Príklady k prednáške Fyzika pre matematikov

V.Černý

Tieto príklady majú demonštrovať obťažnosť príkladov na skúške z fyziky.
1.1. Napíšte rvnicu rovnomerného priamočireho pohybu, t.j. závislosť polohového vektora na čase, ak počiatočná poloha častice je $\boldsymbol{r}_0$ a rýchlosť častice je $\boldsymbol{v}$.

1.2. Napíšte rvnicu rovnomerného pohybu po kružnici, t.j. závislosť polohového vektora na čase, ak počiatočná poloha častice je $\boldsymbol{r}_0$ a rýchlosť častice je $\boldsymbol{v}_0$.

1.3. Presvedčte sa explicitným derivovaním výsledku príkladu 1.2, že rýchlosť pri rovnomernom pohybe po kružnici spĺňa rovnicu

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}(t)$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je vektor uhlovej rýchlosti ktorý sa z počiatočných podmienok dá vyjadriť ako

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{v}_0}{|\boldsymbol{r}_0|^2}$$

1.4. Presvedčte sa explicitným derivovaním výsledku príkladu 1.3., že zrýchlenie pri rovnomernom pohybe po kružnice je dostredivé a má veľkosť v^2/r.

1.5. Napíšte rovnicu pohybu s konštantným zrýchlením daným vektorom $\boldsymbol{g}$, t.j. závislosť polohového vektora na čase, ak počiatočná poloha častice je $\boldsymbol{r}_0$ a počiatočná rýchlosť rýchlosť častice je $\boldsymbol{v}_0$.

1.6. Vypočítajte maximálnu dosiahnutú výšku, dobu letu a vzdialenosť bodu dopadu pri šikmom vrhu s počiatočnou rýchlosťou v pod uhlom α v homognnom gravitacnom poli$g$.

2.1. Dokážte vzťah

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})$$

2.2. Vypočítajte div $\boldsymbol{r}$.

2.3. Vypočítajte v bodoch $|\boldsymbol{r}| > 0$ hodnotu

$$\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

2.4. Vypočítajte v bodoch $|\boldsymbol{r}| > 0$ hodnotu

$$\operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

2.6 Vypočítajte

$$\operatorname{grad}(r^4 + r)$$

2.7. Dokážte identitu platnú pre ľubovoľné dostatočne hladké skalárne pole

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

2.8. Dokážte identitu platnú pre ľobovoľné dostatočne hladké vektorové pole $\boldsymbol{v}$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$$

3.1 Sila pre anizotrópny harmonický oscilátor je daná ako

$$f_i = \sum_j K_{ij} x_j$$

Ukážte, že práca konaná pružnými silami nezávisí na trajektórii. Nájdite vzorec pre potenciálnu energiu. Presvedčte sa, že sila je záporný gradient potenciálu.

3.2. Potenciálna energia častice v jednorozmernom svete je

$$U(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$$

Nájdite stabilné rovnovážne polohy a frkvencie vlastných kmitov v ich okolí. Číselné koeficienty v zadaní potenciálnej energie musia mať v skutočnosti správny fyzikálny rozmer (jednotky). Určte ich.

3.3 Potenciálna energia častice v jednorozmernom svete je

$$U(x) = a\frac{1}{x^6} - b\frac{1}{x}$$

(Takáto energia približne reprezentuje interakciu dvoch iónov.) Nájdite polohu rovnovážneho stavu a frekvenciu vlastných kmitov. Odhadnite rádovo pri akej amplitúde kmitov sa rozpadne "viazaný stav", t.j. systém bude mať veľmi veľké výchylky z rovnovážneho stavu.

3.4. Plyn je v nádobe uzatvorený piestom, ktorý je zaťažený závažím o hmotnosti m. Nájdite frekvenciu vlastných kmitov piestu so závažím, ak príslušný dej v plyne je adiabatický, t.j. správa sa podľa zákona

$$pV^{\varkappa} = const$$

3.5. V U-trubici je kvapalina s hustotou ρ. V rovnováhe je výška kvapaliny v oboch ramenách rovnaká. Nájdite frekvenciu vlastných kmitov pri výchylke z rovnovážnej polohy.

3.6. Potenciálna energia častice v dvojrozmernom svete je

$$U(x,y) = \frac{1}{2}K(x^2 + y^2)$$

presvedčte sa že v takomto poli je možný rovnomerný pohub po kružnici:

$$x = r_0 \cos(\omega t), \qquad y = r_0 \sin(\omega t)$$

Tento pohyb je možné vnímať ako superpozíciu dvoch na seba kolmých pohybov harmoonických oscilátorov, alebo ako pohyb po kružnici za pôsobenia dosteredivej sily. Predpokladajme, že v čase $t = 0$ je tento pohyb náhodne narušený, od toho okamihu teda rovnica trajektórie bude

$$x = r_0 \cos(\omega t) + \xi(t), \qquad y = r_0 \sin(\omega t) + \eta(t)$$

s počitočnými podmienkami pre neznáme funkcie ξ a η napríklad

$$\xi(0) = \xi_0, \qquad \dot{\xi}(0) = \eta(0) = \dot{\eta}(0) = 0$$

Nájdite rovnice pre poruchové funkcie ξ a η a ich riešenia. Pozn. Takto sa postupuje aj všeobecnejšie pri vyšetrovaní stability riešení.

3.7 Uvažujme dva lineárne viazané oscilátory. Počiatočná podmienka je taká, že počiatočné výchyľky oboch oscilátorov sú nulové, počiatočná rýchlosť jedného je nulová, druhého nenulová. Nájdite riešenie pohybových rovníc.

3.8. Potenciálna energia trojrozmerného harmonického oscilátora je

$$U(x,y) = \frac{1}{2}K(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}K'z^2$$

Ukážte že sa zachováva priemet momentu hybnosti na os z, voči ktorej je oscilátor rotačne symetrický. Priemet momentu hybnosti na ostatné dve osi sa vo všeobecnosti zachovávať nebude.

3.9. Potenciálna energia dvojrozmerného oscilátora je

$$U(x, y) = \frac{1}{2}K(x^2 + 2xy + 2y^2)$$

Nájdite vlastné frekvencie a normálne módy.

3.10 Tlmený oscilátor má vlastnú frekvenciu 1 MHz a charakteristickú dobu tlmenia rádovo 100 ms. Odhadnite presnosť hodín založených na oscilátore tejto kvality.

4.1 V jednorozmernom svete sa zrážajú dve častice s hmotnosťami $m_1 m_2$ a rýchlosťami ktorých absolútne hodnoty sú v_1, v_2. Vypočítajte rýchlosti častíc po zrážke.

4.2 Vagón má hmotnosť M a dĺžku L, človek vo vagóne má hmotnosť m. Vagón stojí. Ako sa premiestni vagón, keď človek v ňom prejde z jedného konca vagóna na druhý.

4.3 Z raketového motora tryskajú plyny rýchlosťou v. Hustota vytekajúcich plynov je ρ prierez trysky je S. Určte hnaciu silu, ktorú motor vyvíja.

4.4 Trojnohý stolík má dosku tvaru trojuholníka o hmotnosti M, nohy majú zanedbateľnú hmotnosť. Určte sily, ktorými nohy pôsobia na podlahu.

4.5 Kruhová obruč ("bicyklové koleso") môže rotovať okolo fixnej osi. Hmotnosť obručě je M, polomer r a jej hrúbka je zanedbateľná. Na obvod pôsobí tangenciálne sila F. Určte uhlové zrýchlenie obruče.

5.1 Teleso v tvare valca o dĺžke L tlačíme silou F v smere osi valca, sila pôsobí na podstavu valca, na ktorú vyvíja rovnomerný tlak p. Valec sa pod vplyvom tejto sily pohyboje zrýchlene so zrúchlením a. Určte zložky tenzora napätia v ľubovoľnom bode vnútri valca.

5.2 Kužeľ o objeme V a ploche podstavy S je celý zvislo ponorený do vody tak, že podstava je v hĺbke h pod hladinou. Určte celkovú silu, ktorá pôsobí na plášť valca (t.j. povrch mimo podstavy).

5.3 Okenná tabuľa má plochu S. Aká sila budne na ňu pôsobiť, ak vonkajší vzduch bol pôvodne v pokoji a prišiel náhly závan vetra v smere rovnobežnom s plochou okna, pričom rýchlosť vetra bola v.

6.1 Zistite akou veľkou silou je priťahovaný ku veľkej kovovej doske náboj Q umiestnený vo vzdialenosti d od dosky.

6.2 Doska z príkladu 6.1 je priťahovaná k náboju rovnako veľo silou. Zistite plošné rozdelenie tejto sily na plochu dosky.

6.3 Obruč o polomere R je rovnomerne nabitá nábojom Q. Urče intenzitu poľa na osi obruče vo vzdialenosti d od roviny obruče.

6.4 Vypočítajte hustotu rozloženia náboja indukovaného na povrchu dosky v príklade 6.1 a overte že na priamke kolmej na dosku prechádajúcej tým nábojom je vnútri dosky všade nulové pole.

7.1 Častica s hmotnosťou m a nábojom q vletí do oblasti s homogénnym magnetickým poľom o indukcii B rýchlosťou v kolmo na smer magnetického poľa. Vypočítajte polomer kružnice po ktorej sa bude častica v poli pohybovať.

7.2 Závitom tvaru štvorca o strane l prechádza prúd I. Závit je v homogénnom magnetickom poli s indukciou B, pole je rovnobežné s rovinou závitu. Vypočítajte moment síl pôsobiaci na závit.

7.3 Závit z príkladu 7.2 rotuje uhlovou rýchlosťou ω. Určte priebeh napätia indukovaného v závite.

7.4 Vypočítajte magnetické pole vo vzdialenosti d od priameho nekonečne dlhého vodiča s prúdom I.

8.1 Ukážte, že elektromagnetické vlny sú priečne.

8.2 Napíšte explicitne tvar rovinnej elektromagnetickej vlny a ukážte, že sú splnené všetky Maxwellove rovnice.