Štatistická fyzika a termodynamika.

1.1. Odhadnite na akú plochu sa rozleje 5ml oleja, ktorý sa po vodnej hladine dokonale rozteká.

1.2. Odhadnite rozmer molekuly vody ak viete, že koeficient povrchového napätia vody je 72.10^{-3}J/m^2 a skupenské teplo vyparovania vody je 2.10^6J.

1.3. Predstavte si, že vylejem z pohára vodu do rieky a po veľmi dlhom čase si znova do toho pohára nejakú vodu načapujem. Ak by sa medzitým v dôsledku kolobehu vody všetka voda na Zemi bez strát dokonale premiešala, koľko molekúl z tých, ktoré boli pôvodne v pohári, sa znovu dostane do pohára? (Veľmi hrubý rádový odhad.)

1.4. Odhadnite mriežkovú konštantu NaCl ak viete, že hustota soli je $2.16.10^3$kgm^{-3}.

1.5. Koľko medi sa vylúči pri elektrolýze za tri dni prúdom 10A.

1.6. Na akú teplotu by sme museli zahriať plyn, aby kinetická energia molekúl bola rádovo 1eV?

1.7 Odhadnite len z rozmerových úvah typickú vlnovú dĺžku žiarenia absolútne čierneho telesa pri teplote 6000K. Aká veľká je približne neurčitá konštanta, ktorá vystupuje vo vzťahu, získanom z rádového odhadu?

1.8 Dve gule s hmotnosťami m a M a rýchlosťami v a V sa čelne pružne zrazia. Aké budú rýchlosti gulí po zrážke?

1.9 Z vagóna strieľa smerom dozadu guľomet strely o hmotnosti 50g s výstupnou rýchlosťou 1500m/s. Pri kadencii 300 striel za minútu sa vagón uvedie do pohybu. Akou silou sa dá uviesť do pohybu ten vagón? Akou kadenciou by sa muselo strieľať z pevného guľometu smerom do zadnej steny vagóna aby sa uviedol do pohybu? Prediskutujte viacero možných situácií rozptylu striel na stene vagóna.

2.1. Napíšte (v ľubovoľnom jazyku) krátky program, ktorý simuluje náhodné preklápanie 10 spinov (bez interakcie). Sledujte časový vývoj počtu spinov v stave "hore", strednú hodnotu tejto veličiny a jej stredný kvadrát.

2.2. Podobne ako v príklade 2.1 zostavte program ktorý simuluje súbor sto systémov, každý po desiatich spinoch a sledujete príslušné hodnoty stredované cez súbor.

2.3. Uvažujme systém spinov popísaný v príklade 2.1. Aká je pravdepodobnosť, v náhodnom časovom okamihu uvidíme práve 3 spiny v stave "hore"?

2.4. Určite výpočtom strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýľku počtu spinov orientovaných "hore" v súbore systémov o desiatich spinoch.

2.5. Ako bude vyzerať výsledok príkladu 2.4. pre všeobecný prípad súboru n-spinových systémov.

2.6. Uvažujme systém 6 neinteragujúcich spinov. Systém slúži ako ruleta v hazardnej hre. Hráči majú uhádnuť počet spinov orientovaných "hore" v náhodne zvolenom okamihu. (Možnosti sú od 0 do 6.) Pri uhádnutí správneho počtu hráč vyhrá sumu úmernú jeho vkladu. Ako treba nastaviť faktory úmernosti na jednotlivé druhy stávok, aby v strednom herňa ani nezarobila ani neprerobila?

3.1. Nájdite strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýľku počtu bodov pre hre obyčajnou hracou kockou.

3.2. Nájdite strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýľku pre náhodnú premennú rovnomerne rozdelenú na intervale $(0, L)$.

3.3. Ako vyzerá distribučná funkcia pre rovnomernú náhodnú premennú na intervale $(0, L)$.

3.4. Uvažujem jednorozmerný prípad: častice strieľané oproti sebe po úsečke $(0, L)$ tak, že ak jedna častica je vystrelená z bodu 0 rýchlosťou v, potom v náhodnom okamihu počas jej letu po úsečke je z bodu L vystrelená oproti nej častica rýchlosťou $2v$. Častice sa zrazia v bode so súradnicou x. Veličina x je náhodná veličina, určte jej hustotu pravdepodobnosti.

3.5. Strely dopadajú rovnomerne náhodne do terča tvaru kruhu o polomere R. Nájdite strednú vzdialenosť dopadu strely od stredu terča a strednú kvadratickú odchýľku tejto veličiny.

3.6. Obsah štvorca meriam tak, že zmeriam dĺžku jeho strany a obsah vypočítam. Určte strednú kvadratickú odchýľku obsahu ak meranie strany je gaussovské so strednou kvadratickou odchýľkou σ^2.

3.7. Veličina z vzniká ako súčet dvoch náhodných veličín x, y rovnomerne rozdelených na intervale $(0, a)$. Určte hustotu pravdepodobnosti veličiny z, jej strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýľku.

3.8. Veličina z vzniká ako aritmetický priemer dvoch náhodných veličín x, y rozdelených gaussovsky so strednou hodnotou μ a varianciou σ^2. Určte hustotu pravdepodobnosti veličiny z, jej strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýľku.

3.9. Vypočítajte strednú hodnotu veličiny x^4, kde x je gaussovská náhodná veličina.

3.10. Odvoďte závislosť stredného kvadrátu vzdialenosti "opitého námorníka" od krčmy na počte vykonaných rovnako dlhých krokov náhodného smeru.

3.11. Dvaja opití námorníci vyrazia naraz z krčmy, robia kroky náhodného smeru dĺžky L. Určte stredný kvadrát ich vzdialenosti po N krokoch.

4.1. Z Maxwellovho zákona pre rozdelenie rýchlostí nájdite vzťah pre najpravdepodobnejšiu rýchlosť, strednú rýchlosť a strednú kvadratickú rýchlosť.

4.2. V akom vzťahu je stredný kvadrát relatívnej rýchlosti dvoch molekúl plynu vo vzťahu k strednému kvadrátu rýchlosti jednej molekuly. (Pomoc: uvedomte si, že rýchlosti dvoch molekúl sú navzájom nezávislé).

4.3. Príklad 4.2. sa dá vyriešiť aj zložitejšou cestou: poctivým preintegrovaním cez maxwellovské rozdelenia rýchlostí dvoch molekúl. Skúste to aj tak.

4.4. Príklad 4.2 sa dá vyriešiť aj veľmi elegantne tak, že si uvedomím, že problém dvoch telies sa dá zredukovať na pohyb ťažiska a relatívny pohyb s redukovanou hmotnosťou. Skúste to aj tak. (Pozri napr. odsek 9.13. v knihe Veis, Maďar, Martišovitš.)

4.5. Perrin použil na určenie Boltzmannovej konštanty barometrickú formulu poklesu koncentrácie častíc s výškou pre častice o (efektívnej) hmotnosti 3.43×10^{-18}kg. Na akej výške klesne koncentrácia takýchto častíc na polovicu za normálnych podmienok. (Perrinov experiment pozri v kap. 9.11 v knihe Veis, Maďar, Martšovitš).

4.6.Určte rozdelenie hustoty ideálneho plynu v centrifúge tvaru valca o polomere R, ktorá sa otáča uhlovou rýchlosťou ω.

4.7. Určte strednú hodnotu energie molekuly jednoatómového ideálneho plynu v centrifúge podľa príkl. 4.6.

4.8. Nájdite vzťah pre stredný počet nárazov za čas t molekúl (hmotnosti m) ideálneho plynu o pri teplote T a tlaku p na plochu S steny nádoby.

4.9. Určite (pomocou iných základných fyzikálnych konštánt) Loschmidtovu konštantu (koncentráciu molekúl v jednotkovom objeme plynu za normálnych podmienok).

4.10 Plyn uniká cez otvor o ploche S z nádoby, kde je pod tlakom p za za teploty T do vákua (stále odčerpávanie). Za akú dobu klesne tlak plynu v nádobe na polovicu, ak hmotnosť molekúl je m. (Potom urobte aj hrubé numerické odhady pre situáciu "prepichnutá duša".)

5.1. Pretlak v kolesách auta pri teplote 20°C je 210 kPa. Odhadnite pretlak pri zvýšení teploty na 80°C.

5.2. V nádrži objemu 40 litrov sa nachádza pri teplote 27°C kyslík pod tlakom 1 MPa. Aká je jeho hmotnosť?

5.3. Koľko molekúl je v nádobe o objeme 10cm^3 naplnenej kyslíkom keď jeho teplota je 25°C a tlak 10^{-4} kPa?

5.4. V nádobe o objeme 1 liter je 1 g kyslíka a 1 g dusíka pri teplote 20°C. Aký je tlak v nádobe?

5.5. Aká je celková vnútorná energia 1 g argónu uzavretého v nádobe o objeme 100 litrov pri tlaku 10 MPa.

5.6. Ideálny plyn je uzavretý v nádobe s piestom o hmotnosti 1000 kg a ploche 100cm^2, ktorý je zaťažený závažím o hmotnosti 1 kg. Objem plynu je 10 litrov. Závažie náhle odstránim. Plyn zväčší svoj objem, piest vystúpi vyššie. Po čase sa ustáli rovnováha, pričom koncová teplota plynu bude rovná počiatočnej. Nádoba sa nachádza v normálnej okolitej atmosfére o ktorej predpokladám, že má rovnakú teplotu. Aké množstvo tepla prešlo z okolitej atmosféry do celého systému (plyn plus nádoba plus piest)? Výsledok je jednoduchý ale celý mechanizmus je dosť zložitý. Skúste popísať, čo sa deje v jednotlivých fázach celého deja. Akú veľkú prácu vykoná plyn v prvej fáze: t.j.od počiatku po okamih keď prvýkrát nadobudne objem ako na konci (uvažujte izotermický dej, piest je ťažký, bude sa hýbať pomaly).

5.7. Odhadnite merné teplo argónu pri stálom objeme za normálnych podmienok.

5.8. Objem recipienta je 1 liter, objem vývevy pod zdvihnutým piestom je 0.5 litra. Koľko cyklov piesta musí urobiť výveva, aby sa tlak pod recipientom znížil na desatinu pôvodnej hodnoty, ak čerpanie je izotermické a mŕtvy objem vo vedení a ventiloch zanedbáme?

5.9. Odvoďte tzv. Mayerov vzťah, t.j. vzťah, medzi mólovým teplom plynu pri stálom tlaku a pri stálom objeme.

5.10. Uvažujte izotermickú zmenu stavu ideálneho jednoatómového plynu zo stavu p_1, V_1, T_1 do stavu p_2, V_2, T_1. Aké teplo pri tejto zmene treba dodať plynu? Potom uvažujte postupnosť dvoch dejov: najprv z p_1, V_1, T_1 do p_2, V_1, T_3 izochoricky, potom do p_2, V_2, T_1 izobaricky. Plyn sa dostal do toho istého stavu ako predtým. Aké veľké teplo bolo treba teraz pri tomto zloženom deji dodať plynu?

6.1. Odhadnite, na akú teplotu sa zohreje pri kompresii vzduch nasatý do spaľovacieho motora, ak kompresný pomer je 1:10.

6.2. Kompresor nasáva 100 m^3 atmosférického vzduchu za hodinu, a stláča ho na pretlak 1 MPa. Koľko tepla musí za hodinu odobrať chladiace médium z kompresora, ak stláčanie je adiabatický dej a plyn sa po stlačení izobaricky ochaldí na pôvodnú teplotu. Poissonova konštanta pre vzduch je 1.4.

6.3. Z nádoby o objeme V, v ktorej bol plyn o tlaku p a teplote T sme náhle vypustili isté množstvo plynu, čím tlak poklesol na hodnotu p_0. Považujme tento dej za adiabatický. Po uzavretí nádoby sa teplota opäť ustáli na pôvodnej hodnote T, čím sa tlak zvýši na hodnotu p'. Určte na základe týchto údajov Poissonovu konštantu toho plynu.

6.4. V nádobe je zmes dvoch ideálnych plynov, navzájom na seba nepôsobiacich. Ich koncentrácie sú n_1 a n_2, molekulové teplá sú $C_{1V}, C_{1p}, C_{2V}, C_{2p}$. Určte závislosť tlaku od objemu pre adiabatické zmeny tejto sústavy. (Riešenie skúšajte napred sami, pri ťažkostiach sa pozrite do Hajka).

6.5. Plyn prejde zo stavu p_1, V_1, T_1 do stavu p_2, V_2, T_2 troma rôznymi spôsobmi: prvý raz najprv izochoricky až po teplotu T_2 a potom izotermicky do výsledného stavu. Druhý raz najprv adiabaticky až po teplotu T_2 a potom izotermicky do výsledného stavu. Tretí raz najprv izobaricky až po teplotu T_2 a potom izotermicky do výsledného stavu. Vypočítajte pre tieto tri rôzne cesty množstvo tepla, ktoré je potrebné dodať plynu (teda vlastne $Q = \int \delta Q$) a všimnite si, že vyjdú rôzne hodnoty. Potom pre každý z troch spôsobov vypočítajte

$$S = \int \frac{\delta Q}{T}$$

Čo platí o hodnotách S v týchto troch prípadoch?

6.6. Carnotov stroj použime ako chladničku: budeme ním ochladzovať vodu pri 0°C. Pritom 2 kg vody zamrzne na ľad. Akú prácu musíme vykonať, ak radiátor chladničky je v prostredí s teplotou 20°C? Koľko tepla sa pritom odoberie z radiátora?

6.7. Odvoďte závislosť medzi tlakom a teplotou ideálneho plynu pri adiabatickom deji.

6.8. Odvoďte závislosť medzi objemom a teplotou ideálneho plynu pri adiabatickom deji.

6.9. Prediskutujte vyhrievanie bytu pomocou tepelnej pumpy: pracuje ako chladnička, ktorej chladiaci priestor je vonku a radiátor vnútri bytu. Nech vonku je -10°C, vnútri 20°C. Aký veľký výkon musí mať kompresor tepelnej pumpy, ak by jej účinnosť bola ideálna, aby sme z radiátora mohli odoberať asi 10 MJ tepla za hodinu (to je obvyklá potreba pre jednu miestnosť). Porovnajte s potrebným výkonom bežného elektrického ohrievača (špirály).

6.10. Valec dĺžky l, naplnený plynom, je na oboch koncoch uzavretý, v jeho strede je piest o hmotnosti m a priereze S. V pokoji je na oboch stranách piesta tlak p. Keď piest nepatrne posunieme, začne kmitať. Vypočítajte periódu kmitov, ak dej považujete za adiabatický. (Riešenie skúšajte napred sami, pri ťažkostiach sa pozrite do Hajka).

7.1. Vypočítajte zmenu entropie jednoatómového ideálneho plynu pri vratnom prechode zo stavu p_1, V_1, T_1 do stavu p_2, V_2, T_2. (Návod: predstavte si nejaký konkrétny dej, napríklad izochorickú zmenu nasledovanú izotermickou a pre tieto deje vypočítajte prírastok entropie z energetickej bilancie.)

7.2. Určte zmenu entropie podobne ako v príklade 7.1 pre ľubovoľný ideálny plyn, charakterizovaný kilomólovým teplom C_V.

7.3. Vyjadrite entropiu ideálneho plynu (určenú až na neurčitú aditívnu konštantu S_0) pomocou ľubovoľnej dvojice iných stavových veličín. (Využite výsledok príkladu 7.2)

7.4. Jednočasticové stavy ideálneho plynu modelujeme kvantovomechanickým modelom "častica viazaná v kocke o objeme V". Určte typickú hodnotu veľkosti kvantových čísel n_1, n_2, n_3 pre typický jednočasticový stav plynu daný parametrami p, V, T.

7.5. Určte zmenu entropie ideálneho plynu pre vratné procesy - izotermický - adiabatický - izochorický - izobarický

7.6. Odvoďte vzťah pre účinnosť Carnotovho stroja vychádzajúc zo stanovenia zmien entropie na jednotlivých úsekoch stavového diagramu a z faktu, že pri cyklickom deji sa entropia nezmení (lebo je to stavová veličina).

7.7. Uvažujme systém N navzájom neinteragujúcich spinov vo vonkajšom magnetickom poli B. Každý zo spinov sa môže nachádzať v dvoch rôznych stavoch $s_1 = 1/2\hbar, s_2 = -1/2\hbar$. Energie týchto stavov sú $E_1 = -\mu B,\ E_2 = \mu B$. Určte entropiu tohto systému prislúchajúcu celkovej energii E.

7.8 Akú teplotu bude mať systém spinov z príkladu 7.7 v stave s energiou E.

7.9. Pre systém spinov z príkladu 7.7 predstavuje pole B vonkajší parameter. Aký je fyzikálny význam veličiny

$$\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_E$$

Uvedomte si analógiu s výrazom

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E$$

pre ideálny plyn.

7.10. Uvažujme kvantovomechanický model "častica viazaná v kocke o objeme V". Aký tlak na steny kocky vyvoláva jedna častica v stacionárnom stave, ktorého energia je ε? (Návod: uvážte akú prácu je potrebné vykonať, aby sa objem systému zmenil o ΔV.) Aký bude tlak v systéme N takýchto častíc? Potom si uvedomte, že energia jednej častice ε súvisí s teplotou a vyjadrite tlak systému N častíc ako funkciu objemu a teploty. Čo dostanete?

8.1. Počet stavov systému, ktorých energia je menšia ako E je daný funkciou $\Phi(E) = C(E/f)^{f/2}$, kde f je počet stupňov voľnosti. Nájdite štatistickú sumu, strednú hodnotu energie a strednú kvadratickú odchýľku energie pre kánonické rozdelenie.

8.2. Nájdite entropiu systému popísaného v príklade 8.1.

8.3. Vyjadrite strednú hodnotu energie a stredný kvadrát energie kánonického systému pomocou štatistickej sumy a jej derivácií a overte platnosť získaných vzťahov na výsledkoch príkladu 8.1.

8.4. Aká veľké sú fluktuácie vnútornej energie 2 litrov argónu za normálnych podmienok. Odhadnite pomocou kánonického rozdelenia.

8.5. Aká veľké sú fluktuácie energie jednej molekuly argónu za normálnych podmienok. Porovnajte s výsledkom predchádzajúceho príkladu.

8.6. Odvoďte barometrickú formulu vychádzajúc z kánonického rozdelenia. (Závislosť tlaku na výške v izotermickej atmosfére.)

8.7. Uvažujme systém N navzájom neinteragujúcich spinov vo vonkajšom magnetickom poli B. Každý zo spinov sa môže nachádzať v dvoch rôznych stavoch $s_1 = 1/2\hbar, s_2 = -1/2\hbar$. Energie týchto stavov sú $E_1 = -\mu B,\ E_2 = \mu B$. Aký veľký je stredný počet spinov v stave s_1 pri teplote T.

8.8. Akú energiu bude mať systém spinov z príkladu 8.7 v stave s teplotou T. Porovnajte s výsledkami príkladov 7.7 a 7.8.

8.9. Určte štatistickú sumu a entropiu systému spinov z príkladu 8.7.

8.10. Uvažujme systém podobne ako v príklade 8.9, ale pozostávajúci z jediného spinu. Určte štatistickú sumu a strednú hodnotu energie.

9.1. Kvantový lineárny harmonický oscilátor je systém, stacionárne stavy ktorého majú energie

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$$

Stavy sú nedegenerované (teda ku každej hodnote energie existuje len jeden stav). Vypočítajte strednú hodnotu energie harmonického oscilátora v kontakte s tepelným rezervoárom pri teplote T.

9.2. Na základe predchádzajúceho príkladu stanovte tepelnú kapacitu systému N neinteragujúcich harmonických oscilátorov. Ako sa bude správať tepelná kapacita v blízkosti absolútnej nuly?

9.3. Predstavme si systém N neinteragujúcich častíc, ktoré sa môžu nachádzať v dvoch stavoch s energiami $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. (Niečo ako dva spinové stavy.) Určte strednú hodnotu energie systému akú funkciu teploty. Aká je limitná hodnota pre veľmi veľké teploty. Aké je limitná hodnota pre veľmi nízke teploty. Zdôvodnite kvalitatívne tieto výsledky. Vypočítajte tepelnú kapacitu tohto systému.

9.4. Porovnajte pravdepodobnosť nájsť atóm vodíka v základnom v porovnaní s prvým excitovaným stavom pri normálnych podmienkach.

9.5. Predstavme si plyn neinteragujúcich fermiónov pri absolútnej nule. Aká bude energia najvyššieho ešte obsadeného jednočasticového stavu (tzv. Fermiho energia), ak stavy modelujeme ako stavy častice v jame o objeme V. Ako táto hodnota súvisí s chemickým potenciálom pri nulovej teplote?

9.6. Odhadnite numericky teplotu, pre ktorú sa vodivostné elektróny v medi prestanú správať ako silne degenerovaný fermiónový plyn (t.j. plyn fermiónov v blízkosti absolútnej nuly). Hustota medi je 9 gcm^{-3}, atómová hmotnosť medi je 63.5, na jeden atóm pripadá jeden vodivostný elektrón.

9.7 Určte (aj numericky) hodnotu chemického potenciálu pre jednoatómový klasický ideálny plyn za normálnych podmienok.

9.8. Vypočítajte (približne) veľkú štatistickú sumu pre ideálny klasický plyn.

9.9. Určte vlnovú dĺžku de Broglieho vlny prislúchajúcej častici s kinetickou energiou prislúchajúcou teplote T. Vyjadrite tretiu mocninu tejto dĺžky a porovnajte s výrazom V_Q ktorý stojí vo vzťahu pre chemický potenciál ideálneho plynu

$$\frac{\mu}{kT} = \ln \frac{NV_Q}{V}$$

9.10. Sumu cez jednočasticové stavy ideálneho plynu môžem približne nahradiť integrálom cez energiu jednočasticových stavov typu

$$\sum_i \dots = \int \mathrm{d}\varepsilon \varphi'(\varepsilon) \dots$$

alebo tiež integrálom cez klasický jednočasticový fázový priestor

$$\sum_i \dots = \int \frac{1}{\varrho} \mathrm{d}^3 \overrightarrow{r} \mathrm{d}^3 \overrightarrow{p} \dots$$

určte váhové funkcie φ a ϱ v týchto integráloch.

10.1. Odhadnite aký tlak bude v tlakovom hrnci ak v ňom voda vrie pri 120°C. Skupenské teplo vyparovania vody považujte za konštantné a rovné približne 2 MJ/kg. Objem plynnej fázy počítajte približne podľa stavovej rovnice ideálneho plynu, objem kvapalnej fázy zanedbajte.

10.2. Určite kritický tlak, objem a teplotu plynu správajúceho sa podľa van der Waalsovej rovnice pomocou konštánt vystupujúcich v tejto rovnici.

10.3. Kritický tlak kyslíka je 5 MPa, kritická teplota je −119°C. Určte rádovo veľkosť molekuly kyslíka.

10.4.Dokážte, že práca vykonaná systémom pri izotermickom deji je rovná úbytku voľnej energie.

10.5. Ukážte, že ak dlhou tyčou spojíme dve telesá, ktoré trvale udržiavame na rozličných teplotách T_1 a T_2, potom v stacionárnom stave bude teplota tyče lineárnou funkciou vzdialenosti.

10.6. Vo vzťahu pre tepenú vodivosť plynu nevystupuje hustota molekúl plynu, koeficient tepelnej vodivosti teda nezávisí od tlaku plynu. Prečo teda termosky vyrábame ako dvojité sklené nádoby medzi ktorými je vyčerpaný vzduch (Uvedomme si, že úplne vzduch vyčerpať nemôžme, ostane tam vždy nejaký malý tlak vzduchu.) Riešenie problému vyžaduje zamyslieť sa znovu nad odvodením vzťahu pre tepelnú vodivosť a uvedomenie si podmienok, za ktorých sú jednotlivé kroky oprávnené.

10.7. Steny miestnosti sú z materiálu s tepelnou vodivosťou λ_1 a majú hrúbku h_1. Steny obložíme (z jednej strany) materiálom tepelnej vodivosti λ_2. Aká musí byť hrúbka materiálu, aby z hľadiska tepelných strát bolo oblkoženie ekvivalentné zdovjnásobeniu hrúbky steny z pôvodného materiálu.

10.8. Typický rozmer molekúl odhadol ako prvý J.Loschmidt z nameraných hodnôt viskozity vzduchu. Urobte takýto odhad pre dnešnú hodnotu viskozity vzduchu za normálnych podmienok 1710_6 Nsm^{-2}.