# Fyzika pre matematikov

V.Černý

## 1 Úvod

Tieto poznámky sú v stave zrodu, postupne sa budú rozširovať a budú nakoniec predstavovať rozšírené sylaby k prednáške "Základy fyziky". Nie sú myslené ako samostatné učebné texty, ale obsahujú všetky potrebné "vzorce" spolu s krátkymi komentármi ako pomôcka pre prípravu na skúšky.

## 2 Skaláry a vektory

Skalárne veličiny sú určené jednou číselnou hodnotou, ktorá vyjadruje ich veľkosť (vo vhodných fyzikálnych jednotkách). Tá číselná hodnota nezávisí od voľby súradnicovej sústavy, je teda invariantná voči zmene súradnicovej sústavy.

Vektorové veličiny ako poloha častice $\boldsymbol{r}$, rýchlosť častice $\boldsymbol{v}$ sú (v trojrozmernom priestore) určené troma hodnotami (priemetmi do troch súradnicových osí).

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Súradnicové osi niekedy namiesto $x, y, z$ číslujeme ako $1, 2, 3$ a potom používame zápisy tvaru

$$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Vektory v tlačenom texte sa označujú tučnou kurzívou, v rukopise sa zvykne používať označenie so šípkou typu $\vec{r}$.

Treba si uvedomiť, že nie každá trojica čísel tvorí vektor, "vektorovosť" (heslovite povedané) znamená, že pri prechode do inej súradnicovej sústavy sa súradnice transformujú náležitým spôsobom. Napríklad pri prechode do súradnicovej sústavy, ktorá voči pôvodnej je otočená okolo osi $z$ o uhol $\varphi$ sa transformujú nasledovne

$$\begin{aligned} x \to x' &= x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) \\ y \to y' &= y\cos(\varphi) - x\sin(\varphi) \\ z \to z' &= z \end{aligned}$$

Veľkosť vektora, napr.

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

je skalárnou veličinou, je invariantom transformácie súradnicovej sústavy.

Invariantom (skalárnou veličinou) je aj skalárny súčin dvoch vektorov

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = \sum a_i b_i$$

Označme jednotkové vektory v smere súradnicových osí po rade $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$. Potom možno každý vektor vyjadriť pomocou jeho zložiek v tvare

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{3} v_j \boldsymbol{i}_j$$

a zložky vektora vyjadriť cez skalárne súčiny ako

$$v_j = \boldsymbol{i}_j.\boldsymbol{v}$$

Jednotkové vektory v smere osí sú ortogonálne, čo vyjadruje vzťah

$$\boldsymbol{i}_j.\boldsymbol{i}_k = \delta_{jk}$$

kde $\delta_{jk}$ je užitočný symbol definovaný ako

$$\delta_{ii} = 1, \qquad \delta_{ij} = 0 \qquad \text{pre}\, i \neq j$$

Vektorový súčin dvoch vektorov

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

je definovaný nasledujúcim vzťahom, ktorý vyjadruje zložky vektora $\boldsymbol{c}$ pomocou zložiek vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$

$$c_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

kde symbol $\varepsilon_{ijk}$ je antisymetrický voči zámene ľuboboľnej dvojice indexov s hodnotami

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$$

ostatné hodnoty sú nulové

Geometrická interpretácia tohto vzťahu hovorí, že $\boldsymbol{c}$ je vektor, ktorý je kolmý na rovinu vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, jeho veľkosť je

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin(\alpha)$$

kde $\alpha$ je uhol zovretý vektromi $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Smer vektora $\boldsymbol{c}$ je taký, aby vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vytvárali pravotočivú sústavu.

Veľkosť vektora $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je rovná veľkosti plochy rovnobežníka, vytvoreného vektromi $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Potom je tiež zrejmé, že zmiešaný súčin

$$\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

je rovný objemu rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Zavádza sa formálny vektorový operátor $\nabla$ (čítaj nabla) ako

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$$

Pomocou operátora $\nabla$ sa dajú jednoducho zapisovať viaceré diferenciálne operátory.

Gradient skalárnej funkcie $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ je vektor so zložkami

$$\operatorname{grad} \varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3})$$

ktorý formálne možno písať ako

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi$$

Divergencia vektorovej funkcie $\boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3)$ je skalárna funkcia definovaná

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

čo sa dá písať ako formálny skalárny súčin

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla . \boldsymbol{v}$$

Rotácia vektorovej funkcie $\boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3)$ je definovaná ako vektor so zložkami

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{v})_i = (\nabla \times \boldsymbol{v})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

Platia integrálne vety

$$\oint_S \boldsymbol{v}.d\boldsymbol{S} = \int_V dV \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

kde prvý integrál je po uzavretej ploche a druhú cez objem tou plochou uzatvorený.

$$\oint_s \boldsymbol{v}.d\boldsymbol{r} = \int_S d\boldsymbol{S}.\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$$

kde prvý integrál je po uzatvorenej krivke a druý po ploche na tú krivku natiahnutej.

# 3 Kinematika hmotného bodu

Stav hmotného bodu v danom čase je určený zadaním jeho polohy a rýchlosti. Poloha sa zadáva určením polohového vektora $\boldsymbol{r}$. Rýchlosť je vektor, definovaný ako derivácia polohového vektora podľa času

$$\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{r}$$

Zrýchlenie je definované

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{v}$$

Krivka, ktorú opisuje koncový bod polohového vektora s rastúcim časom sa volá trajektória. Vektor rýchlsoti má v každom bode trajektórie smer dotyčnice v tom bode. Platí teda

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$$

kde $v = |\boldsymbol{v}|$ a $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor v smere dotyčnice k trajektórii.

Pozdĺž trajektórie môžeme zaviesť parameter "dĺžka trajektórie" označený ako $s$, definovaný vzťahom

$$\frac{ds}{dt} = |\boldsymbol{v}| = v$$

Potom zrýchlenie možno rozložiť na smer tangenciálny a normálový

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau$$

Kde

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$$

je tangenciálne zrýchlenie, lebo má smer dotyčnice, a

$$\boldsymbol{a}_\tau = v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

je tzv. normálové zrýchlenie. Ukážeme, že má smer normály ku trajektórii. Nahraďme deriváciu podľa času derivovaním podľa dĺžky trajektórie a dostaneme

$$\boldsymbol{a}_\tau = v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$$

Výraz $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ už nezávisí od časového priebehu pohybu po trajektórii ale zjavne len od geometrického tvaru trajektórie. Smer vektora $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ je kolmý na smer vektora $\boldsymbol{\tau}$. Naozaj, $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor, preto platí

$$\boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\tau} = 1$$

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\tau} = 2\boldsymbol{\tau}.\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0$$

Zjavne teda vektor $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ má smer normály ku trajektórii. Táto diferenciálna charakteristika trajektórie bude rovnaká pre všetky čiary, ktoré sa dotýkaju v uvažovanom bode a majú v infinitezimálnom okoli "spoločné ďalšie dva body" Takou čiarou je špeciálne i tzv. oskulačná kružnica, ktorej polomer $R$ je takisto diferenciálnou charakteristikou uvažovanej trajektórie. Ľahko vidno, že pre oskulačnú kružnicu platí

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = -\frac{1}{R}\boldsymbol{n}$$

kde vektor $\boldsymbol{n}$ je vektor normály ku oskulačnej kružnici smerujúci von z kružnice. Preto pre normálové zrýchlenie môžme písať

$$\boldsymbol{a}_n = -\frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$$

kde $R$ je polomer krivosti trajektórie v danom bode a $\boldsymbol{n}$ je smer von smerujúcej normály

Popíšme ešte kinematiku rovnomerného pohybu po kružnici. Ak počiatok súradnicovej sústavy je v strede kružnice, potom je užitočné zaviesť tzv. vektor uhlovej rýchlosti ako vektor $\boldsymbol{\omega}$ kolmý na rovinu kružnice, smerujúci na tú stranu, z ktorej sa pohyb javí v smere proti pohybu hodinových ručičiek a ktorého veľkosť je daná vzťahom

$$\omega = |\boldsymbol{\omega}| = \frac{v}{r}$$

kde $v$ je rýchlosť (veľkosť rýchlosti) rovnomerného pohybu po kružnici a $r$ je polomer kružnice. Z definície vektorového súčinu je potom zrejmé že v každom bode kružnice platí

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Ľahko sa možno presvedčiť o tom, že závislosť polohového vektora na čase je potom možné vyjadriť ako

$$\boldsymbol{r} = \cos(\omega t)\boldsymbol{r}_0 + \sin(\omega t)\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_0$$

kde $\boldsymbol{r}_0$ je polohový vektor v čase $t = 0$. Uhol opísaný polohovým vektorom teda s časom narastá ako $\omega t$, odtiaľ názov uhlová rýchlosť a vektor uhlovej rýchlosti.

# 4 Dynamika hmotného bodu

Newtonova pohybová rovnica

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{f}$$

kde $\boldsymbol{f}$ je sila, ktorá je funkciou polohy a rýchlosti častice. Newtonovu rovnicu treba predovšetkým chápať ako pohybovú rovnicu. T.j. ak poznáme vzorec pre silu (t.j. vieme aká sila by na časticu pôsobila, keby jej poloha bola $\boldsymbol{r}$ a rýchlosť $\boldsymbol{v}$), potom vieme ako riešenie tej diferenciálnej rovnice nájsť polohu a rýchlosť častice v každom okamihu, ak poznáme polohu a rýchlosť v počiatočnom okamihu.

Najlepšia predstava o tom ako z počiatočnej polohy a rýchlosti častice plynie ako riešenie pohybovej rovnice poloha a rýchlosť v každom neskoršom okamihu je predstava o jednoduchom numerickom riešení pohybovej rovnice.

V jednorozmernom prípade dostaneme napríklad

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{m} f(x_0, v_0)\tau$$
$$x_1 = x_0 + \frac{v_0 + v_1}{2}\tau$$
$$v_2 = v_1 + \frac{1}{m} f(x_1, v_1)\tau$$
$$x_2 = x_1 + \frac{v_1 + v_2}{2}\tau$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{m} f(x_i, v_i)\tau$$
$$x_{i+1} = x_i + \frac{v_i + v_{i+1}}{2}\tau$$

kde $\tau$ je dĺžka časového kroku a označenie je zrejmé:

Newtonovu rovnicu môžeme používať i v obrátenom zmysle, t.j. ak poznáme priebeh časového pohybu častice, potom sa môžeme pýtať, aká sila v každom okamihu pohybu pôsobila. Tak napríklad pre rovnomerný pohyb po kružnici dostaneme, že na časticu musí pôsobiť dostredivá sila

$$\boldsymbol{f} = -m\frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$$

kde $\frac{v^2}{R}$ je veľkosť dostredivého zrýchlenia.

## 5 Gravitačné pole

Sila, ktorou častica 1 pôsobí gravitačne na časticu 2 je

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\varkappa m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je vektor smerujúci od častice 1 k častici 2. Hovoríme, že častica 1 budí vo svojom okolí gravitačné pole, ktorého intenzita v mieste $\boldsymbol{r}$ je

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\varkappa m_1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

pričom v mieste, v ktorom je intenzita gravitačného poľa $\boldsymbol{E}$ bude pôsobiť na časticu s hmotnosťou $m$ sila

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{E}$$

Vypočítajme prácu, ktorú v gravitačnom poli budenom časticou s hmotnosťou $M$ musí vykonať vonkajší činiteľ, aby premiestnil časticu s hmotnosťou $m$ z miesta daného polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_1$ do miesta $\boldsymbol{r}_2$. Ak počiatok súradnicovej sústavy sa umiestni do polohy častice budiacej pole, dostaneme

$$A = \int_C \frac{\varkappa M m}{r_2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\varkappa M m}{r_2}\frac{r}{r}dr == -\frac{\varkappa M M}{r_2} + \frac{\varkappa M M}{r_1}$$

Pri výpočte sme využili vzťah

$$\boldsymbol{r}.d\boldsymbol{r} = r dr$$

ktorý dostaneme diferencovaním vzťahu

$$\boldsymbol{r}.\boldsymbol{r} = r r$$

Zavádza sa preto funkcia potenciál gravitačného poľa ako

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\varkappa M}{r}$$

resp všeobecne pre potenciál v mieste $\boldsymbol{r}$ ak častica budiaca pole je v mieste $\boldsymbol{r}'$ ako

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\varkappa M}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Práca na prenesenie častice s hmotnosťou $m$ z miesta daného polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_1$ do miesta $\boldsymbol{r}_2$ je potom

$$A = m(\varphi(\boldsymbol{r}_2) - \varphi(\boldsymbol{r}_1))$$

Z výsledku je súčasne vidno, že práca v gravitačnom poli nezávisí na tvare cesty, len na polohe počiatočného a koncového bodu.

Intenzita gravitačného poľa v mieste $\boldsymbol{r}$ je potom zrejme

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$$

Ak zdrojom poľa nie je bodová častica ale hmotnosť rozloženú v priestore s hustotou $\rho(\boldsymbol{r})$, potom intenzita poľa v mieste $\boldsymbol{r}$ bude zrejme

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\int d^3\boldsymbol{r}'\varkappa\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

a potenciál bude daný ako

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\int d^3\boldsymbol{r}'\varkappa\rho(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

pričom stále platí

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$$

Pretože výsledné pole je vektorovým súčtom polí budených malými elementami objemu akoby bodovými časticami bude i pre takéto pole práca nezávislá na ceste. Znamená to súčasne, že práca po uzavretej slučke je nulová, ako rýchlo vidno z integrálnej vety

$$\oint \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} = \int_S d\boldsymbol{S}.\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$$

kde rovnica

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$$

plynie z faktu, že $\boldsymbol{E}$ sa dá vyjadriť ako gradient potenciálu a platí, že rotácia gradientu ľubovoľnej skalárnej funkcie je identicky nulová. Vyplýva to aj z vektorového zápisu

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = (\nabla \times \nabla)\varphi = 0$$

a možno sa o tom presvedčiť aj použitím vyjadrenia v zložkách.

Pre pole bodového náboja sa možno ľahko presvedčiť, že výtok vektora intenzity poľa z uzatvorenej plochy je daný ako

$$\oint d\boldsymbol{S}.\boldsymbol{E} = 0 \text{ ak zdroj poľa leží mimo plochou uzatvoreného objemu}$$

$$\oint d\boldsymbol{S}.\boldsymbol{E} = -4\pi\varkappa M \text{ ak zdroj poľa leží vnútri plochou uzatvoreného objemu}$$

Zovšeobecnenie hovorí, že výtok vektora intenzity gravitačného poľa z uzatvorenej plochy je daný veľkosťou hmotnosti v objeme ohraničenom tou plochou, teda

$$\oint \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S} = -4\pi \int dV \rho(\boldsymbol{r})$$

Použijúc Gaussovu integrálnu vetu dostaneme

$$\oint \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S} \int dV \operatorname{div} \boldsymbol{E}$$

a odtiľ

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = -4\pi\rho$$

Po vyjadrení intenzity cez gradient potenciálu dostaneme

$$\triangle\varphi = 4\pi\rho$$

keď sme využili identitu

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \triangle\varphi$$

# 6 Malé kmity

Pod pojem malé kmity spadá vyšetrovanie dynamiky systémov neďaleko od stabilného rovnovážneho stavu v linearizovanom priblížení.

## 6.1 Harmonický oscilátor

Najjednoduchším systémom tohto typu je lineárny (jednorozmerný) harmonický netlmený oscilátor. Pohybová rovnica je

$$m\ddot{x} = -Kx$$

Typická úloha, ktorú treba riešiť, je počiatočná úloha. Zadaný je počiatočný stav

$$x(t) = x_0, \ \dot{x}(t) = v_0$$

a treba nájsť riešenie pohybovej rovnice $x(t)$ vyhovujúce tým počiatočným podmienkam. Ide o lineárnu diferenciálnu rovnicu s konštantnými koeficientmi, postup je štandardný. Všeobecné riešenie pohybovej rovnice má tvar

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

a $A, B$ sú ľubovoľné konštanty. Ľahko vidno, že počiatočným podmienkam zodpovedá voľba konštánt

$$A = x_0, \ B = \frac{v_0}{\omega}$$

Časový priebeh je harmonický pohyb s frekvenciou

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

resp. dobou kmitu

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Namiesto konštánt $A, B$ sa na špecifikáciu riešenia často používajú iné vhodné konštanty. Napr. riešenie zapisujeme v tvare

$$x(t) = X\cos(\omega t + \delta)$$

konštanta $X$ sa nazýva amplitúda, konštanta $\delta$ fázový posun. (V literatúre panuje nejednotnosť, fázový posun sa niekedy definuje s opačným znamienkom, inokedy sa kmitavý pohyb vyjadruje nie pomocou funkcie cos() ale pomocou funkcie sin().

## 6.2 Tlmený harmonický oscilátor

Ďalším systémom je tlmený harmonický oscilátor, Pohybová rovnica je

$$m\ddot{x} = -Kx - \alpha\dot{x}$$

Dodatočná sila voči netlmenému oscilátoru predstavuje silu trenia úmernú rýchlosti. Pohybová rovnica sa častejšie zapisuje v tvare

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

kde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$
$$b = \frac{\alpha}{2m}$$

Všimnime si, že v pohybovej rovnici sú dve časové škály: konštanty $\omega_0$ i$b$ majú rovnaký fyzikálny rozmer $s^{-1}$. Vyšetrovanie obmedzíme na prípad malého trenia

$$\omega_0 \gg b$$

Riešenie pohybovej rovnice má v tomto prípade všeobecný tvar

$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

a $X$ a $\delta$ sú ľubovoľné konštanty určené počiatočnými podmienkami.

Z uvedeného tvaru riešenia je zrejmý význam dvoch časových škál v pohybovej rovnici. Riešenie vyzerá ako kmitavý pohyb s kruhovou frekvenciou $\omega$, ktorého amplitúda postupne exponenciálne klesá. Za dobu

$$\tau = \frac{1}{b}$$

amplitúda poklesne o faktor $1/e$. Čas $\tau$ preto niekedy nazývame "doba života" alebo "doba útlmu" tlmenýh kmitov. Parameter $\omega_0$ v pohybovej rovnici teda v

zásade určuje frekvenciu tlmených kmitov, parameter $b$ dobu útlmu.

Taká terminológia má naozaj zmysel, len ak je splnená nerovnosť

$$\omega_0 \gg b$$

hoci pre platnosť riešenia v uvedenom tvare stačí slabšia podmienka

$$\omega_0 > b$$

Ak však parameter $b$ nie je malý, potom počas charakteristickej doby tlmenia oscilátor vykoná len málo alebo dokonca ani jeden úplný kmit a hovoriť o tlmenom "kmitavom pohybe" nemá dobrý zmysel.

Terminológia "tlmené kmitanie" nemá vlastne rigorózny zmysel nikdy. Tlmené kmitanie nie je striktne periodický pohyb, preto hovoriť o "kmitoch", "perióde", "frekvencii" a pod. nie je celkom korektné. Máme teda situáciu, v ktorej základné pojmy užitočné pre kvalitatívne chápanie a popisovanie skutočnosti nie sú dostatočne ostro definované.

Napríklad ak by sme chceli experimentálne definovať pojem "frekvencia tlmených kmitov", potom "počet opakovaní typickej štruktúry v tvare signálu za uritú dobu" je čosi ako praktická definícia frekvencie. Celková doba merania však nemôže byť rádovo väčšia ako doba života $\tau$ a nejednoznačnosť v určení "počtu opakovaní" je rádovo 1. Preto "experimentálna frekvencia" je definovaná s neurčitosťou rádove rovnou

$$\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau}$$

## 6.3 Budený tlmený harmonický oscilátor

Budeme teraz vyšetrovať situáciu, keď na tlmený harmonický oscilátor pôsobí navyše vonkajšia "vynucujúca" sila. Pohybová rovnica bude

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 = f(t)$$

kde $f(t)$ je vonkajšia sila so zadaným časovým priebehom. Podrobne vyšetríme iba prípad, keď priebeh vynucujúcej sily je harmonický. Nie je to podstatne obmedzenie, lebo v zásade ľubovoľný časový priebeh je možné chápať ako superpozíciu harmonických priebehov. Pretože pohybová rovnica je lineárna, bude riešenie vo všeobecnom prípade dané superpozíciou riešení pre harmonické vynucujúce sily.

Technicky sa riešenie značne zjednoduší ak namiesto reálnej harmonickej sily

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t)$$

budeme počítať s komplexnou silou

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$$

s tým, že fyzikálny význam má len reálna časť komplexného výrazu. Ak potom nájdeme komplexné riešenie pohybovej rovnice a vezmeme len jeho reálnu časť, nájdeme tak príslušné fyzikálne riešenie. Výhoda tohto postupu spočíva v značnom technickom zjednodušení výpočtov.

Pohybová rovnica je lineárna diferenciálna rovnica s pravou stranou. Všeobecné riešenie bude teda dané ako súčet partikulárneho riešenia rovnice s pravou stranou a všeobecného riešenia rovnice bez pravej strany.

Partikulárne riešenie s pravou stranou nájdeme pomocou fyzikálnej intuície: očakávame že pohyb vynútený harmonickou silou bude tiež harmonický s rovnakou frekvenciou ako frekvencia vynucujúcej sily.

Hľadáme teda riešenie pohybovej rovnice v tvare

$$x(t) = X_0 e - i\omega t$$

kde $X_0$ je vo všeobecnosti komplexná amplitúda. Fáza komplexnej amplitúdy určuje fázový posun kmitov voči vynucujúcej sile. Dosadením predpokladaného tvaru riešenia do pohybovej rovnice dostaneme vyjadrenie

$$X_0 = \frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega b}$$

Ak komplexnú amplitúdu napíšeme v tvare

$$X_0 = A e^{-i\delta}$$

dostaneme

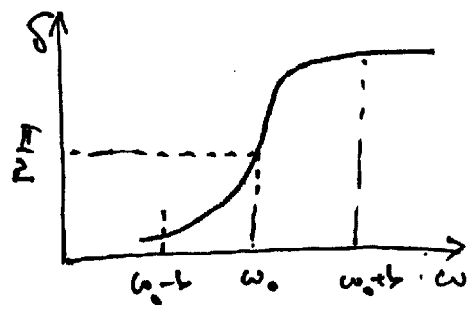
$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + \omega^2 b^2}}$$

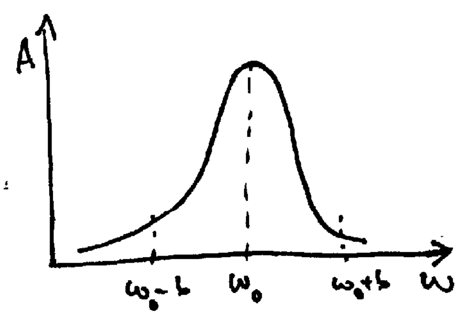
$$\tan(\delta) = \frac{\omega b}{-\omega^2 + \omega_0^2}$$

Ak tlmenie je malé, majú tak výraz pre amplitúdu ako aj výraz pre fázové posunutie výraznú štruktúru v okolí bodu

$$\omega \approx \omega_0$$

Amplitúda má v oblasti $(\omega_0 - b, \omega_0 + b)$ výrazné maximum, fázový posun $\delta$ prechádza v bode $\omega = \omega_0$ veľmi strmo hodnotou $\pi/2$: fázový posun sa z hodnôt rádove $\delta \approx 0$ "prehupne" do hodnôt rádove $\delta \approx \pi$ na intervale $(\omega_0 - b, \omega_0 + b)$

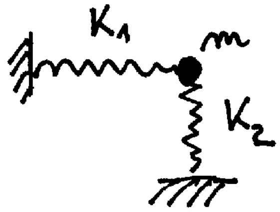



Tieto výrazné javy sa volajú rezonancia. Všimnime si, že rezonančné štruktúry sú tým výraznejšie, čím menšie je tlmenie. Frekvenčná šírka rezonančnych javov je rádovo rovná $b$, a to je súčasne presnosť, s ktorou je definovaná frekvencia kmitov nebudeného tlmeného oscilátora.

## 6.4 Dvojrozmerný harmonický oscilátor

Dvojrozmerný harmonický oscilátor je (v špeciálnom prípade) schematicky znázornený na obr.




Pohybová rovnica je

$$m\ddot{x} = -K_1 x$$

$$m\ddot{y} = -K_2 y$$

Ide o dve navzájom nezávislé diferenciálne rovnice, všeobecné riešenie teda bude

$$x(t) = A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)$$

$$y(t) = C\cos(\omega_2 t) + D\sin(\omega_2 t)$$

kde

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}}$$

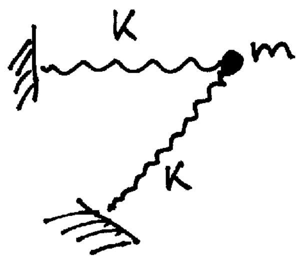
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m}}$$

a $A, B, CD$ sú ľubovoľné konštanty, ktoré treba určiť tak, aby boli splnené počiatočné podmienky.

Treba si uvedomiť, že vo všeobecnosti pohyb nebude periodický. Striktne periodický bude iba vtedy, ak pomer $\omega_1/\omega_2$ je racionálne číslo. Toto rigorózne matematické tvrdenie je fyzikálne málo zmysluplné, prakticky sa pohyb bude javiť ako periodický ak pomer $\omega_1/\omega_2$ bude (približne) rovný pomeru nejakých dvoch malých celých čísel, inak sa pohyb bude javiť ako prakticky neperiodický.

Dvojrozmerný oscilátor sa nazýva izotrópny, ak $K_1 = K_2$, vtedy sú frekvencie $\omega_1, \omega_2$ rovnaké trajektória bude mať tvar elipsy, v špeciálnom pohybe tvar kružnice, v degenerovanom prípade tvar úsečky. Kruhový pohyb dostaneme ak kmitavé pohyby v smeroch $x, y$ sú navzájom fázovo posunuté o $\pi/2$, napríklad v prípade $A = D \neq 0,\ B = C = 0$.

Všeobecnejší prípad dvojrozmerného harmonického oscilátora je znázornený na nasledujúcom obrázku




Aby sme mali technicky jednoduchšie výpočty, budeme predpokladať, že tuhosti obidvoch pružín sú rovnaké a pružiny zvierajú uhol $\pi/4$.

Aby sme našli pohybové rovnice, musíme najprv nájsť silu pôsobiacu na oscilátor pri výchylke $x, y$ z rovnovážnej polohy. Sila od vodorovnej pružiny je jednoduchá

$$f_{1,x} = -Kx,\ f_{1,y}$$

Silu od šikmej pružiny vypočítame prácnejšie. Ak rovnovážna dĺžka tej pružiny je $l$, potom pri vchyľke $x, y$ bude jej predĺženie dané výrazom

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + x\right)^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{2}} + y\right)^2} - l$$

a s presnosťou do lineárnych členov v $x, y$ dostaneme

$$\Delta l = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

a pre priemety sily od druhej pružiny do súradnicových osí teda dostaneme

$$f_{2,x} = -K\frac{1}{2}x - K\frac{1}{2}y$$

$$f_{2,y} = -K\frac{1}{2}x - K\frac{1}{2}y$$

Pohybové rovnice teda budú

$$m\ddot{x} = -Kx - K\frac{1}{2}x - K\frac{1}{2}y$$

$$m\ddot{y} = -K\frac{1}{2}x - K\frac{1}{2}y$$

Problém je v tom, že rovnice sú viazané, v obidvoch vystupujú obe premenné $x, y$. Štandardný postup je nasledovný. Treba nájsť vhodnú transformáciu súradníc tak, aby v nových súradniciach už rovnice boli navzájom nezávislé.

Hľadáme teda nové premenné $x', y'$ definované vzťahmi

$$x = x' \cos\phi + y' \sin\phi$$

$$y = -x' \sin\phi + y' \cos\phi$$

kde $\phi$ je hľdaný uhol rotácie pri prechode k novým súradniciam. Poznamenajme, bez dôkazu, že fakt, že úloha dekuplovať rovnice sa dá vyriešiť transformáciou rotácie vyplýva z faktu, že silové koeficienty v pohybových rovniciach sú symetrické, t.j. že koeficient pri premennej $y$ v pohybovej rovnici pre $x$ je rovnaký ako koeficient pri premennej $x$ v pohybovej rovnici pre $y$.

Pre skrátenie zápisu označme $\cos\phi = C,\ \sin\phi = S$ a dostaneme

$$mC\ddot{x}' + mS\ddot{y}' = -K\frac{3}{2}(Cx' + Sy') - K\frac{1}{2}(Cy' - Sx')$$

$$mC\ddot{y}' - mS\ddot{x}' = -K\frac{1}{2}(Cx' + Sy') - K\frac{1}{2}(Cy' - Sx')$$

Prvú rovnicu vynásobíme $C$, druhú $-S$ a sčítame a potom zasa prvú vynásobíme $S$ a druhú$C$ a opäť sčítame a dostaneme

$$m\ddot{x}' = -\frac{K}{2}x'(3C^2 - 2CS + S^2) - \frac{K}{2}y'(2CS + C^2 - S^2)$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{K}{2}y'(3S^2 + 2CS + C^2) - \frac{K}{2}x'(2CS + C^2 - S^2)$$

Rovnice sa dekuplujú, ak vyberieme uhol $\phi$ tak aby platilo

$$2CS + C^2 - S^2 = 0$$

ak táto podmienka bude splnená, potom môžeme rovnice ďalej zjednodušiť a dostaneme

$$m\ddot{x}' = -\frac{K}{2}x'(3C^2 - 2CS + S^2 + (2CS + C^2 - S^2))$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{K}{2}y'(3S^2 + 2CS + C^2 - (2CS + C^2 - S^2))$$

$$m\ddot{x}' = -\frac{K}{2}x'(4C^2)$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{K}{2}y'(4S^2)$$

Nájdime teraz $S, C$:

$$2CS + C^2 - S^2 = 0$$

$$2 + \frac{C}{S} - \frac{S}{C} = 0$$

a po substitúcii

$$t = \frac{S}{C}$$

dostaneme

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{2}$$

Odtiaľ

$$S^2 = \frac{S^2}{C^2 + S^2} = \frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$C^2 = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4}$$

Pohybové rovnice teda budú

$$m\ddot{x}' = -\frac{K}{2}(2 \mp \sqrt{2})x'$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{K}{2}(2 \pm \sqrt{2})y'$$

To sú rovnice dvoch lineárnych nezviazaných oscilátorov. Dve rôzne substitúcie, ktoré vedú k cieľu sa líšia len výmenou pomenovania $x'$ a $y'$. Vlastné frekvencie tých dvoch oscilátorov budú

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K(2+\sqrt{2})}{2m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K(2-\sqrt{2})}{2m}}$$

# 7 Zákony zachovania

Uvažujme systém mnohých častíc, pohybové rovnice sú

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{f}_{ij}$$

kde $\boldsymbol{f}_i$ sú vonkajšie sily a $\boldsymbol{f}_{ij}$ sú vnútorné sily (sila, ktorou j-ta častica pôsobí na i-tu časticu). Podľa zákona akcie a reakcie platí

$$\boldsymbol{f}_{ij} = \boldsymbol{f}_{ji}$$

Ak sily sú potenciálové (dajú sa vyjadriť ako záporný gradient potenciálu), dostaneme

$$\boldsymbol{f}_i = -\text{grad}\, U_i(\boldsymbol{r}_i)$$

$$\boldsymbol{f}_{ij} = -\text{grad}_{(\boldsymbol{r}_i)}\, U_{ij}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j)$$

pritom $U_i$ je potenciálna energia i-tej častice vo vonkajšom poli a $U_{ij}$ je potenciálna energia i-tej častice v poli vytvorenom j-tou časticou, inými slovami energia vzájomnej interakcie častíc i-tej a j-tej. Pre jednoduchosť si môžeme predstavovať gravitačné polia.

Utvorme teraz výraz

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 + \sum_i U_i(\boldsymbol{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} Uij(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j)$$

Tento výraz sa volá celková energia sústavy v stave definovanom polohami $\boldsymbol{r}_i$ a rýchlosťami $\boldsymbol{v}_i$. Všimnime si že interakčné energie vystupujú s faktorom 1/2. Je to preto že v suma (tak, ako je napísaná) sčítame cez každý pár častíc dvakrát.

Dosaďme teraz do výrazu pre energiu riešenie pohybových rovníc, teda polohy a rýchlosti ako funkcie času. Výraz pre energiu sa tak stane explicitnou funkciou času. Explicitným derivovaním podľa času potom dostaneme

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i.\boldsymbol{a}_i - \sum_i \boldsymbol{v}_i.\boldsymbol{f}_i - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(\boldsymbol{v}_i.\boldsymbol{f}ij + \boldsymbol{v}_j.\boldsymbol{f}ji)$$

kde sme už gradienty potenciálnych energií nahradili príslušnými silami. Premenovaním indexov v poslednom sčítanci už ľahko dostaneme

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \boldsymbol{v}_i.(m_i\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{f}_i - \sum_j \boldsymbol{f}ij) = 0$$

Platí teda zákon zachovania energie

$$E(t) = const$$

Vyjdime teraz opäť z pohybových rovníc

$$m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_i + \sum_{j\neq i} \boldsymbol{f}_{ij}$$

ak ich sčítame, vnútorná sily sa vyrušia a dostaneme

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i = \sum_i \boldsymbol{f}_i$$

Tomuto vzťahu sa zvykne hovoriť prvá veta impulzová. Na pravej strane teda vystupuje celková vonkajšia sila pôsobiaca na sústavu. Ak je celková sila nulová dostaneme zákon zachovanie hybnosti

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = 0$$

kde

$$\boldsymbol{p} = \sum_i m_i\boldsymbol{v}_i$$

Ak zavedieme pojem hmotného stredu (ťažiska sústavy) vzťahom

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}$$

dostaneme

$$(\sum_i m_i) \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{r}_T = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_i \boldsymbol{f} i$$

Pre ťažisko platí teda pohybová rovnica rovnaká ako by platila pre hmotný bod, v ktorom by bola sústredená celá hmotnosť sústavy a na ktorý by pôsobila celková vonkajšia sila.

Špeciálne ak celková vonkajšia sila je nulová, ťažisko bude v pokoji alebo sa bude pohybovať rovnomerne priamočiaro.

Druhú vetu impulzovú dostaneme opäť z pohybových rovníc vektorovým vynásobením polohovým vektorom a sčítaním. Vnútorné sily zo súčtu vypadnú a dostaneme

$$\frac{d}{dt} \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i$$

Na ľavej strane vbystupuje moment hybnosti sústavy

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

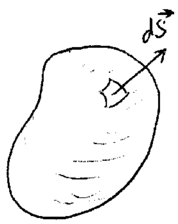
na ľavej strane stojí celkový moment vonkajších síl.

# 8 Tenzor napätia

Vo fyzike často namiesto diskrétnych modelov (typu systém mnohých častíc), ktoré by presnejšie zodpovedali diskrétnej molekulovej realite, používame efektívne spojité modely, v ktorých je systém zobrazovaný ako kontínnuum. Príslušné rovnice (napríklad pohybové rovnice) potom píšeme ako rovnice pre infinitezimálne objemové elementy toho kontínua. Potrebujeme však nový aparát pre vyjadrenie silového pôsobenia okolitých objemových elementov na zvolený objemový element. Toto silové pôsobenie často modelujeme ako lokálne pôsobenie susedných objemových elementov silami na povrchu zvoleného elementu.

Stratégia je taká: zvolený objemový element je ohraničený istou uzatvorenou plochou a to, čo potrebujeme, je vedieť vyjadriť silu, ktorej vonkajšie objemové elementy pôsobia na zvolený plošný element ohraničujúcej plochy.

Uvažovaná plocha je orientovaná uzavretá plocha, orientovanosť znamená, že je voči nej definovaný pojem "vnútro" a "vonkajšok". Infinitezimálnemu plošnému elementu takejto plochy potom priraďujeme vektor $d\boldsymbol{S}$ kolmý na plochu v danom mieste a smerujúci na vonkajšiu stranu plochy, jeho veľkosť je rovná veľkosti plochy uvažovaného infinitezimálneho plošného elementu.




Na uvedený plošný element pôsobí sila $\boldsymbol{f}$, ktorej veľkosť je zjavne úmerná veľkosti plošného elementu, ale jej smer nemusí mať smer normály na plochu, t.j. smer sily nemusí byť totožný so smerom vektora $d\boldsymbol{S}$. Ak chceme priradiť plôške silu, ktorá na ňu pôsobí, potrebujeme lineárne zobrazenie vektora na vektor, ktoré v zložkovom zápise má tvar

$$f_i = \sum_j \sigma_{ij} dS_j$$

Konvencia je taká, že ide o silu, ktorou vonkajšie objemové elementy pôsobia na vnútorné elementy cez plôšku $d\boldsymbol{S}$.

Matica koeficientov tejto transformácie $\sigma_{ij}$ je tvorená zložkami tzv. tenzora napätia. Tenzor (v tomto nami používanom zúženom význame) je geometrický objekt, reprezentujúci lineárne zobrazenie vektorov na vektory, v danej súradnicovej sústave je reperezentovaný štvorcovou maticou koeficientov. Pri prechode do inej súradnicovej sústavy sa musia zložky tenzora transformovať tak, aby ostala zachovaná "vektorovosť" obrazov vektorov.

Zložky vektorov sa pri zmene súradnicovej sústavy transformujú podľa vzťahu

$$a'_i = \sum_j R_{ij} a_j$$

kde $R_{ij}$ je rotačná matica, pre ktorú platí

$$\sum_j R_{ji} R_{jk} = \delta_{ij}$$

Zložky tenzora sa potom zrejme transformujú podľa vzťahu

$$\sigma'_{ij} = \sum_{kl} R_{ik} \sigma_{kl} R_{jl}$$

Fyzikálny význam koeficientov tenzora napätia je zrejmý. Diagonálne koeficienty predstavujú napätia kolmé na plôšky, kolmé na jednotlivé súradnicové osi (pri záporných koeficientoch ide o tlak, pri kladných koeficientoch ide o ťah). Nediagonálne koeficienty predstavujú šmykové napätia na tieto význačné plôšky.

Uvažujme teraz v danom kontínuu uzavretú plochu a napíšme pre objem v ploche uzatvorenú prvú vetu impulzovú. Pre jednoduchosť uvažujme ako objemovú silu len gravitačné pole. Dostaneme (pre i-tu zložku zrýchlení)

$$\int_V \rho a_i dV = \int_V \rho g_i dV + \oint \sigma ij dS_j$$

s využitím Gaussovej vety dostaneme zákon v diferenciálnom tvare

$$\rho a_i = \rho g_i + \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Podobne z druhej vety impulzovej dostaneme

$$\int_V \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} r_j \rho a_k dV = \int_V \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} r_j \rho g_k dV + \oint_S \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} dS_l$$

Po použití Gaussovej vety dostaneme

$$\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} r_j \rho a_k = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} r_j \rho g_k + \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial r_j}{\partial x_l} \sigma_{kl} + \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}$$

$$\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} r_j \rho a_k = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} r_j \rho g_k + \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} + \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}$$

$$\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} r_j (\rho a_k - \rho g_k - frac \partial \sigma_{kl} \partial x_l) = \sum_{kl} \varepsilon_{ilk} \sigma_{kl}$$

pravá strana poslednej rovnice je nulová v dôsledku prvej vety impulzovej, takže dostávame podmienku

$$\sum_{kl} \varepsilon_{ilk} \sigma_{kl} = 0$$

a odtiaľ

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$$

Tenzor napätia je teda symetrický.

# 9 Elementy mechaniky tekutín

Pod pojem tekutiny spadajú plyny a kvapaliny, teda látky, ktoré "tečú", svojím tvarom sa prispôsobujú nádobe a pod. Kvapaliny sú okrem toho aj málo stlačiteľné, v ideálnom prípade nestlačiteľné.

Matematickým vyjadrením tekutosti je tvrdenie, že v štatistickom prípade vnútri tekutín nie sú šmykové napätia, t.j. vnútorné sily v tekutinách sú vždy kolmé na plôšku, na ktorú pôsobia. Vo formalizme tenzora napätia to znamená

$$\sigma_{ij} = 0, \ i \neq j$$

Tento vzťah musí platiť v každej súradnicevej sústave. Ale tenzor, ktorý je diagonálny v každej súradnicovej sústave, je len jednotkový tenzor a jeho skalárne násobky. Preto dostávame tvrdenie

$$\sigma_{ij} = -p \, \delta_{ij}$$

Dostali sme Pascalov zákon, ktorý hovorí: Tlak v kvapaline je vo všetkých smeroch rovnaký.

Uvažujme teraz statický prípad a zvoľme v tekutine uzatvorenú plochu. Objem kvapaliny uzatvorený v ploche je v statickom prípade v pokoji, teda podľa prvej vety impulzovej musí byť celková sila pôsobiaca na ten objem kvapaliny nulová. Je to jednak objemová gravitačná sila, jednak tlakové sily pôsobiace na ohraničujúcu plochu. Dostaneme teda

$$\oint_S \sigma_{ij} dS_j + \int_V \rho\, g_i dV = 0;$$

Celková povrchová tlaková sila pôsobiaca na objem tekutiny je rovnaká a opačne orientovaná ako tiaž kvapaliny uzatvorenej v objeme. Ak je v tekutine ponorené nejaké teleso, potom celková tlaková sila na jeho povrch je rovnaká ako keď na mieste ponoreného telesa bola pôvodná tekutina. Preto platí Archimedov zákon: Teleso ponorené do tekutiny je nadľahčované silou, ktorá sa rovná tiaži kvapaliny telesom vytlačenej.

Pri popise prúdenia tekutín používame model kontínua, predpokladáme že tekutina spojite vypĺňa priestor, v ktorom môžeme definovať rýchlostné prúdové pole

$$\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})$$

vyjadrujúce okamžitú rýchlosť prúdenia kvapaliny v mieste $\boldsymbol{r}$ v čase $t$.

Ak v prúdiacej kvapaline zvolíme uzatvorenú plochu, potom celkový výtok kvapaliny von z uzavretej plochy musí byť rovný časovému úbytku hmotnosti kvapaliny v ploche uzavretej:

$$\oint_S \rho \boldsymbol{v} . d\boldsymbol{S} = -frac\partial\partial t \int_V \rho dV$$

Použitím Gaussovej vety dostaneme tzv. rovnicu kontinuity

$$\mathrm{div}\, \rho \boldsymbol{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Napíšeme teraz pohybové rovnice prúdenia tekutiny popísanej rýchlostným poľom $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})$. Zvoľme v prúdovom poli uzatvorenú plochu. Zrýchlenie objemového elementu tekutiny nájdeme, keď si uvedomíme, že objemový element $dV$, ktorý sa v čase $t$ nachádzal v mieste $\boldsymbol{r}(t)$ a mal rýchlosť $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})$ sa v čase $t + dt$ nachádza v mieste

$$\boldsymbol{r}(t + dt) = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})\, dt$$

a bude mať rýchlosť

$$\boldsymbol{v}(t + dt, \boldsymbol{r}(t + dt))$$

Zrýchlenie toho elementu teda bude

$$\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{v}(t+dt,\boldsymbol{r}(t+dt)) - \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r}(t))}{dt}$$

V zložkovom tvare teda dostaneme

$$a_i = \frac{\partial v_i}{dt} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$$

pohybová rovnica potom bude

$$\int_V dV \rho (\frac{\partial v_i}{dt} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j) = \int_V dV \rho g_i + \oint_S \sigma_{ij} dS_j$$

$$\int_V dV \rho (\frac{\partial v_i}{dt} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j) = \int_V dV \rho g_i - \oint_S p dS_i$$

$$\int_V dV \rho (\frac{\partial v_i}{dt} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j) = \int_V dV \rho g_i - \int_V dV \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial v_i}{dt} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = g_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Ak gravitačné zrýchlenie nahradíme záporným gradientom gravitačného potenciálu, dostaneme tzv. Eulerovu rovnicu

$$\frac{\partial v_i}{dt} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Eulerova rovnica sa dá výrazne zjednodušiť ak prúdové pole je tzv. bezvírové, t.j. ak platí

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$$

Pre bezvírové pole totiž platí

$$\sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{v}^2$$

Naozaj

$$\sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{v}^2 = \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - \sum_j v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sum_j v_j (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) = 0$$

Výraz v okrúhlej zátvorke je totiž triviálne nulový ak $i = j$ a ak $i \neq j$ predstavuje tento výraz niektorú z komponent vektora $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ a je podľa predpokladu o bezvírovosti tiež nulový.

Eulerova rovnica pre bezvírové prúdenie bude mať teda tvar

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{dt} + \frac{1}{2}\operatorname{grad} \boldsymbol{v}^2 = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$$

Ak kvapalina je nestlačiteľná (t.j. $\rho = const$) a prúdenie je ustálené (t.j. $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$) dostaneme tzv Bernouliho rovnicu

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi + p = const$$

V mieste, kde kvapalina je v pokoji, dostávame potom

$$\rho\varphi + p = const$$

resp.

$$p = p_0 - \rho\varphi$$

kde $p_0$ je tlak v mieste s nulovým gravitačným potenciálom. Vzorec je známy vzorec pre hydrostatický tlak, ktorý pre prípad homogénneho gravitačného poľa prejde na tvar

$$p = p_0 + h\rho g$$

kde $h$ je hĺbka pod hladinou.

# 10 Elektrostatické pole

Empirický Coulombov zákon hovorí, že dva elektrické náboje pôsobia na seba silou. Sila, ktorou častica s nábojom $q_1$ pôsobí vo vákuu na časticu s nábojom $q_2$ je

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je vektor smerujúci od častice 1 k častici 2. Náboje môžu byť kladné aj záporné, pritom náboje rovnakého znamienka sa odpudzujú, náboje opačného znamienka sa priťahujú.

Konštanta $\varepsilon_0 = 8,86.10^{-12} F/m$ sa volá permeabilita vákua. Permeabilita vákua je v podstate formálna fyzikálna veličina, ktorá matematicky zohľadňuje konzistentnosť zápisu Coulombovho zákona s voľbou jednotiek náboja. Jednotkou náboja je 1 C (coulomb), definovaný ako náboj, ktorý pretečie za 1 s vodičom, ktorým prechádza elektrický prúd o veľkosti ! A (Ampér). Ampér je definovaný pomocou magnetických silových účinkov elektrického prúdu.

Veličine typu permeabilita vákua by sme sa mohli vyhnúť, keby sme nedefinovali dopredu jednotku elektrického náboja, ale naopak, definovali jednotku náboja pomocou elektrostatických silových účinkov. Coulombov zákon by sme mohli potom písať v tvare bez permeability vákua:

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

a jednotka náboja by bola definovaná ako taký náboj teleis, ktoré vo vzdialenosti 1 m od seba na seba pôsobia silou $\frac{1}{4\pi}$N. Historicky sa zvolila iná cesta definície jednotiek, preto je potrebné používať pojem permeabilita vákua.

Formálne sa Coulombov zákon ponáša na Newtonov gravitačný zákon, pojmový aparát je preto tiež podobný.

Zavádza sa pojem intenzita elektrického poľa v mieste $\boldsymbol{r}$ tak, že sila, ktorá v mieste $\boldsymbol{r}$ pôsobí na náboj $q$ je

$$\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Zavádza sa aj pojem potenciálu

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

Potenciál má význam práce, ktorú musia vonkajšie sily vykonať, aby jednotkový náboj premiestnila z referenčného miesta s nulovým potenciálom na uvažované miesto, v ktorom má potenciál hodnotu $\phi$.

Rozdiel potenciálov v dvoch priestorových bodoch sa volá napätie medzi tými bodmi

$$U_{12} = \varphi(\boldsymbol{r}_1) - \varphi(\boldsymbol{r}_2)$$

Práca, ktorú elektrické pole vykoná, keď pod jeho vplyvom prejde náboj $q$ z miesta $\boldsymbol{r}_1$ na miesto $\boldsymbol{r}_2$ je

$$A = qU_{12}$$

Práca statického elektrického poľa pozdĺž uzavretej krivky je nulová, lebo práca medzi dvoma bodmi nezávisí na ceste. Platí teda

$$\oint \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}).d\boldsymbol{r} = 0$$

alebo v diferenciálnom tvare

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$$

Napätie, a teda i potenciál, sa meria vo Voltoch:

$$1V = \frac{1J}{1As}$$

jednotkou intenzity elektrického poľa je preto $Vm^{-1}$.

Ak náboj je staticky rozložený v priestore s hustotou $\rho(\boldsymbol{r})$, potom potenciál a intenzita po sú

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int d^3\boldsymbol{r}' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho(\boldsymbol{r}') \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\int d^3\boldsymbol{r}' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

Podobne ako pre gravitačné pole i pre elektrostatické pole platí Gaussova veta o výtoku vektora intenzity z uzatvorenej plochy

$$\oint d\boldsymbol{S}.\boldsymbol{E} = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0} d^3\boldsymbol{r}'$$

resp v diferenciálnom tvare

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Táto rovnica spolu s podmienkou

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$$

sú Maxwellove rovnice pre statické elektrické pole. Zavedením potenciálu je rovnica pre rotáciu splnená identicky, z rovnice pre divergenciu potom dostaneme pre potenciál Poissonovu rovnicu

$$\triangle\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

# 11 Lorentzova sila

Za prítomnosti elektrického i magnetického poľa pôsobí na časticu s nábojom $q$ sila

$$\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

kde $\boldsymbol{B}$ je tzv. indukcia magnetického poľa, meraná v jednotkách T (Tesla).

Treba si všimnúť, že vo výraze vystupuje rýchlosť častice, je teda namieste otázka "rýchlosť voči čomu?". Myslí sa tým rýchlosť voči inerciálnej sústave, voči ktorej fyzikálne deje práve popisujeme. Zdanlivá neinvariantnosť voči prechodu z jednej inerciálnej sústavy do druhej je kompenzovaná tým, že elektrické a magnetické polia popisované v dvoch rôznych inerciálnych sústavách nie sú rovnaké. Transformciami polí sa tu ale zaoberať nebudeme.

Ďalej si treba uvedomiť, že vo vzorci pre silu vystupuje vektorový súčin, no sila i rýchlosť sú pravé (radiálne) vektory. Preto vektor indukcie magnetického poľa musí byť axiálny vektor. Ľudovo povedané: pretože vo vzorci pre silu je schované pravidlo pravej ruky, musí byť akési pravidlo pravej ruky schované ešte raz, vo vyjadrení magnetickej indukcie pomocou jej zdrojov, teda elektrickch prúdov.

# 12 Magnetické pole stacionárneho prúdu

Empirický poznatok o magnetickom poli hovorí, že magnetické pole nemá "vlastné magnetické náboje". Neexistujú teda magnetické monopóly, magnetické idnukčné čiary sú teda vždy uzavreté, magnetické pole je "bezzdrojové", čo matematicky zapíšeme v tvare

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$

Experimentálne vieme, že zdrojom magnetického poľa je elektrický prúd, hľadáme rovnicu, ktorá by túto súvislosť kvantitatívne vyjadrila. Rovnica sa (vo fyzike často) nedá odvodiť, treba ju "uhádnuť" a jej správnosť sa "overuje" až praktickou užitočnosťou záverov na jaj základe urobených. Ono "uhádnutie" sa však nedeje "naslepo", heuristické argumenty zohrávajú významnú úlohu.

Rovnicu $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ môžeme splniť tautologicky, ak zavedieme tzv. vektorový potenciál magnetického poľa $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ vzťahom

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

pre ľubovoľnú vektorovú funkciu $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ totiž platí

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = 0$$

Za istých podmienok platí dokonca tvrdenie, že k zadanému $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$, splňujúcemu podmienku $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$ sa taký vektorový potenciál dá vždy nájsť. Vzhľadom na svoju definíciu je vektor $\boldsymbol{A}$ radiálny vektor podobne ako vektor hustoty elektrického prúdu $\boldsymbol{j}$. Preto je možné vysloviť (veľmi odvážnu) hypotézu, že vektorový potenciál ako dôsledok priestorového rozloženia vektorovej veličiny (elektrického prúdu) $\boldsymbol{j}$ vyjadrí rovnakým vzťahom ako skalárny potenciál elektrostatického poľa pomocou rozloženia skalárnej hustoty náboja $\rho$. Dostaneme tak vyjadrenie

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int d^3\boldsymbol{r}' \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

kde $\mu_0$ je tzv permeabilita vákua

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} TmA^{-1}$$

Ide o veličinu podobného druhu ako permitivita, t.j. v podstate nefyzikálnej povahy, ktorá len prispôsobuje tvar vzťahu voľbe fyzikálnych jednotiek, v tomto prípade definíciu jednotky T (Tesla) a jednotky A (Ampér).

Diferneciálne vyjadrenie tohto zákona je (analogicky, ako to bolo pre skalárny potenciál)

$$\triangle\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j}$$

Uvedomme si teraz, že elektrický náboj sa zachováva, t.j. výtok prúdu z uzavretej plochy musí byť rovný úbytku náboja v objeme plochou uzavretom. Matematické vyjadrenie tohto tvrdenia je

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int dV\rho = \oint d\boldsymbol{S}.\boldsymbol{j}$$

resp v diferenciálnom tvare

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0$$

V stacionárnom prípade potom platí

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0$$

a potom aj, ako sa možno presvedčiť z integrálneho vyjadrenia vektorového potenciálu pomocou metódy per partes

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$$

Potom možno Poissonovu rovnicu pre vektorový potenciál prepísať ako

$$(\operatorname{grad}\operatorname{div} - \triangle)\boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$(\operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{div}\operatorname{grad})\boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \mu_0 \boldsymbol{j}$$

Pre statické magnetické pole teda platia Maxwellove rovnice

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$

# 13 Ohmov zákon

Pre prúd prechádzajúci vodičom platí empirický Ohmov zákon

$$U = RI$$

kde $U$ je napätie (rozdiel potenciálov) medzi dvoma bodmi elektrického obvodu, $I$ je elektrický prúd tečúci medzi tými dvoma bodmi a $R$ je veličina charakterizujúca vodič spájajúci tie dva body a nazýva sa odpor. Odpor sa meria v jednotkách $\Omega$ (Ohm). Ohmov zákon obvykle chápeme ako vzťah medzi absolútnymi hodnotami v ňom uvedených veličín, ale možno ho chápať aj tak, že veličiny v ňom majú aj znamienko (t.j. môžu byť tak kladné ako aj záporné. Pre lepšiu zrozumiteľnosť preto pripíšme k veličinám indexy, označujúce dvojicu bodov, ktorých sa tie veličiny týkajú. Dostaneme tvar

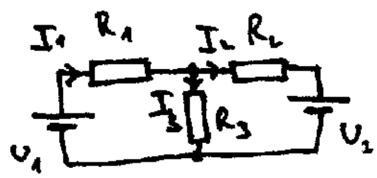
$$U_{12} = RI_{12}$$

Potom $U_{12}$ je rozdiel potenciálov medzi bodmi 1 a 2, teda

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

a $I_{12}$ je definovaný ako prúd tečúci z bodu 1 do bodu 2. Takto chápaný Ohmov zákon súčasne hovorí, že ak $U_{12} > 0$ potom $I_{12} > 0$, t.j. že prúd tečie z miesta s vyšším potenciálom na miesto s nižším potenciálom. Smer prúdu je tu chápaný ako smer vektora $q\boldsymbol{v}$, teda ako smer rýchlosti kladného náboja resp. opačný smer rýchlosti záporného náboja.

Pomocou Ohmovho zákona (a Kirchhoffových zákonov) možno riešiť aj zložitejšie elektrické obvody. Napríklad obvod znázornený na nasledujúcom obrázku.




V obvode tečú tri neznáme prúdy $I_1, I_2, I_3$. Označíme smer tých prúdov v zásade ľubovoľne. Ak pri riešení vyjdú kladné hodnoty prúdov, znamená to, že sme smer prúdu odhadli správne, ak vyjdú záporné hodnoty, znamená to, že smer prúdov bude oproti predpokladanému opačný, na správnosti riešenia to nič nemení.

Postup je v zásade štandardný.

Najprv napíšme rovnice vyplývajúce zo zákona zachovania náboja, čo v prípade obvodu znamená: Súčet prúdov do uzla vtekajúcich je nulový (prvý Kirchhoffov zákon). Pomocou tohoto pravidla napíšeme toľko rovníc, koľko je v obvode uzlov mínus jeden. (Ostatné rovnice by už neboli lineárne nezávislé). V našom konkrétnom prípade

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Ostatné potrebné rovnice doplníme podľa druhého Kirchhoffovho zákona, ktorý hovorí: Súčet nap1atí pozdĺž uzatvorenej slučky je nulový. Tento zákon vyjadruje tvrdenie, že práca pozdĺž uzatvorenej dráhy je v elektrickom poli nulová. Dostaneme tak napríklad rovnice

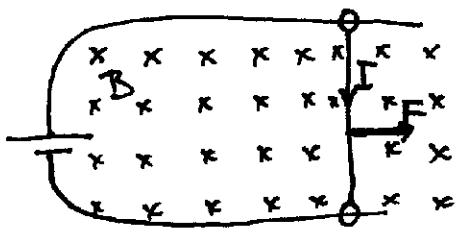
$$R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_1 = 0$$

$$R_2 I_2 + U_2 - R_3 I_3 = 0$$

Dostali sme tak systém lineárnych rovníc, ktorý už štandardným spôsobom vyriešime.

# 14 Elektromagnetická indukcia

Predstavme si vodič tvaru podkovy s pohyblivou vodivou priečkou uložený v magnetickom poli kolmom na rovinu vodiča. (obr.)




Ak vodičom bude prechádzať prúd $I$ bude na priečku dĺžky $l$ pôsobiť Lorentzova sila o veľkosti

$$F = BIl$$

a priečka sa dá pod vplyvom sily do pohybu. To je hrubý princíp fungovania elektrických motorov.

Predstavme si teraz naopak, že batéria v obvode nebude, ale nejaká vonkajšia sila bude priečku ťahať v naznačenom smere. Tým sa nosiče náboja v priečke dajú do pohybu spolu s priečkou. Majú teda nenulovú rýchlosť, preto na nich bude v magnetickom poli pôsobiť sila. Sila bude pôsobiť v smere priečky, vyvolá teda efektívne prúd nosičov náboja v obvode i bez prítomnosti batérie. Ak ťaháme priečku v smere sily naznačenej na obrázku, potom smer prúdu vyvolaného pohybom priečky v magnetickom poli bude opačný, ako je naznačený prúd na obrázku. Vyvolaný prúd má teda taký smer, že pôsobí naopak ako prúd, ktorý by musela obvodom pretláčať batéria, ktorá by vyvolala rovnaký pohyb priečky. Vyvolaný prúd teda pôsobí proti pohybu priečky, odtiaľ Lenzovo pravidlo: Indukovaný prúd má taký smer, že svojimi účinkami pôsobí proti zmene, ktorá ho vyvolala.

Priečku teda nemôžeme "ťahať zadarmo", musíme na ňu pôsobiť silou, aby sme prekonali silu vyvolanú indukovaným prúdom, ktorá "sa snaží" zabrániť pohybu priečky. Ak veľkosť indukovaného prúdu je $I$, potom sila, ktorou musíme priečku ťahať je

$$F = BIl$$

a sila pri posunutí priečky o vzdialenosť $\Delta x$ vykoná prácu

$$BIl\Delta x$$

Ak tok vektora magnetickej indukcie plochou uzavretou prúdovým obvodom označíme ako $\Phi$, potom túto prácu môžme vyjadriť v tvare

$$I\Delta\Phi$$

Ak by sme rovnaký prúd chceli vyvolať batériou, musela by konať rovnako veľkú prácu, preto by musela mať napätie

$$U = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

kde znamienko je dané konvenciou, že prácu ktorá definuje toto napätie počítame ako prácu vykonanú prúdom v smere z ktorého je odvodený smer vektora plochy pre výpočet toku indukcie podľa pravidla pravej ruky. Záporné znamienko potom vyjadruje skutočnosť, že prúd má smer snažiaci sa zabrániť zmene magnetického toku, ktorá ho vyvolala.

V príklade indukovaný prúd vyvolala zmena toku magnetického poľa plochou prúdovej slučky, pritom táto zmena toku bola spôsobená zmenou veľkosti plochy. Empiricky sa však ukazuje, že prúd sa bude v obvode indukovať i vtedy, keď sa nebude meniť plocha prúdovej slučky ale indukcia magnetického poľa. Zmena magnetického toku teda má rovnaký účinok ako by malo nejaké elektrické pole. Zmena magnetického toku teda vytvára efektívne elektrické pole, ktoré pozdĺž uzatvoreného prúdového obvodu koná prácu. Neplatí už teda, že práca elektrického poľa pozdĺž uzatvorenej krivky je nulová. V nestacionárnom prípade platí Maxwellova rovnica v tvare

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Maxwellova zásluha pri formulovaní teórie elektromagnetického poľa je najmä v tom, že vyslovil hypotézu, že podobný nestacionárny člen vystupuje i v rovnici pre rotáciu a magnetickej indukcie. Neviedli ho k tomu žiadne vtedy známe experimentálne poznatky, ale len požiadavka istej symetrie rovníc poľa.

Úplné Maxwellove rovnice elektromagnetického poľa teda sú

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$$
$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

# 15 Elektromagnetické vlny

Vyšetrime teraz riešenia Maxwellových rovníc pre prípad nulových prúdov a hustôt náboja, teda prípad voľného elektromagnetického poľa. Ak na rovnicu

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

pôsobíme operátorom rotácie, dostaneme

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$$

$$(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}$$

$$\triangle \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0$$

Intenzita elektrického poľa teda vyhovuje tzv. vlnovej rovnici.

Charakter riešení vlnovej rovnice si demonštrujme na jednorozmernej rovnici pre nejakú abstraktnú skalárnu veličinu $f$. Všeobecné riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f - c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = 0$$

má tvar

$$f = f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t - \frac{x}{c})$$

kde $f_1, f_2$ sú ľubovoľné funkcie. Zložka riešenia $f_1$ má charakter šírenia sa vzruchov v smere osi $x$ rýchlosťou $c$. Zložka riešenia $f_2$ má charakter šírenia sa vzruchov proti smeru osi $x$ rýchlosťou $c$.

Vlnová rovnica pre intenzitu elektrického poľa teda popisuje šírenie sa vlny elektrickej intenzity rýchlosťou

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

po dosadení numerických hodnôt dostaneme

$$c = 3.10^5 kms^{-1}$$

teda rýchlosť svetla. Odtiaľ pochádza Maxwellova hypotéza že svetlo je elektromagnetické vlnenie.

Monochromatická vlna šíriaca sa v smere jednotkového vektora $\boldsymbol{n}$ má tvar

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega(t - \frac{1}{c}\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}))$$

Ešte musíme skontrolovať, či je splnená i rovnica

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$$

Po dosadení dostaneme podmienku

$$\boldsymbol{n}.\boldsymbol{E}_0$$

Vektor intenzity elektrického poľa musí byť teda kolmý na smer šírenia sa vlny. Elektrické vlny sú teda priečne. Dosadením riešenia vlnovej rovnice do Maxwellových rovníc zistíme tvar magnetickej vlny doprevádzajúcej elektrickú vlnu. Dostaneme

$$\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega(t - \frac{1}{c}\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}))$$

Indukcia magnetického poľa sa teda šíri ako vlna vo fáze s elektrickou vlnou, magnetické