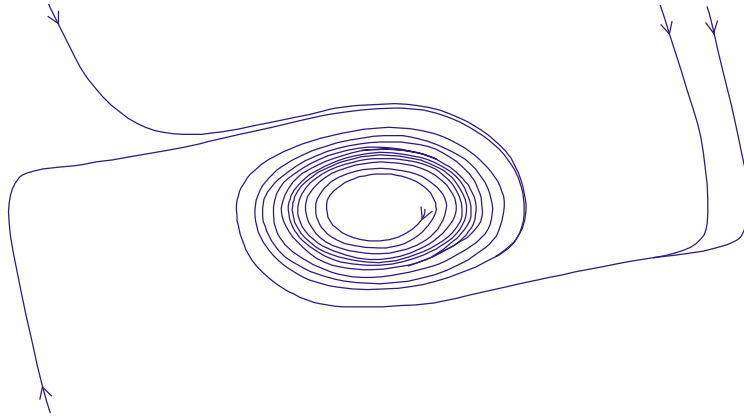


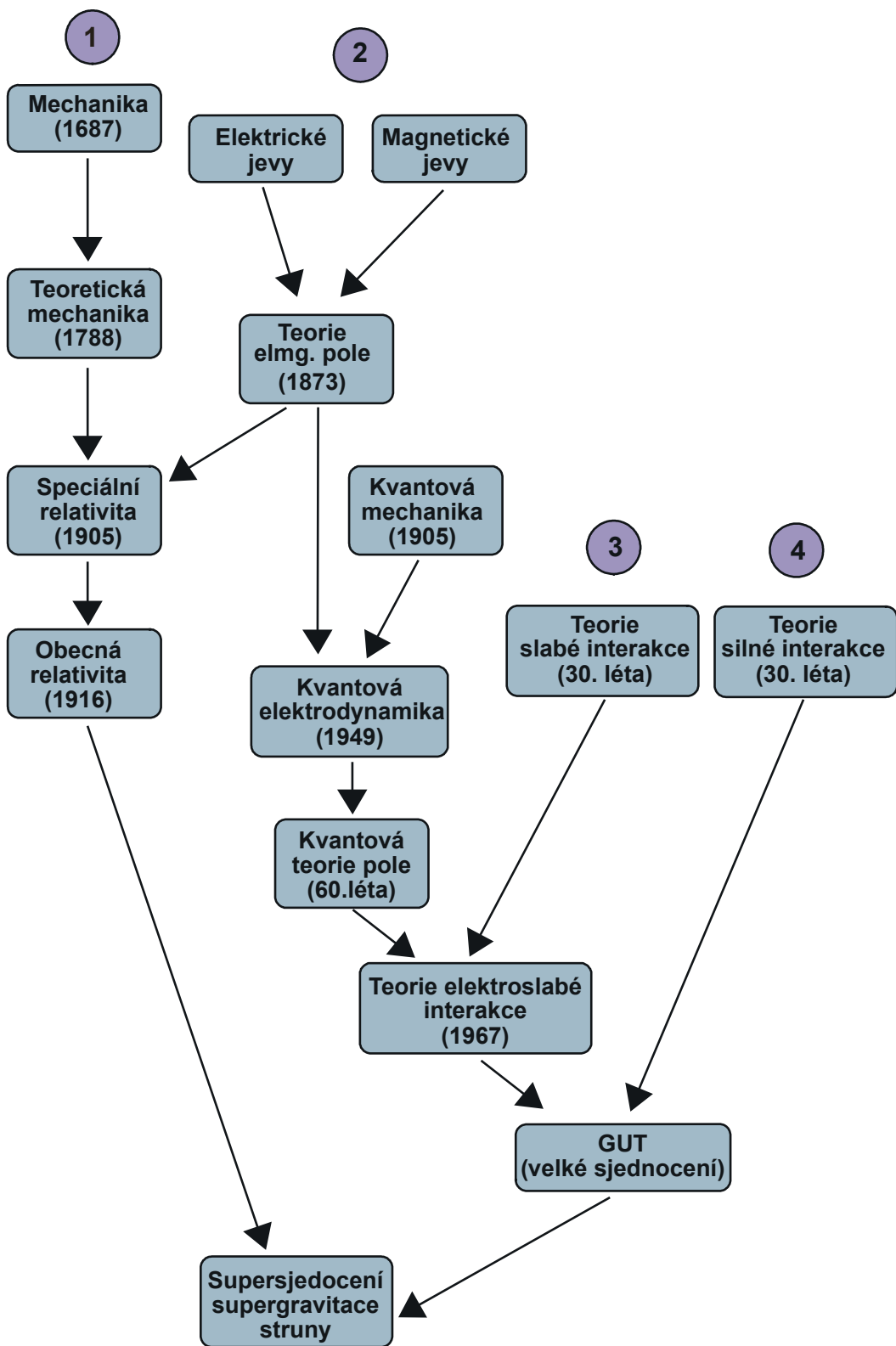
TF1: TEORETICKÁ MECHANIKA



STUDIJNÍ TEXT PRO DOKTORSKÉ STUDIUM

PETR KULHÁNEK

INTEGRAČNÍ TENDENCE VE FYZICE



OBSAH

PŘEDMLUVA	2
1. TEORETICKÁ MECHANIKA	4
1. 1. ZÁKLADNÍ POJMY	4
1. 1. 1. ZÁKLADNÍ POJMY Z MECHANIKY	4
1. 1. 2. (M) EINSTEINOVA SUMAČNÍ KONVENCE	5
1. 1. 3. (M) DÉLKOVÝ ELEMENT	7
1. 2. INTEGRÁLNÍ PRINCIPY MECHANIKY	9
1. 2. 1. HAMILTONŮV PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE	9
1. 2. 2. LAGRANGEOVY ROVNICE	10
1. 2. 3. JEDNODUCHÉ PŘÍKLADY	12
1. 2. 4. DALŠÍ PŘÍKLADY	13
1. 3. ZÁKONY ZACHOVÁNÍ V PŘÍRODĚ	15
1. 3. 1. TEORÉM NOETHEROVÉ	15
1. 3. 2. ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI	15
1. 3. 3. ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE	17
1. 4. HAMILTONOVY KANONICKÉ ROVNICE	19
1. 4. 1. (M) LIEOVA ALGEBRA	19
1. 4. 2. HAMILTONOVY ROVNICE	22
1. 4. 3. HARMONICKÝ OSCILÁTOR	24
1. 4. 4. POISSONOVA FORMULACE HAMILTONOVÝCH ROVNIC	26
1. 4. 5. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ HAMILTONOVÝCH ROVNIC	28
1. 5. VLASTNOSTI DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC	29
1. 5. 1. MATICE STABILITY A FÁZOVÝ PORTRÉT SYSTÉMU	30
1. 5. 2. METODA POTENCIÁLU	34
1. 5. 3. BIFURKACE	36
1. 5. 4. LJAPUNOVSKÁ STABILITA, LIMITNÍ CYKLUS, ATRAKTOR	38
1. 5. 5. EVOLUČNÍ ROVNICE	45
1. 6. POHYBY NABITÝCH ČÁSTIC V ELEKTROMAGNETICKÝCH POLÍCH	48
1. 6. 1. KONSTANTNÍ HOMOGENNÍ ELEKTRICKÉ POLE (RELATIVISTICKY)	49
1. 6. 2. KONSTANTNÍ HOMOGENNÍ MAGNETICKÉ POLE (NERELATIVISTICKY)	50
1. 6. 3. ZKŘÍŽENÁ POLE (NERELATIVISTICKY)	52
1. 6. 4. DRIFTY	54
1. 6. 5. NĚKTERÉ SPECIÁLNÍ KONFIGURACE POLÍ	56

PŘEDMLUVA

Tento text představuje sylabus přednášky „Teoretická fyzika 1“. Důraz je kladen zejména na pochopení fyzikálních zákonitostí a jejich matematického popisu. Potřebná matematika je probírána v samostatných kapitolách označovaných písmenem (M). Tyto kapitoly je třeba chápat jen jako nutný přehled, který si neklade nároky na matematickou přesnost ani úplnost. Text je první částí čtyřdílného sylabu: 1. teoretická mechanika, 2. kvantová teorie, 3. statistická fyzika, 4. vlny a nestability v plazmatu.

Fyzika 20. století je poznamenána vznikem dvou oddělených fyzikálních směrů - *obecné teorie relativity* a *kvantové teorie*. Každý z těchto směrů popisuje svým způsobem pojem síly ve fyzice. V současné době známe čtyři silové interakce - gravitační, elektromagnetickou, silnou a slabou.

Obecná teorie relativity (geometrická teorie gravitace) popisuje gravitační interakci za pomoci zakřivené geometrie prostoru a času:

- *každé těleso svou přítomností zakřivuje prostoročas kolem sebe;*
- *každé těleso se v tomto zakřiveném prostoročase pohybuje po nejrovnějších možných drahách - tzv. geodetikách* (reprezentují skutečné trajektorie gravitačně ovládaných těles).

Kvantová teorie pole s úspěchem popisuje interakci elektromagnetickou, silnou a slabou za pomoci intermediálních (výměnných) částic:

- *Každá částice kolem sebe vysílá oblak intermediálních částic, které si může vyměňovat s ostatními částicemi a tím mezi nimi dochází k vzájemnému silovému působení.*

Tato výměna nesplňuje Heisenbergovy relace neurčitosti, proto je nepozorovatelná a příslušné výměnné částice nazýváme při procesu interakce virtuální. Intermediální částice jsou :

elektromagnetická interakce	foton
silná interakce	gluony (8 druhů)
slabá interakce	W^+ , W^- , Z^0 .

Pro gravitační interakci předpokládá kvantová teorie existenci zatím hypotetických intermediálních částic : gravitonů.

Elektromagnetická interakce působí jen na částice s elektrickým nábojem, silná interakce působí na hadrony (*hadros* = silný) - hadrony dělíme na mezony složené z kvarku a antikvarku a baryony složené ze tří kvarků. Slabá interakce působí na leptony a hadrony. Gravitační interakce působí na všechny částice bez výjimky.

V průběhu let dochází ve fyzice ke vzniku mnoha nových odvětví, fyzika se diferencuje. Současně však probíhá integrační proces - snaha o jednotný popis fyzikálních jevů. Tak byla v minulém století pochopena společná podstata jevů elektrických a magnetických (Öersted, Faraday, Maxwell) a vnikla teorie elektromagnetického pole. Po vzniku kvantové teorie se objevila příslušná kvantová analogie - kvantová elektrodynamika a kvantová teorie elektromagnetického pole. V době relativně nedávné se podařilo „spojit“ elektromagnetickou a slabou interakci v teorii elektroslabé interakce (Weinberg, Salam). Nyní probíhají intenzivní pokusy připojit k teorii elektroslabé interakce ještě interakci silnou (tzv. velké sjednocení) a gravitační (supersjednocení, supergravitace). Následuje přehled významných objevů a událostí ve fyzice, které přispěly k tomuto integračnímu procesu.

INTEGRAČNÍ TENDENCE VE FYZICE

Isaak Newton	(1643-1727)	základní zákony optiky a mechaniky (1676)
Joseph Louis Lagrange	(1736-1813)	analytická mechanika (1788)
Hans Christian Öersted	(1777-1851)	elektrický proud má magnetické účinky (1820)
Michael Faraday	(1791-1867)	jev elektromagnetické indukce (1831)
James Clerk Maxwell	(1831-1879)	teorie elektromagnetického pole (1873)
Max Planck	(1858-1947)	záření absolutně černého tělesa (1901)
Albert Einstein	(1879-1955)	fotoelektrický jev (1905) speciální teorie relativity (1905) obecná teorie relativity (1916)
Niels Bohr	(1885-1962)	planetární model atomu (1913)
Louis de Broglie	(1892-1987)	dualismus vln a částic
Erwin Schrödinger	(1887-1961)	vlnová kvantová mechanika (1926)
Wolfgang Pauli	(1900-1958)	teorie spinu - Pauliho rovnice 1. teorie slabé interakce (30. léta)
Paul Adrien M. Dirac	(1900-1984)	Diracova rovnice, předpověď pozitronu (1928) kvantová elektrodynamika (1949) spoluautor kvantové teorie pole
Werner Heisenberg	(1901-1976)	maticová kvantová mechanika (1925) relace neurčitosti
Hideki Yukawa	(1907-1981)	1. teorie silné interakce (30. léta)
Richard Philips Feynman	(1918-1988)	spoluautor kvantové teorie pole Feynmanovy diagramy dráhový integrál v kvantové mechanice
Steven Weinberg	(1933)	teorie elektroslabé interakce (1967)
Abdul Salam	(1926)	teorie elektroslabé interakce
Rubbia, Wheeler, Hawking, Thorne, Misner, ...		

Sylabus, který se právě chystáte číst je třetím vydáním. Text doznal minimálních změn. Budu vděčný za všechny připomínky a objevené chyby a nedostatky. Objevíte-li cokoli, co Vám vhání adrenalin do žil, napište mi na adresu: kulhanek@fel.cvut.cz. Na tuto adresu směřujte i Vaše dotazy a ostatní připomínky. Některé zajímavé informace naleznete na adrese <http://www.aldebaran.cz>. Zde je také možné stáhnout poslední aktuální verzi tohoto sylabu.

Přeji hodně radosti z objevených zákonitostí přírody, pocitu moci, pochopíte-li hloubku úvah Vašich předchůdců a pocitu bezmoci, který Vás bude pohánět kupředu v okamžicích váhání. Těm studentům a pedagogům, kteří zjistí, že na této škole nemají co dělat, blahopřeji k bystrému úsudku a přeji důstojný odchod.

Petr Kulháněk, v Praze 15.2.2001

1. TEORETICKÁ MECHANIKA

1. 1. ZÁKLADNÍ POJMY

1. 1. 1. Základní pojmy z mechaniky

Mechanický systém: jakákoli soustava částic nebo těles, které se rozhodneme popisovat (elektron, atom, Zeměkoule, planetární systém, ...).

Kartézské souřadnice: pro souřadnice a síly používáme označení:

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z), \text{ resp. } \mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3) \equiv (F_x, F_y, F_z).$$

Pohybová rovnice hmotného bodu má tvar $m d^2\mathbf{x}/dt^2 = \mathbf{F}$.

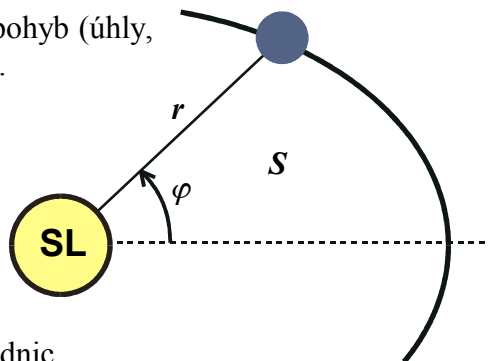
Zobecněné souřadnice: jakékoli parametry popisující pohyb (úhly, vzdálenosti, plochy). Označujeme je $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots)$.

Příklad: Pohyb planety kolem Slunce

$q_1 = r(t)$ - vzdálenost od Slunce;

$q_2 = \varphi(t)$ - úhel průvodiče a zadané polopřímky;

$q_3 = S(t)$ - plocha ospaná průvodičem.



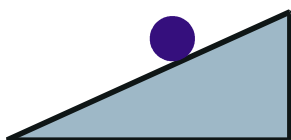
Zobecněné rychlosti: časové změny zobecněných souřadnic

Příklad:

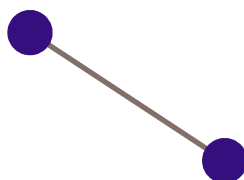
$v_r = dr/dt$	radiální rychlost,
$v_\varphi = d\varphi/dt$	úhlová rychlost,
$v_S = dS/dt$	plošná rychlost,
$v_x = dx/dt$	x-ová složka rychlosti.

Vazby: těleso nebo některé jeho části se nemusí pohybovat zcela libovolně. Pak říkáme, že v systému jsou vazby. Příklad vazeb je na následujícím obrázku:

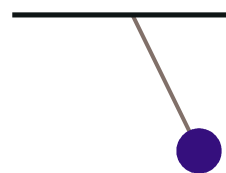
Těleso na nakloněné rovině



Dvě tělesa spojená tyčí



Kyvadlo



Stupeň volnosti: počet nezávislých údajů (parametrů), kterými lze zcela popsat pohyb systému (značíme f).

Příklad:

volný hmotný bod	$f = 3$
N volných hmotných bodů	$f = 3N$
hmotný bod na nakloněné rovině	$f = 2$
2 hmotné body spojené tyčí	$f = 5$
prostorové kyvadlo	$f = 2$
rovinné kyvadlo	$f = 1$.

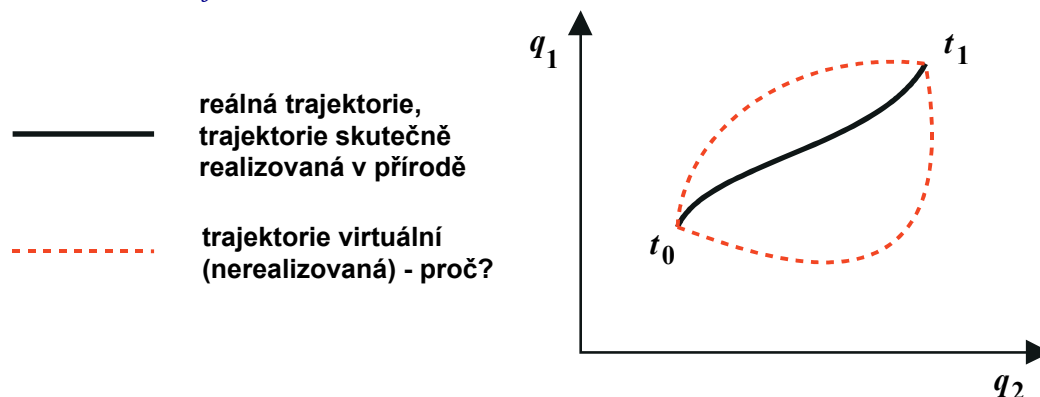
Pro systém N hmotných bodů s R vazbami platí $f = 3N - R$. Zobecněné souřadnice volíme vždy jako množinu nezávislých parametrů, které zcela popisují systém, tj. je jich právě f :

$$\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \dots, q_f).$$

Konfigurační prostor: f - rozměrný prostor, do kterého zobrazujeme hodnoty zobecněných souřadnic. Bod konfiguračního prostoru nazýváme *konfigurací*. Časový vývoj konfigurace systému $\mathbf{q}(t)$ nazýváme *trajektorie*.

Stav systému: v klasické mechanice je v daném čase t_0 stav systému zcela určen konfigurací $\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \dots, q_f)$ a tendencí (zobec. rychlostmi) $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, \dots, v_f)$.

Reálná a virtuální trajektorie:



1. 1. 2. (M) Einsteinova sumační konvence

Vyskytnou-li se ve výrazu dva stejné indexy, potom přes ně automaticky sčítáme. Sčítací indexy budeme označovat malými písmeny abecedy ($i, j, k \dots$):

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N = \sum_{j=1}^N a_j b_j = a_j b_j \quad . \quad (1.1)$$

Poznámka: Na označení sčítacího indexu nezáleží : $a_i b_i = a_j b_j = a_k b_k = a_1 b_1 + \dots + a_N b_N$.

Příklady:

Skalární součin dvou vektorů:

$$\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, \dots, a_N) \quad ; \quad \mathbf{b} \equiv (b_1, b_2, \dots, b_N) \quad ;$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N = a_j b_j \quad .$$

Divergence:

$$\mathbf{T} \equiv (T_1, T_2, T_3) \quad ;$$

$$\text{div } T = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} = \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$$

Maticové násobení:

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \quad ; \quad \mathbf{B} = \{b_{ij}\} \quad ;$$

$$\{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\}_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj} .$$

Volné indexy jsou na obou stranách rovnosti (zde i, j). Přes volný index se nesčítá. Němý (vázaný, sčítací) index je dvojice stejných indexů v jednom matematickém členu, přes který se sčítá (zde k).

Malý přírůstek funkce jedné proměnné:

Mějme funkci jedné reálné proměnné $f(q)$, která hodnotě q přiřadí hodnotu f :

$$f(q): q \rightarrow f; \quad \text{potom} \quad \Delta f \cong \frac{df}{dq} \Delta q .$$

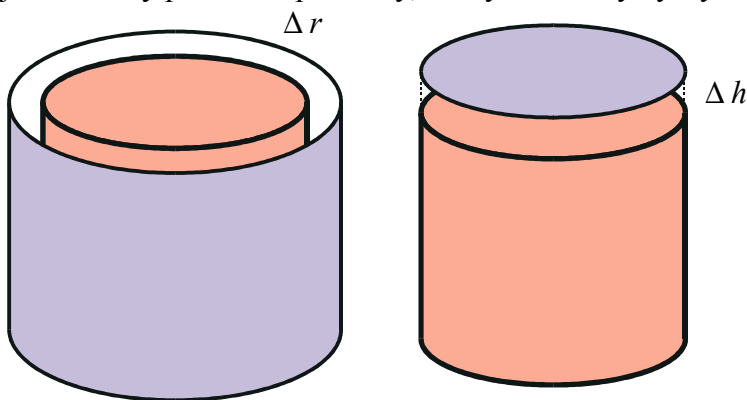
Příklad: Představme si kouli o poloměru r , jejíž objem je $V(r) = 4/3 \pi r^3$. Poloměr koule změníme o Δr . Její objem se pro malá Δr přibližně změní o $\Delta V \cong dV/dr \cdot \Delta r = 4\pi r^2 \cdot \Delta r$. Interpretace je zřejmá: $4\pi r^2$ je plocha koule o poloměru r a Δr je tloušťka této plochy. Součin představuje změnu objemu koule.

Malý přírůstek funkce více proměnných:

Mějme funkci více reálných proměnných $f(q_1, q_2, \dots, q_N)$, která hodnotám \mathbf{q} přiřadí hodnotu f :

$$f(q): (q_1, \dots, q_N) \rightarrow f, \quad \text{potom} \quad \Delta f \cong \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \Delta q_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \cdot \Delta q_N = \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \Delta q_j .$$

Příklad: Určeme přírůstek objemu válce, zvětšíme-li poloměr podstavy o Δr a výšku o Δh . Protože $V(r, h) = \pi r^2 h$, dostaneme $\Delta V \cong \partial V/\partial r \cdot \Delta r + \partial V/\partial h \cdot \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$. První příspěvek je od změny poloměru podstavy, druhý od změny výšky válce:



Infinitezimální (nekonečně malý) přírůstek funkce více proměnných:

Zavedeme-li infinitezimální změny namísto malých přírůstků dostaneme vztah

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \cdot dq_N = \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot dq_j .$$

Poznámka: Předchozí vztahy lze precizněji formulovat pomocí Lagrangeovy věty o přírůstku a věty o prvním diferenciálu. Pro naše účely však postačí jednoduché vztahy uvedené výše.

Derivace složené funkce:

Jestliže vnitřní proměnné q_i závisí na čase, potom má úplná časová derivace tvar:

$$f = f(q_1, q_2, \dots, q_N) ;$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \cdot \frac{dq_N}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j .$$

Příklad: Určete první diferenciál a první časovou derivaci v polárních souřadnicích:

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t) ,$$

$$y(t) = r(t) \sin \varphi(t) ;$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi;$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi.\end{aligned}$$

K symbolice v kartézských souřadnicích:

$$\mathbf{x} \equiv \vec{x} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Pro $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ zapisujeme gradienty takto:

$$\vec{\nabla} f \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right); \quad \vec{\nabla}_{\mathbf{v}} f \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}, \frac{\partial f}{\partial v_y}, \frac{\partial f}{\partial v_z} \right),$$

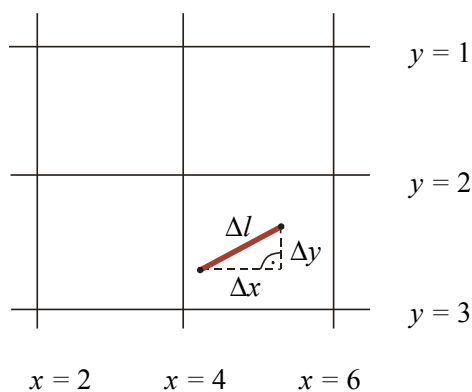
nebo v komponentách:
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \partial_i f \equiv f_{,i}.$$

Příklad:

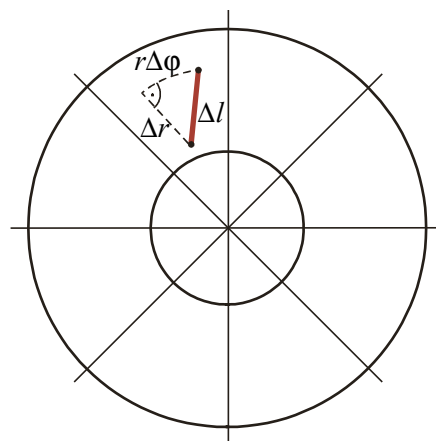
$$f(\mathbf{v}) = v^2 = \mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_j v_j = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v^2; \quad ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} v_j v_j = \delta_{ji} v_j + v_j \delta_{ji} = v_i + v_i = 2v_i, \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial v^2}{\partial \mathbf{v}} = 2\mathbf{v}.$$

1. 1. 3. (M) Délkový element



$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$



$$\Delta l^2 \cong \Delta r^2 + r^2 \Delta \varphi^2$$

Pro infinitezimálně malé vzdálenosti přejdou přibližné rovnosti v přesné rovnosti. V ortogonálních systémech (souřadnicové sítě jsou vzájemně kolmé) lze délkový element vyjádřit vztahem

$$dl^2 = g_{11} dq_1^2 + g_{22} dq_2^2 + g_{33} dq_3^2, \quad ;$$

v neortogonálních obecně platí, že délkový element je kvadratickou funkcí přírůstků:

$$dl^2 = g_{ij} dq_i dq_j \quad .$$

Poznamenejme, že platí sumační konvence. Koeficienty g_{ij} se nazývají *metrika* nebo *metrický tenzor*. Při jejich určování lze postupovat buď geometricky (viz horní obrázek) nebo z diferenciálů transformačních vztahů pro souřadnice (viz příklad pro polární souřadnice

z minulé kapitoly, kde byly vypočteny diferenciály dx , dy pro tyto souřadnice). Analogicky postupujeme i pro další souřadnicové systémy:

Polární souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} ; \quad dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad . \quad (1.2)$$

Sférické souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} ; \quad dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad . \quad (1.3)$$

Válcové souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} ; \quad dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad . \quad (1.4)$$

Kinetickou energii systému pak můžeme snadno v zobecněných souřadnicích určit za pomoci délkového elementu ze vztahu:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m \frac{dl^2}{dt^2} = \frac{1}{2} m g_{ij} \frac{dq_i dq_j}{dt^2} = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad . \quad (1.5)$$

Speciálně pro předchozí souřadnice tedy platí:

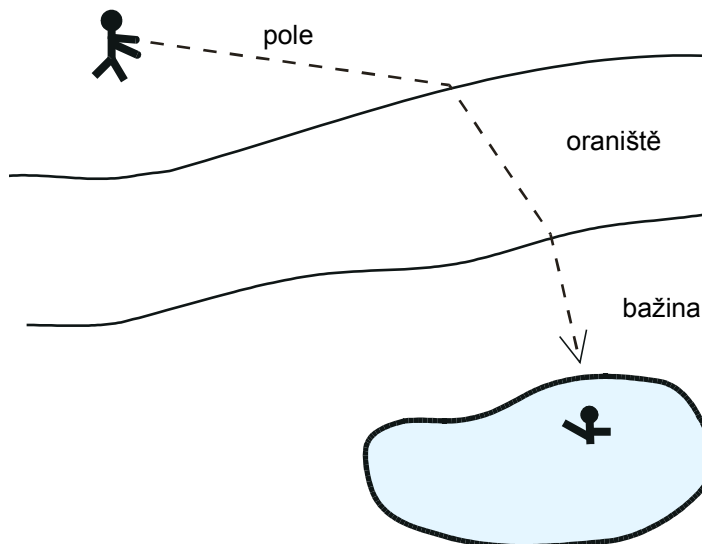
$$\begin{aligned} \text{Kartézské} \quad T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ \text{Polární} \quad T(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \\ \text{Sférické} \quad T(r, \theta, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \\ \text{Válcové} \quad T(r, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

V jednotlivých souřadnicích se kinetická energie rozpadá na součet členů odpovídajících jednotlivým stupňům volnosti. Například v polárních souřadnicích se kinetická energie skládá z radiální části T_r a rotační části T_φ .

Poznámka: velikost kinetické energie nemůže záviset na volbě souřadnicového systému, kinetická energie je skalární funkcí zobecněných souřadnic. Další skalární funkcí je například potenciální energie.

1. 2. INTEGRÁLNÍ PRINCIPY MECHANIKY

Příklad: Představme si, že v rybníku se topí člověk. Mezi zachráncem a rybníkem je bažinatý pás, ve kterém se velmi těžko pohybuje, pás oraniště a pole. Zachránce musí volit optimální cestu, aby se k tonoucímu dostal co nejrychleji (takovou cestou nemusí být nejkratší spojnice mezi tonoucím a zachráncem):



Celkový čas, po který se bude pohybovat zachránce určíme takto:

$$v = \frac{dl}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dl}{v} \Rightarrow$$

$$t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dl}{v} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v(x,y)} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)} dx .$$

Předpokládáme, že známe prostorovou závislost rychlosti $v(x, y)$. Ta je dána typem terénu (pole, oraniště, bažina). Nyní hledáme takovou křivku $y(x)$, aby předchozí integrál měl minimální hodnotu. Řešením úloh tohoto typu se zabývá variační počet. Variačně lze zformulovat i základní zákony mechaniky, teorie elektromagnetického pole i dalších fyzikálních disciplín. V této kapitole se budeme zabývat jedním z integrálních principů mechaniky - tzv. Hamiltonovým principem.

1. 2. 1. Hamiltonův princip nejmenší akce

V úvodním příkladu zachránce volil trajektorii tak, aby celkový čas byl nejkratší. Všechny ostatní trajektorie (tzv. virtuální - nerealizované) jsou sice v principu možné, ale zachránce se po nich bude pohybovat delší dobu.

Základní myšlenka integrálních principů mechaniky je velmi podobná. Ze všech možných trajektorií systému se realizovala jen ta, která je nějakým způsobem výhodnější než ostatní. Hledisko výhodnosti se uvažuje obdobné úvodnímu příkladu:

Hamiltonův princip:

existuje funkce zobecněných souřadnic a rychlostí (tj. stavu) a případně času

$$L(t, q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$$

taková, že ze všech možných závislostí $q_k(t) = f_k(t)$ se v přírodě realizuje ta, pro kterou má integrál

$$S(t_0, t_1) \equiv \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) dt \quad (1.7)$$

extrém (minimum).

Funkci $L(t, \mathbf{q}, d\mathbf{q}/dt)$ nazýváme *Lagrangeova funkce (lagranžian)* a integrál $S(t_0, t_1)$ *integrál akce*.

1. 2. 2. Lagrangeovy rovnice

Zavedme *virtuální posunutí*

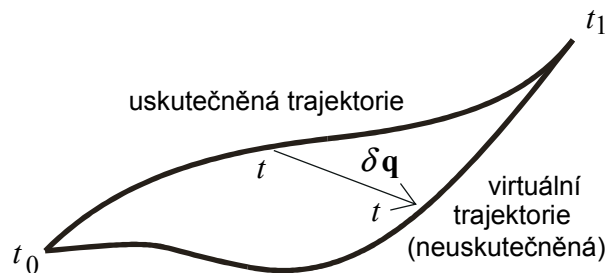
$$\begin{aligned} \delta q_k &= q_{k \text{ virt}}(t) - q_{k \text{ real}}(t) \quad , \text{ resp} \\ \delta \mathbf{q} &= \mathbf{q}_{\text{virt}}(t) - \mathbf{q}_{\text{real}}(t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

jako infinitezimální rozdíl virtuální (myšlené) trajektorie a reálné (uskutečněné) trajektorie. Body na obou trajektoriích si odpovídají ve stejném čase (tzv. isochronní variace). Uvedme základní vlastnosti virtuálních posunutí:

$$1) \quad \delta \mathbf{q}(t_0) = \delta \mathbf{q}(t_1) = 0 \quad ; \quad (1.9)$$

$$2) \quad \delta \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q} \quad . \quad (1.10)$$

První vlastnost vyjadřuje, že virtuální i reálné trajektorie začínají a končí ve stejném bodě konfiguračního prostoru. Druhá vlastnost vyjadřuje záměnnost operací derivace d/dt a variace δ .



Poznámka: Vazby jsou v daném systému zahrnuty volbou zobecněných souřadnic - jejich celkový počet je roven počtu stupňů volnosti. Virtuální posunutí jsou posunutí ve shodě s vazbami v daném čase.

Odvodme nyní nutné podmínky extrémnosti integrálu akce:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt &= 0 \quad \Rightarrow \\ \int_{t_0}^{t_1} \delta L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt &= 0 \quad \Rightarrow \\ \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt &= 0 \quad , \end{aligned}$$

kde jsme z důvodu isochronnosti vynechali diferenciaci podle času. Druhý člen nyní za pomoci (1.10) integrujeme per partes:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \right) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_0}^{t_1} = 0 \quad .$$

Poslední člen je vzhledem k (1.9) nulový a proto

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = 0 \quad .$$

Tato rovnost musí platit pro každé dva časy t_0, t_1 a pro každé virtuální posunutí δq_k . Vzhledem k tomu, že δq_k jsou nezávislá (počet zobecněných souřadnic je roven počtu stupňů volnosti systému) musí být závorka v předchozím vztahu pro každé k nutně nulová, tj.:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, f \quad . \quad (1.11)$$

Tyto rovnice představují *nutné podmínky* extrémnosti integrálu akce a nazývají se *Lagrangeovy rovnice*. Z matematického hlediska jde o obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu pro extrémální trajektorii $q_k(t)$; $k = 1 \dots f$, která je realizována v přírodě.

Poznámky:

- 1) Lagrangeovy rovnice jsou pohybovými rovnicemi našeho systému v zobecněných souřadnicích. Jejich tvar nezávisí na volbě souřadnicové soustavy. Newtonovy rovnice musí být speciálním případem v kartézském souřadnicovém systému.
- 2) Rovnice je třeba doplnit o počáteční podmínky

$$\begin{aligned} q_k(t_0) &= q_{k0} \\ \dot{q}_k(t_0) &= \dot{q}_{k0} \end{aligned} \quad , \quad (1.12)$$

tj. zadat stav v nějakém počátečním čase t_0 .

- 3) Lagrangeova funkce není jednoznačně určitelná, liší-li se například dvě Lagrangeovy funkce o konstantu (obecně i o některé funkce zobecněných souřadnic a rychlostí), potom pro obě Lagrangeovy funkce vyjdou stejné rovnice a tedy i stejné fyzikální řešení.
- 4) Hamiltonův princip v uvedené podobě platí jen pro nedisipativní systémy, tj. systémy ve kterých nedochází k tepelným ztrátám.
- 5) Lagrangeovy rovnice jsou jen nutnými podmínkami extrémnosti integrálu akce, nikoli postačujícími.

Nejdůležitější úlohou daného vědního oboru je volba správné Lagrangeovy funkce. Zvolíme-li určitý tvar Lagrangeovy funkce, můžeme řešit příslušné Lagrangeovy rovnice a tato řešení porovnat s experimentálním průběhem trajektorií. Nesouhlasí-li, je vybraná Lagrangeova funkce špatná. Volba Lagrangeovy funkce patří mezi základní *axiomy* budované teorie. Zpravidla se za L vybírá vhodná skalární funkce (její hodnota nezávisí na volbě souřadnic). Pro jednoduché mechanické problémy známe dvě důležité skalární funkce: kinetickou a potenciální energii. V nejjednodušším případě by Lagrangeova funkce mohla být jejich lineární kombinací $L = \alpha T + \beta V$. Skutečně lze ukázat, že pro volbu $\alpha = 1, \beta = -1$ dostáváme správné pohybové rovnice, v kartézském souřadnicovém systému rovnice Newtonovy - viz příklad 1. v následující kapitole. Proto

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(t, \mathbf{q}) \quad . \quad (1.13)$$

Potenciální energie závisí na poloze (potence - poloha). Pro komplikovanější systémy je rozdělení Lagrangeovy funkce na kinetickou a potenciální energii značně obtížné a navíc zbytečné. Jedinou úlohou mechaniky je volba správné Lagrangeovy funkce pro daný systém tak, aby řešení příslušných Lagrangeových rovnic odpovídalo pozorovaným trajektoriím. Naopak, jak uvidíme později, na základě různých symetrií systému lze za pomoci Lagrangeovy funkce definovat takové veličiny, jako je energie, hybnost, moment hybnosti systému, atd.

Vhodnou Lagrangeovu funkci lze nalézt i pro relativistickou mechaniku, pohyby nabitých částic v elektrických a magnetických polích, pro teorii elektromagnetického pole, pro obecnou teorii relativity i pro další fyzikální obory. Vždy z ní potom plynou rovnice popisující daný problém - např. v teorii elektromagnetického pole Maxwellovy rovnice.

1. 2. 3. Jednoduché příklady

Příklad 1: Hmotný bod v potenciálním poli $V(x, y, z)$

Hmotný bod má tři stupně volnosti, za zobecněné souřadnice zvolíme

$$q_1 = x; \quad q_2 = y; \quad q_3 = z \quad ,$$

potom

$$T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad ;$$

$$V(x, y, z) \quad \dots \quad \text{daná funkce} \quad ;$$

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad .$$

Příslušné Lagrangeovy rovnice mají tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad ;$$

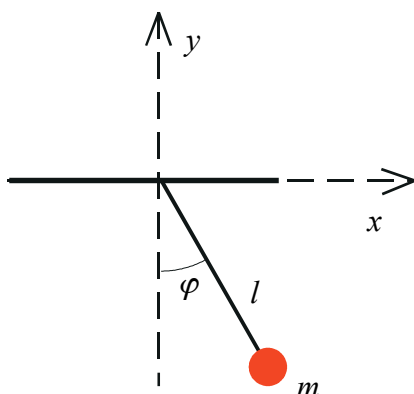
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{y}) + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad ;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad .$$

Všechny tři pohybové rovnice můžeme přepsat do běžného tvaru

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \quad ; \quad \mathbf{F} \equiv -\vec{\nabla}V \quad .$$

Příklad 2: Rovinné kyvadlo



Rovinné kyvadlo má jediný stupeň volnosti. Za zobecněnou souřadnici zvolíme úhel φ . Potom

$$x(t) = l \cdot \sin \varphi(t) \quad ; \quad y(t) = -l \cdot \cos \varphi(t) \quad ,$$

$$\dot{x} = l\dot{\varphi} \cos \varphi \quad ; \quad \dot{y} = l\dot{\varphi} \sin \varphi \quad ,$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 \quad ,$$

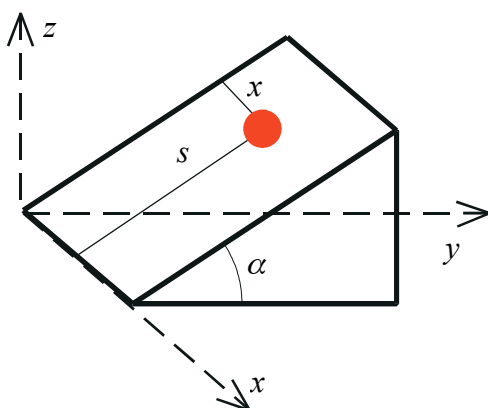
$$V = mgy = -mgl \cos \varphi \quad ,$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \quad .$$

Odpovídající Lagrangeova rovnice je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad .$$

Pro malé úhly je $\sin \varphi \sim \varphi$ a rovnice přechází v běžnou rovnici pro matematické kyvadlo.

Příklad 3: Pohyb po nakloněné rovině

Pohyb po nakloněné rovině má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice budeme volit vzdálenosti od hran nakloněné roviny $x(t)$ a $s(t)$. Standardním postupem máme:

$$x(t) = x(t) \quad ;$$

$$y(t) = s(t) \cos \alpha \quad ;$$

$$z(t) = s(t) \sin \alpha \quad ;$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{s}^2) \quad ;$$

$$V = mgs = mgs \cdot \sin \alpha \quad ,$$

$$L(s, \dot{x}, \dot{s}) = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{s}^2) - mgs \cdot \sin \alpha \quad ,$$

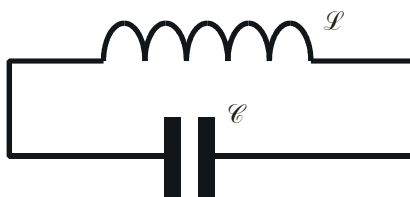
a pohybové rovnice jsou

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = -g \sin \alpha \quad .$$

1. 2. 4. Další příklady**Příklad 4:** LC obvod

Za zobecněnou souřadnici budeme volit náboj $Q(t)$ odtěklý z kondenzátorové baterie. Příslušnou zobecněnou rychlostí je elektrický proud $I = dQ/dt$.



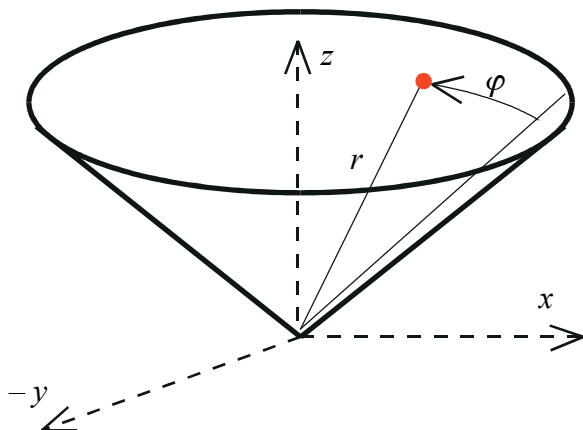
Označíme-li indukčnost \mathcal{L} a kapacitu \mathcal{C} , potom Lagrangeova funkce

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \mathcal{L} \dot{Q}^2 - \frac{Q^2}{2\mathcal{C}}$$

poskytne správnou rovnici $\mathcal{L}\mathcal{C}$ obvodu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} + \frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}} Q = 0 \quad .$$

Povšimněte si, že první člen v Lagrangeově funkci je energie vázaná v magnetickém poli cívky a druhý člen energie kondenzátorové baterie.

Příklad 5: Pohyb hmotného bodu po kuželové ploše v gravitačním poli

Pohyb má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice budeme volit vzdálenost částice od vrcholu kužele r a polární úhel φ . Využijeme tedy dvě ze sférických souřadnic, třetí - odklon θ_0 od osy z je na kuželové ploše konstantní. Za použití (1.3) příp. (1.6) snadno odvodíme

$$\begin{aligned}x(t) &= r(t) \cos \varphi(t) \sin \theta_0 \\y(t) &= r(t) \sin \varphi(t) \sin \theta_0 \\z(t) &= r(t) \cos \theta_0 ;\end{aligned}$$

$$T(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}^2) ;$$

$$V(r) = m g z = m g r \cos \theta_0 ;$$

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}^2) - m g r \cos \theta_0 ;$$

a proto

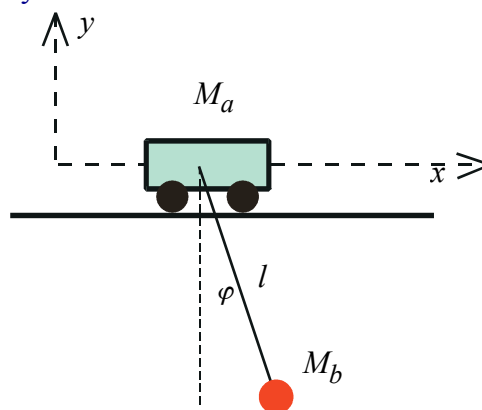
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \ddot{r} = m r \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}^2 - m g \cos \theta_0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta_0) = 0 .$$

Povšimněte si, že v rovnici pro r na pravé straně vystupuje součet síly odstředivé a příslušné komponenty síly gravitační. Rovnice pro úhel φ není nic jiného než zákon zachování momentu hybnosti.

Příklad 6: Rovinné kyvadlo s vodorovně pohyblivým závěsem

Vodorovně pohyblivý závěs můžeme realizovat např. vozíčkem na kolejničce. Systém má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice zvolíme vodorovnou polohu $x(t)$ vozíčku a úhel $\varphi(t)$ kyvadla. Kartézské souřadnice vozíčku budeme značit indexem a a kartézské souřadnice kyvadla indexem b . Další postup je již standardní:



$$x_a(t) = x(t) \quad ; \quad x_b(t) = x(t) + l \sin \varphi(t) ,$$

$$y_a(t) = 0 \quad ; \quad y_b(t) = -l \cos \varphi(t) ;$$

$$\begin{aligned}L(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) &= \frac{1}{2} M_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) + \frac{1}{2} M_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) - M_a g y_a - M_b g y_b = \\ &= \frac{1}{2} M_a \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_b (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi) + M_b g l \cos \varphi .\end{aligned}$$

Dále bychom mohli nalézt Lagrangeovy rovnice a numericky je řešit.

1. 3. ZÁKONY ZACHOVÁNÍ V PŘÍRODĚ

1. 3. 1. Teorém Noetherové

Objev každé veličiny, která se v průběhu časového vývoje systému nemění (zachovává) je pro fyziku velmi důležitý. Tyto veličiny v mechanice nazýváme integrály pohybu. Připomeňme některé zákony zachování: zákon zachování hybnosti, momentu hybnosti, energie; v kvantové teorii zákon zachování elektrického náboje, spinu, isospinu, baryonového čísla, parity, atd.

Je třeba vyjasnit jaká je podstata těchto zákonů zachování a za jakých podmínek jsou splněny. To se teoreticky podařilo Emmě Noetherové v roce 1916:

S každou symetrií v přírodě souvisí nějaká zachovávaná se fyzikální veličina. Tato veličina je danou symetrií definována a zachovává se jen dokud výchozí symetrie platí.

Při pozorování jevů kolem nás je tedy velmi důležité vyhledávat nejrůznější symetrie. Uveďme nyní příklady některých symetrií:

- 1) Na pracovním stole jsme zkonstruovali nějaký mechanický stroj. Stroj spustíme a budeme sledovat jeho chování. Jestliže stejný experiment provedeme na stejném psacím stole v sousední místnosti, výsledek bude stejný. Provedeme-li ale tentýž experiment na stole v místnosti o patro výše, může dopadnout jinak, protože gravitační pole Země má na tomto stole jinou hodnotu. Tato fyzikální situace je *symetrická vzhledem k vodorovnému posunutí*, ale není symetrická vzhledem k svislému posunutí.
- 2) Vodičem teče konstantní proud. Kolem vodiče se vytvořilo časově neproměnné (stacionární) magnetické pole. Do tohoto pole vypustíme elektron a budeme sledovat jeho trajektorii. Vypustíme-li elektron o minutu později (počáteční rychlost a poloha elektronu musí být stejná), bude výsledná trajektorie totožná. Zde hovoříme o *symetrii vzhledem k časovému posunutí*. Kdyby proud nebyl konstantní, tato symetrie bude porušena, magnetické pole v různých časech různé a trajektorie elektronů odlišné.
- 3) Při silné interakci (drží pohromadě atomové jádro) se neutron i proton chovají stejně, při elektromagnetické interakci různě (proton je nabitý). *Výměna neutronu za proton nebo protonu za neutron je symetrickou operací při silné interakci, nesymetrickou při elektromagnetické.*
- 4) *Příklady dalších symetrií: rotační symetrie; zrcadlová symetrie (záměna levého a pravého); výsledek experimentů je stejný ve všech souřadnicových systémech pohybujících se vůči sobě rovnoměrně přímočaře (Lorentzova symetrie).*

V teoretické mechanice se seznámíme se zákonem zachování hybnosti, momentu hybnosti a energie a se symetriemi, které těmto zákonům zachování odpovídají. V kvantové teorii se seznámíme s celou řadou dalších důležitých symetrií, které vedou k zachování elektrického náboje, spinu, isospinu, parity, barvy a vůně kvarků a dalších kvantových čísel.

1. 3. 2. Zákon zachování hybnosti

Představme si, že Lagrangeova funkce nezávisí na některé zobecněné souřadnici, konkrétně q_k :

$$L = L(t, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad . \quad (1.14)$$

Zobecněnou souřadnici, která se nevyskytuje v Lagrangeově funkci nazýváme *cyklickou*. Na q_k potom nezávisí ani pohybové rovnice a tím ani výsledek experimentu. *Situace je*

symetrická vůči prostorovému posunutí v zobecněné souřadnici q_k (viz první příklad symetrií).

Z pohybové rovnice pro tuto souřadnici q_k máme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const} .$$

Nalezli jsme tedy příslušnou zachovávanou veličinu.

Definice: Zobecněnou hybností odpovídající zobecněné souřadnici q_k nazveme

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} , \quad k = 1, \dots, f. \quad (1.15)$$

Tato veličina se zachovává, je-li zobecněná souřadnice q_k cyklická (nevyskytuje se v L), tj. fyzikální situace je symetrická vzhledem k prostorovému posunutí v zobecněné souřadnici q_k .

Určeme nyní zobecněné hybnosti k příkladům 1 - 6 z kapitol 1.2.3 a 1.2.4.

Příklad 1:

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad ; \quad p_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} \quad ; \quad p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} .$$

Zachování či nezachování těchto veličin bude záviset na tvaru potenciální energie $V(x,y,z)$.

Příklad 2:

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi} .$$

Fyzikální situace není symetrická vzhledem k pootočení o úhel $\delta\varphi$ (změní se gravitační pole), proto se souřadnice φ vyskytuje v L a tato zobecněná hybnost se nezachovává.

Zobecněná hybnost k úhlové proměnné se někdy nazývá **moment hybnosti**.

Příklad 3:

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad ; \quad p_s \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} .$$

Situace je symetrická vzhledem k posunutí v souřadnici x , souřadnice x je cyklická a hybnost p_x se zachovává. Při posunutí v souřadnici s se mění gravitační pole, L závisí na s a hybnost p_s se nezachovává.

Příklad 4*:

$$p_Q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = \mathcal{L} \dot{Q} .$$

Zobecněná hybnost p_Q (magnetický indukční tok) se nezachovává, Q není cyklická souřadnice.

Příklad 5*:

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad ; \quad p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi} \quad .$$

Radiální hybnost p_r se nezachovává (při posunutí v r se mění gravitační pole), moment hybnosti p_φ se zachovává - situace je symetrická vzhledem k pootočení v úhlu φ , φ je cyklická souřadnice.

Příklad 6*:

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_a + M_b) \dot{x} \quad ; \quad p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = M_b l^2 \dot{\varphi} + M_b x l \cos \varphi \quad .$$

Zachovává se hybnost soustavy p_x , nezachovává se moment hybnosti p_φ . Proč?

1. 3. 3. Zákon zachování energie

Nechť Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, tj.

$$L = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad . \quad (1.16)$$

To odpovídá situaci symetrické vůči časovému posunutí. Najděme úplnou časovou derivaci Lagrangeovy funkce:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{d}{dt}(\dot{q}_k) \quad .$$

Vzhledem k předpokladu je první člen na pravé straně nulový, $\partial L / \partial q_k$ vyjádříme z Lagrangeovy rovnice (1.11) a máme

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{d}{dt}(\dot{q}_k) \quad .$$

Členy napravo upravíme za pomoci vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)$$

a po převedení na jednu stranu rovnosti zjistíme, že

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{const} \quad .$$

Opět jsme tedy našli zachovávanou se veličinu.

Definice: *Zobecněnou energii* nazveme

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \quad . \quad (1.17)$$

Tato veličina se zachovává, nezávisí-li Lagrangeova funkce explicitně na čase, tj. je-li fyzikální situace symetrická vzhledem k časovému posunutí.

V příkladech 1 - 6 se energie zachovává, Lagrangeovy funkce nezávisí explicitně na čase, všechny situace jsou symetrické vůči časovému posunutí. Postupně máme:

$$E_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} - L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z),$$

$$E_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi,$$

$$E_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \dot{s} - L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{s}^2) + mgs \sin \alpha,$$

$$E_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \dot{Q} - L = \frac{1}{2} \mathcal{L} \dot{Q}^2 + \frac{Q^2}{2\mathcal{C}},$$

$$E_5 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \theta_0,$$

$$E_6 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} M_a \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_b (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) - M_b gl \cos \varphi.$$

Povšimněte si, že ve všech těchto jednoduchých příkladech je

$$E = T + V \quad (1.18)$$

Tato relace ale platí jen pro speciální tvary Lagrangeovy funkce. V obecném případě nelze Lagrangeovu funkci ani energii rozdělit na kinetickou a potenciální část. Energie je však i nadále vždy definována vztahem (1.17).

Na závěr uveďme příklad, kdy se energie nezachovává. Uvažujme kyvadlo, jehož závěs je velmi pomalu namotáván pomocným motorkem v místě úchyty (jeřáb se zavěšeným břemenem). Délka závěsu se s časem zkracuje

$$l = l_0 - ct,$$

c je rychlost navíjení. Lagrangeova funkce kyvadla

$$L = \frac{1}{2} m (l_0 - ct)^2 \dot{\varphi}^2 + mg(l_0 - ct) \cos \varphi$$

nyň explicitně závisí na čase a energie se nezachovává. Rozhoupejme kyvadlo a sledujme jeho kmity. Udělejme totéž o minutu později. Experiment dopadne jinak, protože závěs se mezitím poněkud zkrátil. Fyzikální situace není symetrická vzhledem k časovému posunutí. Důvod nezachování energie je zde zřejmý - přídatný motorek, který není započten do našeho systému.

Vidíme tedy, že základní zákony zachování v mechanice jsou přímým důsledkem vlastností prostoru a času kolem nás. Je-li prostor homogenní (stejný ve všech svých bodech), zachovává se hybnost; je-li prostor isotropní (stejný ve všech směrech), zachovává se moment hybnosti; je-li prostor neměnný v čase, zachovává se energie.

homogenita prostoru	→	zachování hybnosti
isotropie prostoru	→	zachování momentu hybnosti
neměnnost v čase	→	zachování energie

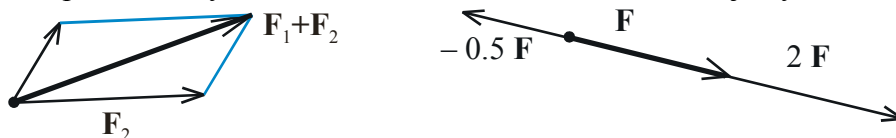
1. 4. HAMILTONOVY KANONICKÉ ROVNICE

V této kapitole se seznámíme s jiným tvarem pohybových rovnic - Hamiltonovými rovnicemi. Na rozdíl od Lagrangeových rovnic (diferenciální rovnice 2. řádu) jsou Hamiltonovy rovnice diferenciální rovnice 1. řádu, ale je jich dvojnásobné množství.

- 1) Pro řešení diferenciálních rovnic prvního řádu je vypracováno velké množství numerických metod a tak Hamiltonovy rovnice bývají většinou pro numerické řešení vhodnější než rovnice Lagrangeovy.
- 2) Za pomoci Hamiltonových rovnic lze snadno zapsat časový vývoj libovolné dynamické proměnné, tj. nejenom zvolených zobecněných souřadnic.
- 3) Hamiltonovy rovnice lze přepsat do velmi jednoduchého tvaru s pomocí tzv. Poissonových závorek, které z matematického hlediska představují Lieovu algebru. Vlastnosti Lieovy algebry jsou určeny nezávisle na objektech, které ji tvoří. Proto bude možné tuto strukturu snadno přenést do kvantové mechaniky.

1. 4. 1. (M) Lieova algebra

S pojmem vektoru jste se pravděpodobně setkali poprvé ve fyzice (například rychlost, síla). Zde jste vystačili s představou úseček opatřených na jednom konci šipkou, se kterými lze provádět dvě operace: skládání vektorů (*sčítání*) a natahování vektorů (*násobení skalárem*). Tato představa byla v matematice zobecněna i na další objekty.



Stačí pro ně definovat sčítání a násobení skalárem tak, aby tyto operace zachovávaly základní vlastnosti skládání a natahování vektorů. Množina takových objektů se nazývá *lineární vektorový prostor*. Připomeňme si nyní jeho definici ze základního kursu matematiky:

Označme A lineární vektorový prostor, necht' $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A$; $R(C)$ množinu reálných (komplexních) čísel, necht' $\alpha, \beta, \gamma \in R(C)$.

Definice: řekneme, že A je lineární vektorový prostor nad množinou reálných (komplexních) čísel, jsou-li pro prvky tohoto prostoru definovány operace

$$\begin{array}{llll} + & : & A \times A \rightarrow A & \text{sčítání vektorů} & \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \\ \cdot & : & A \times R(C) \rightarrow A & \text{násobení vektoru skalárem} & \mathbf{z} = \alpha \cdot \mathbf{x}, \end{array}$$

které mají následující vlastnosti:

$$\begin{array}{ll} 1) & \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, & \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \\ 2) & \alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}, & (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}, \\ 3) & \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}, & 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \\ 4) & \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow & \mathbf{y} = \mathbf{z}. \end{array}$$

Poznámky:

- 1) Operace "+" přiřazuje dvěma prvkům prostoru A opět prvek prostoru A . Pro n -tici čísel může být operace "+" definována takto: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$; $\mathbf{x} + \mathbf{y} \equiv (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N)$.
- 2) Operace " \cdot " přiřazuje prvku prostoru A a reálnému (komplexnímu) číslu opět prvek prostoru A . Pro n -tici čísel může být operace " \cdot " definována takto: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$; $\alpha \cdot \mathbf{x} \equiv (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N)$.
- 3) V lineárním vektorovém prostoru lze zvolit skupinu lineárně nezávislých vektorů (bazi) tak, že každý prvek prostoru lze napsat jako lineární kombinaci prvků baze:

$$\mathbf{x} = \sum_{l=1}^N x_l \mathbf{e}_l \quad ; \quad \{\mathbf{e}_l\}_{l=1}^N \quad \dots \quad \text{prvky baze} \quad . \quad (1.19)$$

Veličiny x_l jsou koeficienty lineární kombinace, nazýváme je *souřadnice prvku \mathbf{x}* v bazi $\{\mathbf{e}_l\}$. Počet prvků baze nazýváme *dimenze prostoru*. Baze musí být úplná, tj. žádný její prvek nesmí chybět, jde o maximální množinu lineárně nezávislých vektorů.

Definice: Lineární vektorový prostor s operacemi "+" a "." nazveme Lieovou algebrou, je-li v něm navíc definována operace

$$[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A \quad \text{Lieova operace} \quad \mathbf{z} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

s vlastnostmi:

$$1) \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}] \quad \text{antisymetrie} \quad (1.20)$$

$$2) \quad [\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, \mathbf{z}] + [\mathbf{y}, \mathbf{z}] \quad \text{linearita} \quad (1.21)$$

$$3) \quad [\alpha \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y}] = \alpha [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \quad \text{linearita} \quad (1.22)$$

$$4) \quad [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = 0 \quad (1.23)$$

Poznámky:

- 1) Jde o další zobrazení, při kterém dvojici vektorů přiřadíme vektor.
- 2) Z linearit v prvním argumentu a antisymetrie plyne linearita ve druhém argumentu.

Příklad 1: A ... množina uspořádaných trojic

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \quad ; \quad x_i, y_i \in C(R) \\ + : \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \\ \cdot : \quad \alpha \cdot \mathbf{x} &\equiv (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3), \\ [\cdot, \cdot] : \quad [\cdot, \cdot] &\equiv \mathbf{x} \times \mathbf{y} \quad . \end{aligned}$$

Lieova algebra je definována jako vektorový součin. Ověřte, že vektorový součin splňuje všechny vlastnosti Lieovy algebry (1.20) až (1.23).

Příklad 2: A - množina čtvercových matic $n \times n$. Pro konkrétnost budeme uvažovat matice 2×2

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad , \\ + : \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} &\equiv \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \quad , \\ \cdot : \quad \alpha \cdot \mathbf{A} &\equiv \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \quad , \\ [\cdot, \cdot] : \quad [\mathbf{A}, \mathbf{B}] &\equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \quad . \end{aligned}$$

Lieova algebra je definována za pomoci maticového násobení jako tzv. komutátor. Je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, matice komutují a komutátor je roven nule. Ověřte, že komutátor splňuje všechny vlastnosti Lieovy algebry (1.20) až (1.23).

Strukturní koeficienty Lieovy algebry

Rozvineme-li prvky prostoru do příslušné baze, můžeme psát:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [x_k \mathbf{e}_k, y_l \mathbf{e}_l] = x_k y_l [\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l] \quad (1.24)$$

K určení Lieovy operace postačí znát výsledek operace jen pro prvky baze. Je zřejmé, že výsledek operace $[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l]$ je prvek prostoru a můžeme ho proto opět rozvinout do baze $\{\mathbf{e}_m\}$. Koeficienty rozvoje (souřadnice) c^m budou ale záviset na tom, pro které dva prvky baze Lieovu operaci provádíme:

$$[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l] = c_{kl}^m \mathbf{e}_m \quad . \quad (1.25)$$

Veličiny c_{kl}^m se nazývají strukturní koeficienty Lieovy algebry. Výsledek Lieovy operace lze nyní zapsat ve tvaru

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = c_{kl}^m x_k y_l \mathbf{e}_m \quad . \quad (1.25)$$

Zadáním strukturních koeficientů je určena celá Lieova algebra. Z antisymetrie Lieovy operace (1.20) plyne antisymetrie strukturních koeficientů

$$c_{kl}^m = -c_{lk}^m \quad . \quad (1.26)$$

Příklad 1: - pokračování

Na trojicích lze zvolit bazi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0) & ; & & \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0) & ; & & \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1) & ; \\ [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & , & & & & & & & & \\ [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 & , & & & & & & & & \\ [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & . & & & & & & & & \end{aligned}$$

Nenulové strukturní koeficienty tedy jsou

$$c_{12}^3 = c_{23}^1 = c_{31}^2 = 1 \quad ; \quad c_{21}^3 = c_{32}^1 = c_{13}^2 = -1 \quad .$$

Příklad 2: - pokračování

Na komplexních maticích 2×2 lze zvolit bazi

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

$\boldsymbol{\sigma}_0$ je jednotková matice (až na normovací konstantu $1/2$); $\boldsymbol{\sigma}_k$ $k = 1, 2, 3$ jsou tzv. Pauliho matice, v kvantové teorii uvidíme, že mají význam operátoru spinu. Snadno vypočteme (ověřte!)

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2] &= \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_1 = i \boldsymbol{\sigma}_3 \quad , \\ [\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3] &= \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_3 - \boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\sigma}_2 = i \boldsymbol{\sigma}_1 \quad , \\ [\boldsymbol{\sigma}_3, \boldsymbol{\sigma}_1] &= \boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_3 = i \boldsymbol{\sigma}_2 \quad , \\ [\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\sigma}_1] &= [\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\sigma}_2] = [\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\sigma}_3] = 0 \quad . \end{aligned}$$

Jednotková matice komutuje s každou maticí. Nenulové strukturní koeficienty jsou

$$c_{12}^3 = c_{23}^1 = c_{31}^2 = i \quad ; \quad c_{21}^3 = c_{32}^1 = c_{13}^2 = -i \quad .$$

Pro matice (i jiné objekty, u kterých je definováno násobení mezi objekty) platí ještě další důležité relace:

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{C}] = \mathbf{A}[\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\mathbf{B} \quad , \quad (1.28)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{C}] = \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} \quad . \quad (1.29)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\mathbf{B} &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \mathbf{C}\mathbf{B}) + (\mathbf{A}\mathbf{C} - \mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{B} = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C} - \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C} - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} = [\mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{C}] \quad . \end{aligned}$$

Analogicky dokážeme i druhou relaci. Pomocí těchto vztahů můžeme určit Lieovu operaci i pro mocniny matic, například:

$$[\mathbf{A}^2, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{A} .$$

Podobně lze ze znalosti základní operace $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ a vztahů (1.28) , (1.29) určit postupně výsledek operace $[\mathbf{A}^k, \mathbf{B}^l]$.

1. 4. 2. Hamiltonovy rovnice

S pomocí definice zobecněné hybnosti (1.15) můžeme Lagrangeovy rovnice (1.11) přepsat do tvaru

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_k \equiv \frac{\partial L}{\partial q_k} , \quad (1.30)$$

který silně připomíná Newtonovy rovnice v kartézských souřadnicích. Najdeme nyní diferenciál energie za pomoci jejího definičního vztahu (1.17)

$$E = p_k \dot{q}_k - L(t, q, \dot{q}) \quad \Rightarrow$$

$$dE = \dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k .$$

V předposledním členu vyjádříme $\partial L / \partial q_k$ z pohybové rovnice (1.30), v posledním členu využijeme definici zobecněné hybnosti:

$$dE = \dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \dot{p}_k dq_k - p_k d\dot{q}_k .$$

Členy s diferenciály zobecněných rychlostí se odečtou a zbývá

$$dE = - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \dot{p}_k dq_k + \dot{q}_k dp_k . \quad (1.31)$$

Funkci, jejíž diferenciál jsme právě našli označíme

$$E = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) . \quad (1.32)$$

Koeficienty v diferenciálu (1.31) musí být příslušné parciální derivace funkce H :

$$- \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad ; \quad - \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad ; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} . \quad (1.33)$$

Funkce H se nazývá *Hamiltonova funkce*. Hamiltonova funkce je energie přepsaná do proměnných t, q_k, p_k . V (1.31) se odečetly diferenciály rychlostí, proto lze vždy nalézt takovou transformaci

$$t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \quad \rightarrow \quad t, \mathbf{q}, \mathbf{p} , \quad (1.34)$$

aby energie byla funkcí zobecněných souřadnic a zobecněných hybností. Tato transformace se nazývá *Legendreova duální transformace*. Poslední dvě rovnice z relace (1.33) jsou *Hamiltonovy kanonické rovnice* (kanos - zákon, souhrn pravidel):

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad ; \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} . \quad (1.35)$$

Při řešení problému Hamiltonovými rovnicemi

- určíme z Lagrangeovy funkce zobecněné hybnosti a zobecněnou energii,
- ze zobecněné energie vyloučíme zobecněné rychlosti - vyjádříme je za pomoci zobecněných hybností, tj. provedeme Legendreovu duální transformaci,
- napišeme Hamiltonovy rovnice,
- řešíme je.

Hamiltonovy rovnice jsou rovnice pro určení časového vývoje proměnných $q_k(t)$, $p_k(t)$. Jsou diferenciálními rovnicemi prvního řádu, je jich ale dvojnásobné množství než Lagrangeových rovnic 2. řádu. Soustavu Hamiltonových rovnic musíme doplnit počátečními podmínkami

$$q_k(t_0) = q_{k0} \quad ; \quad p_k(t_0) = p_{k0} \quad . \quad (1.36)$$

Příklad: Rovinný pohyb planety (hmotnost m) kolem Slunce (hmotnost M).

Předpokládáme $M \gg m$; tj. Slunce se nepohybuje. Pohyb má dva stupně volnosti, za zobecněné souřadnice zvolíme polární souřadnice $q_1 = r(t)$; $q_2 = \varphi(t)$ - vzdálenost planety od Slunce a úhel spojnice planeta - Slunce od zvolené polopřímky.

Z (1.6) a z gravitačního zákona víme, že

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \quad , \quad V = -G \frac{mM}{r} \quad , \quad \text{tj.}$$

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + G \frac{mM}{r}$$

Kdybychom řešili úlohu z Lagrangeových rovnic, měli bychom

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 + G \frac{M}{r^2} = 0 \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \ddot{\varphi} + 2r \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \quad .$$

Povšimněme si, že pohybové rovnice nezávisí na hmotnosti sledované planety m . To je pro gravitaci typické, tělesa se v daném gravitačním poli pohybují po stejných trajektoriích. Proto je možné gravitaci popisovat za pomoci zakřivených prostorů. Určeme nyní zobecněné hybnosti a zobecněnou energii systému:

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad ,$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 - G \frac{mM}{r} = T_r + T_\varphi + V \quad .$$

Zachovává se moment hybnosti p_φ (φ je cyklická souřadnice) a zobecněná energie E . Energie se rozpadá na tři členy - radiální kinetickou energii, úhlovou energii (souvisící s oběhem planety) a potenciální energii. Zobecněné rychlosti vyjádříme ze zobecněných hybností

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

a dosadíme do zobecněné energie (provedeme Legendreovu duální transformaci). Tím získáme Hamiltonovu funkci

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r} \quad .$$

Hamiltonovy kanonické rovnice jsou

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad , & \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = +\frac{p_\varphi^2}{mr^3} - G\frac{mM}{r^2} \quad , \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad , & \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Tyto rovnice je třeba doplnit počátečními podmínkami $r(t_0)$, $\varphi(t_0)$, $p_r(t_0)$, $p_\varphi(t_0)$. Jde o soustavu čtyř diferenciálních rovnic pro funkce $r(t)$, $\varphi(t)$, $p_r(t)$, $p_\varphi(t)$.

Definice: *Fázový prostor* - 2f-rozměrný prostor, do kterého zobrazujeme hodnoty zobecněných souřadnic a zobecněných hybností. Bod fázového prostoru nám reprezentuje stav systému. Časový vývoj $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ stavu systému se ve fázovém prostoru zobrazí jako *fázová trajektorie*. Konfigurační prostor je podprostorem fázového prostoru. V dalším paragrafu si ukážeme fázovou trajektorii harmonického oscilátoru.

1. 4. 3. Harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor je jedním z nejdůležitějších fyzikálních systémů. Lze jím v prvním přiblížení nahradit chování částice v potenciálním poli s minimem, setkáme se s ním v kvantové teorii i v kvantové teorii pole. Jak uvidíme později, lze si jakékoli pole (například elektromagnetické) představit jako soustavu harmonických oscilátorů. Proto se budeme harmonickým oscilátorem zabývat podrobněji.

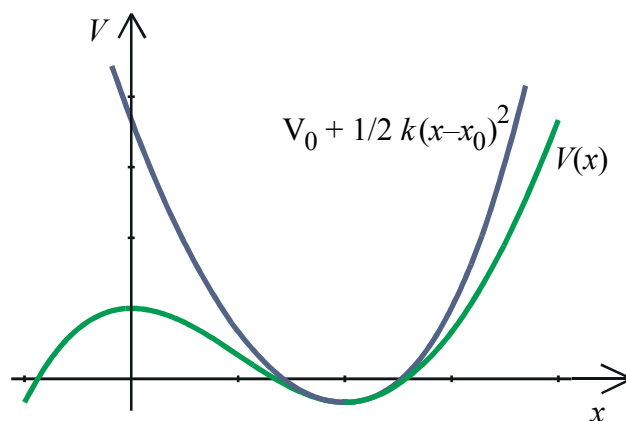
Představme si částici v poli potenciální energie s minimem v bodě x_0 a hodnotou minima $V_0 = V(x_0)$. Provedme Taylorův rozvoj funkce $V(x)$ v okolí minima do druhého řádu:

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots \quad .$$

V minimu je $V'(x_0) = 0$ a proto

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 = V_0 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 \quad , \quad \text{kde } k \equiv V''(x_0) \quad . \quad (1.37)$$

Potenciální energii jsme tedy nahradili parabolickou závislostí - viz obrázek.



Harmonickým oscilátorem nazýváme systém s parabolickou závislostí potenciální energie (1.37). Dostí přesně tuto závislost splňuje například těleso zavěšené na pružině v gravitačním poli. Veličina $k \equiv V''(x_0)$ se nazývá *tuhost oscilátoru*.

Volme pro jednoduchost souřadnicový systém tak, aby minimum potenciální energie bylo v počátku ($x_0 = 0$) a zvolme $V(x_0) = 0$ (potenciální energii můžeme změnit o aditivní konstantu, síla $F = -dV/dx$ se nezmění), průběh potenciální energie je potom $V(x) = 1/2 kx^2$. Řešme nejprve harmonický oscilátor za pomoci Lagrangeových rovnic:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad . \quad (1.38)$$

Obecné řešení této rovnice je

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad \text{kde } \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.39-40)$$

Pro následující počáteční podmínky plyne řešení:

$$x(0) = A \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = A \cos \omega t \quad . \quad (1.41-42)$$

V okolí minima potenciální energie koná částice kmitavý pohyb úhlovou frekvencí $\omega = (k/m)^{1/2}$. Jako parametr oscilátoru se častěji používá úhlová frekvence ω než jeho tuhost k . Lagrangeova funkce potom je

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad . \quad (1.43)$$

Řešme nyní úlohu za pomoci Hamiltonových rovnic:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m} \quad ,$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad .$$

Po vyloučení rychlosti z E dostáváme Hamiltonovu funkci

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (1.44)$$

a Hamiltonovy rovnice

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x \quad .$$

Řešení této soustavy se stejnými počátečními podmínkami vede k

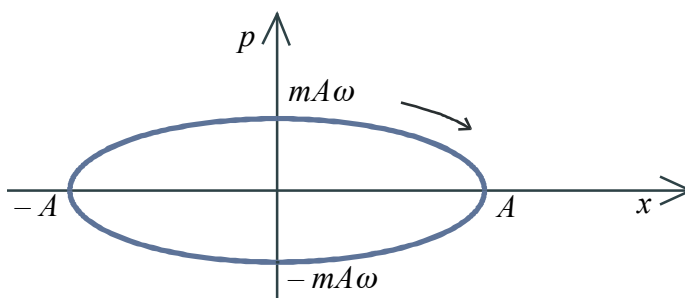
$$x(t) = A \cos \omega t \quad ,$$

$$p(t) = -m A \omega \sin \omega t = m\dot{x} \quad . \quad (1.45)$$

Vyloučíme-li z (1.45) čas (na pravých stranách ponecháme jen trigonometrické funkce, rovnice umocníme na druhou a sečteme), získáme rovnici trajektorie ve fázových proměnných x, p :

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{p}{mA\omega}\right)^2 = 1 \quad . \quad (1.46)$$

Fázovou trajektorii harmonického oscilátoru je elipsa.



Na závěr určíme klasickou hustotu pravděpodobnosti $w(x)$ výskytu částice mezi krajními

polohami $-A$, A . Pro pravděpodobnost, že se částice nachází v okolí Δx bodu x platí:



$$\Delta P \cong \frac{2\Delta t}{T} = \frac{2\Delta x/v(x)}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{\pi v(x)} \Delta x \quad ,$$

kde T je perioda pohybu a $2\Delta t$ je doba, po kterou částice pobývá v okolí bodu x . Okolím prolétá za periodu T částice dvakrát (tam a zpět), proto je v čitateli $2\Delta t$.

Hustota pravděpodobnosti je

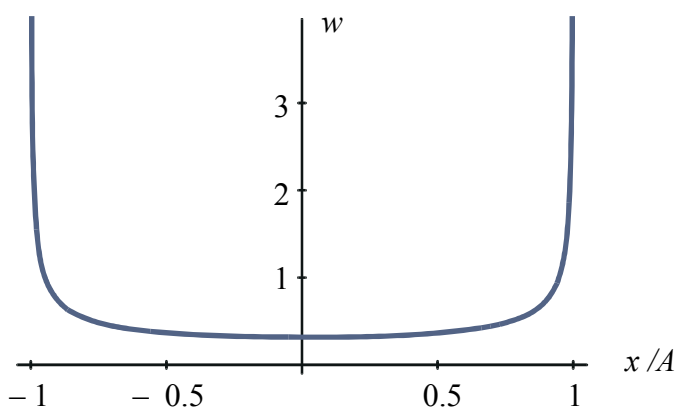
$$w(x) = \frac{dP}{dx} = \frac{\omega}{\pi v(x)} \quad . \quad (1.47)$$

Závislost $v(x)$ určíme ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad v(x) = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad . \quad (1.48)$$

Konečný vztah má tvar

$$w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} \quad . \quad (1.49)$$



Hustota pravděpodobnosti výskytu částice je nejvyšší v bodech obratu $-A$, A a nejnižší v místě minima potenciální energie. V kvantové teorii poznáme modifikaci tohoto průběhu pro částice mikrosvěta. Poznamenejme ještě, že

Celková pravděpodobnost výskytu částice v oblasti $(-A, A)$ je rovna jedné.

$$\int_{-A}^{+A} w(x) dx = \int_{-A}^{+A} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{x}{A}\right) \right]_{-A}^{+A} = 1 \quad . \quad (1.50)$$

1. 4. 4. Poissonova formulace Hamiltonových rovnic

Uvažujme obecnou dynamickou proměnnou $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, která je funkcí zobecněných souřadnic a zobecněných hybností (souřadnice, hybnost, potenciální energie, součin potenciální a kinetické energie ...). Její časový vývoj je dán vztahem

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial A}{\partial p_k} \dot{p}_k = \frac{\partial A}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad , \quad (1.51)$$

kde jsme časové derivace fázových proměnných \mathbf{q} , \mathbf{p} vyjádřili z Hamiltonových rovnic.

Definice: Necht' $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ jsou dvě funkce fázových proměnných \mathbf{q}, \mathbf{p} . Funkci

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_k} \quad (1.52)$$

nazýváme Poissonovou závorkou funkcí f, g .

Časový vývoj (1.51) obecné dynamické proměnné je vzhledem k definici (1.52) dán jako Poissonova závorka příslušné dynamické proměnné a Hamiltonovy funkce:

$$\dot{A} = \{A, H\} \quad (1.53)$$

Poznámka: Pro $A = A(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ bude $dA/dt = \partial A/\partial t + \{A, H\}$, tento případ je však vzácný.

Vlastnosti Poissonových závorek:

- 1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- 2) $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$
- 3) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$
- 4) $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$
- 5) $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$.

Důkaz všech těchto vztahů je triviální a plyne přímo z definice Poissonovy závorky (1.52). Poissonovy závorky tvoří Lieovu algebru na prostoru funkcí. Velmi důležité je znát Poissonovy závorky mezi zobecněnými souřadnicemi a hybnostmi

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{ik} \cdot 0 - 0 \cdot \delta_{jk} \quad , \\ \{p_i, p_j\} &= \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = 0 \cdot \delta_{jk} - \delta_{ik} \cdot 0 \quad , \\ \{q_i, p_j\} &= \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jk} = \delta_{ij} \quad . \end{aligned}$$

Poissonova závorka je nenulová jedině pro zobecněnou souřadnici a jí odpovídající hybnost, potom je rovna jedné.

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad ; \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (1.55)$$

Těmito relacemi je určena celá Lieova algebra Poissonových závorek. Známe-li jejich vlastnosti (1.54) a relace (1.55), můžeme řešit problémy mechaniky aniž bychom potřebovali definici (1.52).

Příklad: Harmonický oscilátor

$$\begin{aligned} T &= \frac{p^2}{2m} \quad , \quad V = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad ; \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad ; \\ \dot{x} &= \{x, H\} = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \\ \dot{p} &= \{p, H\} = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - m \omega^2 x \quad . \end{aligned}$$

Snadno určíme i časový vývoj jakékoli dynamické proměnné, například potenciální energie:

$$\dot{V} = \{V, H\} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \omega^2 x p \quad .$$

Časový vývoj můžeme ale určit i z vlastností Lieovy algebry Poissonových závorek (1.54) a (1.55) bez znalosti jejich definice. Ukažme to na příkladu zobecněné hybnosti:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \{x, H\} = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \\ \dot{p} &= \{p, H\} = \left\{ p, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right\} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2m} \{p, p^2\} + \frac{1}{2} m \omega^2 \{p, x^2\} = \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2m} (p \{p, p\} + \{p, p\} p) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x \{p, x\} + \{p, x\} x) = \\ &= \frac{p}{m} \{p, p\} + m \omega^2 x \{p, x\} \stackrel{(1)}{=} \frac{p}{m} \{p, p\} - m \omega^2 x \{x, p\} \stackrel{(1.55)}{=} -m \omega^2 x \quad .\end{aligned}$$

Analogicky bychom postupovali u dalších dynamických proměnných. V kvantové teorii zůstane tato struktura zachována, jen objekty se kterými budeme pracovat budou jiné.

1. 4. 5. Numerické řešení Hamiltonových rovnic

Jen ve výjimečných případech lze nalézt explicitní řešení. Zpravidla jsme odkázáni na numerické řešení problému. V dosavadním textu jsme se naučili problém zformulovat za pomoci soustavy diferenciálních rovnic doplněných vhodnými počátečními podmínkami. Většina matematických programů (např. “Mathematica”, “Reduce”, “Maple”, ...) dokáže takto zformulovanou úlohu numericky a někdy i analyticky vyřešit. Uveďme zde přesto alespoň jednu numerickou metodu (Runge-Kutta 4. řádu) vhodnou pro numerické vyhledání řešení.

Označme $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ množinu zobecněných souřadnic a hybností. Necht' množina hledaných funkcí $\xi_k(t)$; $k = 1, \dots, 2f$ splňuje soustavu rovnic

$$\dot{\xi}_k = f_k(t, \xi) \quad .$$

Časovou osu rozdělíme na dílky s intervalem Δt . Předpokládejme, že známe řešení v nějakém čase t (např v t_0 - počáteční podmínka). Potom určíme

$$\begin{aligned}K_{1,k} &= f_k(t, \xi_1, \dots, \xi_{2f}) \quad , \\ K_{2,k} &= f_k\left(t + \frac{1}{2} \Delta t, \xi_1(t) + \frac{1}{2} K_{1,1} \Delta t, \dots, \xi_{2f}(t) + \frac{1}{2} K_{1,2f} \Delta t\right) \quad , \\ K_{3,k} &= f_k\left(t + \frac{1}{2} \Delta t, \xi_1(t) + \frac{1}{2} K_{2,1} \Delta t, \dots, \xi_{2f}(t) + \frac{1}{2} K_{2,2f} \Delta t\right) \quad , \\ K_{4,k} &= f_k\left(t + \Delta t, \xi_1(t) + K_{3,1} \Delta t, \dots, \xi_{2f}(t) + K_{3,2f} \Delta t\right)\end{aligned}$$

a přibližné řešení v čase $t + \Delta t$ dostaneme ze vztahů

$$\xi_k(t + \Delta t) \cong \xi_k(t) + \frac{1}{6} (K_{1,k} + 2K_{2,k} + 2K_{3,k} + K_{4,k}) \cdot \Delta t \quad ; \quad k = 1, \dots, 2f \quad .$$

Tím známe řešení v čase $t + \Delta t$ a postup můžeme opakovat. Otázky přesnosti výpočtu, konvergence a případně další metody lze nalézt v literatuře.

1. 5. VLASTNOSTI DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Hamiltonovy rovnice popisující mechanické systémy vedou na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu pro proměnné \mathbf{q} , \mathbf{p} . Označme $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ množinu hledaných fázových proměnných systému. Diferenciální rovnice vzniklé z Hamiltonových rovnic potom mají tvar:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= f_1(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_N &= f_N(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \quad ,\end{aligned}\tag{1.56}$$

neboli

$$\dot{\xi}_k = f_k(t, \boldsymbol{\xi}) \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad .\tag{1.57}$$

Počet rovnic N nemusí být nutně sudý (souřadnice a jim odpovídající hybnosti), rovnice pro zachovávající se proměnné ze soustavy vyškrtáme a neřešíme je. Na pravých stranách většinou není explicitně obsažen čas - takové soustavy rovnic se nazývají *autonomní*. V dalším textu se budeme zabývat jen autonomními soustavami rovnic

$$\dot{\xi}_k = f_k(\boldsymbol{\xi}) \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad .\tag{1.58}$$

Nejjednodušší je případ lineárních rovnic tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1N}\xi_N \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_N &= a_{N1}\xi_1 + \dots + a_{NN}\xi_N \quad .\end{aligned}\tag{1.59}$$

neboli

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \quad .\tag{1.60}$$

Řešení lineárních rovnic je jednoduché. Nalezneme vlastní čísla a vektory matice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}^{(l)} = \lambda_l \boldsymbol{\eta}^{(l)} \quad .\tag{1.61}$$

Úpravou rovnice (1.61) dostaneme $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\boldsymbol{\eta} = 0$. Tato rovnice bude mít netriviální řešení jen, je-li

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) = 0 \quad ,\tag{1.62}$$

což je rovnice pro vlastní čísla λ . Z tvaru (1.61) potom dopočteme vlastní vektory. Řešením soustavy lineárních diferenciálních rovnic je každý výraz

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} \exp(\lambda t) \quad ,$$

protože

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \lambda \boldsymbol{\eta} \exp(\lambda t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} \exp(\lambda t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \quad .$$

Obecné řešení je lineární kombinací řešení pro jednotlivá vlastní čísla:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = c_1 \boldsymbol{\eta}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\eta}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots \quad .\tag{1.63}$$

Jde-li o problém kmitů, λ jsou komplexní ($\lambda_k = \delta + i\omega_k$). Jednotlivé členy v součtu (1.63) jsou tzv. vlastní mody kmitů. Počet vlastních frekvencí je menší nebo roven řádu matice \mathbf{A} .

Poznámka: Výsledek (1.63) platí jen, jsou-li vlastní čísla matice \mathbf{A} , určená z rovnice (1.62), navzájem různá. Je-li některé vlastní číslo k -násobným kořenem rovnice (1.62), potom odpovídající koeficient lineární kombinace (1.63) bude polynom stupně $k - 1$.

Příklad 1: Harmonický oscilátor

Hamiltonovy rovnice pro harmonický oscilátor mají tvar

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad ; \quad \dot{p} = -m\omega^2 x \quad .$$

Odhlédneme-li od nepodstatných konstant, je třeba řešit soustavu rovnic typu

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

ve které $\xi_1 = x$, $\xi_2 = p$. Z rovnice pro vlastní čísla (1.62) snadno určíme vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm i$ a z rovnice pro vlastní vektory (1.61) odpovídající vlastní vektory

$$\boldsymbol{\eta}^{(1)} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\eta}^{(2)} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad .$$

Obecné řešení soustavy tedy je

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-it} \quad ,$$

což pro počáteční podmínky $x(0) = \xi_1(0) = A$; $p(0) = \xi_2(0) = 0$ dá známé řešení

$$x = \xi_1 = A \cos t \quad ; \quad p = \xi_2 = -A \sin t \quad .$$

1. 5. 1. Matice stability a fázový portrét systému

Je-li soustava diferenciálních rovnic nelineární, může být řešení mnohem komplikovanější než výsledek (1.63).

Stacionární body řešení: Jde o takové body fázového prostoru, ze kterých se systém samovolně nevyvíjí. Jsou definovány vztahem $d\xi_k/dt = 0$. Nalezneme je tak, že pravé strany soustavy diferenciálních rovnic (1.56) položíme rovny nule:

$$f_k(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \text{rovnice pro stacionární body.} \quad (1.64)$$

Poznámka: „Vložíme-li“ systém přesně do stacionárního bodu, (= připravíme ho s takovými počátečními podmínkami), zůstane v tomto bodě fázového prostoru navěky.

Stabilita řešení: Budeme zkoumat, zda stacionární body jsou stabilní vzhledem k malým poruchám (perturbacím). Můžeme si představit, že systém vložený do stacionárního bodu nepatrně vychýlíme a zkoumáme, zda se samovolně do stacionárního bodu vrátí (stabilní bod) nebo zda se od něho bude vzdalovat (nestabilní bod).

Hledejme tedy řešení rovnice (1.56) ve tvaru

$$\xi_k = \xi_k^{(S)} + \delta \xi_k \quad , \quad k=1, \dots, N \quad ,$$

kde $\boldsymbol{\xi}^{(S)}$ je stacionární bod splňující $f_k(\boldsymbol{\xi}^{(S)}) = 0$; $\delta \boldsymbol{\xi}$ je malá porucha 1. řádu. Tento tvar dosadíme do výchozí soustavy rovnic:

$$\frac{d}{dt} (\xi_k^{(S)} + \delta \xi_k) = f_k(\boldsymbol{\xi}^{(S)} + \delta \boldsymbol{\xi})$$

a provedeme Taylorův rozvoj pravé strany do prvního řádu

$$\frac{d}{dt}(\delta \xi_k) = f_k(\xi^{(S)}) + \left. \frac{\partial f_k}{\partial \xi_l} \right|_{\xi^{(S)}} \cdot \delta \xi_l .$$

Vzhledem k stacionaritě $\xi^{(S)}$ je první člen na pravé straně nulový a můžeme psát

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \xi_1 \\ \vdots \\ \delta \xi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \xi_1 \\ \vdots \\ \delta \xi_N \end{pmatrix} , \quad (1.65)$$

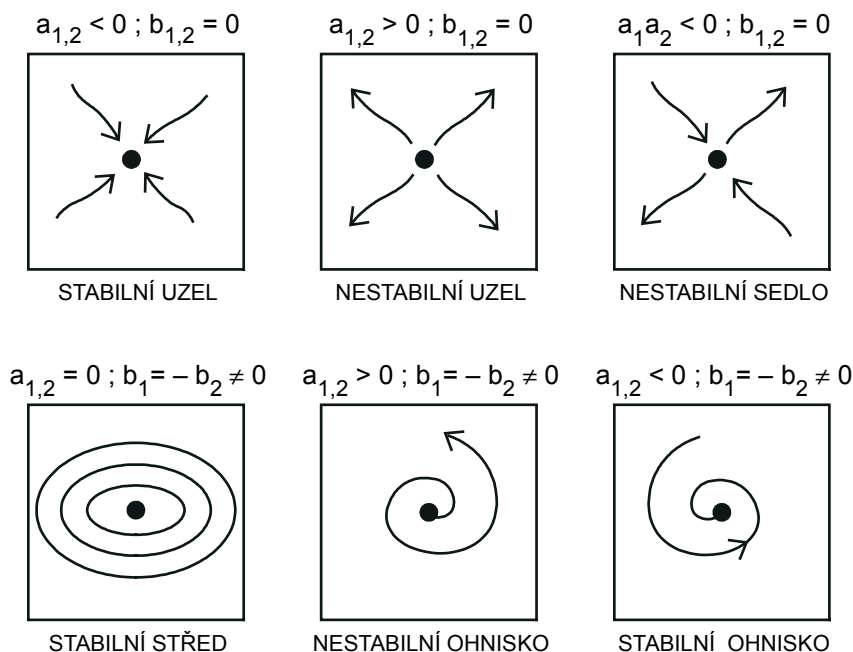
kde

$$a_{kl} \equiv \left. \frac{\partial f_k}{\partial \xi_l} \right|_{\xi^{(S)}} \quad (1.66)$$

je tzv. *matice stability*. Jde o parciální derivace pravých stran rovnic (1.56) podle jednotlivých proměnných ve zkoumaném stacionárním bodě. Soustava rovnic (1.65) pro malé poruchy $\delta \xi$ je linearizovaná a její řešení umíme najít pomocí vlastních čísel a vlastních směrů matice **A**. Je-li $\text{Re}(\lambda) < 0$, bude daný mod utlumen ($\exp(\lambda t)$) a řešení je stabilní v příslušném vlastním směru. Je-li $\text{Re}(\lambda) > 0$, je mod v daném směru nestabilní. Je-li $\lambda = \pm i b$, malá porucha systém v okolí stacionárního bodu rozkmitá .

Poznámky:

- 1) Pro soustavu dvou diferenciálních rovnic bude matice stability rozměru 2×2 mít dvě vlastní čísla $\lambda_1 = a_1 + i b_1$ a $\lambda_2 = a_2 + i b_2$ a jsou možné následující situace:



- 2) Ze znalosti stacionárních bodů a vlastních čísel a směrů matice stability jsme zpravidla již schopni odhadnout fázový portrét soustavy. Ukázky jsou v následujících příkladech.

Příklad 2: Nelineární oscilátor

Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1 + \varepsilon \xi_1^2 \quad .\end{aligned}$$

Oproti standardnímu harmonickému oscilátoru je zde navíc nelineární člen s koeficientem ε . Nejprve určíme z nulovosti pravých stran stacionární body A, B :

$$\begin{aligned}\xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + \varepsilon \xi_1^2 = 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}A = [0, 0] \\ B = [1/\varepsilon, 0]\end{aligned}$$

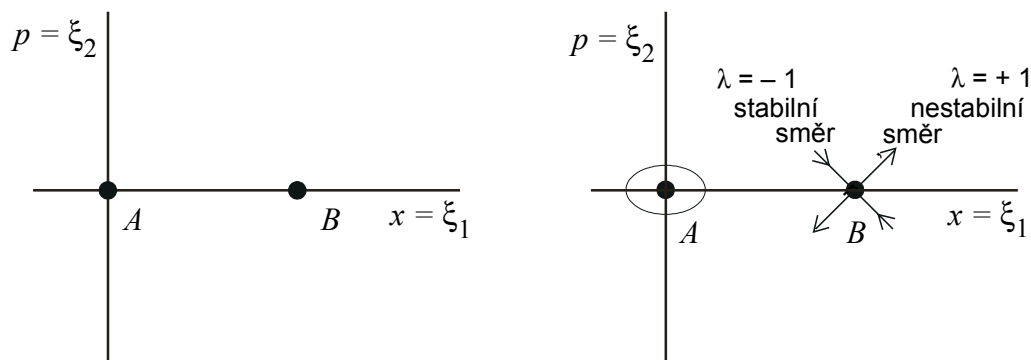
a zakreslíme je do fázového prostoru. Potom nalezneme matici stability (1.66) v obecném tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\varepsilon \xi_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

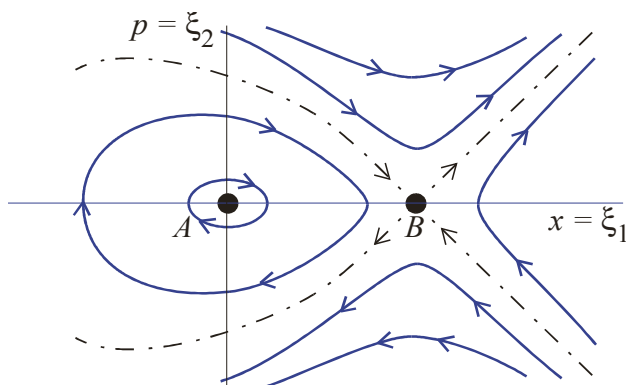
Tuto matici určíme v stacionárních bodech A a B . Vypočteme vlastní čísla a vlastní vektory z rovnic (1.61) a (1.62):

$$\begin{aligned}A: \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \quad \Rightarrow \text{porucha } e^{\pm i t} \\ B: \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = +1 & , \quad \boldsymbol{\eta}_1 = c \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix} & , \quad \text{porucha } e^{+t} \\ \lambda_2 = -1 & , \quad \boldsymbol{\eta}_2 = c \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} & , \quad \text{porucha } e^{-t} \end{cases} .\end{aligned}$$

Do fázového prostoru zakreslíme nalezené typy stability i odpovídající vlastní směry:



Ze stacionárních bodů, typů stability v nich a vlastních směrů lze zpravidla odhadnout celý fázový portrét soustavy:



Příklad 3: Částice v periodickém potenciálu (například nabitá částice v krystalové mříži)

Předpokládejme, že se částice pohybuje v poli potenciální energie dané vztahem

$$V(x) = -V_0 \cos \frac{2\pi x}{a} .$$

Perioda potenciálu je a a výška V_0 . Je zřejmé, že částice s celkovou energií $E < V_0$ může být zachycena v minimech potenciální energie (oscilovat) a částice s energií $E > V_0$ se může volně pohybovat. Příslušné Hamiltonovy rovnice budou:

$$H = \frac{p^2}{2m} - V_0 \cos \frac{2\pi x}{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{2\pi V_0}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} . \end{aligned}$$

Stejně jako v prvním příkladu odhlédneme od nepodstatných konstant (jsou dány volbou jednotek a souřadnic) a budeme řešit soustavu rovnic typu

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\sin \xi_1 . \end{aligned}$$

V okolí počátku by po nahrazení funkce „sinus“ argumentem tato rovnice vedla na harmonický oscilátor (v počátku je minimum potenciální energie). Obecně je tato rovnice díky funkci „sinus“ nelineární. Budeme postupovat tak jako v minulém příkladu. Stanovíme stacionární body, najdeme v nich matici stability, určíme vlastní čísla a vlastní vektory a zrekonstruujeme fázový portrét soustavy:

$$\text{stacionární body:} \quad \begin{aligned} \xi_2 = 0 \\ \sin \xi_1 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A_k = [k\pi, 0] \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{matice stability:} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

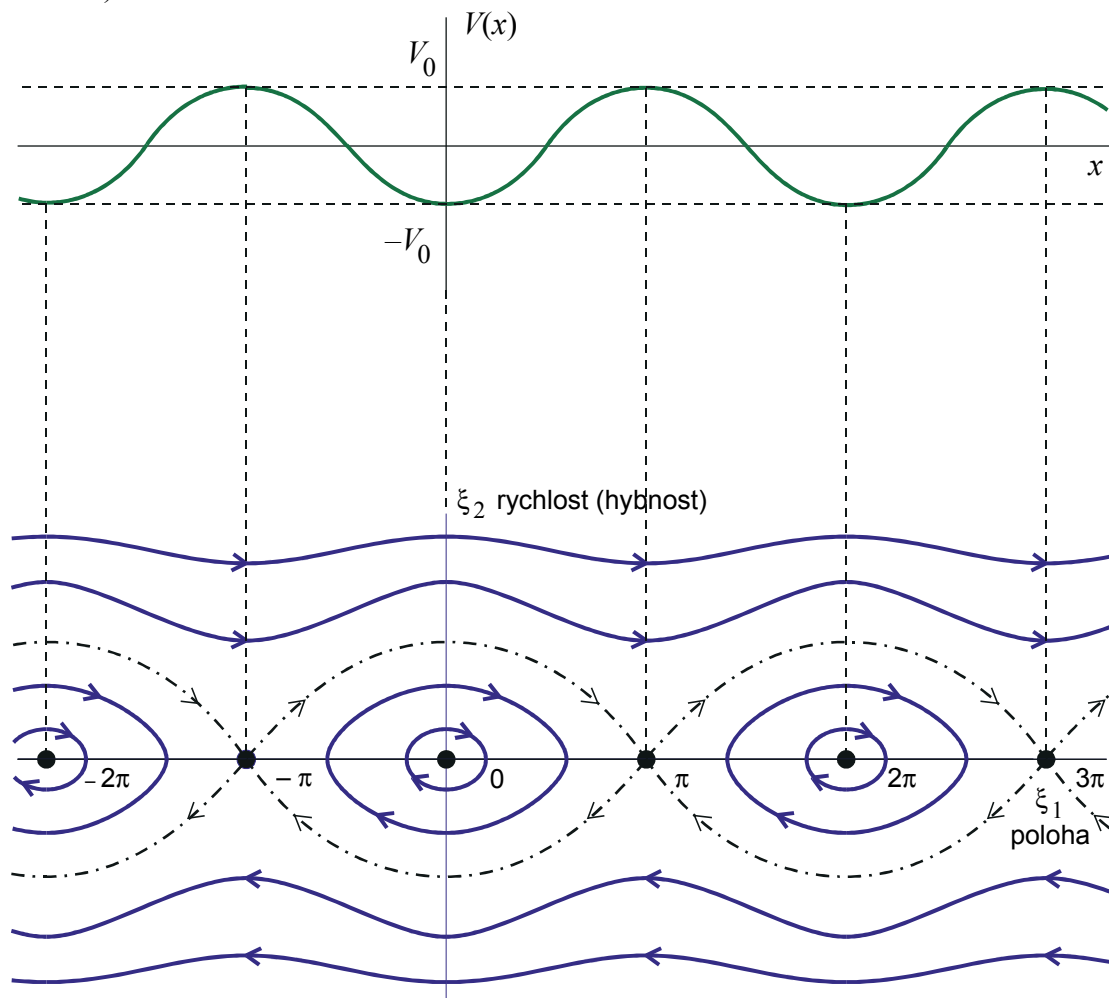
$$k \text{ sudé:} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i \quad \Rightarrow \quad \text{porucha } e^{\pm it}$$

k liché:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = +1, & \boldsymbol{\eta}_1 = c \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}, & \text{porucha } e^{+t} \\ \lambda_2 = -1, & \boldsymbol{\eta}_2 = c \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{porucha } e^{-t} \end{cases}$$

Částice s malou energií oscilují v minimech potenciální energie (jsou zachyceny). Částice s vyššími energiemi se pohybují buď v kladném směru osy x (horní dvě trajektorie) nebo v záporném směru osy x (dolní dvě trajektorie). Čím vyšší je rychlost částice, tím méně je její pohyb ovlivněn periodickým potenciálem.

Separatrix: odděluje trajektorie různého typu (v předchozích příkladech je značena čerchovaně).



1. 5. 2. Metoda potenciálu

Problém stability lze řešit i jinak než výpočtem z matice stability. V některých případech můžeme nalézt tzv. potenciál soustavy. Jde o funkci $\phi(\xi_1, \dots, \xi_N)$ v jejichž maximech je soustava nestabilní (analogie kuličky na vrcholu kopce) a v minimech je soustava stabilní (analogie kuličky v důlku). Známe-li potenciál $\phi(\xi_1, \dots, \xi_N)$, můžeme si tuto funkci představit jako výšku terénu ϕ nad prostorem (ξ_1, \dots, ξ_N) . Kopce, údolí, sedla a ostatní tvary tohoto terénu odpovídají stejným typům stability jako by měla kulička vložená na dané místo terénu v gravitačním poli.

V jednodimenzionálním případě máme jedinou diferenciální rovnici

$$\dot{\xi} = f(\xi) \quad (1.67)$$

Postupem z minulé kapitoly bychom nejprve určili stacionární body z rovnice $f(\xi) = 0$, potom jednoprvkovou matici stability $a = df/d\xi$ a její hodnotu v nalezených stacionárních bodech. Pro $a > 0$ je systém nestabilní a pro $a < 0$ je systém stabilní (porucha e^{at}).

Definice:

$$\phi(\xi) \equiv - \int f(\xi) d\xi \quad (1.68)$$

nazýváme potenciál rovnice (1.67). Přímou z definice snadno ukážeme, že platí

$$\begin{aligned} \phi \text{ má extrém} &\Rightarrow d\phi/d\xi = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0 \Rightarrow \text{stac. bod} \\ \phi \text{ má maximum} &\Rightarrow d^2\phi/d\xi^2 < 0 \Rightarrow a = df/d\xi > 0 \Rightarrow \text{nestabilita} \\ \phi \text{ má minimum} &\Rightarrow d^2\phi/d\xi^2 > 0 \Rightarrow a = df/d\xi < 0 \Rightarrow \text{stabilita.} \end{aligned}$$

Ve vícedimenzionálním případě se pro soustavu (1.56) postupuje obdobně. Definujeme diferenciální formu

$$d\phi \equiv -f_1(\boldsymbol{\xi})d\xi_1 - f_2(\boldsymbol{\xi})d\xi_2 - \dots - f_N(\boldsymbol{\xi})d\xi_N \quad (1.69)$$

a hledáme potenciál ϕ tak, aby $f_k = -\partial\phi/\partial\xi_k$. Výraz (1.69) je potom úplným diferenciálem funkce ϕ . Není-li diferenciální forma (1.69) integrabilní, lze hledat integrační faktor $\mu(\boldsymbol{\xi})$ tak, aby byla integrabilní forma

$$d\phi \equiv -f_1 \mu d\xi_1 - f_2 \mu d\xi_2 - \dots - f_N \mu d\xi_N \quad .$$

Pro $N \leq 3$ existuje integrační faktor vždy.

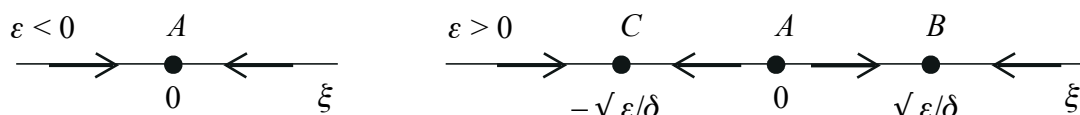
Z tvaru nalezené funkce ϕ již snadno rozhodneme o stabilitě systému. Následující příklad je pro srovnání vyřešen pomocí matice stability i metodou potenciálu.

Příklad 4: Potenciál „koňakové lahve“

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\xi - \delta\xi^3 \quad ; \quad \delta > 0 \quad ; \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon < 0: & \quad \text{stac. bod } A: \quad \xi_s = 0 \\ & \quad \text{matice stability} \quad a = \varepsilon - 3\delta\xi_s^2 = \varepsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bod } A \text{ stabilní} \end{aligned}$$

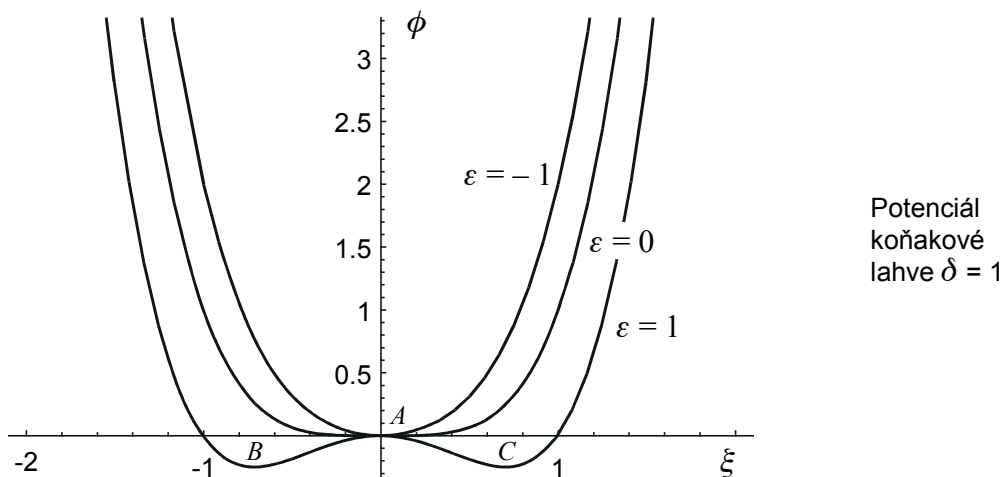
$$\begin{aligned} \varepsilon > 0: & \quad \text{stac. body } A, B, C: \quad \xi_s = 0 \quad ; \quad \xi_s = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}} \\ & \quad \text{matice stability} \quad a = \varepsilon - 3\delta\xi_s^2 = \begin{cases} \varepsilon & \text{pro bod } A & \text{nestabilní} \\ -2\varepsilon & \text{pro body } B, C & \text{stabilní} \end{cases} \end{aligned}$$



Řešení metodou potenciálu:

$$\phi(\xi) \equiv - \int f(\xi) d\xi = -\varepsilon \frac{\xi^2}{2} + \delta \frac{\xi^4}{4}.$$

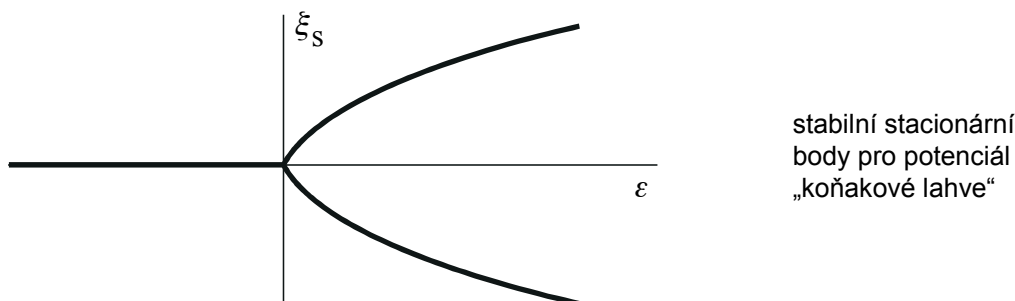
Na obrázku je znázorněn průběh potenciálu pro $\delta = 1$ a různé hodnoty parametru ε . Vidíme, že pro $\varepsilon < 0$ má ϕ jediné minimum v počátku, ve kterém je stabilní bod A . Pro $\varepsilon > 0$ se tento bod stává maximem a je nestabilní. Objevují se však dvě minima v bodech $\xi = \pm \sqrt{\varepsilon / \delta}$, ve kterých je systém stabilní. Vzhledem k charakteristickému tvaru funkce ϕ pro $\varepsilon > 0$ se tato funkce nazývá „potenciál koňakové lahve“.



1. 5. 3. Bifurkace

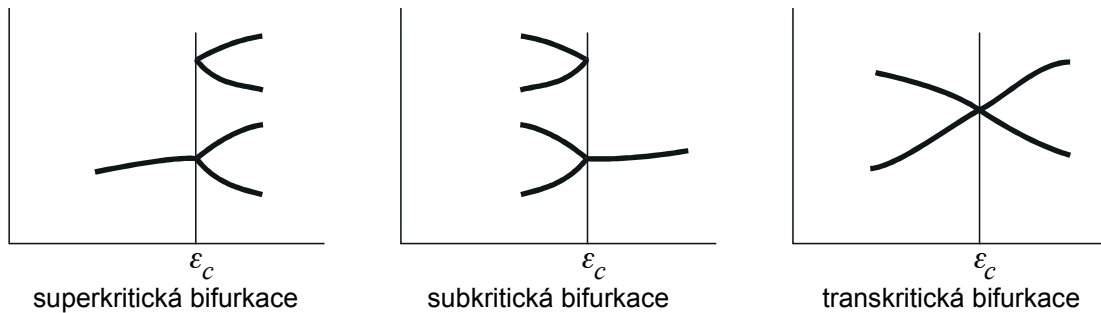
Bifurkaci nazýváme náhlou změnu fázového portréту soustavy při spojitě změně některého řídicího parametru výchozích rovnic.

V příkladu 4 z minulé kapitoly vypadá fázový portrét jinak pro $\varepsilon < 0$ a jinak pro $\varepsilon > 0$. Při pomalé změně ε se pomalu mění fázový portrét soustavy. Výjimkou je bod $\varepsilon = 0$. Fázové portréty pro $\varepsilon < 0$ a $\varepsilon > 0$ nejsou topologicky ekvivalentní (nelze je na sebe převést spojitým zobrazením).



Typickým jevem při bifurkaci je větvení řešení. V příkladu 4 je pro $\varepsilon < 0$ jediný stabilní bod $\xi_s = 0$, pro $\varepsilon > 0$ existují dva stabilní body $\xi_s = \pm \sqrt{\varepsilon / \delta}$, bod $\xi_s = 0$ se stává nestabilní.

Podle typu větvení řešení můžeme bifurkace dělit na superkritické, subkritické a transkritické:



Fázové přechody druhého druhu - typická bifurkace

Potenciál koňakové lahve se využívá v teorii fázových přechodů druhého druhu (Landau). Fázové přechody prvního druhu jsou změny látky, při kterých se skokem mění vnitřní energie, objem, entropie, atd. (tání, tuhnutí, var). Fázové přechody druhého druhu jsou změny látky, při kterých se skokem mění až první derivace výše uvedených veličin: měrné teplo, teplotní roztažnost, modul pružnosti, susceptibilita, atd.

Typickým fázovým přechodem 2. druhu je změna chování feromagnetika při Curieově teplotě T_c . Uvažujme pro názornost jen jednu nekonečnou řadu spinů $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, které mohou být orientovány jen nahoru nebo dolů (tomu budou odpovídat hodnoty $\sigma_a = \pm 1$) s jednoduchou interakční energií danou vztahem

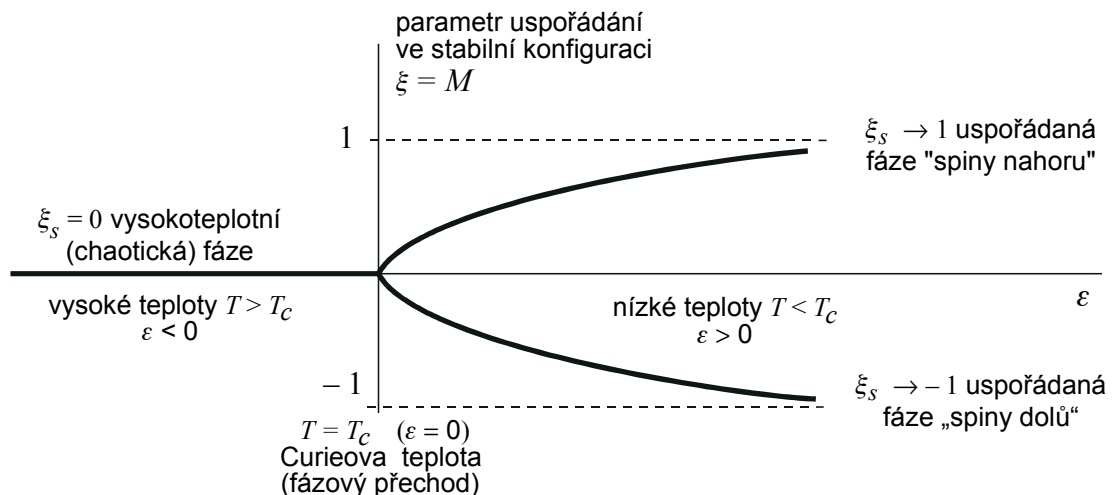
$$H = -J \sum_{\langle \sigma_a \sigma_b \rangle} \delta_{\sigma_a \sigma_b} .$$

Sumace probíhá přes nejbližší sousedy. Jsou-li tedy dva sousední spiny orientovány souhlasně, přispějí k celkové energii hodnotou $-J$, jsou-li orientovány nesouhlasně, nepřispějí vůbec. Při nízkých teplotách ($T < T_c$) mají spiny snahu zaujmout stav s co možná nejnižší energií, tj. orientují se převážně stejným směrem. Jsou tedy možné dvě typické konfigurace: $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$ nebo $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \uparrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$.

Zvyšujeme-li teplotu, dojde při $T = T_c$ k fázovému přechodu. Při teplotách $T > T_c$ jsou spiny promíseny náhodně $\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \uparrow \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow \downarrow \uparrow$ a feromagnetické vlastnosti se ztrácí. Zavedeme-li *parametr uspořádání* (magnetizaci) jako průměrnou hodnotu spinu

$$M \equiv \frac{1}{N} \sum_a \sigma_a,$$

potom v nízkoteplotní fázi s klesající teplotou $M \rightarrow \pm 1$ a ve vysokoteplotní fázi s rostoucí teplotou $M \rightarrow 0$. Potenciál „koňakové lahve“ a s ním souvisící rovnice (1.70) velmi dobře popisuje právě takový fázový přechod. Veličina ξ odpovídá parametru uspořádání tj. $\xi = M$ a řídicímu parametru odpovídá veličina $\varepsilon = T_c - T$:



Poznámka: Podobné typy potenciálů jako je potenciál „koňakové lahve“ se uplatňují nejen při popisu fázových přechodů, ale například v inflačním modelu raných vývojových fází Vesmíru a při popisu spontánního narušení symetrie v přírodě.

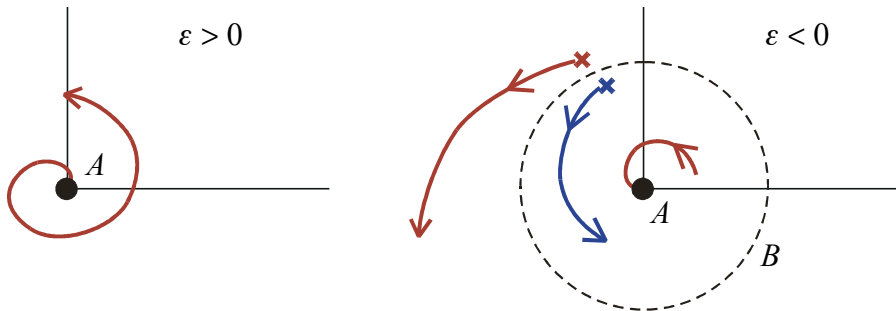
Příklad 5: Hopfova bifurkace

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\varepsilon + \delta r^2) \quad , \\ \dot{\varphi} &= \omega \quad ; \quad \delta > 0, \quad r \geq 0, \quad \varphi \in R \quad . \end{aligned} \tag{1.71}$$

Jde o soustavu rovnic pro pohyb systému v polárních souřadnicích. Řešení pro úhel je okamžité: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$. V úhlu φ jde tedy o rotační pohyb proti směru hodinových ručiček s úhlovou frekvencí ω . Zbývá jediná rovnice pro nezápornou radiální vzdálenost $r(t)$. Snadno nalezneme řešení stacionárních bodů a stability:

$\varepsilon < 0$: stac. body A, B : $r_s = 0$; $r_s = \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{\delta}}$
 matice stability $a = \varepsilon + 3\delta r_s^2 = \begin{cases} \varepsilon & \text{pro bod } A \text{ stabilní} \\ -2\varepsilon & \text{pro bod } B \text{ nestabilní} \end{cases}$

$\varepsilon > 0$: stac. bod A : $r_s = 0$
 matice stability $a = \varepsilon + 3\delta r_s^2 = \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bod } A \text{ nestabilní.}$



Pro $\varepsilon > 0$ je počátek souřadnic nestabilní ohnisko. Pro $\varepsilon < 0$ je počátek souřadnic stabilní ohnisko a „bod“ B s $r_s = \sqrt{|\varepsilon|/\delta}$ je nestabilní. Ve skutečnosti tvoří B celou množinu bodů v kartézské souřadnicové soustavě - kružnici. Systémy s počáteční podmínkou $r > r_s$ se budou spirálovitě vzdalovat od středu a systémy s $r < r_s$ se budou spirálovitě přibližovat ke středu. Všechny trajektorie se od množiny B vzdalují. Na obrázku jsou ukázány dvě trajektorie s blízkými počátečními podmínkami, jejichž vzdálenost s rostoucím časem exponenciálně narůstá. Jde o tzv. *ljapunovskou* nestabilitu, kterou se budeme zabývat v příští kapitole.

1. 5. 4. Ljapunovská stabilita, limitní cyklus, atraktor

Zkoumejme, jak se budou vyvíjet dvě trajektorie s blízkými počátečními podmínkami ξ_0 a $\xi_0 + \varepsilon$ v čase:



Řekneme, že trajektorie je *ljapunovsky nestabilní*, jestliže existuje trajektorie s blízkou počáteční podmínkou, která se od zkoumané trajektorie bude s časem exponenciálně

vzdalovat. Řekneme, že trajektorie je *Ljapunovsky stabilní*, jestliže se všechny trajektorie k ní v čase t_0 blízké budou exponenciálně přibližovat.

Mění-li se v čase vzdálenost obou trajektorií exponenciálně, platí

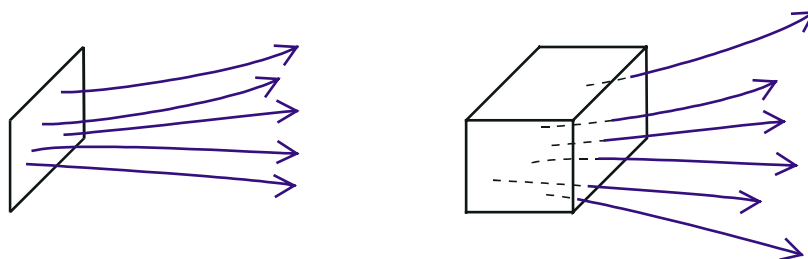
$$\|\xi(t, \xi_0 + \epsilon) - \xi(t, \xi_0)\| \sim e^{\lambda t}$$

a snadno určíme

$$\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \|\xi_\epsilon - \xi\| .$$

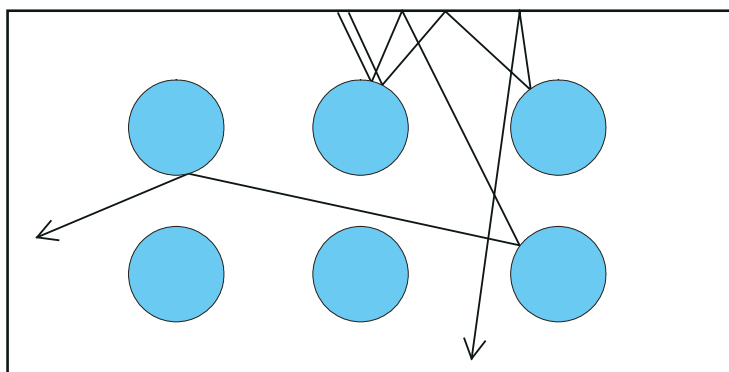
Koeficient λ se nazývá Ljapunovův exponent. Je-li $\lambda > 0$ hovoříme o Ljapunovsky nestabilní trajektorii. Je-li $\lambda < 0$, o Ljapunovsky stabilní trajektorii. Je-li $\lambda = 0$ je závislost jiná než exponenciální, například mocninná, a nelze hovořit o Ljapunovské stabilitě či nestabilitě.

Ve vícedimenzionálních úlohách s $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ Ljapunovův exponent závisí na způsobu provedení limity $\epsilon \rightarrow 0$. Získáme tak N Ljapunovských koeficientů 1. řádu (ve směru souřadnicových os). Můžeme ale sledovat i celý svazek blízkých trajektorií z dvou nebo třídimenzionální oblasti:



Potom hovoříme o vícerozměrných Ljapunovských exponentech (2. řádu, 3. řádu, ...). Trajektorie je Ljapunovsky stabilní, jsou-li všechny Ljapunovské koeficienty $\lambda \leq 0$.

Příkladem Ljapunovsky nestabilní trajektorie je množina $r_s = \sqrt{|\epsilon|/\delta}$ pro $\epsilon < 0$ v posledním příkladu na Hopfovou bifurkaci. Trajektorie s $r \geq r_s$ jsou Ljapunovsky nestabilní. Trajektorie s $r < r_s$ jsou Ljapunovsky stabilní. Jiný příklad Ljapunovské nestability je kulečnický s překážkami podle následujícího obrázku:

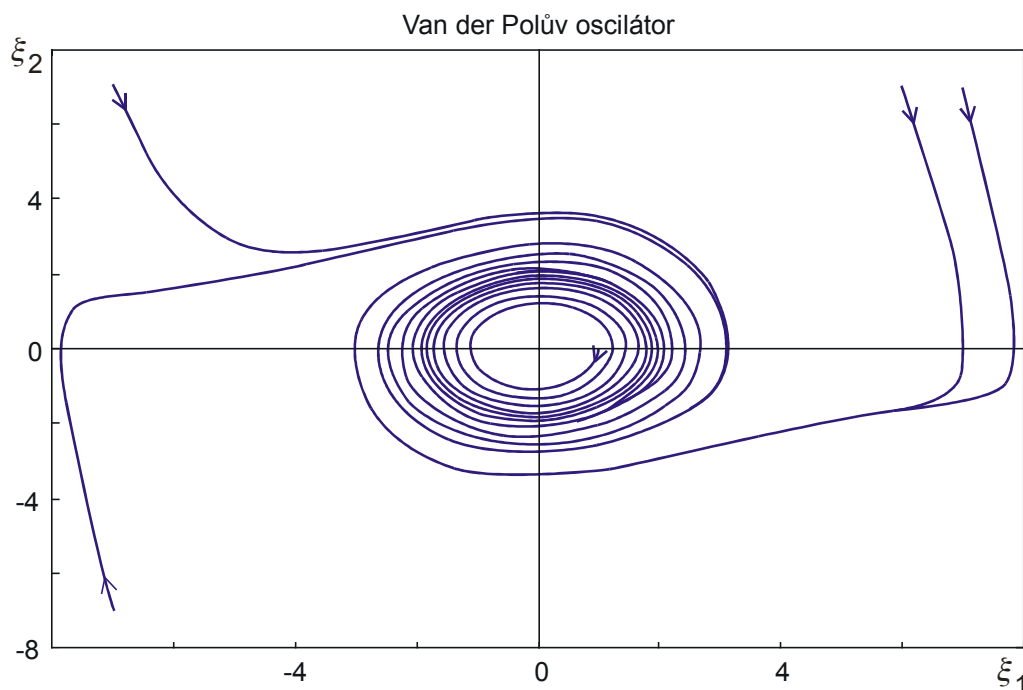


Dvě blízké trajektorie spolu v pozdějších časech přestávají souviset.

Příklad 6: Van der Polův oscilátor

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1 + \varepsilon(1 - \delta \xi_1^2)\xi_2 \quad ; \quad \delta > 0 \quad .\end{aligned}\tag{1.72}$$

V tomto systému se trajektorie s libovolnou počáteční podmínkou blíží k jediné periodické trajektorii, kterou nazýváme *limitní cyklus*. Za dosti dlouhou dobu se každá trajektorie přiblíží libovolně blízko k trajektorii limitního cyklu. Všechny trajektorie z blízkého okolí limitního cyklu jsou Ljapunovskiy stabilní. V následujícím obrázku jsou fázové trajektorie pro různé počáteční podmínky pro van der Polův oscilátor s $\delta = 1$ a $\varepsilon = 0.1$.

**Některé základní pojmy z teorie množin***Vzdálenost dvou bodů $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B})$:*

V tomto učebním textu budeme vzdálenost dvou bodů definovat jako

- $$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^N (A_k - B_k)^2} \quad .$$

Tj. vzdálenost je určována z Pythagorovy věty. Pro definici vzdálenosti lze použít i jiný předpis splňující základní požadavky na pojem vzdálenosti. Vzdálenost dvou bodů často píšeme také ve tvaru $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$, kde

- $$\|\mathbf{X}\| \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^N X_k^2} \quad .$$

Jde o normu (velikost) rozdílového vektoru $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Vzdálenost bodu a množiny $\rho(\mathbf{A}, \mathcal{M})$:

- minimum vzdáleností od všech bodů množiny, včetně její hranice ($\overline{\mathcal{M}}$);

- $$\rho(\mathbf{A}, \mathcal{M}) \equiv \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{M}} \rho(\mathbf{A}, \mathbf{X}) \quad .$$

 ε -okolí bodu $U_\varepsilon(\mathbf{A})$

- kruh bez hranice se středem v \mathbf{A} a poloměrem ε ;
- $$U_\varepsilon(\mathbf{A}) \equiv \{\mathbf{X}; \rho(\mathbf{A}, \mathbf{X}) < \varepsilon\} \quad .$$

Otevřená množina \mathcal{M}_o

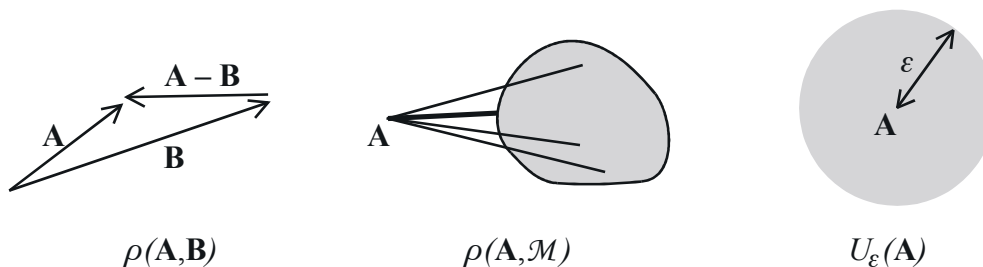
- kolem každého bodu množiny lze zkonstruovat okolí, které je celé v množině \mathcal{M}_o ;
- $$\text{ke } \forall \mathbf{X} \in \mathcal{M}_o \exists U_\varepsilon(\mathbf{X}) \subset \mathcal{M}_o \quad ;$$
- zjednodušeně lze říci, že otevřené množiny neobsahují svou hranici.

Uzavřená množina \mathcal{M}_u

- nalezneme-li posloupnost bodů z \mathcal{M}_u , která v nějakém smyslu konverguje, potom bude limita z této posloupnosti vždy součástí množiny \mathcal{M}_u ;
- $$\mathbf{X}^{(k)} \in \mathcal{M}_u \quad ; \quad \mathbf{X}^{(k)} \rightarrow \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} \in \mathcal{M}_u \quad ;$$
- zjednodušeně lze říci, že uzavřené množiny obsahují svou hranici.

Poznámky:

- 1) V našem případě fázového prostoru jsou body \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{X} vždy nějaké N -tice (ξ_1, \dots, ξ_N) .
- 2) Uzavřený interval a kruh s hranicí jsou uzavřené množiny; otevřený interval a kruh bez hranice jsou otevřené množiny; polouzavřený interval není ani otevřená ani uzavřená množina; prázdná množina a celý prostor R^2 jsou ve smyslu předchozích definic otevřené i uzavřené množiny.

**Definice z teorie množin vztahující se k řešení soustavy diferenciálních rovnic****Invariantní množina \mathcal{J}**

- Interpretujeme-li libovolný bod množiny \mathcal{J} jako počáteční podmínku soustavy diferenciálních rovnic (1.56), potom celá následující trajektorie bude ležet v množině \mathcal{J} . Jakmile se tedy systém dostane do množiny \mathcal{J} , potom v ní bude setrávat i ve všech pozdějších časech.
- $$\mathcal{J} = \{\mathbf{X}; \mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\xi}(t_0) \in \mathcal{J} \Rightarrow \mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}(t) \in \mathcal{J} \text{ pro } \forall t > t_0\} \quad .$$

Hustě pokrytá množina \mathcal{D}

- V libovolně malém okolí každého bodu množiny \mathcal{D} prochází nějaká fázová trajektorie.

Chaotická množina \mathcal{X}

- 1) každá trajektorie v \mathcal{X} je l'apunovsky nestabilní,

- 2) existuje trajektorie, která X hustě pokryje,
- 3) X je invariantní množina.

Atraktor \mathcal{A}

- 1) trajektorie z okolí \mathcal{A} jsou k \mathcal{A} „přitahovány“, tj s rostoucím časem se k \mathcal{A} blíží:

$$\exists U_{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}, \text{ že pro } \forall \xi(t_0) \in U_{\mathcal{A}} \text{ platí } \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\xi(t), \mathcal{A}) = 0 \text{ ,}$$

- 2) existuje trajektorie, která \mathcal{A} hustě pokryje,
- 3) \mathcal{A} je invariantní množina,
- 4) \mathcal{A} je uzavřená množina.

Podivný atraktor S

Podivný atraktor je chaotický atraktor, tj. všechny trajektorie podivného atraktoru jsou l'apunovsky nestabilní.

Limitní cyklus C

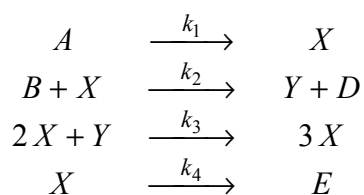
Uzavřená fázová trajektorie, která je atraktor.

Poznámky :

- 1) Každý stacionární bod je invariantní množinou. Také každá uzavřená trajektorie, například harmonického oscilátoru, je invariantní množinou.
- 2) Každá uzavřená trajektorie tvoří automaticky invariantní uzavřenou hustě pokrytou množinu. Limitní cyklus navíc „přitahuje“ trajektorie z okolí, tj. má první vlastnost atraktoru.
- 3) Příkladem chaotické množiny je plocha kulečnicku na straně 39.
- 4) Podivný atraktor může vzniknout jen v problému s dimenzí $N \geq 3$.
- 5) Pro dvě rovnice platí *Benoixonovo kritérium*: $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2$ nemění v jednoduše souvislé oblasti znaménko \Rightarrow v této oblasti neexistuje uzavřená trajektorie.

Příklad 7: 2D bruselátor

Budeme zkoumat chemickou reakci typu



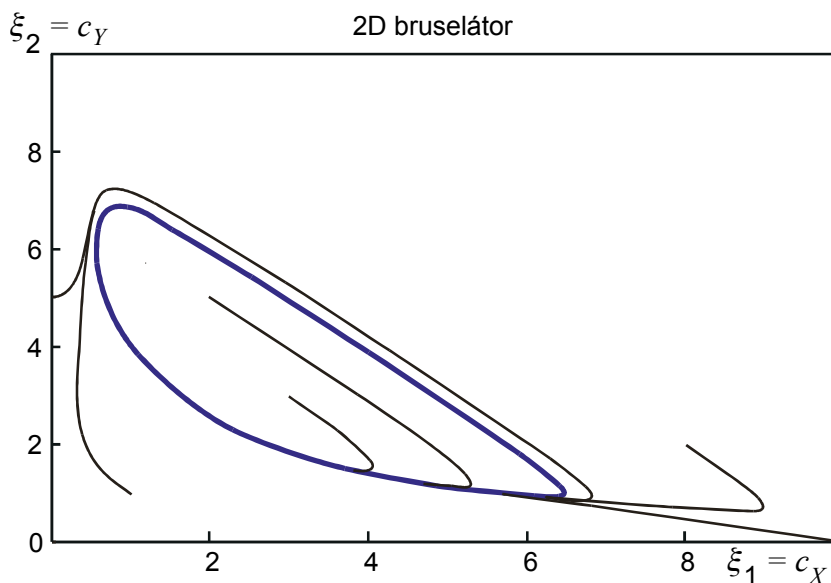
Rychlosti jednotlivých reakcí jsou označeny k_1, \dots, k_4 . Koncentrace výchozích látek a produktů označíme c_A, c_B, c_D, c_E . Proměnnými budou koncentrace látek X a Y : $\xi_1 = c_X$, $\xi_2 = c_Y$. Z tvaru reakcí sestavíme výchozí soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= k_1 c_A - k_2 c_B \xi_1 + k_3 \xi_1^2 \xi_2 - k_4 \xi_1 \text{ ,} \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= k_2 c_B \xi_1 - k_3 \xi_1^2 \xi_2 \text{ .} \end{aligned}$$

Na pravých stranách jsou jen zapsány způsoby vzniku a zániku látek X a Y . Opustíme-li nepodstatné konstanty, jde o rovnice typu

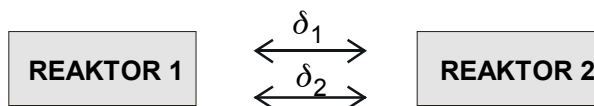
$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha - (\beta+1)\xi_1 + \xi_1^2 \xi_2, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \beta\xi_1 - \xi_1^2 \xi_2.\end{aligned}\quad (1.73)$$

Tyto rovnice poskytují řešení ve tvaru limitního cyklu. Pro hodnoty $\alpha = 2$ a $\beta = 5.9$ a různé počáteční podmínky jsou fázové trajektorie na následujícím obrázku. Po dosti dlouhém čase se koncentrace ξ_1 a ξ_2 periodicky se mění (oscilují) kolem jistých středních hodnot.



Příklad 8: 4D bruselátor

Budeme předpokládat, že předchozí reakce probíhá současně ve dvou reaktorech s možností výměny látky X rychlostí δ_1 a látky Y rychlostí δ_2 . Koncentrace látek X a Y v reaktorech 1 a 2 označíme takto: $\xi_1 = c_{X1}$, $\xi_2 = c_{Y1}$, $\xi_3 = c_{X2}$, $\xi_4 = c_{Y2}$.

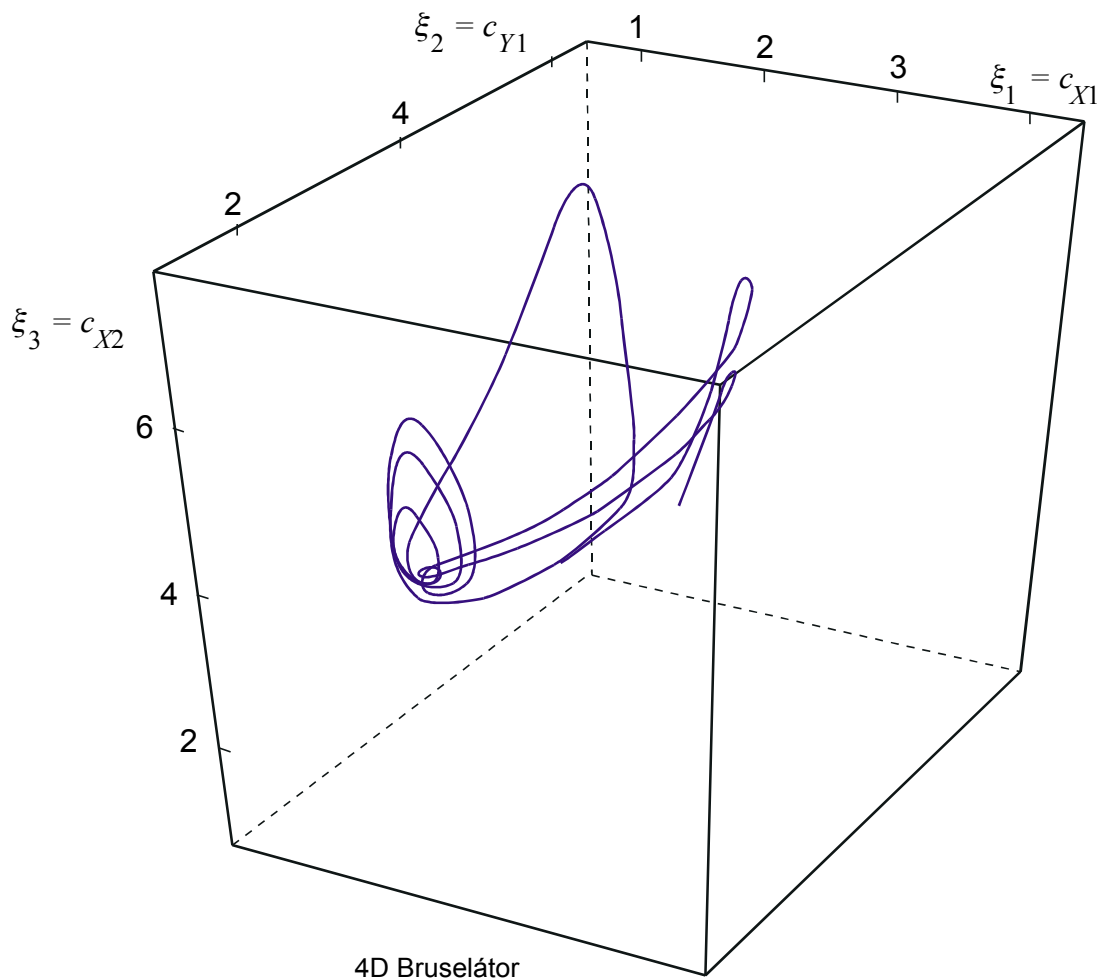


Výchozí rovnice budou

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha - (\beta+1)\xi_1 + \xi_1^2 \xi_2 + \delta_1(\xi_3 - \xi_1), \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \beta\xi_1 - \xi_1^2 \xi_2 + \delta_2(\xi_4 - \xi_2), \\ \frac{d\xi_3}{dt} &= \alpha - (\beta+1)\xi_3 + \xi_3^2 \xi_4 + \delta_1(\xi_1 - \xi_3), \\ \frac{d\xi_4}{dt} &= \beta\xi_3 - \xi_3^2 \xi_4 + \delta_2(\xi_2 - \xi_4).\end{aligned}\quad (1.74)$$

Jde o soustavu čtyř nelineárních diferenciálních rovnic, jejichž řešení pro některé parametry je podivný atraktor (dimenze systému je větší než 3). Na následujícím obrázku je část fázové

trajektorie, která by hustě pokryla oblast podivného atraktoru pro $\alpha = 2$, $\beta = 5.9$, $\delta_1 = 1.21$ a $\delta_2 = 12.1$.

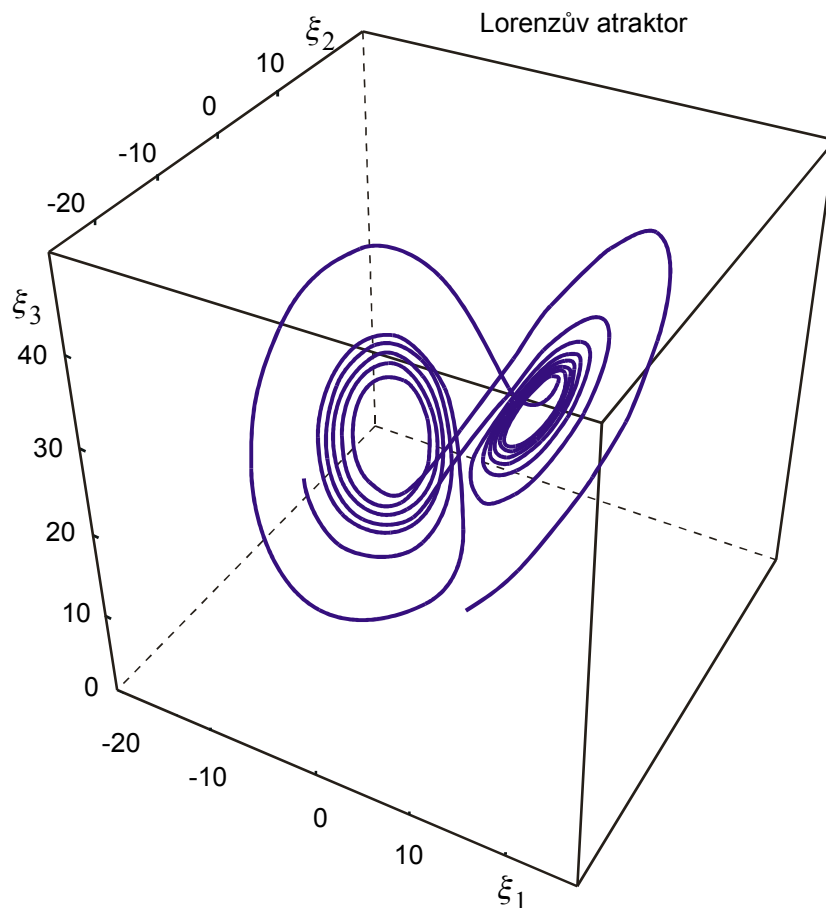


Příklad 9: Lorenzův atraktor

Jde o nejnámější příklad podivného atraktoru. Výchozí sada rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha(\xi_2 - \xi_1) \quad , \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= -\xi_1 \xi_2 + \beta \xi_1 - \xi_2 \quad , \\ \frac{d\xi_3}{dt} &= \xi_1 \xi_2 - \gamma \xi_3 \end{aligned} \quad (1.75)$$

popisuje proudění kapaliny mezi dvěma planparalelními deskami s různými teplotami. Veličiny ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 mají postupně význam: 1. Fourierova komponenta rychlosti, 1. a 2. Fourierova komponenta teploty. Na následujícím obrázku je opět zakreslena část fázové trajektorie, která by hustě pokryla oblast atraktoru. Rovnice byly řešeny pro hodnoty $\alpha = 3$, $\beta = 26.5$, $\gamma = 1$.



1. 5. 5. Evoluční rovnice

Příklad 10: Elektron děrové plazma v silném elektrickém poli

V silném elektrickém poli způsobují urychlené elektrony a díry ionizaci nárazem. Při setkání elektronu s dírou dojde k rekombinaci, tj. zániku nosičů. Označíme-li $\xi_1 = n_e$ koncentraci elektronů a $\xi_2 = n_d$ koncentraci děr, budou mít základní rovnice pro časový vývoj počtu nosičů tvar:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha_1 \xi_1 - \beta \xi_1 \xi_2 \quad , \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \alpha_2 \xi_2 - \beta \xi_1 \xi_2 \quad . \end{aligned} \quad (1.76)$$

První členy na pravé straně popisují ionizační procesy (přírůstek nosičů), druhé členy rekombinační procesy (úbytek nosičů).

Příklad 11: Systém dravec ↔ kořist

Předpokládáme, že dravec se živí kořistí (například vlk a zajíci), kořist má potravu dostatek (jí například trávu). Označíme-li $\xi_1 = n_d$ počet dravců v určité oblasti a $\xi_2 = n_k$ množství potenciální kořisti, budou mít základní rovnice pro časový vývoj počtu zvířat tvar:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= -\alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_1 \xi_2 \quad , \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= +\alpha_2 \xi_2 - \beta_2 \xi_1 \xi_2 \quad .\end{aligned}\tag{1.77}$$

První člen v první rovnici popisuje úhyn dravců v nepřítomnosti kořisti ($\xi_2 = 0$). První člen v druhé rovnici popisuje množení se kořisti v nepřítomnosti dravců ($\xi_1 = 0$). Druhé členy představují požívání kořisti dravci, tzv. „párovou interakci“, díky které počet dravců roste a množství kořisti se snižuje.

Příklad 12: Dvě sociální skupiny

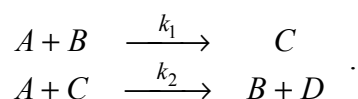
Popišme nyní dvě skupiny lidí s odlišným názorem na určitý problém (přívrženci dvou různých postupů, teorií, názorů, politických stran). Označíme-li $\xi_1 = n_A$ počet přívrženců názoru A a $\xi_2 = n_B$ počet přívrženců názoru B , budou mít základní rovnice pro časový vývoj počtu přívrženců tvar:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_1 \xi_2 \quad , \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \alpha_2 \xi_2 - \beta_2 \xi_1 \xi_2 \quad .\end{aligned}\tag{1.78}$$

Koeficienty β mohou být kladné i záporné, párovou interakci zde tvoří setkání příslušníků různých skupin, diskuze atd.

Příklad 13: Chemické reakce

Uvažme chemickou reakci typu



Rovnice pro časový vývoj jednotlivých koncentrací mají tvar:

$$\begin{aligned}\frac{dn_A}{dt} &= -k_1 n_A n_B - k_2 n_A n_C \quad , \\ \frac{dn_B}{dt} &= -k_1 n_A n_B + k_2 n_A n_C \quad , \\ \frac{dn_C}{dt} &= +k_1 n_A n_B - k_2 n_A n_C \quad , \\ \frac{dn_D}{dt} &= +k_2 n_A n_C \quad .\end{aligned}\tag{1.79}$$

Látka B je katalyzátorem reakce. Je-li A zastoupena v dostatečném množství jako surovina, lze brát $n_A = \text{const.}$ a řešit jen tři rovnice.

Všechny rovnice z předchozích příkladů mají společný tvar

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \alpha_{kj} \xi_j + \beta_k^{jl} \xi_j \xi_l\tag{1.80}$$

a nazývají se *evoluční rovnice*. Poznamenejme, že přes dvojný indexy se sčítá. Charakteristická je lineární kombinace různých párových interakcí. Typickými řešeními jsou oscilace, limitní cykly, ve více jak třech dimenzích vznikají chaotické množiny a podivné atraktory.

Rozeberme nyní řešení soustavy dvou rovnic tvaru

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_1 \xi_2 \quad , \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \alpha_2 \xi_2 + \beta_2 \xi_1 \xi_2 \quad .\end{aligned}\tag{1.81}$$

Standardním postupem zjistíme stacionární body:

$$\xi^{(1)} = (0, 0) \quad ; \quad \xi^{(2)} = (-\alpha_2/\beta_2, -\alpha_1/\beta_1) \quad .$$

Nezapomínejme na význam proměnných ξ . Vesměs jde o počty jedinců nějakého typu. Smysl tedy mají jen nezáporné hodnoty. Z matice stability určíme, že první stacionární bod

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} = (0, 0) \text{ je pro } \alpha_1, \alpha_2 > 0 & \text{ nestabilní} \\ \alpha_1, \alpha_2 < 0 & \text{ stabilní} \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 < 0 & \text{ sedlový bod.}\end{aligned}$$

V druhém stacionárním bodě

$\xi^{(2)} = (-\alpha_2/\beta_2, -\alpha_1/\beta_1)$ je řešení pro

$$\begin{aligned}\alpha_1, \alpha_2 > 0 & \text{ nestabilní v jednom směru.} \\ \alpha_1, \alpha_2 < 0 & \text{ nestabilní v jednom směru.} \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 < 0 & \text{ (různá znaménka } \alpha_1, \alpha_2), \text{ jde o oscilace kolem} \\ & \text{stacionárního bodu.}\end{aligned}$$

Frekvence oscilací jsou

$$\omega = \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2} \quad .\tag{1.82}$$

Tyto oscilace znamenají *oscilující rovnováhu* mezi jedinci obou typů, jejich počet je udržován v mezích daných oscilacemi. Právě takový systém je systém dravec a kořist (příklad 11). V systému elektronů a děr v silném elektrickém poli (příklad 10) není možné dosáhnou oscilující rovnováhy. Počty jedinců dvou sociálních skupin (příklad 12) mohou a nemusí oscilovat, stejně tak jako koncentrace látek v chemických reakcích (příklad 13).

Doplníme-li na pravých stranách evolučních rovnic regulační členy f_k dostaneme tzv. *Volterr-Lotkovovy rovnice*:

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \alpha_{kj} \xi_j + \beta_k^{jl} \xi_j \xi_l + f_k \quad .\tag{1.83}$$

Regulační členy mohou popisovat v systému dravec \leftrightarrow kořist například dodávání potravy zvnějšku nebo vnější regulaci počtu zvířat. Hodnoty f_k mohou být konstantní i různé funkce času (periodický lov). Škála typů řešení Volterr-Lotkovových systémů je velmi bohatá již i pro dvoudimenzionální případ. V různých oblastech fázového prostoru nacházíme různé typy řešení - oscilace, stabilní a nestabilní ohniska, stabilní oblasti, nestabilní oblasti, sedla. Při periodických regulačních členech pozorujeme rezonance, buzení systému. Například rovnice typu dravec \leftrightarrow kořist s regulačními členem

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= -\xi_1 + \xi_1 \xi_2 + 1/4 \quad , \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= +\xi_2 - \xi_1 \xi_2\end{aligned}\tag{1.84}$$

má v bodě $\xi^{(S)} = (1, 3/4)$ řešení ve tvaru stabilního ohniska.

1. 6. POHYBY NABITÝCH ČÁSTIC V ELEKTROMAGNETICKÝCH POLÍCH

- Předpoklady:**
- 1) částice vzájemně neinteragují
 - 2) vlastní pole částic je zanedbatelné.

Elektrická a magnetická pole můžeme popsat buď elektrickou intenzitou \mathbf{E} a magnetickou indukcí \mathbf{B} nebo za pomoci čtyřpotenciálu (ϕ, \mathbf{A}) . Převodní vztahy jsou

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1.85)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.86)$$

Zde předpokládáme, že $\phi(t, \mathbf{x})$ a $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ jsou předem dané funkce. Problém pohybu nabitých částic můžeme potom zapsat v Lagrangeově formulaci takto:

Nerelativisticky

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v} + Q\mathbf{A}$$

$$W = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + Q\phi$$

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi$$

Relativisticky

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (1.87)$$

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + Q\mathbf{A} \quad (1.88)$$

$$W = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + Q\phi \quad (1.89)$$

$$H = c \sqrt{m^2 c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2} + Q\phi. \quad (1.90)$$

Pozn. 1: Energii budeme v této kapitole značit W , abychom ji odlišili od intenzity elektrického pole \mathbf{E} .

Pozn. 2: Povšiměte si, že $W \neq T + V$, energie totiž nezávisí na \mathbf{A} , magnetické pole nemění energii, ale pouze směr rychlosti.

Ukažme (pro jednoduchost v nerelativistickém případě), že příslušné Lagrangeovy rovnice jsou totožné s Lorentzovou rovnicí pro pohyb nabitě částice. Ve složkách máme

$$L = \frac{1}{2} m v_j v_j - Q\phi(t, \mathbf{x}) + Q A_j(t, \mathbf{x}) v_j;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (m v_i + Q A_i) + Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - Q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (m v_i) + Q \frac{\partial A_i}{\partial t} + Q \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - Q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (m v_i) = Q \left[-\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + v_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \right],$$

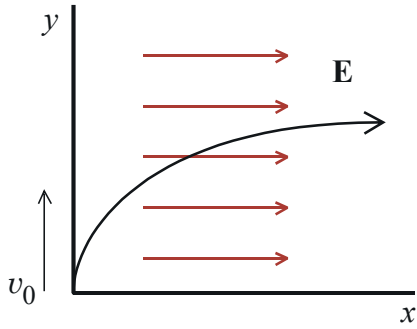
vektorově

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = Q \left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} \right] , \quad (1.91)$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = Q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] ,$$

což je známá Lorentzova rovnice.

1. 6. 1. Konstantní homogenní elektrické pole (relativisticky)



$$\mathbf{E} = (E, 0, 0) \Rightarrow \phi = -Ex ,$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{A} = 0 ;$$

počáteční podmínky:

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0) ,$$

$$\mathbf{p}(0) = (0, \gamma m v_0) , \quad \text{kde } \gamma \equiv 1/\sqrt{1-v_0^2/c^2} .$$

Hodnota potenciálu ϕ plyne ze vztahu (1.85) pro $\mathbf{A} = 0$. Hamiltonova funkce problému je

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2} + Q\phi = c\sqrt{m^2c^2 + p_x^2 + p_y^2} - QEx ,$$

a příslušné Hamiltonovy rovnice mají tvar

$$\dot{x} = \{x, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{cp_x}{\sqrt{m^2c^2 + p_x^2 + p_y^2}} ,$$

$$\dot{y} = \{y, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{cp_y}{\sqrt{m^2c^2 + p_x^2 + p_y^2}} , \quad (1.92-95)$$

$$\dot{p}_x = \{p_x, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x} = QE ,$$

$$\dot{p}_y = \{p_y, H\} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 .$$

Integrací rovnic (1.94), (1.95) dostaneme

$$p_x(t) = QEt ,$$

$$p_y(t) = p_y(0) = \text{const} = \gamma m v_0 .$$

Toto řešení dosadíme do rovnic (1.92), (1.93) a integrujeme:

$$x(t) = \int_0^t \frac{cp_x}{\sqrt{m^2c^2 + p_x^2 + p_y^2}} dt = c \int_0^t \frac{QEt}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (QEt)^2}} dt = \frac{c}{QE} \left(\sqrt{\varepsilon_0^2 + (QEt)^2} - \varepsilon_0 \right) ,$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{cp_y}{\sqrt{m^2c^2 + p_x^2 + p_y^2}} dt = c \int_0^t \frac{\gamma m v_0}{\sqrt{m^2c^2 + (\gamma m v_0)^2 + (QEt)^2}} dt = \frac{c\gamma m v_0}{QE} \text{arcsch} \left(\frac{QEt}{\varepsilon_0} \right) .$$

Výsledné řešení je tedy dáno vztahy

$$x(t) = \frac{c}{QE} \left(\sqrt{\varepsilon_0^2 + (QEt)^2} - \varepsilon_0 \right) \quad ; \quad y(t) = \frac{c\gamma m v_0}{QE} \operatorname{arcsch} \left(\frac{QEt}{\varepsilon_0} \right) , \quad (1.96)$$

$$\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \quad ; \quad \varepsilon_0 \equiv \sqrt{m^2 c^2 + (\gamma m v_0)^2} .$$

Proveďme nyní nerelativistickou limitu

$$v \ll c \quad (\text{tj. } c \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad \gamma \rightarrow 1; \quad \varepsilon_0 \approx mc, \quad \text{tj.}$$

$$x(t) = \frac{mc^2}{QE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{QEt}{mc} \right)^2} - 1 \right) \approx \frac{mc^2}{QE} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{QEt}{mc} \right)^2 - 1 \right) = \frac{QE}{2m} t^2 ,$$

$$y(t) = \frac{cmv_0}{QE} \operatorname{arcsch} \left(\frac{QEt}{mc} \right) \approx \frac{cmv_0}{QE} \cdot \frac{QEt}{mc} = v_0 t .$$

Vidíme, že výrazy přecházejí ve známé klasické vztahy - pohyb rovnoměrně zrychlený ve směru pole a pohyb rovnoměrný napříč pole. Současně rychlost ve směru pole v_x neroste nade všechny meze, tak jako v klasickém případě:

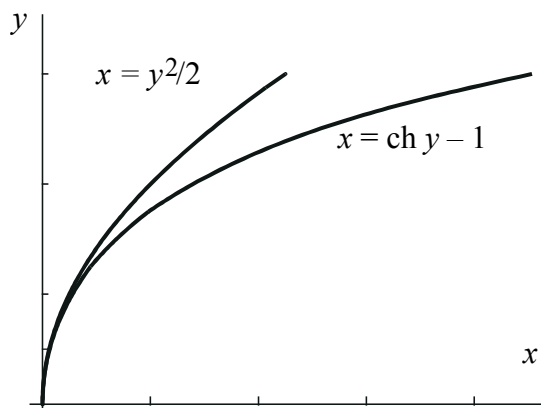
$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c}{QE} \cdot (QE)^2 \cdot \frac{t}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (QEt)^2}} = c .$$

V libovolném konečném čase t je vždy $v_x < c$.

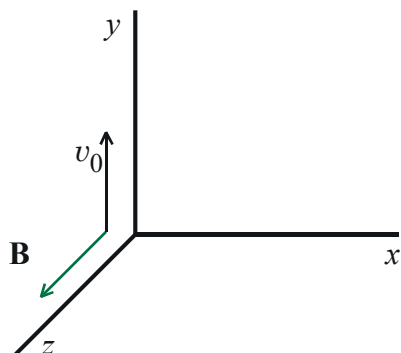
Vyloučíme-li z (1.96) čas dostaneme trajektorii částice

$$x = \frac{\varepsilon_0 c}{QE} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{QE}{c\gamma m v_0} y \right) - 1 \right] . \quad (1.97)$$

Rozdíl mezi funkcemi $x = y^2/2$ (klasická trajektorie) a $x = \operatorname{ch}(y) - 1$ je na obrázku:



1. 6. 2. Konstantní homogenní magnetické pole (nerelativisticky)



$$\mathbf{E} = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad \phi = 0 ,$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, B) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = (-B y, 0, 0) \quad \text{nebo}$$

$$\mathbf{A} = (0, B x, 0) \quad \text{nebo}$$

$$\mathbf{A} = 1/2 (-B y, B x, 0)$$

počáteční podmínky:

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0) ,$$

$$\mathbf{p}(0) = (0, m v_0, 0) .$$

Hodnota vektorového potenciálu \mathbf{A} plyne ze vztahu (1.86). Pro vektorový potenciál \mathbf{A} budeme používat druhé z uvedených možných vyjádření. Zobecněná hybnost je v našem případě dána vztahem $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}$. Pro Hamiltonovu funkci platí

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi = \frac{p_x^2 + (p_y - QBx)^2 + p_z^2}{2m}$$

a Hamiltonovy rovnice jsou

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \{x, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad , \\ \dot{y} &= \{y, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - QBx}{m} \quad , \\ \dot{z} &= \{z, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \quad , \\ \dot{p}_x &= \{p_x, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{QB(p_y - QBx)}{m} \quad , \\ \dot{p}_y &= \{p_y, H\} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad , \\ \dot{p}_z &= \{p_z, H\} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad .\end{aligned}\tag{1.98-103}$$

Z rovnic (1.102), (1.103) máme ihned

$$\begin{aligned}p_y(t) &= p_y(0) = mv_0 \quad , \\ p_z(t) &= p_z(0) = 0 \quad .\end{aligned}$$

Tyto výrazy spolu s p_x vyjádřeným z (1.98) dosadíme do (1.101) a získáme tak rovnici

$$\ddot{x} + \left(\frac{QB}{m}\right)^2 x = \frac{QBv_0}{m}$$

pro proměnnou x . Po jejím vyřešení známe závislost $x(t)$ a můžeme již přímo integrovat rovnice (1.99), (1.100). Výsledné řešení má tvar

$$\begin{aligned}x(t) &= R_L - R_L \cos \omega_c t \quad , \\ y(t) &= R_L \sin \omega_c t \quad , \\ z(t) &= 0 \quad ,\end{aligned}\tag{1.104}$$

kde jsme označili

$$R_L \equiv \frac{mv_0}{QB} \quad ; \quad \omega_c \equiv \frac{QB}{m}\tag{1.105}$$

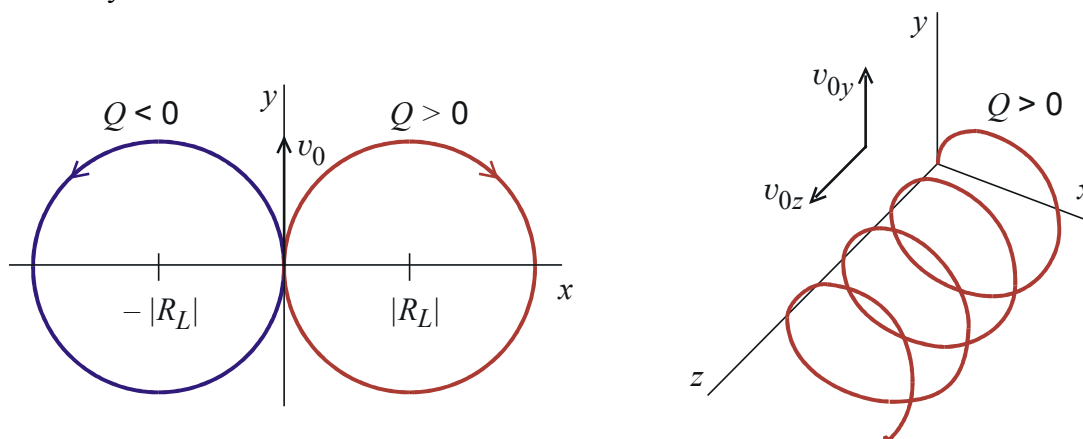
tzv. Larmorův poloměr R_L a cyklotronní frekvenci ω_c . Rovnici trajektorie získáme vyloučením času z (1.104):

$$(x - R_L)^2 + y^2 = R_L^2 \quad .\tag{1.106}$$

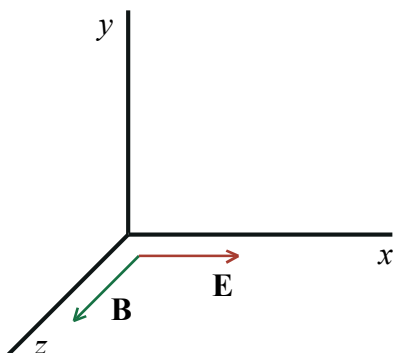
Vidíme, že pohyb se děje po kružnici s poloměrem R_L a se středem $S = [R_L, 0]$.

Magnetické pole nepůsobí na pohyb částice ve směru podél pole. Kolmo na směr pole působí Lorentzova síla, která zakřivuje trajektorii částice na kružnici. Při nenulové počáteční rychlosti $v_z(0)$ je pohyb částice složen z rovnoměrného přímočarého pohybu podél pole a Larmorovy rotace (gyrace), tím vzniká pohyb po šroubovici.

Samotné elektrické pole naopak nepůsobí na pohyb částice napříč pole (v nerelativistickém případě) nebo jen velmi málo (v relativistickém případě). Ve směru pole dochází k urychlování.



1. 6. 3. Zkřížená pole (nerelativisticky)



$$\begin{aligned} \mathbf{E} = (E, 0, 0) &\Rightarrow \phi = -Ex, \\ &\mathbf{A} = (-By, 0, 0) \text{ nebo} \\ \mathbf{B} = (0, 0, B) &\Rightarrow \mathbf{A} = (0, Bx, 0) \text{ nebo} \\ &\mathbf{A} = 1/2 (-By, Bx, 0) \end{aligned}$$

počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= (0, 0, 0), \\ \mathbf{p}(0) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Pro vektorový potenciál \mathbf{A} budeme používat druhé z uvedených možných vyjádření.

Zobecněná hybnost je opět $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}$. Pro Hamiltonovu funkci platí

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi = \frac{p_x^2 + (p_y - QBx)^2 + p_z^2}{2m} - QEx$$

a Hamiltonovy rovnice jsou

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \\ \dot{y} &= \{y, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - QBx}{m}, \\ \dot{z} &= \{z, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \\ \dot{p}_x &= \{p_x, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{QB(p_y - QBx)}{m} + QE, \\ \dot{p}_y &= \{p_y, H\} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \\ \dot{p}_z &= \{p_z, H\} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{1.107-113}$$

Postupem zcela analogickým předešlému příkladu získáme řešení

$$\begin{aligned}x(t) &= R_d - R_d \cos \omega_c t \quad , \\y(t) &= R_d \sin \omega_c t - v_d t \quad , \\z(t) &= 0 \quad ,\end{aligned}\tag{1.114}$$

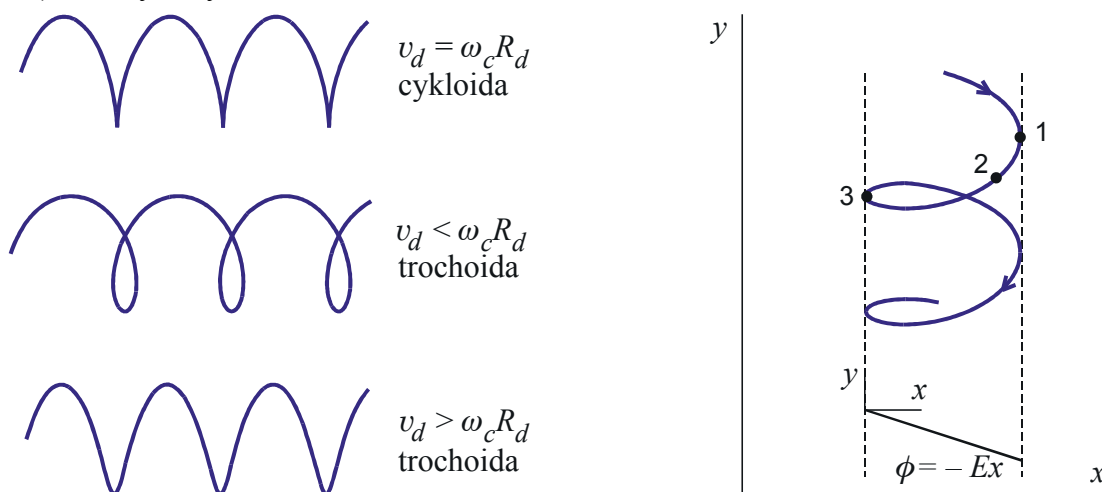
kde jsme označili

$$\omega_c \equiv \frac{QB}{m} \quad ; \quad v_d \equiv \frac{E}{B} \quad ; \quad R_d \equiv \frac{mv_d}{QB}\tag{1.115}$$

tzv. cyklotronní frekvenci ω_c , driftovou rychlost v_d a driftový poloměr R_d . Rovnice trajektorie má po částečném vyloučení času z rovnic (1.114) tvar

$$(x - R_d)^2 + (y + v_d t)^2 = R_d^2 \quad .\tag{1.116}$$

Jde tedy o pohyb po kružnici s poloměrem R_d , jejíž střed $S = [R_d, -v_d t]$ se pohybuje konstantní driftovou rychlostí v_d kolmo na elektrické i magnetické pole. Výsledná křivka (1.116) se nazývá cykloida.



V bodech trajektorie 1, 2, 3 má částice různou potenciální energii

$$\phi = -Ex \quad \Rightarrow \quad \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 \quad .$$

a vzhledem k zákonu zachování energie i různou rychlost

$$\frac{1}{2}mv^2 + Q\phi = \text{const} \quad \Rightarrow \quad v_1 > v_2 > v_3 \quad .$$

a tím i různý Larmorův poloměr:

$$R_L = \frac{mv}{QB} \quad \Rightarrow \quad R_{L1} > R_{L2} > R_{L3} \quad .$$

Cykloidální trajektorii částice lze tedy interpretovat jako pohyb po kružnici s proměnným poloměrem. Poznamenejme, že pro cykloidu platí přesně

$$v_d = \omega_c R_d \quad .\tag{1.117}$$

Neplatí-li tato relace, jde o obecnější křivku, která se nazývá trochoida. Pro nenulovou počáteční rychlost pohyb probíhá právě po trochoidě:

$$\begin{aligned}x(t) &= R_d - R_d \cos \omega_c t \quad , \\y(t) &= R_d \sin \omega_c t - v_d t \quad , \\z(t) &= v_{0z} t \quad ,\end{aligned}\tag{1.118}$$

kde se driftový poloměr změnil na

$$R_d = \frac{m \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} + v_d)^2}}{QB} \quad .\tag{1.119}$$

Pohyb se opět děje po kružnici s pohybujícím se středem

$$S = \left[\frac{m(v_{0y} + v_d)}{QB}, -v_d t \right] \quad .$$

1. 6. 4. Drifty

Výše uvedený výpočet je speciálním případem tzv. driftových pohybů. V případě, že na částici působí kromě magnetického pole ještě další silové pole, které se mění v průběhu jedné gyrační periody jen velmi málo (v čase i v prostoru), posouvá se gyrační střed driftovou rychlostí

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{QB^2} \quad .\tag{1.120}$$

Tento výraz je ve skutečnosti přesný jen pro konstantní homogenní pole \mathbf{F} . V případě pomalu se měnících slabě nehomogenních polí jde o první přiblížení po vystředování výchozích rovnic přes gyrační pohyb.

- **$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift.** $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift je drift elektricky nabitých částic v elektrickém a magnetickém poli. Z (1.120) plyne pro $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mathbf{B}^2} \quad .\tag{1.121}$$

Driftová rychlost je kolmá k oběma polím a její velikost je

$$v_E = \frac{E}{B} \sin \alpha \quad ,\tag{1.122}$$

kde α je úhel mezi oběma poli. Dříve odvozený vztah (1.115) pro driftovou rychlost je speciálním případem vztahu (1.122). Driftová rychlost nezávisí na hmotnosti a náboji částice, elektrony i ionty v elektrickém poli driftují stejným směrem. Tento drift nebude původcem elektrického proudu, ale je jednou z mála cest, kterou získávají ionty vyšší energii než elektrony.

- **Gravitační drift.** V gravitačním silovém poli $\mathbf{F} = m \mathbf{g}$ a magnetickém poli dochází k driftu s rychlostí

$$\mathbf{v}_g = \frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{QB^2} \quad ,\tag{1.123}$$

která je kolmá ke gravitačnímu i magnetickému poli. Její směr závisí na náboji částice a pro elektrony a ionty je opačný. Velikost síly závisí na hmotnosti částic. Tento drift může být zdrojem elektrických proudů.

- **Grad $|\mathbf{B}|$ drift.** V slabě nehomogenním magnetickém poli působí na gyrační střed částice fiktivní síla (fiktivní proto, že jde o sílu působící na gyrační střed - přes gyraci byly rovnice vystředovány)

$$\mathbf{F} = -\mu \vec{\nabla} |\mathbf{B}| \quad ; \quad \mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \quad . \quad (1.124)$$

μ je magnetický moment proudové smyčky vytvořené Larmorovou rotací částice. Lze ukázat, že tato veličina se zachovává v případě pomalých změn polí v porovnání s gyrací (je tzv. adiabatickým invariantem). Rychlost jsme rozložili na složku kolmou a rovnoběžnou s magnetickým polem:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \quad . \quad (1.125)$$

$\nabla |\mathbf{B}|$ drift je způsoben změnou velikosti magnetického pole. Příslušná driftová rychlost má velikost

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2Q} \frac{\mathbf{B} \times \vec{\nabla} B}{B^3} \quad . \quad (1.126)$$

Tento drift závisí na hmotnosti a náboji částic, povede k různému driftování elektronů a iontů a ke vzniku elektrického proudu v plazmatu.

- **Drift zakřivení.** Při pohybu kolem zakřivené silokřivky magnetického pole bude na částici působit odstředivá síla

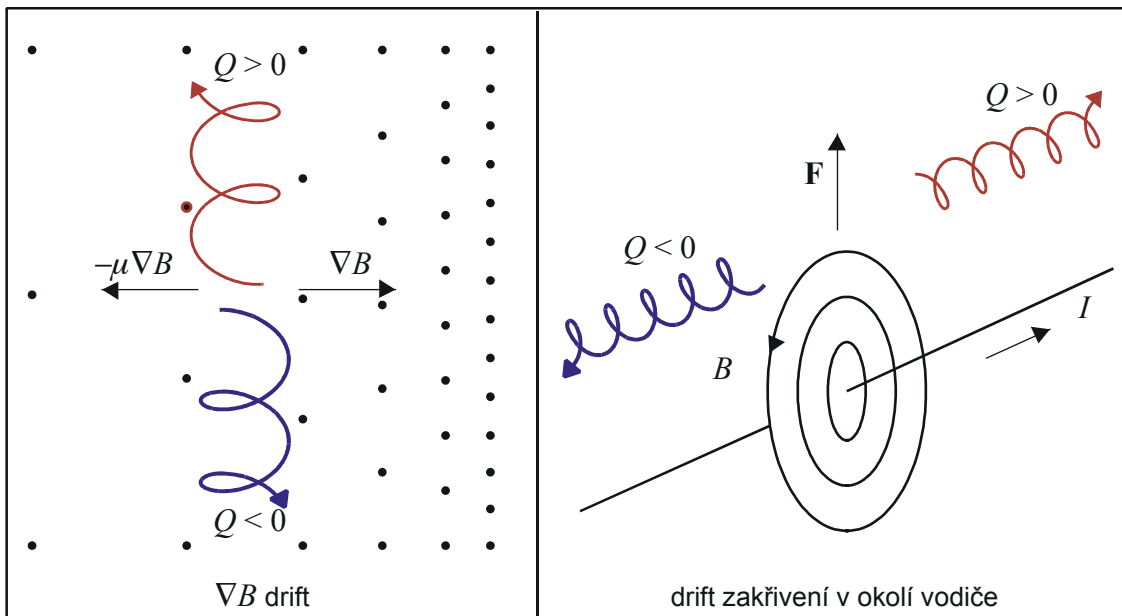
$$\mathbf{F} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_k} \frac{\mathbf{R}_k}{R_k} \quad , \quad (1.127)$$

kde \mathbf{R}_k je poloměr křivosti silokřivky. Rychlost driftu zakřivení je

$$\mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{QB^2} \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{R_k^2} \quad . \quad (1.128)$$

Drift zakřivení opět povede ke vzniku proudu v plazmatu. Poloměr křivosti parametricky zadané křivky (parametr t) můžeme určit ze vztahu:

$$\frac{1}{R} = \|\mathbf{d}^2\mathbf{r}/\mathbf{d}s^2\|; \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad . \quad (1.129)$$



- **Polarizační drift.** Bude-li se velikost elektrického pole pomalu měnit v čase, bude se také měnit driftová rychlost \mathbf{v}_E . To odpovídá působení setrvačné síly

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} = m \frac{d\mathbf{E}}{dt} \times \mathbf{B}$$

a polarizačnímu driftu

$$\mathbf{v}_P = \frac{m}{Q} \frac{\mathbf{B} \times \left(\frac{d\mathbf{E}}{dt} \times \mathbf{B} \right)}{B^4}, \quad (1.130)$$

který je opět původcem proudu v plazmatu.

1. 6. 5. Některé speciální konfigurace polí

Magnetická zrcadla

V magnetických zrcadlech je možné po určitou dobu udržet nabitě částice. Magnetická zrcadla využívají síly (1.124), která může obrátit směr pohybu částice. Označme úhel mezi rychlostí částice a magnetickými siločkami θ . Potom je

$$v_{\perp} = v \sin \theta \quad ; \quad v_{\parallel} = v \cos \theta \quad . \quad (1.131)$$

Ze zákona zachování energie W a adiabatického invariantu μ

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + Q\phi = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 = \text{const} \quad ; \quad (1.132)$$

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$$

plyne základní rovnice pro zrcadla

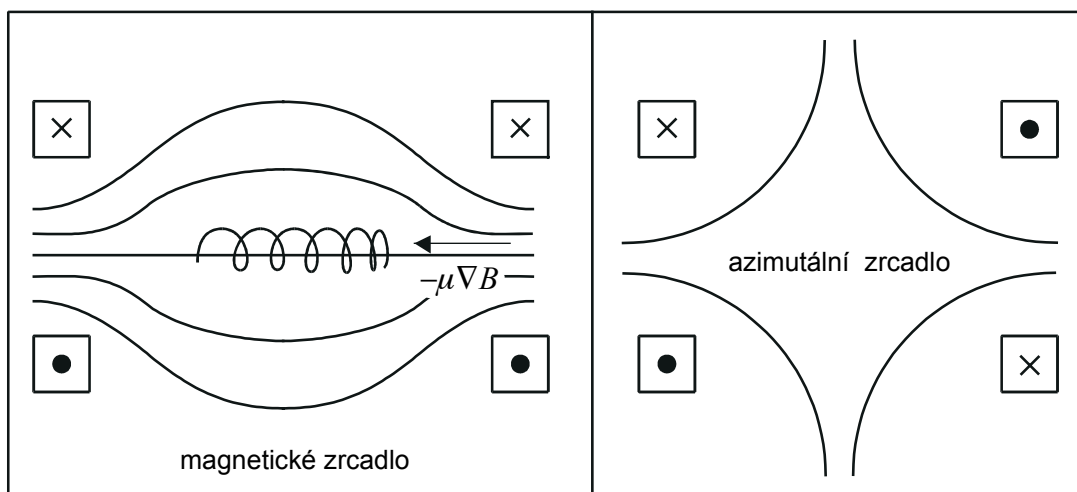
$$\frac{\sin^2 \theta}{B} = \text{const} \quad ; \quad \text{tj.} \quad \frac{\sin^2 \theta}{B} = \frac{\sin^2 \theta_0}{B_0} \quad . \quad (1.133)$$

Index 0 označuje hodnoty pole a úhlu v místě nástřelu částice. Z (1.133) plyne, že částice nastřelená pod úhlem θ_0 v místě s polem B_0 bude obrácena zpět, vzroste-li velikost pole na kritickou hodnotu

$$B_c = \frac{B_0}{\sin^2 \theta_0} \quad . \quad (1.134)$$

Nedosáhne-li magnetické pole této hodnoty, částice ze zrcadla uniká. Máme-li naopak zadáno maximální pole B_c , potom ze systému uniknou všechny částice s $\theta < \theta_0$ v místě s polem B_0 podle (1.134) (tzv. únikový kužel).

Záměnou směru proudu v cívkách magnetického zrcadla vznikne tzv. azimutální zrcadlo. V azimutálním zrcadle je v centru $|\mathbf{B}| = 0$, Larmorův poloměr je nekonečný, cyklotronní frekvence nulová a změny polí nejsou malé ve srovnání s Larmorovou rotací. Adiabatický invariant μ se nezachovává a částice, které prošly centrální oblastí se snadno dostanou do únikového kužele.

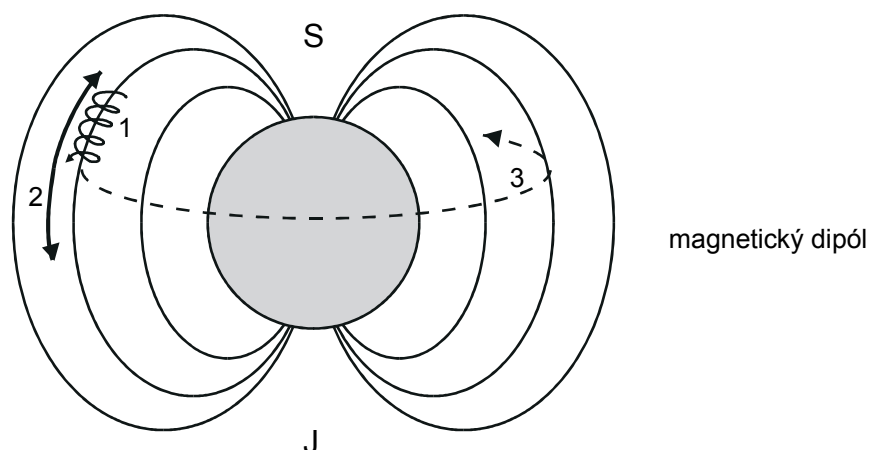


Magnetický dipól

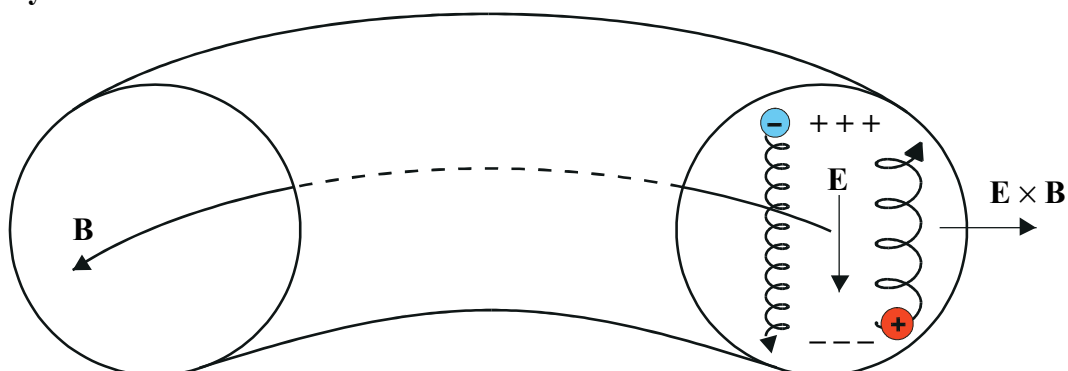
Pohyb nabitě částice v magnetickém dipólu se skládá ze tří periodických pohybů:

- 1) Larmorova rotace (gyrace)
- 2) longitudální pohyb mezi jednotlivými odrazy v polárních oblastech (zrcadla)
- 3) transverzální driftový pohyb (drift zakřivení)

Příkladem magnetického dipólu může být magnetické pole Země.



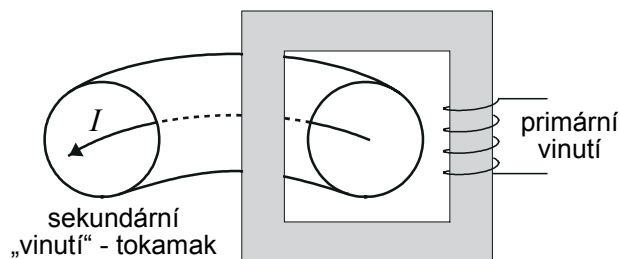
Toroidy



V toroidální geometrii dochází k driftu zakřivení, který způsobuje separaci náboje, tím vzniká elektrické pole a $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift, kterým částice unikají z prostoru toroidu. Tomu lze částečně čelit zkroucením silokřivek pole (dodatečným poloidálním polem). Základní toroidální pole

vzniká za pomoci cívky navinuté na plášť torusu. Dodatečné poloidální pole můžeme získat různými způsoby. Jmenujme alespoň:

- 1) *stelarátor* - vinutí je šikmé.
- 2) *tokamak* - torus je sekundárem transformátoru. Tím v prostoru tokamaku vzniká elektrický proud, který generuje poloidální pole.



- 3) *multipóly* - v pracovním prostoru jsou vodiče, které generují poloidální pole.

Poznamenejme na závěr, že ve skutečných zařízeních se jednotlivé částice vzájemně ovlivňují a to buď lokálními srážkami nebo prostřednictvím vzniku kolektivních polí celého systému částic - plazmatu.

Veškeré úvahy zde uvedené platí tedy jen za předpokladů uvedených na počátku této kapitoly (řídce horké plazma).