Konštantína Filozofa a JSMF v Nitre 2013, 135 – 143, ISBN 978-80-558-0232-9.

Hockicko, P.: Frekvenčná analýza zvukov, DVD, 2010, ISBN 978-80-554-0289-5

Hockicko, P.: Fyzika v príkladoch a videopríkladoch / Video-analysis based tasks in physics. [elektronický zdroj] - 1. vyd. - Žilina : Žilinská univerzita, 2013. - DVD-ROM, [4,76 AH; 5,02 VH]. - ISBN 978-80-554-0811-8.

Dostupné na: <http://hockicko.uniza.sk/Priklady/videoprklady.htm>

Hockicko, P.: Poznaj brzdnú dráhu svojho auta. Zborník príspevkov z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky VI, Národný festival fyziky 2013, Vydala Slovenská fyzikálna spoločnosť, Bratislava, 2013, 119 – 125, ISBN 978-80-971450-0-2.

Hockicko, P.: Video analysis of motions. PTEE2014 Proceedings 8th International Conference Physics Teaching in Engineering Education – Challenges and Solutions, Plugins and Apps for Effective Teaching. May 2014, UA Editora, Aveiro University, Portugal, pp. 73 – 80. ISBN 978-972-789-433-8.

Hockicko, P., Čulík, M., Poljak, S., Baš'ovanský, R.: Formovanie fyzikálnych predstáv prostredníctvom videí a analýzy nameraných dát na ukázkovom príklade skúmania ťahových deformácií telies. Nové trendy akustického spektra 2014, vedecký recenzovaný zborník, Technická univerzita Zvolen, 2014, 101-107, ISBN 978-80-228-2647-1.

Hockicko, P., Hockicková, M.: Videoanalýza dejov a zvukov so zameraním na rozvoj kľúčových kompetencií študentov. Proceedings of the 6th International Symposium Material-Acoustic-Place 2011, Zvolen (2011) 103-106, ISBN 978-80-228-2121-6.

Hockicko, P., Krišťák, Ľ., Němec, M.: Development of students' conceptual thinking by means of video analysis and interactive simulations at technical universities. *European Journal of Engineering Education*, Vol. 40, (2) (2015), pp. 145 – 166. ISSN 0304-3797 (Print), 1469-5898 (Online). [DOI:10.1080/03043797.2014.941337](https://doi.org/10.1080/03043797.2014.941337)

Hockicko, P., Kúdelčík, J.: Štúdium kmitavého pohybu. Zborník referátov z XVIII. medzinárodnej konferencie DIDFYZ 2012 Fyzikálne vzdelávanie v systéme reformovaného školstva, Vydala Univerzita Konštantína Filozofa a JSMF v Nitre 2013, 361 - 367, ISBN 978-80-558-0232-9.

Hockicko, P., Kúdelčík, J.: Videoanalýzy, modelovanie a simulácie reálnych dejov. Žilina: Žilinská univerzita, 2015, 198 s., ISBN 978-80-554-1020-3.

Hockicko, P., Kúdelčík, J., Jamnický, I.: Základy fyziky [elektronický zdroj] : elektronický materiál k videoanalýze dejov - 1. vyd. - Žilina : Žilinská univerzita, 2011. - 273 s., 1 elektronický optický disk (CD-ROM) : obr., tab. - ISBN 978-80-554-0431-8.

Hockicko, P., Ondruš, J.: Analysis of Vehicle Stopping Distances. Proceedings of the conference New trends in Physics NTF 2012, October 11 -12, 2012, Brno, Czech Republic, 214 – 217. ISBN 978-80-214-4594-9.

Hockicko, P., Pažická, K.: Video Analysis Based Tasks in Physics. Proceedings of the GIREP – MPLT 2014 International Conference held in Palermo, Italy 2014 – Teaching/Learning Physics: Integrating Research into Practice, Dipartimento di Fisica e Chimica, Università degli Studi di Palermo, Italy, pp. 453 – 460. ISBN 978-88-907460-7-9.

Hockicko, P., Rochovská, I.: Hľadanie, analýza a možnosti odstraňovania chybných predstáv vo fyzikálnom vzdelávaní na technických univerzitách. Zborník príspevkov z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky VI, Národný festival fyziky 2013, Vydala Slovenská fyzikálna spoločnosť, Bratislava, 2013, 126 - 132, ISBN 978-80-971450-0-2.

Hockicko, P., Tarjányiová, G.: Testing and analysis of students' conception from physics, *Journal of Technology and Information Education* 1/2014, Volume 6, Issue 1, 104 – 121, ISSN 1803-537X, 1803-6805 (on-line).

Hockicko, P., Tarjányiová, G., Pažická, K.: Early Identification of Problems in Physics Learning and Suggestion of Intervention Tools for the Freshman Students in STEM Education. Proceedings of the 43rd SEFI Annual Conference 2015 Diversity in engineering education: an opportunity to face the new trends of engineering, Co-organised by SEFI and Polytech Orléans, Brussels, Belgium, on USB key, ISBN 978-2-87352-012-0 (Book of abstract, p.103).

Hockicko, P., Tiili, J.: Comparison of the Entering Students' FCI Results – Tampere UAS and University of Žilina. Proceedings of the 43rd SEFI Annual Conference 2015 Diversity in engineering education: an opportunity to face the new trends of engineering, Co-organised by SEFI and Polytech Orléans, Brussels, Belgium, on USB key, ISBN 978-2-87352-012-0 (Book of abstract, p.101).

Hockicko, P., Trpišová, B.: Are Students' Conceptions about Automobile Braking Distances Correct? Conference Proceedings: Keynote Lectures and Abstracts, SEFI, Brussels, Belgium, p. 144 and Proceedings of the 41st SEFI Annual Conference 2013, Engineering Education Fast Forward 1973>2013>>, Co-organised by SEFI and the Faculty of Engineering Science of KU Leuven, 16-20 September 2013, Leuven, Belgium, SEFI, Brussels, Belgium, (in USB key).

Hockicko, P., Trpišová, B., Ondruš, J.: Correcting Students' Misconceptions about Automobile Braking Distances and Video Analysis Using Interactive Program Tracker. *Journal of Science Education and Technology*, December 2014, Volume 23, Issue 6, pp. 763-776, ISSN 1059-0145. [DOI:10.1007/s10956-014-9510-z](https://doi.org/10.1007/s10956-014-9510-z).

Hockicko, P. a kol.: Fyzika, matematika a technika nielen pre najmenších školákov, DVD, 2010, ISBN 978-80-554-0290-1

Hockicková, M., Filová, Z., Hockicko, P.: Rozvoj kľúčových kompetencií so zameraním na poznávanie prírody. Zborník príspevkov z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky IV Národný festival fyziky 2011, Kongresové centrum SAV Smolenice, 2011, vydala Slovenská fyzikálna spoločnosť, Bratislava 2011, 92-98, ISBN 978-80-970625-3-8.

Chovancová, M.: Research of Motivational Physics Lectures. *European International Journal of Science and Technology*, Vol. 3, No. 7, 2014, pp. 211 – 215. ISSN: 2304-9693.

Ješková, Z., Featonby, D., Timková, V.: Balloons revisited, *Physics Education*, vol. 47, no. 4, 2012, pp. 392-398. ISSN 0031-9120.

Kireš, M.: Vytekание kvapaliny otvormi v stene nádoby : Mnohokrát opakovaná lož sa stáva pravdou? *OBZORY matematiky fyziky a informatiky*, č. 45, 1996, s. 36-40.

Kireš, M.: Mariotte bottle with side openings, *The Physics Teachers* vol. 44, iss. 6, 2006, 388-389.

Kireš, M., Ješková, Z.: Analysis of the Young Physicists Tournament problems supported by multimedial tools. Proceedings of 12<sup>th</sup> International Conference on Multimedia in Physics Teaching and Learning, 13-15 September 2007, Wroclaw, Poland

Kireš, M., Ješková, Z.: Conceptual understanding of the Maxwell wheel motion. *Proceedings GIREP Conference 2006*, Amsterdam, pp. 649-653. ISBN 9789057761775.

Kireš, M.: Archimedes' principle in action, *Physics Education*. vol. 42, iss. 5, 2007, 484-487. ISSN 8020-8090.

Kireš, M.: Astrobaster - a fascinating game of multi-ball collisions. *Physics Education*, vol. 44, iss. 2, 2009, 159-164. ISSN 0031-9120.

Krišťák, Ľ., Gajtanska, M.: Interaktívne metódy vo fyzikálnom vzdelávaní. (Vedecká monografia), Data Service Zvolen 2013, 179 s. ISBN 978-80-970603-8-1.

Krišťák, Ľ., Němec, M.: Inovácia fyzikálneho vzdelávania na technickej univerzite vo Zvolene. (Vedecká monografia), 2011, Vydavateľstvo Technickej univerzity vo Zvolene, 160 s., ISBN 978-80-228-2218-3.

Kúdelčík, J., Hockicko, P.: Complex Approach for Laboratory Practices. Proceedings of 17th Conference of Czech and Slovak Physicists, Slovak Physical Society, Equilibria Košice 2012, 111 – 112, ISBN 978-80-970625-4-5.

Kúdelčík, J., Hockicko, P.: Základy fyziky. - 1. vyd. - Žilina : Žilinská univerzita, 2011. - 272 s., [AH 17,50; VH 18,34] : obr., tab. - ISBN 978-80-554-0341-0.

Ondruš, J., Hockicko, P.: Braking Deceleration Measurement Using the Video Analysis of Motions by Sw Tracker. *Transport and Telecommunication* 16 (2) (2015) 127-137, ISSN: 1407-6160.

Ondruš, J., Hockicko, P.: Possibilities of Braking Deceleration Measurement. Transcom Proceedings 2015, 11-th European Conference of Young Reseachers and Scientists, Section 1, Transport and Communications Technology, Žilina June 22 - 24, 2015, pp. 119 – 124.

Pudiš, D., Martinček, I., Hockicko, P., Kúdelčík, J., Vajda, D.: Vybrané kapitoly z fyziky. Žilinská univerzita v Žiline, 2007, 143 s. ISBN 978-80-8070-653-1.

Rievaj, V., Vrábek, J., Hudák, A.: Tire Inflation Pressure Influence on a Vehicle Stopping Distances, *International Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2013, 2(2), pp. 9 – 13, ISSN 2325-0062, DOI: 10.5923/j.ijtte.20130202.01



Rochovská, I.: Natural science education of preschool and primary school teachers in V4 countries. Szent István University Faculty of Applied Arts and Education, Vydavateľstvo M. Vaška Prešov, 2014. ISBN 978-963-269-419-1.

Rochovská, I., Krupová, D.: Development the science education of children at a preschool age within the context of cultural literacy. The state School of Higher Education in Chelm, Pocztowa 54, 22 – 100 Chelm, Poland. ISBN 978-83-61149-38-5.

Vančo, L., Hockicko, P.: Videonávody z fyzikálnych praktík [elektronický zdroj] : Fyzikálne kyvadlo. Stojaté vlnenie. Modul pružnosti. Tepelná kapacita. Skupenské teplo. Dynamická viskozita - Žilina : Žilinská univerzita, Elektrotechnická fakulta, 2013. - DVD-ROM, [51 súborov, 2,23 GB]. ISBN 978-80-554-0729-6.

<http://sourceforge.net/projects/audacity/>

<http://college.cengage.com/mathematics/larson/elementary-linear/5e/students/ch08-10/chap-10-4.pdf>

<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker>

[www.physics.sk/papers/pdf/2\\_A\\_klivanek\\_odstrediva\\_sila.pdf](http://www.physics.sk/papers/pdf/2_A_klivanek_odstrediva_sila.pdf)

<http://www.osel.cz/4795-pravda-o-odstredivej-sile.html>

[http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/information/tacoma\\_eng.html](http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/information/tacoma_eng.html)



## Register

---

### A

*ampér* ..... 179  
*Archimedov zákon* ..... 111

---

### B

*bel, decibel* ..... 159  
*Bernoulliho rovnica* ..... 118

---

### Č

*časticový model analytický* ..... 171  
*časticový model dynamický* ..... 171

---

### D

*deformácia krútením* ..... 165  
*deformácia normálovým napätím* ..... 168  
*deformácia ohybom* ..... 165  
*deformácia pružná (elastická)* ..... 165  
*deformácia šmykom* ..... 165, 169  
*deformácia šmykovým napätím* ..... 168  
*deformácia ťahom* ..... 165  
*deformácia tlakom* ..... 165  
*deformácia tvárna (plastická)* ..... 165  
*deformácia všestranným tlakom* ..... 165  
*derivácia* ..... 185  
*dopružovanie* ..... 166  
*dráha pohybu* ..... 14  
*dráhový rozdiel* ..... 153  
*dynamická (kinetická) šmyková trecia sila*  
 ..... 70

---

### E

*energia* ..... 50

---

### F

*farba zvuku* ..... 159  
*fáza kmitu* ..... 125  
*fáza vlnenia* ..... 152  
*fázová konštanta* ..... 125

*fázová rýchlosť vlnenia* ..... 151  
*fázový rozdiel* ..... 152  
*frekvencia* ..... 36, 123

---

### G

*gravitácia* ..... 85  
*gravitačný potenciál* ..... 86

---

### H

*harmonické frekvencie* ..... 157  
*harmonický oscilátor* ..... 123  
*hladina akustického tlaku* ..... 159  
*hladina intenzity zvuku* ..... 159  
*hluk* ..... 158  
*hmotnosť* ..... 46  
*hmotný bod* ..... 13  
*Hookov zákon* ..... 166  
*Hookov zákon pre šmyk* ..... 169  
*hybnosť* ..... 47  
*hydrodynamický paradox* ..... 110  
*hydrostatický tlak* ..... 109

---

### C

*chvenie* ..... 157

---

### I

*I Newtonov pohybový zákon* ..... 46  
*II Newtonov pohybový zákon* ..... 46  
*III Newtonov pohybový zákon* ..... 48  
*impulz sily* ..... 47  
*inerciálna vzťažná sústava* ..... 45  
*infrazvuk* ..... 157  
*integrál* ..... 185  
*intenzita gravitačného poľa* ..... 85  
*intenzita zvuku* ..... 159  
*interferencia vlnenia* ..... 152  
*invariantné veličiny* ..... 45  
*izolované teleso* ..... 45  
*izolovaný hmotný bod* ..... 45  
*izotropné prostredie* ..... 151

**K**

<i>kandela</i> .....	179
<i>kapilarita</i> .....	115
<i>kapilárna depresia</i> .....	115
<i>kapilárna elevácia</i> .....	115
<i>kapilárny tlak</i> .....	114
<i>kelvin</i> .....	179
<i>kilogram</i> .....	179
<i>kinematika</i> .....	13
<i>kinetická energia</i> .....	51
<i>kmit</i> .....	123
<i>kmitňa stojatého vlnenia</i> .....	155
<i>koeficient dynamického šmykového trenia</i> .....	71
<i>koeficient statického šmykového trenia</i>	70
<i>koeficient útlmu</i> .....	136
<i>koherentné vlnenia</i> .....	153
<i>krivka deformácie</i> .....	166
<i>kyv</i> .....	123

**L**

<i>lineárny harmonický oscilátor</i> .....	125
<i>Lissajousove krivky</i> .....	146
<i>logaritmický dekrement útlmu</i> .....	137
<i>lúč</i> .....	151

**M**

<i>medza klzu (medza prietlačnosti)</i> .....	167
<i>medza pevnosti</i> .....	167
<i>medza pružnosti</i> .....	166
<i>medza úmernosti</i> .....	166
<i>mechanické vlnenie</i> .....	151
<i>meter</i> .....	179
<i>modul pružnosti v šmyku</i> .....	169
<i>mól</i> .....	179
<i>moment hybnosti</i> .....	97
<i>moment sily</i> .....	97

**N**

<i>neinerciálna vzťažná sústava</i> .....	45
<i>newton</i> .....	46
<i>Newtonov gravitačný zákon</i> .....	85
<i>normálne tiažové zrýchlenie</i> .....	86
<i>normálové napätie</i> .....	166
<i>normálové zrýchlenie</i> .....	37

**O**

<i>objemový prietok</i> .....	116
<i>odraz vlnenia</i> .....	154
<i>okamžitá rýchlosť</i> .....	17
<i>okamžitá výchylka</i> .....	125
<i>okamžité zrýchlenie</i> .....	20
<i>oscilogram</i> .....	162
<i>otáčavý pohyb</i> .....	29

**P**

<i>Pascalov zákon</i> .....	109
<i>perióda</i> .....	36, 123
<i>Poissonova konštanta</i> .....	167
<i>Poissonovo číslo</i> .....	167
<i>polohový vektor</i> .....	14
<i>pomerné (relatívne) predĺženie</i> .....	166
<i>pomerné posunutie</i> .....	169
<i>pomerné priečne skrátenie</i> .....	167
<i>postupné pozdĺžne vlnenie</i> .....	151
<i>postupné priečne vlnenie</i> .....	151
<i>posuvný pohyb</i> .....	30
<i>potenciálna energia telesa</i> .....	52
<i>povrchová energia</i> .....	112
<i>povrchová sila</i> .....	112
<i>povrchová vrstva kvapaliny</i> .....	112
<i>povrchové napätie</i> .....	112
<i>prah bolesti</i> .....	159
<i>prah počuteľnosti</i> .....	159
<i>predĺženie</i> .....	166
<i>priame vlnenie</i> .....	155
<i>priemerná rýchlosť</i> .....	17
<i>princíp invariantnosti</i> .....	45
<i>program Tracker</i> .....	5
<i>pružinový oscilátor</i> .....	123

**R**

<i>rázy</i> .....	144
<i>referenčný tón</i> .....	159
<i>rezonancia</i> .....	141
<i>rovnica spojitosti (kontinuity)</i> .....	116
<i>rovnovážna poloha</i> .....	123

**S**

<i>sekunda</i> .....	179
<i>sila</i> .....	45

<i>skalárny súčin</i> .....	182
<i>skosenie</i> .....	169
<i>sonogram</i> .....	162
<i>spektrogram</i> .....	162
<i>statická šmyková trecia sila</i> .....	70
<i>stojaté vlnenie</i> .....	155
<i>Stokesov vzťah</i> .....	120

---

**Š**

<i>šikmý vrh</i> .....	88
<i>šmykové napätie</i> .....	169

---

**T**

<i>tangenciálne zrýchlenie</i> .....	37
<i>ťažisko telesa</i> .....	97
<i>tečenie materiálu</i> .....	167
<i>tiaž telesa</i> .....	86
<i>tiažová sila</i> .....	86
<i>tlmené kmitanie</i> .....	135
<i>tóny, hudobné zvuky</i> .....	157
<i>Torricelliho vzťah</i> .....	118
<i>trajektória</i> .....	14
<i>tuhé teleso</i> .....	97
<i>tuhosť pružiny</i> .....	124

---

**U**

<i>uhlová frekvencia</i> .....	126
<i>uhlová rýchlosť</i> .....	30
<i>uhlové zrýchlenie</i> .....	31

<i>ultrazvuk</i> .....	157
<i>útlm</i> .....	137
<i>uzol stojatého vlnenia</i> .....	156

---

**V**

<i>vektor jednotkový</i> .....	182
<i>vektorový súčin</i> .....	182
<i>vektory</i> .....	182
<i>veľkosť rýchlosti</i> .....	27
<i>veľkosť vektora</i> .....	182
<i>vlnenie</i> .....	151
<i>vlnoplocha</i> .....	151
<i>vlnová dĺžka</i> .....	151
<i>vodorovný vrh</i> .....	93
<i>voľný pád</i> .....	91
<i>výkon</i> .....	49
<i>výška tónu (absolútna)</i> .....	159
<i>výška tónu (relatívna)</i> .....	159
<i>výška zvuku</i> .....	159

---

**Z**

<i>základný tón</i> .....	159
<i>zákon akcie-reakcie</i> .....	48
<i>zákon sily</i> .....	46
<i>zákon zotrvačnosti</i> .....	46
<i>zložený tón</i> .....	159
<i>zotrvačnosť</i> .....	45, 46
<i>zvislý vrh nadol</i> .....	91
<i>zvislý vrh nahor</i> .....	90
<i>zvuk</i> .....	157

doc. PaedDr. Peter Hockicko, PhD.

Fyzikálna videoanalýza reálnych dejov

Vydala Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina  
v edičnom rade Vysokoškolské učebnice

Vedecký redaktor prof. Ing. Pavol Rafajdus, PhD.

Zodp. red. PhDr. Katarína Šimánková  
Tech. red. Mgr. Jana Pauríková

Vytlačilo EDIS-vydavateľské centrum ŽU, Univerzitná HB, 010 26 Žilina v roku 2015 ako  
svoju 4041. publikáciu  
175 strán, 147 obrázkov, AH 18,96 VH 19,47  
1. vydanie, náklad 100 výtlačkov  
ISBN 978-80-554-1128-6  
[www.edis.uniza.sk](http://www.edis.uniza.sk)



Peter HOCKICKO sa narodil v roku 1973 v Levoči. V roku 1996 získal akademickú hodnosť magister (Mgr.) v odbore učiteľstvo matematika-fyzika na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. V roku 1998 získal akademickú hodnosť PaedDr. v odbore učiteľstvo – fyzika na Univerzite Komenského v Bratislave. V roku 2008 obhájil PhD. prácu z fyziky kondenzovaných látok a akustiky na Katedre fyziky Elektrotechnickej fakulte Žilinskej univerzity v Žiline (KF EF UNIZA). V roku 2012 sa habilitoval (doc.) v odbore elektrotechnológie a materiály na KF EF UNIZA. V súčasnosti pracuje na KF EF UNIZA, kde vyučuje predmet Fyzika a pôsobí vo funkcii prodekana pre vzdelávanie na EF UNIZA. V oblasti vedeckého výskumu sa venuje akustickej spektroskopii a štúdiu relaxačných a transportných mechanizmov v iónovo vodivých sklách. V pedagogickej oblasti sa zaoberá tvorbou videopríkladov pre videoanalýzy reálnych dejov a ich vplyvu na zvyšovanie vedomostnej úrovne, názorností a odstraňovaní chybných predstáv – miskonceptíí. Jeho príspevok "Attractiveness of Learning Physics by Means of Video Analysis and Modeling Tools" bol na 40th SEFI Annual Conference Engineering Education 2020: Meet the Future, konanej v roku 2012 v meste Thessaloniki (Grécko) ocenený cenou: Best paper award: First place. Momentálne je zodpovedným riešiteľom za UNIZA medzinárodného projektu Easmus+: Strategic Partnership: Early identification of STEM readiness and targeted academic interventions (readtSTEMgo): grant Decision number: 2014-BE02-KA200-000462, na ktorom spolupracuje 6 spolu zahraničných univerzít.



Vydanie a tlač tejto publikácie bolo finančne podporené Nadáciou Tatrabanky (Zmluva č. 2014vs021). Obsahová stránka učebnice vznikla v rámci riešenia projektu KEGA č. 003TU Z-4/2015: Rozvoj konceptuálneho myslenia na technických univerzitách.

