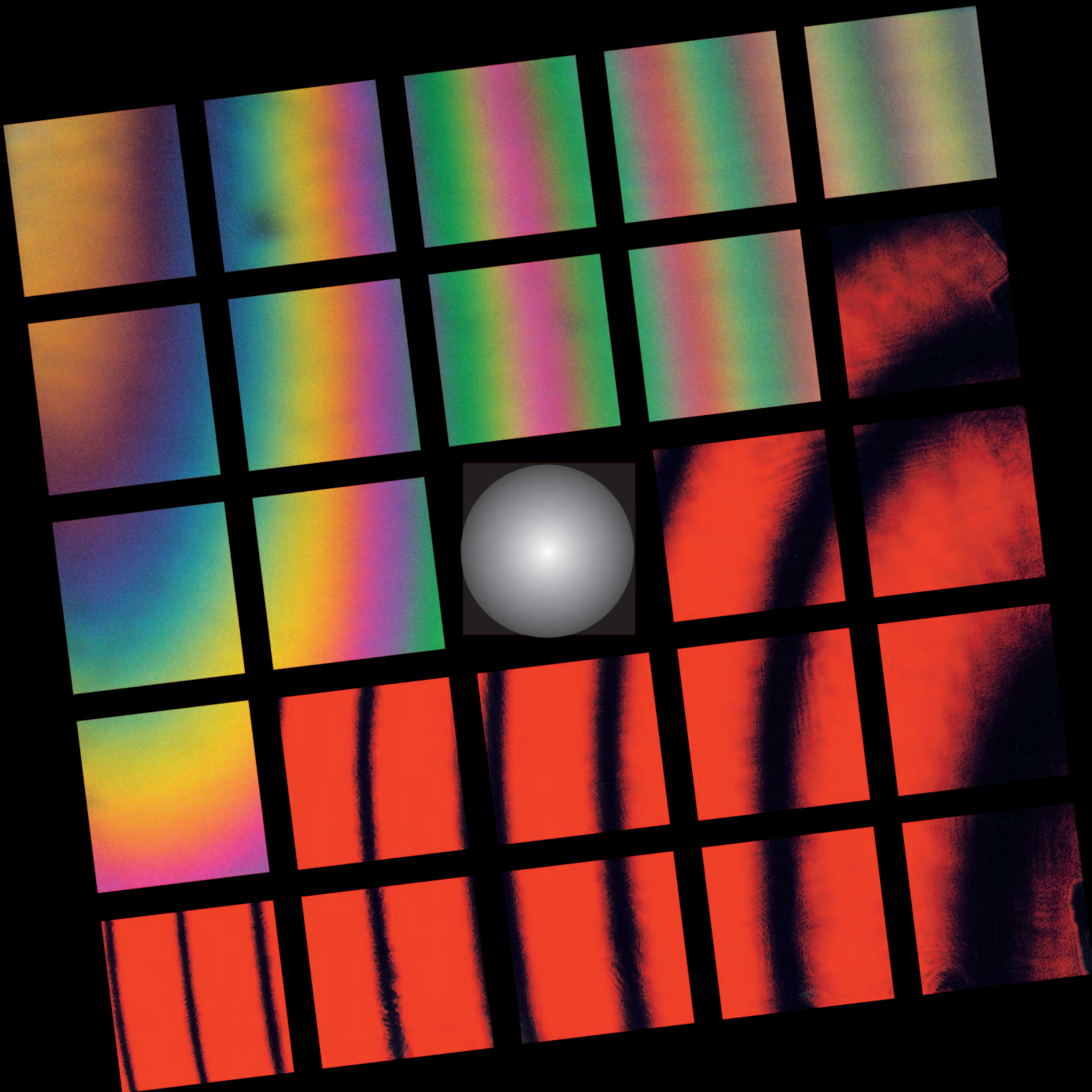


Milan Dado - Ivan Turek - Július Štelina - Ladislav Bitterer - Stanislav Turek - Eduard Grolmus - Patrick Stibor

KAPITOLY Z OPTIKY pre technikov

Milan Dado
Ivan Turek
Július Štelina
Ladislav Bitterer
Stanislav Turek
Eduard Grolmus
Patrick Stibor

KAPITOLY Z OPTIKY
pre technikov

Vydala Žilinská univerzita v Žiline
1998

Recenzenti: Doc. RNDr. Stanislav Kolník, CSc.
Ing. Štefan Sivák, CSc.
Doc. Ing. Miloslav Filka, CSc.

Vydala Žilinská univerzita v Žiline/ EDIS - vydavateľstvo ŽU

ISBN 80-7100-390-5

Obsah

Úvod

Predkladaná učebnica je určená pre študentov technických vysokých škôl, prípadne záujemcov z radov technikov, ktorí v svojom odbore používajú, alebo mienia použiť optické metódy. Je koncipovaná tak, aby sa na základe fyzikálnych princípov ozrejmila podstata rozmanitých aplikácií optiky v technickej praxi. V spolupráci pracovníkov katedier fyziky, telekomunikácií, geodézie a technologického inžinierstva tak vznikla učebnica, ktorá obsahuje tie kapitoly optiky, ktoré je potrebné, alebo aspoň užitočné poznať pri chápaní podstaty najčastejšie používaných optických metód a zariadení v rôznych technických oblastiach, alebo o ktorých sa domnievame, že by inžinier pracujúci v oblasti aplikácie optiky mal byť prinajmenšom informovaný. Pôvodný zámysel bol pripraviť akýsi „most“ medzi základným kurzom z fyziky a odbornými predmetmi technického vzdelávania. Nemienili sme teda predložiť ucelenú monografiu o optike a jej aplikáciách. Záujemcov o takúto literatúru preto odkazujeme na monografie citované v závere jednotlivých kapitol. Ako sa nám náš zámysel vytvoriť „most“ medzi fyzikou a technikou podaril, budete môcť posúdiť vy. Urobte tak, ale radšej až po preštudovaní základných kapitol, na ktoré sa „aplikačné“ kapitoly odvolávajú.

Na predkladanej učebnici sa autorsky podieľali pracovníci Katedry technickej fyziky ŽU doc. Ing. Július Štelina, CSc., ktorý napísal kapitoly 1., 2., 3., 9., 10. a 11., doc. RNDr. Ivan Turek, CSc. kapitolu 4 (okrem paragrafu 3) a kapitoly 5., 7., 8., 12., 13., 14., 15., 16., pracovníci Katedry telekomunikácií Ing. Eduard Grolmus, CSc. spolu s Ing. Patrickom Stiborom, PhD. (kapitolu 6), doc. Ing. Stanislav Turek, CSc. z Katedry technologického inžinierstva ŽU (kapitolu 17), prof. Ing. Ladislav Bitterer, CSc. z Katedry geodézie ŽU (kapitolu 18) a profesor Ing. Milan Dado, CSc. (kapitolu 19 a paragraf 3 kapitoly 4), ktorý je autorom koncepcie knihy. Fyzikálne aspekty technicky zameraných kapitol konzultoval s ich autormi doc. RNDr. I. Turek, CSc.

Autori ďakujú recenzentom pánom doc. RNDr. Stanislavovi Kolníkovi, CSc., Ing. Štefanovi Sivákovi a doc. Ing. Miloslavovi Filkovi, CSc. za starostlivé prečítanie rukopisu a pripomienky, ktoré umožnili vylepšiť predkladaný študijný materiál.

Vďaka patrí Slovenským elektrárňam, a.s. Bratislava a programu TEMPUS TELECOMNET JEP No 9326-95 za pomoc pri vydaní knihy.

Autori

Žilina december 1997

1. Elektromagnetická povaha svetla

Existencia elektromagnetických vĺn (ďalej elmg vlny) bola teoreticky predpovedaná J. C. Maxwellom (1862 - 1864) ako priamy dôsledok z rovníc elektromagnetického poľa. Ukázalo sa, že rýchlosť elmg vĺn vo vákuu je rovná

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon . \mu}}\,, \tag{1.0}$$

ktorú v tom čase nazývali elektromagnetickou konštantou. Jej číselná hodnota bola stanovená 3.10^8 $m.s^{-1}$ už pred tým W. Weberom a R. G. A. Kohlrauschom. Táto hodnota veľmi dobre súhlasila s rýchlosťou svetla vo vákuu určenou A.Fizeauom ($3,15.10^8$ $m.s^{-1}$).

Druhou významnou vlastnosťou pre elmg vlny bola skutočnosť, že sú to vlny priečne. Pre elmg vlny to vyplynulo z Maxwellových rovníc a pre svetlo z experimentov s polarizáciou svetla realizovaných T. Youngom v r. 1817. Tieto dva fakty priviedli Maxwella k záveru, že svetlo sú elektromagnetické vlny. Existencia elmg vĺn bola experimentálne dokázaná r. 1888 H. Hertzom.

1.1 Vlnová rovnica

Ďalej odvodíme z Maxwellových rovníc vlnovú rovnicu. Majme na mysli prostredie, v ktorom objemová hustota elektrického náboja $\rho = 0$ a tiež prúdová hustota $\vec{J} = 0$, pričom $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$. Pre takéto prostredie budú mať Maxwellove rovnice tvar:

$$div\vec{E} = 0 \tag{1.1}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{1.2}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,. \tag{1.4}$$

Keď v (1.4) dosadíme za vektory $\vec{H}$ a $\vec{D}$ dostaneme:

$$rot\vec{B} = \varepsilon . \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.5}$$

Derivovaním rovnice (1.5) podľa času môžeme písať nasledujúcu rovnicu:

$$rot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \varepsilon.\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{1.6}$$

Ak rovnicu (1.3) dosadíme do ľavej strany rovnice (1.6), po malej úprave dostaneme:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon.\mu} rot(rot\vec{E}) = -\frac{1}{\varepsilon.\mu}(grad(div\vec{E}) - \Delta\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon.\mu}\Delta\vec{E}. \tag{1.7}$$

Prvý člen v zátvorke vzhľadom na rovnicu (1.1) je rovný nule. Dospievame teda k rovnici:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon.\mu}\Delta\vec{E}. \tag{1.8}$$

Analogickým spôsobom môžeme odvodiť rovnicu pre vektor magnetickej indukcie:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon.\mu}\Delta\vec{B}. \tag{1.9}$$

Vidíme, že táto rovnica je podobná ako rovnica (1.8). Vo všeobecnosti je $\vec{E}$ a $\vec{B}$ funkciou súradníc *x, y, z,* a času *t*. Keď budeme uvažovať, že napr. vlnový stav je závislý len od súradnice z, môžeme rovnicu (1.8) prepísať do tvaru :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon.\mu}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}. \tag{1.10}$$

Rovnice (1.8), (1.9),(1.10) majú tvar zhodný s rovnicami známymi z mechaniky, ktoré popisujú vlnový pohyb prostredia. Rozdiel medzi nimi spočíva v tom, že na pravej strane miesto výrazu $1/\varepsilon.\mu$ vystupuje (v jednorozmernom prípade) výraz E/ρ alebo G/ρ (kde E a G sú moduly pružnosti v ťahu a v šmyku) podľa toho, či ide o vlny pozdĺžne alebo o vlny priečne. Podobne teda výraz $1/\varepsilon.\mu$ pre elmg vlny predstavuje štvorec rýchlosti šírenia sa elektromagnetických vĺn. Rýchlosť šírenia sa elmg vĺn bude potom daná vzťahom:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon.\mu}}. \tag{1.11}$$

Po dosadení číselných hodnôt za elektrickú permitivitu a magnetickú permeabilitu vákua sa môžeme presvedčiť, že elmg vlny sa vo vákuu šíria rýchlosťou svetla $c = 3.10^8$ m.s^{-1}. Riešenie rovnice (1.10) je možné vyjadriť funkciou tvaru:

$$E_z(z,t) = E_z(t - \frac{z}{v}). \tag{1.12}$$

To, že táto funkcia je riešením vlnovej rovnice sa môžeme presvedčiť jej priamym dosadením do (1.10.).

1.2 Rovinné vlny

Ďalej venujme pozornosť riešeniu vlnovej rovnice (1.8). Vieme, že vektor $\vec{E}$ je v tejto rovnici funkciou súradníc a času t. j. $\vec{E}\,(\,x,\ y,\ z,\ t\,)$. Pre jednoduchosť hľadajme riešenie v jednorozmernom prípade. Majme teda na mysli rovinnú vlnu, pri ktorej intenzita napr. elektrického poľa závisí len od súradnice z a od času t. Vlnový stav nech je daný funkciou u, ktorá môže reprezentovať ľubovoľnú zložku vektora $\vec{E}$. Pôvodnú vlnovú rovnicu s touto skalárnou funkciou vyjadríme:

$$\Delta u-\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,. \tag{1.13}$$

Vzhľadom na vyššie uvedené môžeme písať, že $u = u(z,\ t)$ je funkciou súradnice z a času t. To značí, že u má rovnakú hodnotu v bodoch roviny, ktorá je kolmá na os z. V tomto prípade bude mať vlnová rovnica tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,. \tag{1.14}$$

Dosadením ľubovoľnej funkcie $f\,(\,z\,-\,v.t)$ do rovnice (1.14) vidíme, že takáto funkcia vyhovuje tejto rovnici, keď $v^2 = \pm c^2$ to zn., že $v = \pm c$. Z tohto ešte nevidíme, či môže existovať aj iné riešenie rovnice (1.14). Aby sme sa presvedčili či takéto riešenie je, zavedieme nové , nezávislé premenné a a b, ktoré sú definované rovnicami :

$$a = z - c.t \qquad b = z + c.t\,, \tag{1.15}$$

t. zn., že súradnicu z a čas t môžeme vyjadriť:

$$z = a + b \tag{1.16}$$

$$t=\frac{1}{c}(a-b)\,, \tag{1.17}$$

teda uvažovaná skalárna funkcia potom bude

$$u\,(z,\,t\,) = u\,(\,a + b\,,\,a - b\,) \tag{1.18}$$

Inými slovami funkciu u môžeme považovať za funkciu premenných a a b, t. zn.

$$u = u\,(\,a,\,b\,).$$

Potom

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial a}.\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial b}.\frac{\partial b}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial a}.1+\frac{\partial u}{\partial b}.1\,, \tag{1.19}$$

podobne

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial a}.\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial b}.\frac{\partial b}{\partial t}=-c.\frac{\partial u}{\partial a}+c.\frac{\partial u}{\partial b}. \qquad (1.20)$$

Ľavú aj pravú stranu rovnice (1.20) podelíme c a potom ju odčítame od rovnice (1.19) a po krátkej úprave dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}=2.\frac{\partial}{\partial a}. \qquad (1.21)$$

Ak upravené rovnice sčítame dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}=2.\frac{\partial}{\partial b}. \qquad (1.22)$$

Pre jednoduchosť sme v prechádzajúcich dvoch vzťahoch vynechali písanie u.

Potom

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{c.}\frac{\partial}{\partial t}\right).\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \qquad (1.23)$$

Využitím tohto vzťahu a vzťahov (1.21) a (1.22) môžeme vlnovú rovnicu (1.14) pretransformovať do tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4.\frac{\partial}{\partial a}.\frac{\partial u}{\partial b}=0. \qquad (1.24)$$

Rovnicu (1.24) ďalej upravíme na tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a.\partial b}=0. \qquad (1.24a)$$

Integrujme túto rovnicu podľa premennej „a“. Môžeme teda písať:

$$\frac{\partial}{\partial b}.\int\frac{\partial u}{\partial a}.da=\int 0.da. \qquad (1.24b)$$

Po integrácii dostávame:

$$\frac{\partial u}{\partial b}=u'_1(b)=C. \qquad (1.24c)$$

Funkcia $u'_1(b)$ je integračnou konštantou vzhľadom na integráciu podľa „a“. Keď teraz ešte raz vykonáme integráciu, t. zn. zintegrujeme rovnicu (1.24c) podľa „b“ môžeme písať

$$\int \frac{\partial u}{\partial b}.db = \int u'_1(b).db + \int 0.db \qquad (1.25)$$

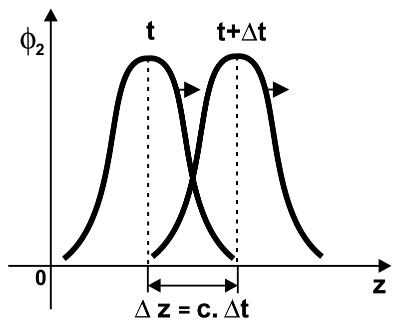
Po integrácii získavame funkciu :

$$u = u_1 (b) + u_2 (a), \qquad (1.26)$$

kde $u_2 (a)$ má význam integračnej konštanty vzhľadom na integráciu podľa „b“. Po dosadení transformačných vzťahov (1.15) do vzťahu (1.26) dostávame všeobecné riešenie vlnovej rovnice (1.14) v tvare :

$$u (z, t) = u_1 (z + c.t) + u_2 (z - c.t). \qquad (1.27)$$

Skúsme analyzovať druhý člen funkcie (1.27). Graf tejto funkcie v okamihu „t“ a v okamihu "$t+\Delta t$", je znázornený na obr. 1.1.



Obr. 1.1. Vlna postupujúca v kladnom smere osi z. Φ_2 udáva vlnový stav postupujúcej vlny

Je zrejmé, že hodnota argumentu funkcie v bode „z“ v okamihu „t“ prislúcha hodnote argumentu funkcie v bode "$z+\Delta z$" v okamihu "$t+\Delta t$", ak sa $\Delta z = c.\Delta t$, pretože

$$z - c.t = z + \Delta z - c.(t + \Delta t)\,. \qquad (1.28)$$

Graf funkcie pre $t + \Delta t$ môžeme získať z grafu pre t posunutím všetkých bodov krivky v kladnom smere osi „z“ o hodnotu $\Delta z = c.\Delta t$. Rýchlosť vlny sa potom rovná $v = \Delta z / \Delta t = c$.

Funkcia $u_2 (z - c.t)$ opisuje vlnu ľubovoľného tvaru, ktorá postupuje rýchlosťou c v kladnom smere osi z . Pri tomto pohybe sa hodnota u_2 v každom bode vlny a tvar vlny nemení.

Podobnú analýzu môžeme urobiť pre prvý člen funkcie (1.27) t. j. $u = u_1 (z + c.t)$. Táto funkcia popisuje tiež vlnu ľubovolného tvaru, ktorá postupuje rýchlosťou c v záporom smere osi z. Hodnota funkcie v každom bode vlny sa takisto pri tomto pohybe nemení.

Vlna popísaná funkciou (1.27) predstavuje teda superpozíciu dvoch vĺn, ktoré postupujú v dvoch opačných smeroch. Hodnota tejto funkcie pre fixované „z“ a „t“ je rovnaká na rovine kolmej k osi z. Preto sa takéto vlny nazývajú **rovinné vlny.**

1.3 Sférické vlny

Keď je vlna napr. od bodového zdroja izotropná, potom riešenie rovnice (1.13) hľadáme v tvare $u = u\ (r,\ t\ )$, kde „r“ je vzdialenosť od bodového zdroja, ktorý je umiestnený v počiatku súradnicového systému. Je možné ukázať, že keď aplikujeme Laplaceov operátor Δ na funkciu u v sférických súradniciach, dostaneme :

$$\Delta u = \frac{1}{r}.\frac{\partial^2 (r.u)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2.\sin\vartheta}.\frac{\partial}{\partial\vartheta}.\left(\sin\vartheta.\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2.\sin^2\vartheta}.\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\ . \qquad (1.29)$$

Pretože hľadané riešenie nezávisí od uhlových premenných využitím (1.29) môžeme vlnovú rovnicu (1.13) napísať v tvare

$$\frac{\partial^2 (r.u).}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 (r.u)}{\partial t^2} = 0\ , \qquad (1.30)$$

má teda ten istý tvar ako rovnica (1.14), keď sme nahradili „r“ za „z“ a „$r.u$“ za „u“. Preto miesto rovnice (1.27) dostaneme

$$r.u(r,\ t) = u_1(r + c.t) + u_2(r - c.t)\ . \qquad (1.31)$$

Všeobecné sféricky symetrické riešenie rovnice (1.13) bude mať potom tvar

$$u(r,t) = \frac{u_1(r + c.t)}{r} + \frac{u_2(r - c.t)}{r}\ . \qquad (1.32)$$

Interpretujme fyzikálny význam vzťahu (1.32). Druhý člen v tomto vzťahu predstavuje vlnu, ktorá sa pohybuje v smere narastania „r“ t. j. od stredu. Takúto vlnu nazývame **vlna rozbiehavá.** Prvý člen rovnice (1.32) opisuje vlnu, ktorá sa pohybuje v smere zmenšovania „r“ t. j. k stredu (k počiatku). Takejto vlne hovoríme **vlna zbiehavá** . Všeobecné riešenie (1.32) je superpozíciou vlny zbiehavej a rozbiehavej.

Hodnota funkcie u v danom okamihu na guľovej ploche s polomerom r bude konštantná. Takýmto vlnám potom hovoríme, že sú to **vlny sférické.**

1.4 Rovinné harmonické vlny

Pripomeňme si zo základného kurzu fyziky, že ak funkcie u_1 a u_2 v rovnici (1.27) sú harmonickými funkciami argumentu, potom takúto vlnu nazývame **harmonickou vlnou**. Pre vlnu, ktorá sa napr. pohybuje v zápornom smere osi z môžeme písať

$$u_1(z + c.t) = u_1\left[c\left(t + \frac{z}{c}\right)\right] = A.\cos\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)\ . \qquad (1.33)$$

V (1.33) je A konštanta, ktorú budeme nazývať **amplitúda**. Konštantu ω **kruhovou frekvenciou** harmonickej funkcie a c je **rýchlosť šírenia vlny**. Potom vlnu, ktorú opisujeme funkciou

$$u(z,t)=A.\cos\left[\omega.\left(t+\frac{z}{c}\right)\right], \tag{1.34}$$

budeme nazývať **rovinnou harmonickou vlnou.** Táto vlna sa šíri v zápornom smere osi *„z“*. Nazývame ju tiež **vlnou postupnou.** Takúto vlnu by sme tiež mohli vyjadriť pomocou funkcie

sin (z, t).

Všeobecnejší tvar pre postupnú vlnu, ktorá sa šíri v zápornom smere osi *„z“*, môžeme potom vyjadriť funkciou

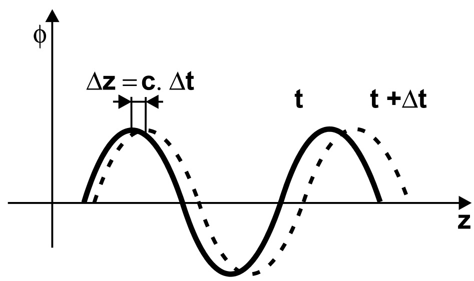
$$u(z,t)=A.\cos\left[\omega\left(t+\frac{z}{c}\right)\right]+B.\sin\left[\omega\left(t+\frac{z}{c}\right)\right]. \tag{1.35}$$

Vlnu, ktorá sa šíri v kladnom smere osi *„z“* môžeme podobne vyjadriť

$$u(z,t)=A.\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]+B.\sin\left[\omega\left[t-\frac{z}{c}\right]\right]. \tag{1.36}$$

1. Pre názornosť je na obr. 1.2 zobrazená závislosť výchylky od súradnice *„z“* rovinnej harmonickej vlny v okamihu $t+\Delta t$.

Predstavme si, že sa vlna šíri v určitom prostredí. Ak by sme napr. sledovali v mies-te z = 0 pohyb tohto prostredia ako funkciu času, zistíme, že ju môžeme popísať vlnovou funkciou



Obr. 1.2. Závislosť výchylky od súradnice z pre dva časové okamihy

$$u(0,t)=A.\cos(\omega.t). \tag{1.37}$$

Argument vlnovej funkcie (1.34) nazývame **fázou vlny**. Vlna, ktorá má miesta konštantnej fázy roviny - ako už vieme - sa nazýva rovinnou vlnou. Keď uvážime, že vlnová dĺžka sa dá vyjadriť pomocou rýchlosti vlny a periódy

$$\lambda=c.T=c.\frac{2.\pi}{\omega}, \tag{1.38}$$

môžeme rovnicu (1.34) napísať v tvare:

$$u(z,t) = A.\cos\left(\omega.t + \frac{\omega}{c}.z\right) = A.\cos(\omega t + k.z), \tag{1.39}$$

kde $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2.\pi}{\lambda}$ nazývame **vlnové číslo.** Keď vlnové číslo „k“ vynásobíme jednotkovým vektorom, ktorý má smer šírenia vlny, dostaneme **vlnový vektor.** Vlnový vektor bude teda kolmý na vlnoplochu a bude udávať smer šírenia vlny.

1.5 Fázová a grupová rýchlosť, disperzia

Vyššie sme uviedli, že rovinnú harmonickú vlnu šíriacu sa v kladnom smere osi z môžeme popísať napr. funkciou typu:

$$u(z,t) = A.\cos(\omega.t - k.z). \tag{1.40}$$

Položme tento výraz rovný konštante:

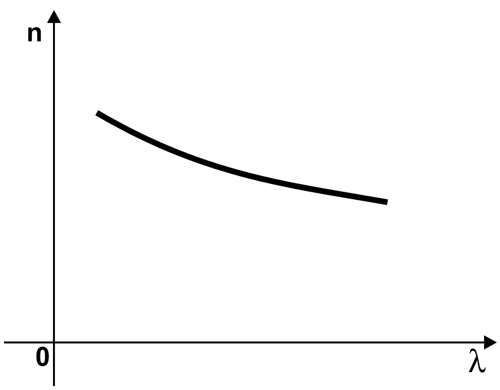
$$\omega.t - kz = konst. \tag{1.41}$$

Tam, kde je táto rovnica splnená, fáza vlny je konštantná. Význam jednotlivých symbolov je pôvodný, t. zn. ω je kruhová frekvencia, k je vlnové číslo, t je časový okamih a z je súradnica miesta, v ktorom vlnový stav určujeme. Keď (1.41) zderivujeme podľa času, dostaneme:

$$\omega - k.\frac{dz}{dt} = 0. \tag{1.42}$$

Tiež môžeme písať:

$$v_F = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}. \tag{1.43}$$



Obr. 1.3. Závislosť indexu lomu od vlnovej dĺžky pre disperzné prostredie

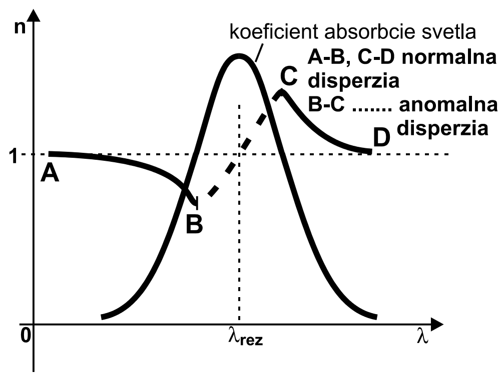
Tento výraz predstavuje rýchlosť, s ktorou sa posúva miesto, v ktorom je konštantná fáza vlny. Rýchlosť v_F nazývame **fázová rýchlosť.** Vidíme, že je funkciou vlnového čísla k, a teda aj vlnovej dĺžky λ Pripomeňme, že $k = 2\pi/\lambda$ a index lomu prostredia, v ktorom sa vlna šíri je $n = c / v$). Z toho teda vyplýva, že v materiáloch, v ktorých fázová rýchlosť je funkciou vlnovej dĺžky, je od nej závislý aj index lomu.

Matematicky môžeme písať:

$$n = f(\lambda) \tag{1.44}$$

Tento jav nazývame **disperziou.** Schematicky je táto závislosť znázornená na obr.1.3.

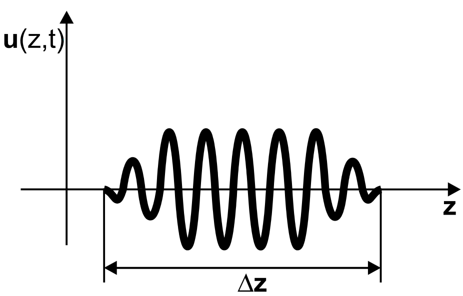
Disperziou svetla súvisí s touto závislosťou. Disperziu prostredia definujeme ako deriváciu indexu lomu podľa vlnovej dĺžky, t. zn. $dn/d\lambda$. V mnohých prostrediach koeficient absorpcie šíriacej sa vlny výrazne závisí od ω respektíve vlnovej dĺžky λ. Súvisí to s interakciou vĺn s prostredím. Niektoré vlnové dĺžky sú pohlcované viac ako iné, za čo sú zodpovedné rôzne fyzikálne mechanizmy. Keď prostredie pohlcuje časť týchto šíriacich sa vĺn, potom v oblasti najväčšieho pohlcovania a v jeho okolí disperzia vykazuje anomáliu. Schematicky je takáto situácia znázornená na obr.1.4. V tej časti závislosti, kde je $dn/d\lambda$ väčšia ako nula, hovoríme o **anomálnej disperzii**.



Obr. 1.4. K normálnej a anomálnej disperzii

Monochromatická vlna typu (1.40) je v čase a v priestore sled „maxím" a „miním", ktoré sa premiestňujú v smere osi z fázovou rýchlosťou

$$v_F = \frac{\omega}{k}. \tag{1.45}$$



Obr. 1.5. Schematické znázornenie vlnového balíka

Takáto vlna signály neprenáša, pretože každé nasledujúce „maximum" je rovnaké ako predchádzajúce. Pre prenos signálu je potrebné vlnu modulovať, alebo urobiť na nej určité „značky", prípadne ju redukovať na určitú časovú oblasť Δt. Takáto situácia je schematicky znázornená na obr. 1.5.

Vlnu už potom nebudeme opisovať rovnicou (1.40). Ak teda budeme prenášať signál pomocou vlny znázornenej na obr. 1.5 (vf impulz), keď využijeme Fourierovu metódu, môžeme si takúto vlnu (takýto impulz) predstaviť ako superpozíciu vĺn s frekvenciami z určitého intervalu $\Delta\omega$. Takýto útvar potom nazývame **vlnovým balíkom** alebo **grupou vĺn**. Priestorovo-časové rozloženie pre takúto grupu vĺn môžeme popísať výrazom :

$$u(z,t) = \int_{\omega_O-\Delta\omega_O}^{\omega_O+\Delta\omega_O} A(\omega).\cos(\omega.t - k(\omega).z)\, d\omega . \qquad (1.46)$$

Vo vzťahu (1.46) amplitúda a vlnové číslo vystupujú ako funkcia ω preto, že tieto veličiny sú rôzne pre rôzne frekvencie. Pre daný časový okamih bude funkcia (1.46) znázornená závislosťou na obr. 1.5. Keď čas bude narastať, bude sa graf na obr. 1.5 posúvať v kladnom smere osi z .

V nedisperznom prostredí všetky rovinné vlny, ktoré tvoria balík, sa šíria rovnakou fázovou rýchlosťou „v“. Je zrejmé, že v takomto prípade sa balík pohybuje rýchlosťou v a tvar balíka sa nemení. Je možné ukázať, že v disperznom prostredí sa balík s časom mení. V dôsledku toho sa krátke impulzy spravidla rozširujú (balík sa rozplýva) v špeciálnom prípade to môže byť naopak. Keď je disperzia relatívne malá, bude aj rozplývanie balíka pomalé. V tomto prípade môžeme balíku pripísať rýchlosť v_G, ktorou budeme rozumieť rýchlosť, ktorou sa pohybuje ťažisko balíka. V disperznom prostredí je grupová rýchlosť (skupinová rýchlosť) v_G rozdielna od fázovej rýchlosti v.

Je možné ukázať (pozri dôkaz na konci tohto paragrafu), že ťažisko vlnového balíka sa pohybuje grupovou rýchlosťou

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} . \qquad (1.47)$$

Keď do vzťahu (1.47) dosadíme za ω zo vzťahu (1.45), môžeme grupovú rýchlosť vyjadriť nasledovne :

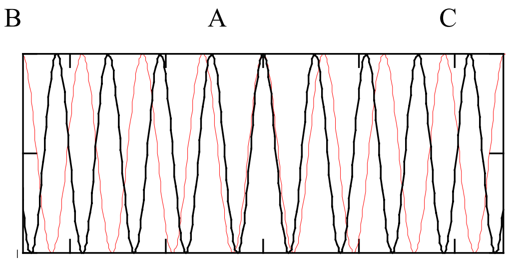
$$v_G = \frac{d}{dk}(v_F \cdot k) = v_F + k \cdot \frac{dv_F}{dk} . \qquad (1.48)$$

V nedisperznom prostredí $dv_F / dk = 0$, potom grupová rýchlosť je rovná fázovej , to zn.

$$v_G = v_F . \qquad (1.49)$$

Poznamenajme ešte, že pojem grupovej rýchlosti má význam za podmienky, že pohlcovanie energie vlny v danom prostredí je relatívne malé. Pri veľkom útlme vĺn pojem grupovej rýchlosti stráca význam. Tento prípad sa týka anomálnej disperzie.

Najdime vzťah pre grupovú rýchlosť v_G ťažiska vlnového balíka. Pre jednoduchosť majme na mysli dve rovinné harmonické vlny s rovnakými amplitúdami, ale rôznymi vlnovými dĺžkami. Schematicky v danom okamihu sú tieto vlny znázornené na obr. 1.5a .



Obr.1.5a.K odvodeniu grupovej rýchlosti. Schematické znázornenie dvoch rovinných harmonických vĺn v danom okamihu

V uvažovanom okamihu majú vlny v bode A rovnakú fázu, preto aj amplitúda výslednej vlný bude maximálna. V bodoch B a C sú vlny v protifáze, a teda amplitúda výslednej vlny bude nulová. Napred predpokladajme, že sa vlny šíria v kladnom smere osi z . Súčasne nech vlna (1) (označená plnou čiarou) má menšiu rýchlosť ako vlna (2) (označená tenkou čiarou). Pre takýto prípad je $dv/d\lambda > 0$. Potom miesto, v ktorom sa vlny vzájomne skladajú s maximálnou amplitúdou sa bude pohybovať v zápornom smere osi z. Takže grupová rýchlosť bude menšia ako fázová rýchlosť. Keď rýchlosť vlny (1) bude väčšia ako rýchlosť vlny (2), t. j. $dv/d\lambda < 0$, bude sa uvažované miesto, kde sa vlny vzájomne skladajú, pohybovať v kladnom smere osi z. Inými slovami, grupová rýchlosť bude väčšia ako fázová rýchlosť.

Vyjadrime uvažované dve vlny výššie uvedeným spôsobom t. j.

$$u_1(z,t) = u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z)$$

a

$$u_2(z,t) = u_0 \cdot \cos[(\omega + d\omega).t - (k + dk).z],$$

kde u_0 je amplitúda uvažovaných vĺn , $k = \omega / v_F$ a $(k + dk) = (\omega + d\omega) / v_F$ sú vlnové čísla. Superpozíciou týchto dvoch vĺn po malej úprave dostaneme :

$$u(z,t) = u_1(z,t) + u_2(z,t) = \left[2.u_0 . \cos\left(\frac{d\omega}{2}.t - \frac{dk}{2}.x.\right)\right].\cos(\omega.t - k.x)\Bigg] .$$

(Súčasne sme z goniometrie využili súčtový vzťah pre funkciu kosínus a zanedbali sme členy s $d\omega$ a dk voči ω a k v druhom súčiniteli.). Výraz v hranatej zátvorke predstavuje amplitúdu výslednej rovinnej harmonickej vlny :

$$A = \left[2 \cdot u_0 \cos\left(\frac{d\omega}{2} \cdot t - \frac{dk}{2} \cdot x\right)\right] .$$

V tomto prípade rad rovnakých maxím amplitúdy musí spĺňať podmienku:

$$\frac{d\omega}{2} \cdot t - \frac{dk}{2} \cdot x_{MAX} = \pm m \cdot \pi \qquad (m = 0, 1, 2, 3.....)$$

Na každé z týchto maxím môžeme nazerať ako na ťažisko príslušnej grupy vĺn. Keď predchádzajúcu rovnicu riešime vzhľadom na x_{MAX}, dostaneme :

$$x_{MAX} = \frac{d\omega}{dk} \cdot t + konst .$$

Pretože súčasne platí $x_{MAX} = v_G .t$ + konst, porovnaním tohoto vzťahu s predchádzajúcou rovnicou dostávame pre grupovú rýchlosť ťažiska vlnového balíka vzťah

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} , \tag{1.47}$$

čo sme chceli ukázať.

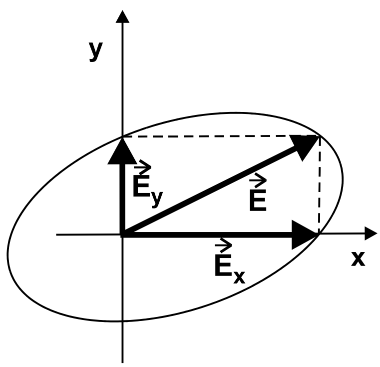
1.6 Polarizácia elektromagnetických vĺn

Je známe, že v rovinnej elmg vlne vektory intenzity elektrického poľa $\vec{E}$, magnetickej indukcie $\vec{B}$ a vlnového vektora $\vec{k}$ tvoria trojicu ortogonálnych vektorov. Keď sa elmg vlna bude napr. šíriť v smere osi z, potom tento smer bude mať aj vlnový vektor $\vec{k}$ Z Maxwellových rovníc súčasne vyplýva, že vektor $\vec{E}$ vo všetkých bodoch a vo všetkých okamihoch bude mať jedinú zložku, napr. ak je to v smere osi x bude to $E_x(z, t)$. Vektor magnetickej indukcie potom bude mať zložku v smere osi y t. j. $B_y(z, t)$. V tomto prípade hovoríme, že vlna má len lineárnu alebo rovinnú polarizáciu. Rovina, v ktorej leží vektor intenzity elektrického poľa vlny a vlnový vektor sa nazýva **rovinou polarizácie**. (V staršej literatúre bolo zvykom rovinou polarizácie nazývať rovinu, v ktorej leží vektor $\vec{B}$.).

1.7 Superpozícia lineárne polarizovaných vĺn

Analyzujme superpozíciu dvoch lineárne polarizovaných vĺn tej istej frekvencie, ktoré sa šíria v tom istom smere. Uvažujme, že vektor $\vec{E}$ prvej vlny leží v rovine xz druhej v rovine yz, (pozri obr.1.6).

Smer šírenia vlny je kolmý na rovinu nákresne. Potom môžeme veľkosti zložiek vektorov intenzity elektrického poľa týchto vĺn vyjadriť nasledovne:



Obr.1.6. Eliptická polarizácia ako dôsledok zloženia dvoch lineárne polarizovaných vĺn

$$E_{1x}(z,t) = E_{10} \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot z)$$
$$E_{1y} = 0 \tag{1.50}$$
$$E_{1z} = 0 .$$

Pre druhú vlnu platí:

$$E_{2x} = 0 \tag{1.51a}$$

$$E_{2y}(z,t) = E_{20} \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot z + \delta) \tag{1.51b}$$

$$E_{2z} = 0\,, \tag{1.51.c}$$

δ je fázový posun (fázový rozdiel) medzi týmito vlnami.

V ďalšom sledujeme vektor intenzity elektrického poľa výslednej vlny $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ v rovine kolmej (rovina nákresne) na smer šírenia vlny t. j. na os z. S plynutím času koncový bod vektora $\vec{E}$ premietnutý do tejto roviny opisuje určitú uzavretú krivku tak, ako je to znázornené na obr. 1.7. Hľadajme rovnicu tejto krivky. Upravíme rovnicu (1.51) nasledovne:

$$E_y = E_{2y} = E_{20} \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot t) \cdot \cos\delta + E_{20} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z) \cdot \sin\delta\,. \tag{1.52}$$

Pomocou rovnice (1.50) vylúčime z rovnice (1.52) $\sin(\omega \cdot t - k \cdot z)$ a $\cos(\omega \cdot t - k \cdot z)$. Potom po úprave dostaneme:

$$E_y = E_{20} \cdot \frac{E_x}{E_{10\cdot}} \cdot \cos\delta + E_{20} \cdot \sin\delta \cdot \sqrt{1 - (E_x / E_{10})^2}\,. \tag{1.53}$$

Amplitúdy E_{10} a E_{20} sú kladné. Prvý člen na pravej strane rovnice (1.53) presunieme na ľavú stranu, a celú rovnicu umocníme na druhú. Súčasne rovnicu delíme $(E_{20})^2$ a po úprave dostaneme rovnicu:

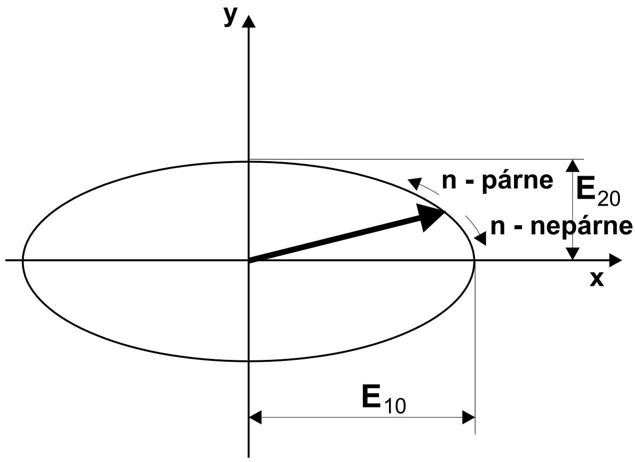
$$\frac{E_x^2}{E_{10}^2} + \frac{E_y^2}{E_{20}^2} - 2 \cdot \frac{E_x}{E_{10}} \cdot \frac{E_y}{E_{20}} \cdot \cos\delta = \sin^2\delta\,. \tag{1.54}$$

Ďalej budeme analyzovať rôzne prípady, ktoré táto rovnica popisuje.

1.8 Eliptická a kruhová polarizácia

Keď si predstavíme, že $\delta = \pi / 2$ t. zn., že $\cos\delta = 0$ a $\sin\delta = \pm 1$, potom rovnica (1.54) bude mať tvar:

$$\frac{E_x^2}{E_{10}^2} + \frac{E_y^2}{E_{20}^2} = 1\,. \tag{1.55}$$



Ak $E_{10} \neq E_{20}$ predstavuje táto rovnica **rovnicu elipsy** so stredom v počiatku súradnicového systému a osami elipsy totožnými s osami súradnicového systému tak, ako je to znázornené na obr. 1.7.

Obr.1.7. K pravotočivej a ľavotočivej eliptickej polarizácii

Ak bude $E_{10} > E_{20}$, bude E_{10} predstavovať hlavnú poloos elipsy a E_{20} vedľajšiu (malú) poloos. Podmienka cos $\delta = 0$ je splnená pre prípady, keď

$$\delta = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \,, \tag{1.57}$$

kde $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. Potom rovnice (2.1) a (2.2) nadobúdajú napr. pre $z = 0$ (máme teda na mysli rovinu nákresne) :

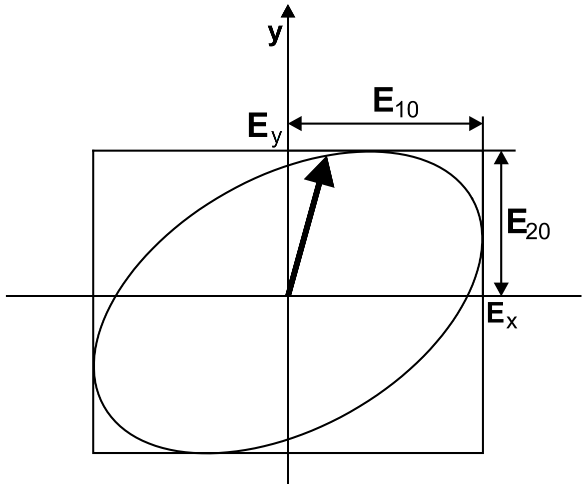
$$E_x = E_{10} \cdot \sin(\omega \cdot t)\,, \tag{1.58}$$

$$E_y = E_{20} \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi) = (-1)^{n+1} \cdot .E_{20} \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{1.59}$$

Rovnice (1.58) a (1.59) môžeme interpretovať nasledovne: Ak bude ***n* – párne,** bude sa koncový bod vektora $\vec{E}$ otáčať okolo počiatku proti smeru hodinových ručičiek. Pre ***n* - nepárne** sa bude koncový bod otáčať v smere hodinových ručičiek. V prvom prípade hovoríme o **ľavotočivej elipticky polarizovanej vlne,** v druhom prípade hovoríme o **pravotočivej elipticky polarizovanej vlne.** Pre úplnosť poznamenávame, že vlna postupuje v smere osi z , t. j. smerom k nám od nákresne.

Pre prípad, že $E_{10} = E_{20}$ elipsa prejde na kružnicu. Tomuto zodpovedajúca vlna sa nazýva **kruhovo polarizovaná vlna** alebo vlna s **cirkulárnou polarizáciou.** Podobne ako pri eliptickej polarizácii aj tu môžu byť vlny **ľavotočivo kruhovo polarizované** alebo **pravotočivo kruhovo polarizované.**

Ak je cos $\delta \neq 0$ rovnica (1.54) tiež určuje elipsu, avšak jej hlavné osi už nemajú smer súradnicovej sústavy XYZ, ale sú pootočené. Ako vidieť zo vzťahov (1.50) a (1.51) maximálne a minimálne hodnoty zložiek E_x a E_y sú rovné $\pm E_{10}$ a $\pm E_{20}$, preto je elipsa vpísaná do obdĺžnika so stranami $2 \cdot E_{10}$ a $2 \cdot E_{20}$ a so stredom v počiatku súradnicového systému (pozri obr. 1.8).



Obr.1.8. Všeobecný prípad eliptickej polarizácie

Orientácia elipsy a jej parametre závisia od veličiny δ. Treba si všimnúť, že keď je cos $\delta \neq 0$, vlna je polarizovaná elipticky (nie kruhovo), aj keď je $E_{10} = E_{20}$. Smer otáčania výsledného vektora $\vec{E}$ sa určuje hodnotou δ.

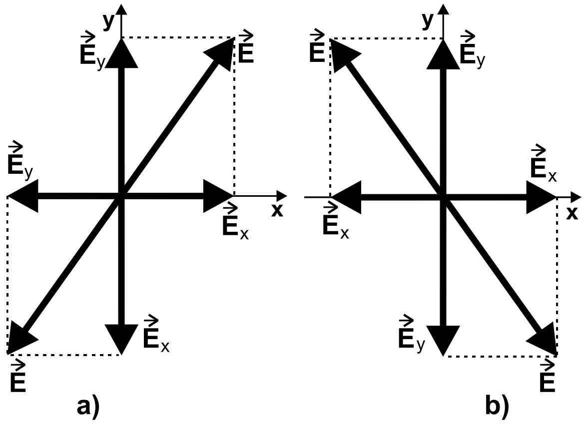
Poloha koncového bodu vektora $\vec{E}$ v tom istom okamihu pre rôzne z leží na **skrutkovici**. Táto skrutkovica leží na povrchu valca, ktorý má polomer rovný dĺžke vektora $\vec{E}$ a jeho os splýva s osou z , čo je smer šírenia vlny.

Pri elipticky polarizovnej vlne pri fixovanom čase t, koncový bod vektora $\vec{E}$ leží na skrutkovici, ale na povrchu eliptického valca. Vektor $\vec{E}$ je kolmý na os valca v každom bode priestoru, teda jeho počiatok je na osi a jeho koncový bod na povrchu eliptického valca.

Degenerovaný prípad eliptickej polarizácie. Lineárna polarizácia

Ak sa cos $\delta = \pm 1$ a sin $\delta = 0$ v rovnici (1.54), môžeme túto rovnicu prepísať do tvaru

$$\frac{E_x^2}{E_{10}^2} + \frac{E_y^2}{E_{20}^2} \mp 2 \cdot \frac{E_x}{E_{10}} \cdot \frac{E_y}{E_{20}} = \left(\frac{E_x}{E_{10}} \mp \frac{E_y}{E_{20}} \right)^2 = 0 \,. \tag{1.60}$$



Pre cos δ = +1 dáva rovnica (1.60) priamku

$$\frac{E_x}{E_{10}} - \frac{E_y}{E_{20}} = 0 \qquad (1.61)$$

a keď cos δ = -1 prechádza na rovnicu priamky

$$\frac{E_x}{E_{10}} + \frac{E_y}{E_{20}} = 0\,. \qquad (1.62)$$

Rovnice (1.61) a (1.62) môžeme graficky znázorniť (pozri obr.1.9)

Obr. 1.9 a,b. Degenerovaný prípad eliptickej polarizácie. Lineárna polarizácia

Obr. 1.9 a,b. predstavuje lineárne polarizovanú vlnu, ktorá je špeciálnym prípadom eliptickej polarizácie, keď jedna z poloosí elipsy na obr. 1.9 je rovná nule. Pri cos δ = + 1, lineárne kmity vektora $\vec{E}$ prebiehajú v prvom a treťom kvadrante. Keď cos δ = -1, lineárne kmity vektora $\vec{E}$ prebiehajú v druhom a štvrtom kvadrante.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že: **elektromagnetickú vlnu s ľubovoľnou polarizáciou si môžeme predstaviť ako superpozíciu dvoch lineárne polarizovaných vĺn, ktorých polarizačné roviny sú na seba kolmé.** Preto môžeme povedať, že elmg vlny majú **dva nezávislé stavy polarizácie.**

1.9 Lineárne polarizovaná vlna, ako superpozícia vĺn s kruhovou polarizáciou

Majme na mysli superpozíciu dvoch vĺn s ľavou a pravou kruhovou polarizáciou. Zadajme v určitom fixovanom v bode osi z vektory intenzity $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ vzťahmi

$$E_{1x} = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (1.63)$$

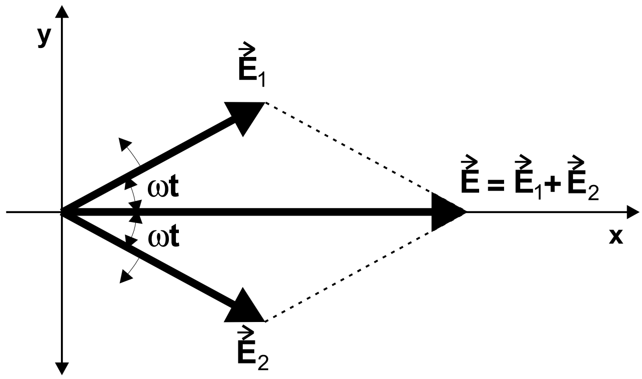
$$E_{1y} = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (1.64)$$

a

$$E_{2x} = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (1.65)$$

$$E_{2y} = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (1.66)$$

V zmysle hore uvedeného si môžeme situáciu predstaviť na obr. 1.10.



Obr.1.10. Vznik lineárne polarizovanej vlny zložením dvoch kruhovo polarizovaných vĺn

Prvá vlna je ľavotočivo kruhovo polarizovaná a druhá pravotočivo kruhovo polarizovaná. Amplitúdy vĺn sú rovnaké. Superpozíciu týchto vĺn vyjadríme nasledovne

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = 2 \cdot E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{1.67}$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 0\ . \tag{1.68}$$

Tieto vzťahy sme získali využitím vzťahov (1.63) až (1.66). Vzťah (1.67) vyjadruje teda lineárne polarizovanú vlnu. V tomto prípade vektor $\vec{E}$ výslednej vlny spadá do smeru osi x. Ak by medzi vlnami danými rovnicami (1.63) až (1.66) bol fázový posun (rozdiel fáz), potom čiara, v ktorej kmitá vektor $\vec{E}$ by bola sklonená pod určitým uhlom voči ose „x“. Tento by bol daný fázovým rozdielom týchto dvoch vĺn.

Literatúra

[1] ACHIEZER, A. I. ACHIEZER, I. A.: Elektromagnetizm i elektromagnitnyje volny, Vyssaja škola, Moskva l985

[2] GODŽAJEV, N. M.: Optika, Vyssaja škola, Moskva l977

[3] ILKOVIČ, D.: Fyzika II, Alfa Bratislava, SNTL Praha l970

[4] G. MAIN :Vibrations and Waves in Physics, Cambridge University Press, Cambridge l984, (český preklad Kmity a vlny ve fyzice, Academia. Praha l990)

[5] MATVEJEV, N.: Optika, Vyssaja škola, Moskva l985

[6] SAVEĽJEV, I. V.: Kurs obščej fiziki, Tom 2, Nauka, Moskva l982

[7] ŠTRBA, A., MESÁROŠ, V., SENDERÁKOVÁ, D.: Optika s príkladmi I , UK, Bratislava 1996

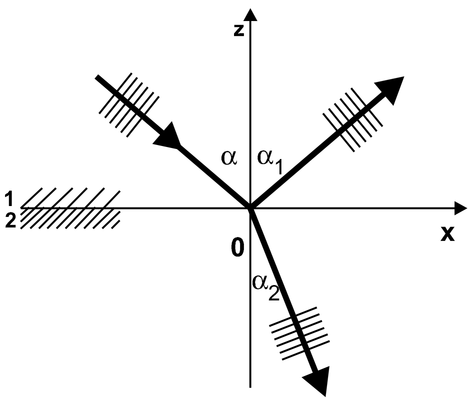
2. Vplyv rovinného rozhrania na šírenie sa vĺn

2.1 Úvod

Na vzájomné pôsobenie svetla a prostredia je zvykom nazerať ako na pôsobenie elektromagnetického vlnenia na elektróny v atómoch. Optické frekvencie sú rádu 10^{14} až 10^{15} Hz. Pod vplyvom elektromagnetického vlnenia konajú mimo iného elektróny vynútené kmity v rytme tohto dopadajúceho vlnenia a následne vyžarujú sekundárne vlnenie. Pretože vzdialenosti medzi atómami sú vzhľadom na vlnovú dĺžku svetla λ malé, kmitajú elektró-ny veľkého množstva atómov pod vplyvom tej istej elektromagnetickej vlny, a preto sú vyžarované sekundárne vlny koh erentné. Poznamenajme napríklad, že pri atmosférickom tlaku obsahuje objem plynu veľkosti λ^3 niekoľko miliónov atómov. Ďalej si pripomenieme niektoré poznatky zo základného kurzu optiky.

2.2 Zákon odrazu a lomu svetla

Je všeobecne známe, že keď svetlo dopadá na rozhranie dvoch prostredí s rôznymi optickými vlastnosťami, jeho časť prechádza do druhého prostredia, súčasne mení smer šírenia ak ide o šikmý dopad a čiastočne sa odráža do prvého prostredia. Zákonitosti odrazu lomu svetla boli odhalené pomerne zavčasu v niektorých experimentoch v optike a sú spojené s takými menami ako Archimedes (zákon odrazu) alebo V. Snellius a D. Decartes (zákon lomu).



Obr. 2.1. Odraz a lom elmg vlny na rozhraní dvoch prostredí

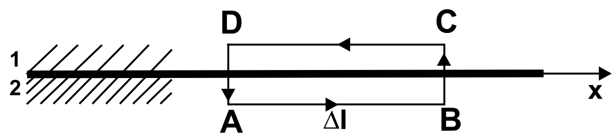
Aby sme tieto zákony vyjadrili analyticky, využijeme elektromagnetickú teóriu a súčasne budeme prípad idealizovať. Majme teda na mysli nekonečné rovinné rozhranie dvoch nehybných homogénnych izotropných prostredí, pritom každé z nich zaujíma celý polpriestor.

Teraz si predstavme, že v jednom z týchto prostredí sa šíri rovinná elektro-magnetická vlna (je naznačený uvažovaný smer vybraného lúča) tak, ako je to znázornené na obr. 2.1.

Roviny konštantnej fázy tejto dopadajúcej vlny predstavujú neohraničené polroviny (sú obmedzené rozhraním). Súčasne táto dopadajúca vlna vyvolá v obidvoch prostrediach vlnový proces, ktorého dôsledkom je odrazená a lomená (prešlá) vlna.

Celkové elektromagnetické pole, ktoré je zahrnuté v dopadajúcej, odrazenej a prešlej vlne musí vyhovovať hraničným podmienkam, ktoré môžeme získať z Maxwellových rovníc. Tieto podmienky spočívajú v spojitosti tangenciálnych zložiek vektorov $\vec{E}$ a $\vec{H}$ na rozhraní a tiež normálových zložiek $\vec{D}$ a $\vec{B}$.

Skúsme sa na tento problém pozrieť bližšie. Zvoľme si na rozhraní uvedených prostredí integračnú dráhu v tvare obdĺžnika tak, ako je to znázornené na obr. 2.2.



Obr.2.2. K podmienkam spojitosti tangenciálnych zložiek vektorov intenzít el. a magnet. poľa

Strany AB a CD integračnej cesty sú rovnobežné s rozhraním. Aplikujme na rozhranie tretiu Maxwellovu rovnicu v integrálnom tvare, t. zn.

$$\oint_c \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}.d\vec{S} \,. \tag{2.1.}$$

Súčasne urobme limitný prechod k nule tak, že časti DA a BC integračnej cesty sa blížia k nule, takže úseky AB a DC splynú s rozhraním. Potom cirkuláciu vektora $\vec{E}$ na ľavej strane vyššie uvedenej Maxwellovej rovnice môžeme vyjadriť výrazom $E_{1\tau}.\Delta l - E_{2\tau}.\Delta l$.

$E_{1\tau}$ a $E_{2\tau}$ sú projekcie vektora $\vec{E}_1$ a $\vec{E}_2$ v prvom a druhom prostredí do smeru vektora τ rovnobežného s rozhraním. Tok vektora $\vec{B}$ na pravej strane Maxwellovej rovnice pri tomto limitnom prechode sa blíži k nule, pretože plocha, ktorú tvorí integračná cesta sa blíži tiež k nule, takže platí $E_{1\tau}.\Delta l - E_{2\tau}.\Delta l = 0$. Z tejto rovnice vyplýva, že

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \,. \tag{2.2.}$$

Keď využijeme 4. Maxwellovu rovnicu v integrálnom tvare a použijeme rovnaký postup môžeme dokázať, že pre zložky magnetickej indukcie bude tiež platiť

$$B_{1\tau} = B_{2\tau} \tag{2.3.}$$

(za neprítomnosti povrchových prúdov na rozhraní). Pretože vektor $\vec{\tau}$ môže mať ľubovoľný smer v rovine rozhrania, a teda má dve nezávislé zložky, dostaneme štyri nezávislé podmienky, ktoré sú správne pre ľubovoľné dve spojité prostredia. Ďalšie dve hraničné podmienky môžeme získať z prvej a druhé Maxwellovej rovnice. Tieto podmienky vyjadrujú spojitosť normálnych zložiek vektorov $\vec{B}$ a $\vec{D}$ na rozhraní, t. zn.

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{2.4a.}$$

$$D_{1n} = D_{2n}\,. \tag{2.4b}$$

Na obr. 2.1. sme schematicky znázornili smery šíriacich sa vĺn v prvom a druhom prostredí. Dohodnime sa predbežne na nasledujúcom označení. Veličiny týkajúce sa dopadajúcej vlny označme bez indexu. Veličiny pre vlnu odrazenú a prešlú do druhého prostredia indexmi 1 a 2. Ako je známe, index lomu prvého prostredia môžeme vyjadriť $n_1 \approx \sqrt{\varepsilon_1}$ a druhého $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ (za predpokladu, ak magnetické permeability uvažovaných prostredí sa rovnajú), kde veličiny ε sú príslušné dielektrické konštanty. Každú z uvedených rovinných vĺn vyjadríme v komplexnom tvare :

$$E_\tau .\exp\left[\,i.\left(\vec{k}.\vec{r}-\omega_0 .t\right)\right]+E_{1\tau}.\exp\left[\,i.\left(\vec{k}_1.\vec{r}-\omega_1 .t\right)\ \right]=E_{2\tau}.\exp .\left[i.\left(\vec{k}_2.\vec{r}-\omega_2 .t\right)\right] \tag{2.5}$$

$$\text{y } B_\tau .\exp\left[i.\left(\vec{k}.\vec{r}-\omega_0 .t\right)\right]+B_{1\tau}.\exp\left[i.\left(\vec{k}_1.\vec{r}-\omega_1 .t\right)\right]=B_{2\tau}.\exp .\left[i.\left(\vec{k}_2.\vec{r}-\omega_2 .t\right)\right]. \tag{2.6}$$

Veličiny E_t a B_t sú príslušné zložky intenzity elektrického poľa a magnetickej indukcie. Aby boli splnené hraničné podmienky v každom okamihu, koeficienty pri čase t v exponentoch pre všetky tri vlny musia byť rovnaké. Preto kruhové frekvencie odrazenej a lomenej vlny sú rovné kruhovej frekvencii ω_0 dopadajúcej vlny. Je to tiež zrejmé z toho, že na tieto vlny nazeráme ako na výsledok skladania sekundárnych vĺn, ktoré sú vyžarované nábojmi prostredia pri ich vnútornom pohybe. Pre veľké amplitúdy intenzity elektrického poľa dopadajúcej vlny, ak toto je porovnateľné s vnútroatomovými poliami to tak nemusí byť (pozri kapitolu 11.).

Z vyššie uvedeného (pozri obr. 2.1.) je zrejmé, že vlnové vektory dopadajúcej, odrazenej a prešlej vlny zvierajú s osou z uhly α, α_1, α_2, ktoré nazývame uhol dopadu, uhol odrazu a uhol lomu. Hraničné podmienky musia byť splnené pre všetky body roviny rozhrania. To je možné vtedy, keď závislosť E_t a B_t od súradníc bodu v rovine xy je u všetkých troch vĺn rovnaké. Preto aby bola podmienky 2.5 splnená pre ľubovoľné $\vec{r}$ na rozhraní, musia sa tangenciálne zložky vlnových vektorov rovnať. Z toho súčasne vyplýva, že smery šírenia všetkých troch vĺn ležia v jednej rovine, ktorá prechádza osou z a je zvykom ju nazývať rovinou dopadu. Zvoľme si teraz za rovinu dopadu rovinu nákresne xz. V tejto rovine pre zložky na rozhraní platí

$$k_{1x} = k_{2x} = k_x = \frac{\omega}{c}.n.\sin\alpha . \tag{2.7.}$$

Ďalej určíme normálne zložky vlnových vektorov. Pripomeňme, že z Maxwellových rovníc, ktoré využijeme pre popis rovinnej vlny je možné ukázať, že platí

$$k^2 = \varepsilon(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} . \tag{2.8.}$$

Vo všeobecnom prípade je ε(ω) komplexná veličina a teda aj vlnové číslo k je komplexnou veličinou. Pre zložky vlnových vektorov v rovine xz môžeme písať

$$k_1^2 = k_{1X}^2 + k_{1Z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.\varepsilon_1 \tag{2.9}$$

$$k_2^2 = k_{2X}^2 + k_{2Z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.\varepsilon_2 \tag{2.10}$$

Keď využijeme vzťah (2.7.) a uvážime situáciu podľa obr. (2.1.) pre z-ové zložky odrazenej a lomenej vlny môžeme písať

$$k_{1Z} = -k_Z = -\frac{\omega}{c}.n_1 \cos\alpha \tag{2.11.}$$

$$k_{2Z} = \frac{\omega}{c}.\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 .\sin^2\alpha} \tag{2.12.}$$

Vyjadrime ešte raz x-ové zložky vlnových vektorov dopadajúcej, odrazenej a lomenej vlny :

$$k_x = \frac{\omega}{c} \cdot n_1 \cdot \sin\alpha \tag{2.13}$$

$$k_{1x} = \frac{\omega}{c} \cdot n_1 \cdot \sin\alpha_1 \tag{2.14}$$

$$k_{2x} = \frac{\omega}{c} \cdot n_2 \cdot \sin\alpha_2 . \tag{2.15}$$

Pretože súčasne platí (2.7) porovnaním (2.12) a (2.14) dochádzame k zákonu odrazu, ktorý matematicky vyjadríme:

$$\alpha = \alpha_1 . \tag{2.16}$$

Slovami môžeme povedať : uhol odrazu je rovný uhlu dopadu, pričom vlnový vektor odrazenej vlny leží v tej istej rovine ako vlnový vektor dopadajúcej vlny.

Ak dáme do rovnosti vzťahy (2.14) a (2.15) dostaneme matematické vyjadrenie zákona lomu:

$$n_1 \cdot \sin\alpha_1 = n_2 \cdot \sin\alpha_2 \,. \tag{2.17}$$

Slovné vyjadrenie zákona lomu potom bude : vlnový vektor lomenej vlny (lúča) leží v jednej rovine s vlnovým vektorom dopadajúcej vlny (dopadajúceho svetelného lúča) a kolmicou vztýčenou v mieste dopadu. Pomer sínusu uhlu dopadu a sínusu uhlu lomu je veličina konštantná pre dané dve prostredia.

Tieto zákony sme získali bez kladenia akýchkoľvek podmienok na komplexné amplitúdy E_τ a preto platia pre ľubovoľný stav polarizácie dopadajúcej vlny (lúča).

2.3 Odvodenie Fresnelových vzťahov

Ďalej nájdeme vzťahy, ktoré určujú vlastnosti odrazeného a lomeného vlnenia na rovinnom rozhraní dvoch homogénnych a izotropných dielektrík, ak poznáme vlastnosti dopadajúceho vlnenia. Nech ε_1 , ε_2 sú dielektrické permitivity prostredí a μ_1 a μ_2 sú ich magnetické permeability. Pri optických frekvenciách sa μ_1 a μ_2 prakticky nelíšia od permeability vákua μ_0, takže relatívne permeability $\mu_{1r} = \mu_{2r} = 1$ (môžeme položiť rovné jednej).

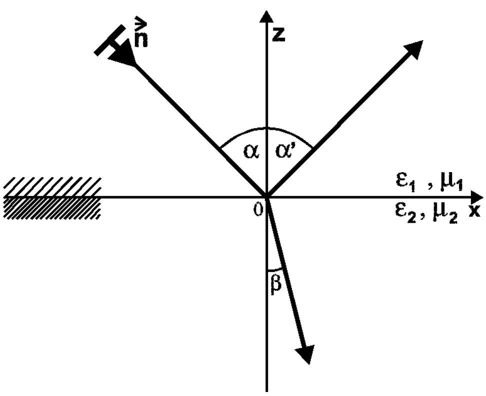
Ak si zvolíme súradnicový systém podľa obr. 2.3 t. zn., že rovina x, y splýva s rozhraním uvažovaných dvoch dielektrík, a keď v bode 0 dopadá na rozhranie elektromagnetická vlna, musia byť na rozhraní splnené podmienky:

$$E_{ox} + E_{dx} = E_{px}\, E_{oy} + E_{dy} = E_{py} \tag{2.18}$$

$$H_{ox} + H_{dx} = H_{px}\, H_{oy} + H_{dy} = H_{py} \tag{2.19}$$

$$D_{dz} = D_{pz} \tag{2.20}$$

$$B_{dz} = B_{pz} \,. \tag{2.21}$$



Obr. 2.3. Dopadajúca, odrazená a prešlá (lomená) vlna

Index *„d“* označuje veličinu v tesnej blízkosti rozhrania v prvom prostredí (vlna dopadajúca), index *„o“* veličinu zodpovedajúca odrazenej vlne v prvom prostredí a index *„p“* v druhom prostredí (vlna, ktorá prešla).

Ako príklad uveďme vyjadrenie y-ovej zložky vektora intenzity elektrického poľa pre vlnu dopadajúcu na rozhranie, vlnu odrazenú a vlnu, ktorá prešla do druhého prostredia:

$$E_{yd} = A_{yd} \cdot \exp[i \cdot (\omega_d \cdot t - k_d \cdot r_d)] \tag{2.22}$$

$$E_{yo} = A_{yo} \cdot \exp[i \cdot (\omega_o \cdot t - k_o \cdot r_o)] \tag{2.23}$$

$$E_{yp} = A_{yp} \cdot \exp[i \cdot (\omega_p \cdot t - k_p \cdot r_p)]. \tag{2.24}$$

Uvažujme rovinu, ktorá vytvára rozhranie oddeľujúce dve priehľadné, homogénne a izotropné prostredia 1 a 2. Na rozhranie nech dopadá rovinná svetelná vlna pozdĺž priamky, ktorá s kolmicou dopadu zviera uhol α_1. Ako vieme, na rozhraní nastáva odraz a lom svetla. Uhol odrazu $\alpha_1' = \alpha_1$ a uhol lomu α_2 (pozri obr.2.4).

V svetelnej vlne, ktorá postupuje rovnobežne s jednotkovým vektorom $\vec{n}$ (respektíve v smere vlnového vektora $\vec{k}$), hustota toku energie elektromagnetického poľa (tiež vektor prúdenia elektromagnetickej svetelnej energie) je :

$$\vec{\sigma} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot (\vec{n} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E^2 \cdot \vec{n} \ . \tag{2.25}$$

Veľkosť tohto vektora v prípade rovinnej vlny vyjadríme nasledujúcim spôsobom:

$$\sigma = |\vec{\sigma}| = \left| \left[\vec{E} \times \vec{H}\right] \right| = |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| = E \cdot \frac{B}{\mu_o} = \frac{1}{\mu_o \cdot c} \cdot E^2. \tag{2.26}$$

Tu sme súčasne použili vzťah $E = c.B$, ktorý je možné dokázať z Maxwellových rovníc. Keď si tiež uvedomíme, že štvorec rýchlosti svetla je $c^2 = 1/\varepsilon_o.\mu_o$, môžeme vzťah (2.26) upraviť na tvar:

$$\sigma = c \cdot \varepsilon_o \cdot E^2. \tag{2.27}$$

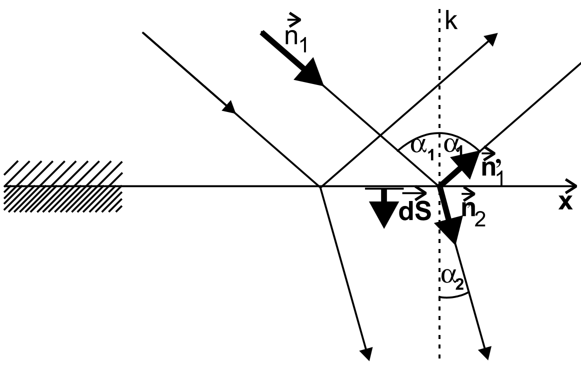
Všimnime si nasledujúcu skutočnosť. Vo vzťahu (2.27) výraz $\varepsilon_o.E^2$ predstavuje hustotu energie na jednotku objemu, potom teda z rozmerovej analýzy vyplýva, že hustota toku energie, reprezentovaná týmto vzťahom bude mať rozmer energie na plochu za jednotku času, t. zn. $J / m^2.s$. Ďalej poznamenajme, že vo vzťahoch (2.25) až (2.27) vystupujú okamžité hodnoty fyzikálnych veličín. Vektory elektromagnetického poľa zo svetelného intervalu sa menia s frekvenciou rádu 10^{15} Hz , preto nie je možné zmeny týchto veličín sledovať v závislosti od času. Avšak ich stredné hodnoty ako funkcie času je možné celkom dobre merať a teda ich sledovať. Počet periód v sledovanom intervale je veľký, preto je treba prejsť od okamžitých hodnôt k stredným hodnotám.

Keď napr. budeme uvažovať, že intenzita elektrického poľa je harmonickou funkciou času podľa vzťahu $E = E_o.\cos\,\omega.t$, kde E_o je amplitúda intenzity elmg. poľa vlny, stredná hustota toku energie za čas bude daná vzťahom:

$$\left\langle \sigma \right\rangle_t = c \cdot \varepsilon_o \cdot E_o^2 \cdot \left\langle \cos^2 \omega \cdot t \right\rangle_t = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varepsilon_o \cdot E^2 \,. \qquad (2.28)$$

V tých prípadoch, v ktorých je jasné podľa čoho počítame strednú hodnotu , index vynechávame.

Nech je absolútna hodnota vektora intenzity elektrického poľa v svetelnej vlne, ktorá dopadá na rozhranie označená E_d. Podobne nech E_o a E_p sú absolútne hodnoty vektora intenzity elektrického poľa svetelnej vlny odrazenej a svetelnej vlny, ktorá prešla rozhraním. Jednotkové vektory $\vec{n}_1, \vec{n}_1'$ a $\vec{n}_2$ týchto vĺn nech sú rovnobežné so smermi šírenia, $d\vec{S}$ nech je plošný vektor priradený elementu plôšky rozhrania (pozri obr. 2.4).



Obr. 2.4. Jednotkové vektory dopadajúcej, odrazenej a prešlej vlny. Element plôšky rozhrania

Ak využijeme zákon zachovania energie môžeme písať rovnicu:

$$\vec{\sigma}_1 \cdot d\vec{S} = \vec{\sigma}_1' \cdot d\vec{S} + \vec{\sigma}_2 \cdot d\vec{S} \qquad (2.29)$$

alebo využitím vzťahu (2.25)

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cdot E_d^2 \cdot \cos\alpha_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cdot E_o^2 \cdot \cos\alpha_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cdot E_p^2 \,. \qquad (2.30)$$

Tiež, keď zavedieme označenie :

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \cdot \mu_1}{\varepsilon_1 \cdot \mu_2}} \qquad (2.31)$$

po malej úprave dostaneme:

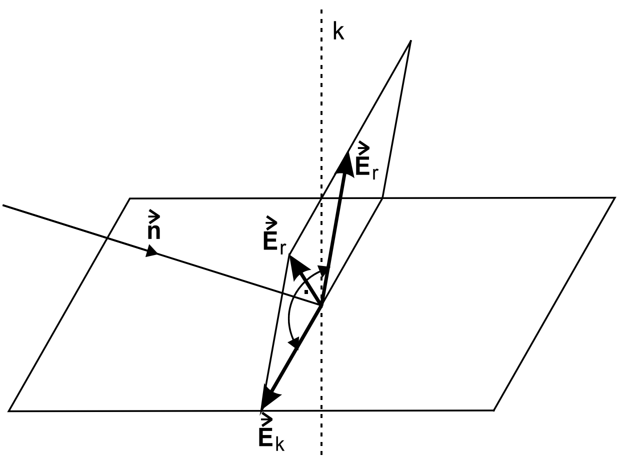
$$\left(E_d^2 - E_o^2\right)\cdot \cos\alpha_1 = n \cdot E_p^2 \cdot \cos\alpha_2 \,. \tag{2.32}$$

Ako sme už uviedli vyššie, magnetická permeabilita priehľadných prostredí sa prakticky vždy rovná magnetickej permeabilite vákua μ_0, inými slovami $\mu_r = 1$. Potom

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \cdot \mu_1}{\varepsilon_1 \cdot \mu_2}} \cong \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \,. \tag{2.33}$$

Túto veličinu nazývame relatívny index lomu (vieme ju previesť na absolútny index lomu, keď prvé prostredie nahradíme vákuom, a teda uvažovaný lúč svetla bude postupovať z vákua do prostredia), súčasne sme využili vzťah pre rýchlosť $v = 1/\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}$, v našom prípade potom $v = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Využitím vzťahu (2.33) môžeme rovnicu (2.32) prepísať do tvaru:

$$\left(E_d^2 - E_o^2\right)\cdot \sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1 = E_p^2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \sin\alpha_1 \,. \tag{2.34}$$



Obr. 2.5. Rozklad vektora intenzity el. poľa na zložku rovnobežnú a kolmú

V rovinnej svetelnej vlne vektor intenzity elektrického poľa je na smer šírenia kolmý. V rovine na tento smer kolmej môžeme vektor $\vec{E}$ preto rozložiť na dve na seba kolmé zložky, napr. na zložku $\vec{E}_r$ (pozri obr. 2.5) rovnobežnú s rovinou dopadu svetelného lúča na rozhranie dvoch prostredí, a na zložku $\vec{E}_k$ na túto rovinu kolmú, takže $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_k$.

Tým sme dané svetelné vlny nahradili dvoma lineárne polarizovanými svetelnými vlnami. Pretože rovnica (2.24) platí pre akékoľvek svetlo, bude splnená aj vtedy, keď do nej dosadíme absolút. hodnoty alebo aj veľkosti vektorov $\vec{E}_r$ a $\vec{E}_o$, vzťahujúce sa na zvolené orientácie ich priamok. Podľa rovnice (2.34) môžeme napísať rovnice pre rovnobežnú a kolmú zložku dopadajúcej, odrazenej a prešlej vlny v tvare :

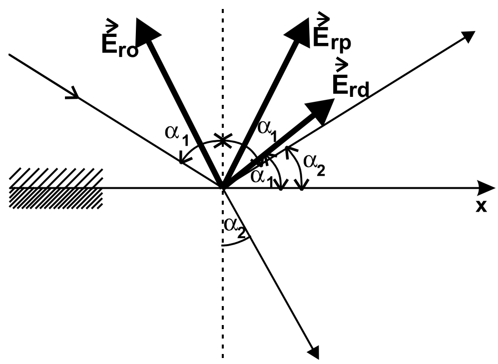
$$\left(E_{rd}^2 - E_{ro}^2\right) \cdot \sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1 = E_{rp}^2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \sin\alpha_1 \tag{2.35}$$

$$\left(E_{kd}^2 - E_{ko}^2\right) \cdot \sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1 = E_{kp}^2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \sin\alpha_1 . \tag{2.36}$$

Rovnosť tangenciálnych zložiek vektora $\vec{E}$ po obidvoch stranách rozhrania, keď priamky vektorov dopadajúcej, odrazenej a prešlej vlny orientujeme všetky nad rozhranie (obr. 2.6) , poskytuje rovnice:

$$E_{rd} \cdot \cos\alpha_1 - E_{ro} \cdot \cos\alpha_1 = E_{rp} \cdot \cos\alpha_2 \tag{2.37}$$

$$E_{kd} + E_{ko} = E_{kp} . \tag{2.38}$$



Obr. 2.6. K odvodeniu Fresnelových vzťahov

Z rovníc (2.35), (2.36) môžeme určiť veľkosti rovnobežnej a kolmej zložky pre odrazenú a prešlú vlnu, keď poznáme tieto zložky pre vlnu dopadajúcu a príslušné uhly. Dostávame:

$$E_{ro} = E_{rd} \cdot \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{2.39}$$

$$E_{rp} = 2 \cdot E_{rd} \cdot \frac{\cos\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} . \tag{2.40}$$

Podobne z rovníc (2.36) a (2.37) môžeme určiť veľkosti kolmých zložiek intenzity elektrického poľa odrazenej a prešlej vlny, pri znalosti veľkosti intenzity el. poľa dopadajúcej vlny a príslušných uhlov (pozri obr. 2.6):

$$E_{ko} = -E_{kd} \cdot \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{2.41}$$

$$E_{kp} = 2 \cdot E_{kd} \cdot \frac{\cos\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}\,. \tag{2.42}$$

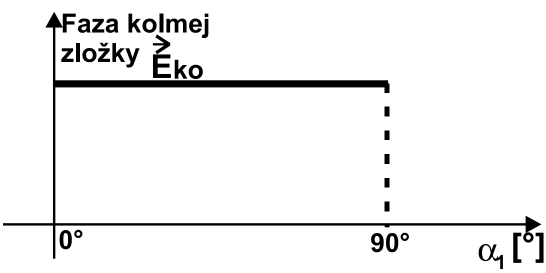
Vzťahy (2.39) až (2.42) nazývame **FRESNELOVÝMI VZŤAHMI** pre odraz a lom svetla. Prvýkrát boli odvodené O. Fresnelom v r. l823 na základe teórie, že svetlo je vlnenie pružného prostredia, ktoré nazývali éterom. Prezentované vzťahy boli odvodené na základe elektromagnetickej teórie svetla.

Sledujme vzťah (2.39). Vidíme, že ak $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi / 2$ t. j. pre tg ($\alpha_1 + \alpha_2$) = ∞ dáva vzťah (2.31) $E_{ro} = 0$. (Rovnobežná zložka vektora $\vec{E}$ odrazeného lúča je nulová). Zo vzťahu (2.41) vidíme, že za takejto podmienky je sin ($\alpha_1 + \alpha_2$) = 1, a teda $E_{ko} \neq 0$. Inými slovami v odrazenej vlne je nenulová len zložka E_{ko} , ktorá je kolmá na rovinu dopadu. Takýto lúč, ako už vieme z predchádzajúceho, budeme nazývať lineárne polarizovaným, alebo rovinne polarizovaným.

Uhol dopadu α_1 , pri ktorom práve začína platiť, že odrazená vlna sa stáva rovinne polarizovanou (t. j. keď $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi / 2$) nazývame **Brewstrov uhol**. Je možné ukázať, že platí vzťah tg $\alpha_1 = n_2 / n_1$, kde n_1 a n_2 sú absolútne indexy lomu. Tomuto vťahu sa tiež hovorí **Brewstrov vzťah**. V ďalšom sa ešte k tejto otázke vrátime podrobnejšie.

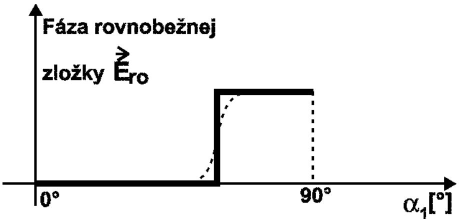
2.4 Vzťahy medzi fázami svetelných vĺn

Ak opäť vyjdeme zo vzťahov (2.39) až (2.42) (Fresnelove vzťahy) môžeme nájsť vzťah medzi fázami dopadajúcej, lomenej a odrazenej vlny. Zo vzťahov (2.40) a (2.42) vidíme, že znamienko pri veličinách E_{rd} a E_{kd} vlny dopadajúcej, je také isté, ako znamienko pri veličinách E_{rp} a E_{kp} vlny lomenej. Platí to pre ľubovoľnú hodnotu uhla α_2. To svedčí o tom, že vlna po prechode rozhraním má tú istú fázu ako vlna dopadajúca.



Obr. 2.7. Závislosť fázy kolmej zložky odrazenej vlny od uhla dopadu

Všimnime si, ako to bude pre vlnu odrazenú. Sledujme napred vzťah (2.41). Ak druhé prostredie má index lomu $n_2 > n_1$ bude vždy uhol $\alpha_1 > \alpha_2$ a menovateľ bude vždy kladný, takže fáza odrazenej vlny sa riadi znamien-kom (-) pred E_{kd}. Kolmá zložka odrazenej vlny sa bude odrážať s opačnou fázou, t. j. „π“ pre všetky hodnoty uhlov α_1 (pozri obr. 2.7, kde je znázornená fáza kolmej zložky odrazenej vlny).



Obr. 2.8. Závislosť fázy rovnobežnej zložky odrazenej vlny v závislosti od uhla dopadu

Pre odrazenú vlnu rovnobežnej zložky E_{ro} vidíme, že pokiaľ je $\alpha_1 < \alpha_{BREW}$ je čitateľ aj menovateľ vzťahu (2.39) kladný, teda odrazená vlna sa šíri bez zmeny fázy. Ak $\alpha_1 = \alpha_{BREW}$ stane sa $E_{ro} = 0$ (ako už bolo uvedené vyššie), pretože tg $(\alpha_1 + \alpha_2) = \pi / 2$. Pre uhol $\alpha_1 > \alpha_{BREW}$ je tg $(\alpha_1 + \alpha_2)$ v menovateli záporný a E_{ro} zmení fázu na π. Situácia je schematicky znázornená na obr. 2.8.

V realizovanom experimente zmena fázy nie je skoková ako podľa teórie ukazuje obr. 2.8, ale sa mení podľa čiarkovanej krivky.

V prípade, že $n_2 < n_1$, teda keď ide o odraz a lom na opticky redšom prostredí, t. j. keď $\alpha_1 < \alpha_2$ fáza vektora intenzity elektrického poľa v odrazenej vlne sa nemení (pozri vzťahy (2.39), (2.41). Kvôli prehľadnosti zopakujme predchádzajúce výsledky:

Pri dopade elmg vlny na opticky hustejšie prostredie, t. j. keď $n_2 > n_1$, fáza vektora elektrickej intenzity sa mení o π . Pri dopade na opticky redšie prostredie, keď $n_2 < n_1$, fáza vektora elektrickej intenzity lomenej aj odrazenej vlny je rovnaká .

2.5 Kolmý dopad

V prípade kolmého dopadu, keď $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ Fresnelove vzťahy vedú k neurčitosti, pretože pre amplitúdy dostávame riešenie typu 0/0. V takomto prípade je účelnejšie sa vrátiť ku vzťahom (2.37) a (2.38) , ktoré ešte raz uvedieme :

$$E_{rd} \cdot \cos\alpha_1 - E_{ro} \cdot \cos\alpha_1 = E_{rp} \cdot \cos\alpha_2 \tag{2.37}$$

$$E_{kd} + E_{ko} = E_{kp} \,. \tag{2.38}$$

Analogické vzťahy môžeme získať pre intenzitu magnetického poľa:

$$H_{rd} \cdot \cos\alpha_1 - H_{ro} \cdot \cos\alpha_1 = H_{rp} \cdot \cos\alpha_2 \tag{2.43}$$

$$H_{kd} + H_{ko} = H_{kp} \,. \tag{2.44}$$

Keď uvážime, že $H_{kd} = \sqrt{\varepsilon_1 \cdot \mu_1} \cdot E_{kd} = \sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_{kd}$ môžeme (2.43) a (2.44) prepísať do tvaru:

$$\sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_{rd} \cdot \cos\alpha_1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_{ro} \cdot \cos\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2} \cdot E_{rp} \cdot \cos\alpha_2 \tag{2.45}$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_{kd} + \sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_{ko} = \sqrt{\varepsilon_2} \cdot E_{kp} \,. \tag{2.46}$$

Pre $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ je $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 1$ prepíšeme (2.37) a (2.38) a tiež (2.45), (2.46) do tvaru:

$$E_{rd} - E_{ro} = E_{rp} \tag{2.47}$$

$$E_{kd} + E_{ko} = E_{kp} \tag{2.48}$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} \cdot \left(E_{rd} - E_{ro}\right) = \sqrt{\varepsilon_2} \cdot E_{rp} \tag{2.49}$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} \cdot \left(E_{kd} + E_{ko}\right) = \sqrt{\varepsilon_2} \cdot E_{kp} \,. \tag{2.50}$$

Riešením sústavy rovníc (2.47) až (2.49) získame nasledujúce vzťahy:

$$E_{rp} = \frac{2}{n_{21} + 1} \cdot E_{rd} \tag{2.51}$$

$$E_{kp} = \frac{2}{n_{21} + 1} \cdot E_{kd} \tag{2.52}$$

$$E_{ro} = \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \cdot E_{rd} \tag{2.53}$$

$$E_{ko} = -\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \cdot E_{kd} \,, \tag{2.54}$$

kde sme použili $n_{21} = n_2 / n_1 = \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}$, čo predstavuje relatívny index lomu uvažovaných prostredí. Je zrejmé, že vzťahy (2.51) až (2.54) umožňujú vypočítať veľkosti intenzít elektrického poľa rovnobežnej a kolmej zložky pre prešlú a odrazenú vlnu, keď sú známe veľkosť intenzít dopadajúcej vlny rovnobežnej a kolmej zložky dopadajúcej vlny a tiež relatívny index lomu n_{21} pre prípad kolmého dopadu vlny na uvažované rozhranie.

2.6 Odraznosť a priepustnosť rozhrania

V optike intenzitu svetla definujeme:

Intenzita svetla I je stredná energia svetelného žiarenia, ktorá prejde za 1 sekundu jednotkovou plochou, kolmou na smer šírenia. Intenzitu svetla môžeme teda vypočítať ako strednú hodnotu z absolútnej hodnoty Poyntingovho vektora $\vec{\sigma}$, ktorý sme vyššie uviedli vzťahom (2.25). Pripomeňme, že :

$$\vec{\sigma} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{2.55}$$

Pre intenzitu svetla potom v zmysle vyššie uvedeného bude platiť:

$$I = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \sigma_z \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T E_x \cdot H_y \cdot dt \,. \tag{2.56}$$

Keď teraz x-ovú zložku intenzity elektrického poľa vyjadríme $E_x = E_0 . sin\ (\omega . t - k.z)$ a y - ovú zložku intenzity magnetického poľa $H_y = H_0 . sin\ (\omega . t - k.z)$, čo zodpovedá rovinnej elmg vlne šíriacej sa v kladnom smere osi z, dostaneme po dosadení týchto vzťahov do (2.25) pre veľkosť Poyntingovho vektora

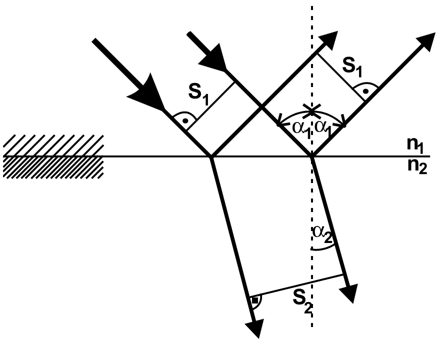
$$\sigma_z = E_0 \cdot H_0 \cdot \sin^2(\omega \cdot t - k.z) \,. \tag{2.57}$$

Keď ďalej uvážime, že $H_0 = \sqrt{\varepsilon / \mu} \,. E_0$ (je možné ukázať z Maxwellových rovníc) môžeme σ_z vyjadriť :

$$\sigma_z = E_0^2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \sin^2(\omega \cdot t - k \cdot z) \,. \tag{2.58}$$

Podľa vzťahu (2.56) potom platí:

$$I = E_0^2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \sin^2(\omega \cdot t - k \cdot z) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_0^2 \,. \tag{2.59}$$



Obr. 2.9. K odvodeniu vzťahov pre odraznosť a transparentnosť rozhrania

Ďalej využime Fresnelove vzťahy na vyriešenie otázky, ako je rozdelená energia dopadajúceho vlnenia medzi odrazenou a dopadajúcou vlnou. Situácia je schematicky znázornená na obr. 2.9.

Keď využijeme vzťah (2.59) a uvážime situáciu podľa obr. 2.9, môžeme pre intenzitu dopadajúcej vlny písať:

$$I_{1d} = K \cdot n_1 \cdot E_d^2 \cdot \cos\alpha_1 \,, \tag{2.60}$$

pre intenzitu odrazenej vlny:

$$I_{10} = K \cdot n_1 \cdot E_o^2 \cdot \cos\alpha_1 \tag{2.61}$$

a intenzitu lomenej vlny:

$$I_{2p} = K \cdot n_2 \cdot E_p^2 \cdot \cos\alpha_2 , \tag{2.62}$$

kde K je konštanta, n_1, n_2 sú absolútne indexy lomu prostredí a E_d, E_o, E_p sú amplitúdy príslušných vĺn.

Odraznosť R (reflektivita) potom definujeme pomocou intenzít:

$$R = \frac{I_{10}}{I_{2d}} = \left(\frac{E_o}{E_d}\right)^2 \tag{2.63}$$

a priepustnosť T (transparentnosť) :

$$T = \frac{I_{2p}}{I_{1d}} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{E_p}{E_d}\right)^2 \cdot \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} , \tag{2.64}$$

alebo

$$T = n_{21} \cdot \left(\frac{E_p}{E_d}\right)^2 \cdot \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} . \tag{2.64a}$$

Zo zákona zachovania energie potom vyplýva, že

$$R + T = 1 . \tag{2.65}$$

Ak teraz vzťahy (2.63) a (2.64) napíšeme zvlášť pre zložku „r“ a zložku „k“ a dosadíme za amplitúdy zo vzťahov (2.39) až (2.42), dostaneme:

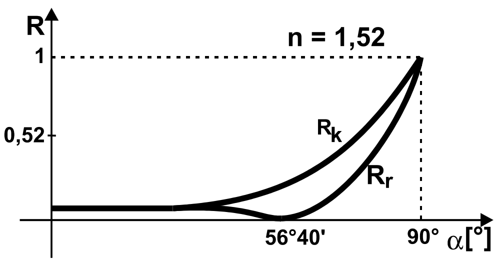
$$R_r = \left(\frac{E_{ro}}{E_{rd}}\right)^2 = \frac{tg^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg^2(\alpha_1 + \alpha_2)} , \tag{2.66a}$$

$$R_k = \left(\frac{E_{ko}}{E_{kd}}\right)^2 = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} , \tag{2.66b}$$

$$T_r = n_{21} \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} \cdot \left(\frac{E_{rp}}{E_{rd}}\right)^2 = n_{21} \cdot \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} \cdot \frac{4 \cdot \cos^2\alpha_1 \cdot \sin^2\alpha_2}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha\ ) \cdot \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)} , \tag{2.67a}$$

$$T_k = n_{21}\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\cdot\left(\frac{E_{kp}}{E_{kd}}\right)^2 = n_{21}\cdot\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\cdot\frac{4\cdot\cos^2\alpha_1\cdot\sin^2\alpha_2}{\sin^2(\alpha_1+\alpha\ )}. \qquad (2.67b)$$

Predchádzajúce vzťahy určujú závislosť odraznosti R a priepustnosti T od uhlov dopadu a lomu α_1 a α_2 .Vyššie sme ukázali, že ak platí, že $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, zložka $E_{ro} = 0$. Takže aj zo vzťahu (2.66) pre tento prípad vidíme, že odraznosť $R_r = 0$, ak $\alpha_1 = \alpha_B$ (t. j. pre Brewstrov uhol). Inými slovami, ak svetlo dopadá pod Brewstrovým uhlom, odráža sa len kolmá zložka R_k, pritom svetlo je lineárne polarizované. Na obr. 2.10 je vynesená závislosť odraznosti skla s indexom lomu $n = 1{,}52$ od uhla dopadu α_1. Brewstrov uhol má v tomto prípade hodnotu $56^\circ\,40'$.



Obr. 2.10. Odraznosť kolmej a rovnobežnej zložky. Brewstrov uhol

Uveďme ešte prípad, keď na rozhranie dopadá prirodzené svetlo. Intenzitu svetla potom považujeme za súčet I_k intenzity svetla polarizovaného v stave *„k"* a *„I_r"* intenzitu svetla v stave *„r"*, pričom $I_k = I_r = I / 2$. Potom pre odraznosť prirodzeného svetla platí :

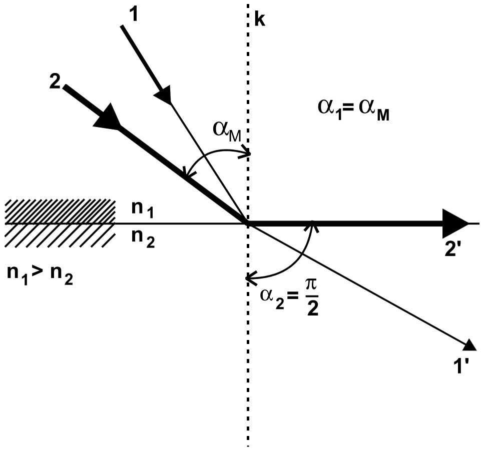
$$R = \frac{I_{ko} + I_{ro}}{I} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{I_{ko}}{I_k} + \frac{I_{ro}}{I_r}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(R_k + R_r\right) \qquad (2.68)$$

a pre priepustnosť :

$$T = \frac{1}{2}\cdot\left(T_k + T_r\right). \qquad (2.69)$$

2.7 Úplný odraz

Na začiatku tejto kapitoly sme sa zaoberali zákonom lomu svetla, podľa ktorého sa pomer sínusu uhlu dopadu k sínusu uhlu lomu rovná pomeru absolútnych indexov lomu druhého prostredia k prvému prostrediu (pozri vzťah (2.17)). Z tohto zákona vyplýva, že svetelná vlna (príslušný svetelný lúč), ktorá prechádza z opticky redšieho prostredia do opticky hustejšieho sa láme ku kolmici ($\alpha_1 > \alpha_2$). Naopak, pri prechode svetelnej vlny z prostredia opticky hustejšieho do prostredia opticky redšieho sa láme svetelná vlna (príslušný svetelný lúč) od kolmice. V druhom prípade je teda uhol dopadu menší než uhol



Obr. 2.11 K úplnému odrazu

lomu (t. j. $\alpha_1 < \alpha_2$). Ak budeme zväčšovať uhol dopadu, bude sa súčasne zväčšovať aj uhol lomu, pričom stále bude platiť, že $\alpha_1 < \alpha_2$. Je zrejmé, že bude existovať určitý uhol dopadu $\alpha_1 = \alpha_M$, keď uhol lomu $\alpha_2 = \pi/2$. Situácia je schematicky znázornená na obr. 2.11 (pozri lúč 2, 2´).

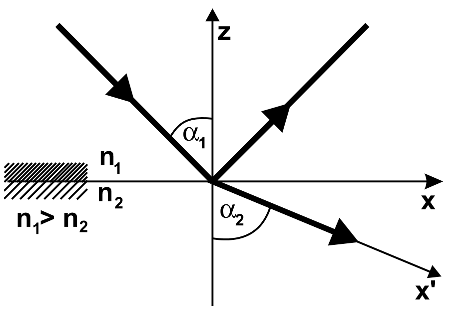
Uhol α_M potom **nazývame medzným uhlom**. Ak bude uvažovný lúč dopadať pod uhlom $\alpha_1 > \alpha_M$, zistíme, že lomený lúč nebude existovať a dôjde k úplnému odrazu od rozhrania.

Zo zákona lomu môžeme určiť medzný uhol. Platí teda :

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\alpha_M}{\sin\dfrac{\pi}{2}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \tag{2.70}$$

takže

$$\sin\alpha_M = n_{21} \, . \tag{2.71}$$



Obr. 2.12. Lomená a odrazená vlna

K analogickému záveru môžeme dôjsť, keď použijeme Fresnelove vzťahy. Za tým účelom sledujme chovanie vektora elektrickej intenzity lomenej a odrazenej vlny. Situácia je schematicky znázornená na obr. 2.12.

Vlnu, šíriacu sa v druhom prostredí v smere „x´“ môžeme zapísať rovnicou :

$$E_2 = E_{20} \cdot \exp\left[i \cdot \omega \left(t - \frac{x'}{v_2} \right) \right] = E_{20} \cdot \exp\left\{ i \cdot \omega \cdot \left[t - \frac{(x \cdot \sin\alpha_2 + z \cdot \cos\alpha_2)}{v_2} \right] \right\} =$$

$$= E_{20} \cdot \exp\left(-i \cdot \omega \cdot \frac{z \cdot \cos\alpha_2}{v_2} \right) \cdot \exp\left[i \cdot \omega \left(t - \frac{x \cdot \sin\alpha_2}{v_2} \right) \right]. \qquad (2.72)$$

Takáto úprava nám umožňuje predstaviť si vlnu, ktorá sa šíri v smere osi „x“ rýchlosťou $v_x = v_2 / \sin\alpha_2$, a ktorá má amplitúdu $E_{20} . \exp(-i.\omega.z.\cos\alpha_2 / v_2)$. Táto amplitúda okrem iného charakterizuje hĺbku vnikania vlny do druhého prostredia. Keď vyjdeme zo zákona lomu, môžeme určiť $\cos\alpha_2$ nasledovne :

$$\cos\alpha_2 = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin\alpha_1 \right)^2} = \pm i \cdot \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin\alpha_1 \right)^2 - 1}\ . \qquad (2.73)$$

Pre náš prípad je pod odmocninou záporné číslo. Ak dosadíme teraz vzťah (2.73) do amplitúdovej časti rovnice (2.72), dostaneme :

$$E_{20} \cdot \exp\left(-i \cdot \omega \cdot \frac{z \cdot \cos\alpha_2}{v_2} \right) = E_{20} \cdot \exp\left[\pm \frac{\omega}{v_2} \cdot z \cdot \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} - \sin\alpha_1 \right)^2 - 1} \right] =$$

$$= E_{20} \cdot \exp\left[\pm \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot z \cdot \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin\alpha_1 \right)^2 - 1} \right]. \qquad (2.74)$$

Vzťah (2.74) nám umožňuje urobiť záver, že v (2.73) znamienko (+) nemá zmysel. Zo vzťahu (2.74) vidíme, že znamienko (+) zodpovedá nekonečnému narastaniu amplitúdy v druhom prostredí, t. j. s indexom lomu n_2, čo nie je možné. Pre amplitúdu môžeme teda písať:

$$A = E_{20} \cdot \exp\left[-\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot z \cdot \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin\alpha_1 \right)^2 - 1} \right]\ . \qquad (2.75)$$

Keď je $\alpha_1 > \alpha_M$ je $\sin\alpha_1 > \sin\alpha_M = n_2 / n_1$, výraz pod odmocninou v (2.75) je reálny. V takomto prípade vlnu v druhom prostredí vyjadríme :

$$E_2 = E_{20} \cdot \exp\left[-\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot z \cdot \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin\alpha_1 \right)^2 - 1} \right] \cdot \exp\left[i \cdot \omega \cdot \left(t - \frac{x \cdot \sin\alpha_2}{v_2} \right) \right]. \qquad (2.76)$$

Amplitúda tejto vlny s rastúcim „*z*“ rýchlo klesá.

Ak budeme sledovať odrazené vlny, ukážeme, že pri $\alpha_1 \geq \alpha_M$ celý tok dopadajúcej energie sa vracia do prvého prostredia. Skutočne, ako vyplýva z rovníc (2.39) a (2.41) pre rovnobežnú a kolmú zložku odrazenej vlny môžeme písať:

$$E_{ro} = E_{rd} \cdot \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{\sin\alpha_1 \cdot \cos\alpha_1 - \sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_2}{\sin\alpha_1 \cdot \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_2} \cdot E_{rd} \tag{2.77}$$

$$E_{ko} = -E_{kd} \cdot \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = -\frac{\sin\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 \cos\alpha_1}{\sin\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1} \cdot E_{kd} \,. \tag{2.78}$$

Keď využijeme vzťah (2.74) so znamienkom (-) mínus a využijeme súčasne zákon lomu môžeme vzťahy (2.77) a (2.78) prepísať do tvaru

$$E_{ro} = \frac{n_{21}^2 \cdot \cos\alpha_1 + i \cdot \sqrt{\sin^2\alpha_1 - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cdot \cos\alpha_1 - i \cdot \sqrt{\sin^2\alpha_1 - n_{21}^2}} \cdot E_{rd} \tag{2.79}$$

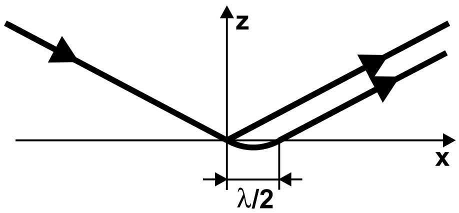
$$E_{ko} = \frac{\cos\alpha_1 + i \cdot \sqrt{\sin^2\alpha_1 - n_{21}^2}}{\cdot \cos\alpha_1 - i \cdot \sqrt{\sin^2\alpha_1 - n_{21}^2}} \cdot E_{kd} \tag{2.80}$$

kde $n_{21} = n_2 / n_1 < 1$ je relatívny index lomu. Zo vzťahov (2.79) a (2.80) je možné ukázať, že pre $\alpha_1 \geq \alpha_M$:

$$\frac{E_{ro}}{E_{rd}} = \frac{E_{ko}}{E_{kd}} = 1 \,. \tag{2.81}$$

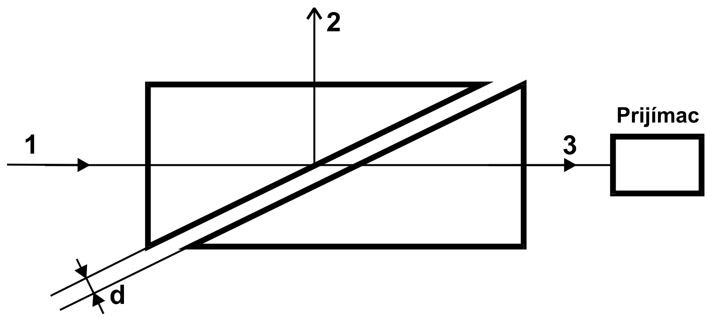
2.8 Prienik elektromagnetickej energie do druhého prostredia pri úplnom vnútornom odraze

Rovnice (2.75) a (2.71) si zdanlivo protirečia, t. zn., že v druhom prostredí je prítomná elektromagnetická energia v tom istom okamihu, keď sa celkový tok dopadajúcej energie vracia do prvého prostredia. V skutočnosti v tomto nie je žiadny paradox. Pri úplnom odraze časť toku energie preniká do určitej malej hĺbky do druhého prostredia a potom sa vracia naspäť do prvého prostredia. Táto hĺbka je rádu dĺžky vlny, pričom závisí od uhla dopadu a indexu lomu prostredia. Je možné ukázať, že miesto vstupu a výstupu toku energie je vzájomne posunuté rádove o $\lambda/2$. Takže, pri úplnom odraze dochádza k pohybu energie pozdĺž hranice rozhrania týchto prostredí. Situácia je schematicky znázornená na obr. 2.13.



Obr. 2.13. K prieniku a posunu elmg energie do druhého prostredia pri úplnom odraze

Jav prenikania elmg (svetelnej) energie do druhého prostredia, ktoré je opticky redšie je možné pozorovať aj experimentálne. Principiálna schéma jedného z takých experimentov je znázornená na obr. 2.14.



Obr. 2.14. Presakovanie energie dopadajúcej vlny pri úplnom odraze cez medzeru o šírke d

Dva hranoly prispôsobené k úplnému vnútornému odrazu sú v takej polohe, že tvoria medzeru o šírke d, ktorá je porovnateľná s dĺžkou vlny λ dopadajúceho svetla 1. Pri väčších hodnotách d prijímač nezaznamená dopad energie zo smeru 3. Ak však medzera d bude menšia ako je hĺbka prenikania pri vnútornom úplnom odraze, potom energia, ktorá prešla do druhého hranola v smere 3 pokračuje ďalej ním a dopadne na prijímač. Takýto experiment je možné urobiť aj s centimetrovými vlnami, potom však šírka medzery d je 10^5 x väčšia než v prípade použitia svetla.

Záverom poznamenajme, že úplný odraz hrá veľmi dôležitú úlohu pri šírení svetla v optickom vlnovode. Podrobnejšie bude o tejto otázke pojednané v príslušných paragrafoch nižšie.

Literatúra

[1] ACHIEZER, A. I., ACHIEZER, I. A.: Elektromagnetizm i elektromagnitnyje volny, Vysšaja škola, Moskva l985
[2] FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M.: Feynmanove prednášky z fyziky, (Slovenský preklad), Alfa, Bratislava l980-90
[3] GODŽAJEV, N. M.: Optika, Vysšaja škola, Moskva l977
[4] ILKOVIČ, D.: Fyzika II, Alfa Bratislava, SNTL Praha l970
[5] MATVEJEV, A. N.: Optika, Vysšaja škola, Moskva l985
[6] SAVEĽJEV, I. V.: Kurs obščej fiziki, Tom 2, Nauka, Moskva l982

3. Geometrický popis šírenia sa vĺn. Prvky geometrickej optiky

3.1 Úvod

Niektoré optické javy ako napríklad vznik obrazu v optickom prístroji, alebo vznik tieňa a podobne je výhodné vysvetliť pomocou predstavy o svetelných lúčoch, matematických čiarach, pozdĺž ktorých sa šíri energia svetelných vĺn. Pri tomto popise na svetlo nazeráme ako na súbor nekonečne veľkého počtu svetelných lúčov, ktoré sú od seba nezávislé, a ktoré veľmi dobre vyhovujú priamočiaremu šíreniu sa svetla, zákonu odrazu a lomu na rovinnom rozhraní dvoch prostredí. Popis optických javov založený na uvedenej predstave sa označuje ako „geometrická optika“. Z vlnovej podstaty svetla (ako uvedieme ďalej) vyplýva, že predstava oddelených svetelných lúčov je v rozpore so skutočnosťou. Vydelením úzkeho zväzku sa vždy dosiahne, že sa zväzok po prechode cez obmedzujúci útvar bude „rozbiehať “ (dôjde k jeho difrakcii), avšak napriek tomu zákony geometrickej optiky môžeme získať aj z vlnovej optiky limitným prechodom, keď vlnová dĺžka svetla sa blíži k nule, inými slovami za podmienok, keď vlnová podstata svetla prestáva byť významná.

3.2 Rovnica eikonalu

Majme na mysli izotropné optické prostredie, v ktorom sa šíri rovinná svetelná vlna. Nech index lomu tohto prostredia je „n“. Ako je nám známe intenzitu elektrického poľa v tejto vlne môžeme popísať reálnou, alebo imaginárnou časťou výrazu :

$$E(\vec{r},t) = E_0 \cdot \exp\left[i \cdot \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t\right)\right] = E_0 \cdot \exp\left[i\left(k_0 \cdot n \cdot \vec{s} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t\right)\right], \tag{3.1}$$

$\vec{s}$ predstavuje jednotkový vektor, ktorý má smer šírenia rovinnej vlny t. zn., že tiež $\vec{s} = \vec{k}/k$, kde $\vec{k}$ je vlnový vektor a k jeho veľkosť. Preto tiež $\vec{k} = k \cdot \vec{s} = k_0 \cdot n \cdot \vec{s}$, kde vlnové číslo vákua je $k_0 = \omega / c = 2\pi \cdot \lambda_0$. V nehomogénnom prostredí index lomu závisí od súradnice $n = n(\vec{r})$. V takomto prostredí už (3.1) nebude riešením vlnovej rovnice. Riešenie je však možné získať v tvare monochromatickej vlny všeobecného tvaru:

$$E(\vec{r},t) = E_0(\vec{r}) \cdot \exp\left[i \cdot \left(k_0 \cdot S(\vec{r}) - \omega \cdot t\right)\right]. \tag{3.2}$$

Veličiny $S(\vec{r})$ nazývame eikonalom. Je to skalárna funkcia súradníc vyjadrujúca závislosť fázy vlny od súradnice. Amplitúda $E_0(\vec{r})$ závisí od polohového vektora $\vec{r}$. Výraz (3.2) je približným riešením Maxwellových rovníc v limitnom prípade, keď vlnová dĺžka λ_0 je malá (alebo pre prípad veľkých k_0), za podmienky, že funkcia $S(\vec{r})$ vyhovuje určitej diferenciálnej rovnici. Akú podmienku musí $S(\vec{r})$ splniť, aby (3.2) bolo riešením vlnovej rovnice určíme nasledovne (túto rovnicu budeme nazývať rovnicou eikonalu):

Ak by sme podrobnejšie analyzovali funkciu $E(\vec{r},t)$ je možné zistiť, že táto pri limitnom prechode $\lambda_0 \to 0$ resp. pri k_0 rastúcom nadovšetky medze v priestore vykazuje výrazné zmeny, avšak amplitúda $E_0(\vec{r})$ a eikonal $S(\vec{r})$ menia sa pomalšie a aj pri limitnom prechode $k_0 \to \infty$ majú konečné hodnoty. V blízkom okolí bodu v priestore, danom polohovým vektorom $\vec{r}$, môžeme $S(\vec{r})$ rozložiť do mocninového radu. Ak použijeme len prvé dva členy dostaneme:

$$S(\vec{r}) = S_0 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla S \tag{3.3}$$

(derivácia S podľa r vo vzťahu (3.3) platí pre $\vec{r} = \vec{r}_0$).

Keď (3.3) dosadíme do (3.2), získame intenzitu elektrického poľa svetelnej vlny v blízkom okolí bodu danom polohovým vektorom $\vec{r}_0$:

$$E(\vec{r},t) = E_0 \cdot \exp[i \cdot (k_0 \cdot \nabla S \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)], \tag{3.4}$$

pričom

$$E_0 = E_0(\vec{r}_0) \cdot \exp[i \cdot k_0 \cdot (S(\vec{r}_0) - \vec{r}_0 \cdot \nabla S)]. \tag{3.5}$$

Toto súčasne značí, že v malom okolí ľubovolného bodu $\vec{r}_0$ v medziach, kde platí rozvoj do radu (3.3), ľubovoľnú vlnu danú vzťahom (3.2) môžeme považovať za rovinnú, pretože vo vzťahu (3.4) závislosť intenzity od súradnice $\vec{r}$ je taká istá ako vo vzťahu (3.1).

Porovnaním (3.4) a (3.1) dostaneme diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením je funkcia $S(\vec{r})$:

$$\nabla S(\vec{r}) = n \cdot \vec{s}\ , \tag{3.6a}$$

alebo ak ľavú aj pravú stranu tejto rovnice povýšime na druhú, dostaneme

$$(\nabla S(\vec{r}))^2 = n^2 . \tag{3.6b}$$

Funkcia $S(\vec{r})$ teda nemôže byť ľubovoľnou funkciou ak má mať charakter vlny. Rovnicu (3.6b) nazývame **rovnicou eikonalu**.

Vlnoplochy, miesta konštantnej fázy, budú potom dané rovnicou :

$$k_0 \cdot S(\vec{r}) - \omega \cdot t = konst \tag{3.7}$$

(Pozri vzťah 3.2)

Všimnime si ešte raz rovnicu (3.6a). Ako sme už uviedli vyššie, jednotkový vektor $\vec{s}$ v tejto rovnici má smer vlnového vektora, a teda smer šírenia sa vlny. Potom lúče t. zn. čiary, ku ktorým dotyčnice majú smer šírenia sa vlny, sú ortogonálne k vlnoplochám. Keď bude index lomu funkciou polohy t. j. $n = n(\vec{r})$ a bude sa teda od miesta k miestu meniť, lúče budú reprezentované krivkami. Poznamenajme ešte, že vlnoplochy sa budú premiestňovať rýchlosťou v = c / n v smere jednotkového vektora $\vec{s}$.

Z rovnice eikonalu (3.6) môžeme nájsť diferenciálnu rovnicu lúča v danom prostredí, poznamenajme , že aj v nehomogénnom prostredí. Nech polohový vektor $\vec{r}$ udáva polohu bodu A, ktorý leží na lúči. Krátkemu úseku lúča môžeme priradiť vektor $d\vec{l} = dl.\vec{s}d$, kde $\vec{s}$ je jednotkový vektor v smere lúča. Je zrejmé, že nekonečne malá zmena $d\vec{r}$ polohového vektora je rovná $d\vec{l}$, t. j. $d\vec{l} = d\vec{r}$. Potom jednotkový vektor $\vec{s}$ môžeme vyjadriť $\vec{s} = d\vec{r}\,/\,dl$. Po dosadení do (3.6 a) dostaneme $\nabla S = n \cdot d\vec{r}\,/\,dl$. Keď tento vzťah prediferencujeme podľa l a súčasne vieme, že $dS\,/\,dl = \nabla S$, dostaneme

$$\frac{d}{dl} \cdot (\nabla S) = \nabla\left(\frac{dS}{dl}\right) = \nabla n\,, \tag{3.8}$$

dosadením za ∇S rovnicu lúča vyjadríme

$$\frac{d}{dl} \cdot \left(n \cdot \frac{d\vec{r}}{dl}\right) = \nabla n\,. \tag{3.9}$$

Predstavme si teraz homogénne prostredie t. zn. že $n = konšt$, potom $\nabla n = 0$. Za týchto predpokladov môžeme (3.9) písať

$$\frac{d^2\vec{r}}{dl^2} = 0\,. \tag{3.10}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice môžeme písať v tvare

$$\vec{r} = \vec{a} \cdot l + \vec{b}\,, \tag{3.11}$$

kde $\vec{a}, \vec{b}$ sú konštantné vektory. Rovnica (3.11) predstavuje rovnicu priamky, ktorá má smer vektora $\vec{a}$ a prechádza bodom $\vec{b}$. V homogénnom prostredí sa svetlo šíri pozdĺž priamok (to je tiež vyjadrenie jedného zo základných zákonov geometrickej optiky), alebo inými slovami, svetelné lúče sú priamočiare.

Avšak vlnoplochy $S(\vec{r}) = konst$ v takomto prostredí nemusia byť roviny. Všimnime si ešte jedno riešenie rovnice eikonalu $(\nabla S)^2 = n^2$. Keď $n = konšt$, potom $S(\vec{r}) = n|\vec{r} - \vec{r}_0|$. Zvláštnym prípadom je bod, keď $\vec{r} = \vec{r}_0$. V takomto prípade $\nabla S = n \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)/|\vec{r} - \vec{r}_0|$, svetelné lúče potom tvoria zväzok polpriamok, ktoré vychádzajú zo zdroja umiestneného v bode $\vec{r} = \vec{r}_0$. Vlnoplochy sú v takomto prípade potom koncentrické sféry, ktorých stred leží tiež v bode $\vec{r} = \vec{r}_0$.

V nehomogénnom prostredí, keď $n = n(\vec{r})$, je možné odvodiť rovnicu lúča v tvare

$$\frac{d\vec{s}}{dl} = \frac{1}{n} \cdot \left[\nabla n - \vec{s} \cdot (\nabla n \cdot \vec{s})\right]. \tag{3.12}$$

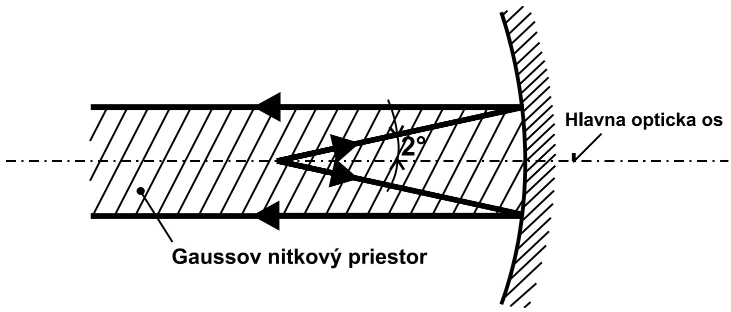
Význam jednotlivých symbolov sa nemení. Z tejto rovnice je možné dospieť ku vzťahu pre krivosť lúča v danom bode :

$$\frac{1}{R} = \vec{N} \cdot \left(\frac{\nabla n}{n}\right). \tag{3.13}$$

$\vec{N}$ je jednotkový vektor v smere normály v uvažovanom bode a R je v tomto bode polomer krivosti.

3.3 Opticky centrované sústavy

Väčšina optických prístrojov využíva tzv. opticky centrované sústavy. Lámavé a odrazové sférické plochy tvoria základ týchto sústav. Stredy krivosti týchto plôch ležia na priamke, ktorej hovoríme **hlavná optická os**. Vytvorenie teórie týchto sústav je zvlášť jednoduché vtedy, keď použijeme tzv. paraxiálnu aproximáciu, t. zn. budeme používať len paraxiálne (príosové) lúče. Sú to lúče, ktoré zvierajú s optickou osou veľmi malé uhly (cca do 2^0). Priestor, ktorý takéto lúče vytvárajú, nazývame **Gaussov nitkový priestor**. Pre prípad dutého zrkadla je situácia schematicky znázornená na obr. 3.1.



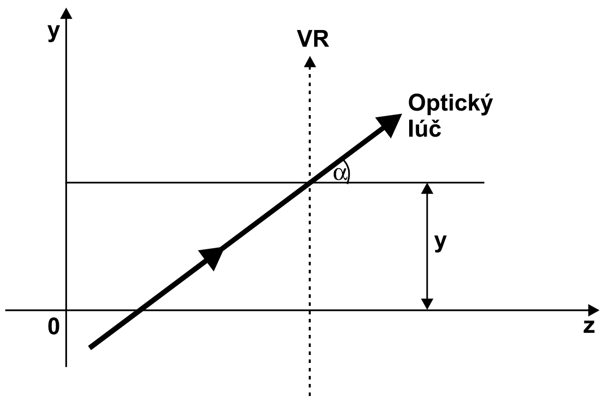
Obr. 3.1. Paraxiálne lúče. Gaussov nitkový priestor

F. Gauss sa už v r. 1841 zaoberal vytváraním obrazu v optickej sústave pomocou paraxiálnych lúčov. V ďalšom budeme mať na mysli len paraxiálne lúče.

3.4 Maticový popis lúčov v opticky centrovanej sústave

V základnom kurze fyziky bolo zvykom využívať pre popis lúča prechádzajúceho optickou sústavou vrcholové rovnice pre sférickú odrazovú plochu alebo sférickú lámavú plochu, prípadne Newtonove zobrazovacie rovnice. Dnes obyčajne hovoríme, že je to popis klasický. My si ďalej ukážeme metódu, ktorá pre transformáciu lúča optickou sústavou využíva špeciálne matice. Maticový počet je dobre známy z matematiky. Tento popis bude mať celý rad výhod. Nielen to, že ho využijeme pre paraxiálne lúče v geometrickej optike, ale je možné ho využiť aj pre popis šírenia sa laserových gaussovských zväzkov v kvantovej elektronike.

Refrakčná matica, reflexná matica a translačná matica budú vystupovať v súčine celkovej matice optickej sústavy. Súčin matíc je veľmi výhodné realizovať využitím PC počítača. Jednotlivé prvky výslednej matice nám potom umožňujú nájsť príslušné prvky opticky centrovanej sústavy.



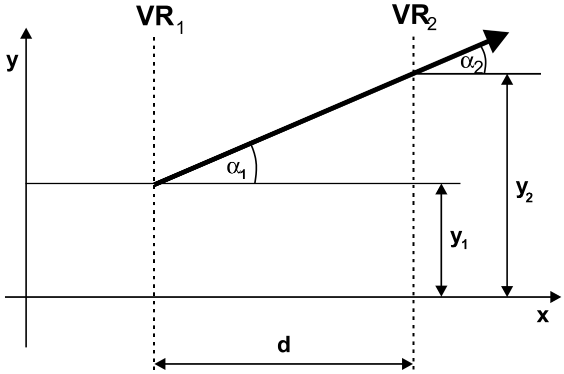
Obr. 3.2 Chod lúča v homogénnom prostredí vzhľadom na súrad. systém. Vzťažná rovina

Predstavme si teraz optickú sústavu, ktorá sa skladá z optických prvkov ako sú šošovky, zrkadlá a homogénne prostredie medzi nimi. Sférické a rovinné plochy (sú hranicami) oddeľujú jednotlivé prostredia medzi optickými prvkami. Svetelný lúč nech sa skladá z lineárnych úsekov. Tiež majme na mysli len meridiálne lúče t. zn. lúče, ktoré ležia v rovine hlavnej optickej osi. Nech touto rovinou je rovina y z (pozri obr. 3.2).

Ďalej si zvoľme vzťažnú rovinu VR, kolmú na optickú os z. t. zn. z = konšt.

Ľubovoľný meridiálny lúč je možné určiť pomocou dvoch parametrov. Jedným je súradnica y priesečníka lúča so vzťažnou rovinnou a druhým je uhol α, ktorý zviera lúč s osou z (pozri obr. 3.2). Tiež ďalej uvidíme, že miesto uhla α je výhodné zaviesť parameter $V = n.\alpha$, kde n je index lomu prostredia, ktorým lúč prechádza.

Predstavme si ďalej dve vzťažné roviny VR_1 a VR_2 tak, ako je to znázornené na obr. 3.3.



Obr. 3.3. Vzťažné roviny. Súradnice priesečníkov lúča so vzťaž. rovinami. Uhly, ktoré zviera lúč s osou z

Transformácia (vstupných) parametrov y a V lúča pri prechode od vzťažnej roviny VR_1 k vzťažnej rovine VR_2 (na výstupné parametre) v paraxiálnom priblížení bude lineárna. Pre ľubovoľné dve vzťažné roviny bude mať tvar :

$$y_2 = A \cdot y_1 + B \cdot V_1 \tag{3.14}$$

$$V_2 = C \cdot y_1 + D \cdot V_1 . \tag{3.15}$$

V maticovom tvare môžeme túto transformáciu napísať nasledovne :

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} . \tag{3.16}$$

Vzťažné roviny môžeme zvoliť v rôznych miestach optickej sústavy. Pre dané dve roviny VR_1 a VR_2 , transformácia paraxiálneho lúča sa opisuje tou istou maticou, ktorá zodpovedá úseku „d“ medzi vzťažnými rovinami. Prvky tejto matice *A, B, C, D* budú závisieť od vlastností tohto úseku, t. zn. budú závisieť od toho, aké lámavé plochy tvoria optické prvky a od vlastností prostredia, ktoré je medzi vzťažnými rovinami. Matica, ktorá bude opisovať transformáciu lúčov celou optickou sústavou bude teda tvorená súčinom jednotlivých matíc pre príslušné úseky prostredia.

Sú to optická vrstva, ktorá je tvorená homogénnym priehľadným prostredím, lámavá plocha a odrazová plocha. Optické prostredie medzi vzťažnými rovinami VR_1 a VR_2 je charakterizované hrúbkou (vzdialenosťou) d (pozri obr. 3.3) a indexom lomu prostredia n. Transformáciu parametra y je možné podľa obr. 3.3 vyjadriť vzťahom

$$y_2 = y_1 + \mathrm{d} \cdot tg\alpha_1 . \tag{3.17}$$

Keď využijeme paraxiálne priblíženie, môžeme vzťah (3.17) písať v tvare

$$y_2 = y_1 + \mathrm{d} \cdot \alpha_1 . \tag{3.18}$$

Poznamenajme, že napr. pre $\alpha_1 < 5^0$ sa budú vzťahy (3.17) a (3.18) líšiť menej než o 1 %. Násobme druhý člen (3.18) indexom lomu n a súčasne n deľme, potom

$$y_2 = y_1 + \frac{\mathrm{d}}{n} \cdot n \cdot \alpha_1 = y_1 + L \cdot V_1 \, . \tag{3.19}$$

Vidíme, že $L = \mathrm{d} / n$ a $V_1 = n \cdot \alpha_1$. Sklon lúča pri prechode od vzťažnej roviny VR_1 k rovine VR_2 sa nemení, preto $V_1 = V_2 = n \cdot \alpha_1$. Preto transformáciu lúča optickou vrstvou môžeme opísať maticou získanou z rovníc

$$y_2 = 1 \cdot y_1 + L \cdot V_1 \tag{3.20}$$

$$V_2 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot V_1 \, , \tag{3.21}$$

alebo v maticovom tvare :

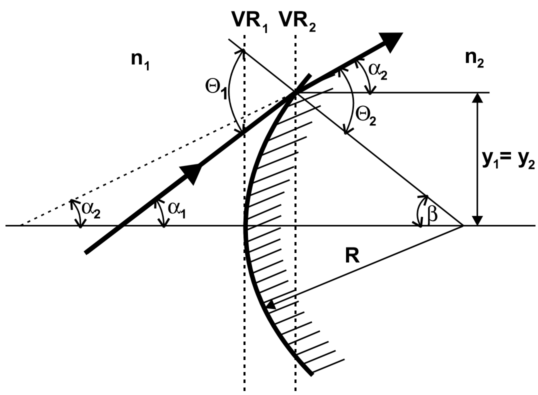
$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} . \tag{3.22}$$

Transformačnú maticu potom vyjadríme :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3.23}$$

3.5 Sférická lámavá plocha

Ďalej uvažujme prípad, keď sférická lámavá plocha oddeľuje dve prostredia s indexom lomu n_1 a n_2 . Polomer krivosti tejto plochy je R. Situácia je schematicky znázornená na obr. 3.4.



Obr. 3.4. Chod lúča cez sférickú lámavú plochu

Pretože pre prípad spojky je lámavá plocha vypuklá, alebo pre prípad rozptylky dutá, je potrebné zaviesť určitú dohodu, aby príslušné vzťahy boli správne. Polomer krivosti R budeme považovať za kladný, keď stred krivosti lámavej plochy leží na osi z vpravo od rozhrania, t. j. súradnica z stredu je väčšia než súradnica vrcholu lámavej plochy. Alebo ho považujeme za záporný, ak leží stred krivosti na osi z vľavo od lámavej plochy. S cieľom nájdenia lomovej (refrakčnej) matice, zvolili sme si dve **vzťažné roviny** VR_1 a VR_2 (pozri obr. 3.4) v blízkosti lámavej plochy. Vzdialenosť medzi týmito rovinami môžeme vyjadriť nasledovne :

$$\mathrm{R} \cdot (1-\cos\beta) \cong \mathrm{R} \cdot \frac{\beta^2}{2} . \tag{3.24}$$

Pravá strana vzťahu (3.24) je zapísaná zjednodušene pre paraxiálnu aproximáciu. V tomto prípade môžeme súčasne uvažovať, že priesečníky lúča so vzťažnými rovinami majú tú istú súradnicu, takže, $y_1 \cong y_2$. Ďalej sa pokúsime nájsť parameter $V = n \cdot \alpha$. Využime zákon lomu, ktorý pre náš prípad napíšeme :

$$n_1 \cdot \sin\Theta_1 = n_2 \cdot \sin\Theta_2 , \tag{3.25}$$

alebo pre paraxiálne lúče ho môžeme zjednodušiť

$$n_1 \cdot \Theta_1 = n_2 \cdot \Theta_2 . \tag{3.26}$$

Keď využijeme vetu o vonkajšom uhle trojuholníka môžeme písať

$$\Theta_1 = \alpha_1 + \beta \tag{3.27}$$

$$\Theta_2 = \alpha_2 + \beta \tag{3.28}$$

Keď rovnicu (3.27) násobíme indexom lomu n_1 a (3.28) indexom lomu n_2 a súčasne využijeme (3.26) dostaneme

$$n_2 \cdot \alpha_2 = n_1 \cdot \alpha_1 + \beta \cdot (n_1 - n_2) . \tag{3.29}$$

Ak teraz využijeme vyššie uvedený postup, t.zn. nazveme $n_2 \cdot \alpha_2 = V_2$, $n_1 \cdot \alpha_1 = V_1$ a $\beta = y_1 / \mathrm{R}$ dostaneme vzťah pre transformáciu parametra V. Potom po dosadení do (3.26) môžeme písať :

$$V_2 = V_1 - \frac{y_1 \cdot (n_2 - n_1)}{\mathrm{R}} , \tag{3.30}$$

alebo

$$V_2 = V_1 - P \cdot y_1 , \tag{3.31}$$

kde $P = (n_2 - n_1) / R$. Túto veličinu je zvykom **nazývať optickou mohutnosťou lámavej plochy**. Pre lom lúča v mieste $y_1 = y_2$ môžeme teda písať rovnice

$$y_2 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot V_1 \tag{3.32}$$

$$V_2 = -P \cdot y_1 + 1 \cdot V_1 \tag{3.33}$$

Alebo v maticovom tvare môžeme túto sústavu dvoch rovníc napísať nasledovne

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Z (3.34) pre lomovú (refrakčnú) maticu môžeme písať

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Všimnime si prípad, keby lámavou plochou bola rovina, potom $R \to \infty$ a $P = 0$. **Lomová matica** bude mať tvar :

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Jedná sa teda o jednotkovú maticu, súčasne bude platiť $V_2 = V_1$ a $n_1 \cdot \alpha_1 = n_2 \cdot \alpha_2$ (pozri vzťahy (3.29) a (3.30).

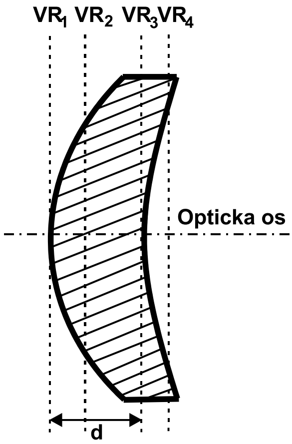
Aby sme mohli použiť maticový popis aj pre odrazové plochy, či už rovinné alebo sférické, zavedieme určité konvenčné pravidlá.

Ak sa lúč šíri v zápornom smere osi z, potom index lomu prostredia, cez ktoré prechádza, považujeme za záporný, t. zn. *(-n)* (pozri napr. obr. 3.4). Zákon odrazu teda vyjadríme $\Theta_2 = -\Theta_1$, formálne tiež môžeme naň nazerať ako špeciálny prípad zákona lomu, keď $n_2 = -n_1$. Transformačná matica, ktorá popisuje parametre lúča pri odraze od guľovej plochy má taký istý tvar ako (3.35), t. j. lomová matica, keď vo výraze pre optickú mohutnosť P nahradíme n_2 na $-n_1$, t. zn. potom: $P = -2.n_1 / R$. Pre **vypuklé zrkadlá** budeme považovať $R > 0$ a optická mohutnosť bude záporná, t. j. $P < 0$, pre **duté zrkadlo** bude kladná, t. j. $P > 0$.

Hrúbka optickej vrstvy $d = z_2 - z_1$ medzi vzťažnými rovinami $z = z_1$ a $z = z_2$ bude kladné keď $z_2 > z_1$ a záporná pre $z_2 < z_1$ t. zn. $d < 0$ pre lúče, ktoré sa šíria vľavo. Pretože pre takéto lúče je aj index lomu záporný, bude hrúbka $D = d / n$ kladné, preto matica (3.23) pre optickú vrstvu nezávisí od smeru lúčov.

3.6 Hrubá šošovka

Použime vyššie uvedenú metódu pre popis hrubej šošovky, ktorá je tvorená homogénnym prostredím s indexom lomu n, ktoré sa nachádza medzi dvomi sférickými plochami o polomere R_1 a R_2 (Pozri obr. 3.5.).



Obr. 3.5 Hrubá šošovka a jej vzťažné roviny

Hrúbkou šošovky budeme nazývať vzdialenosť d medzi vzťažnými rovinami VR_1 a VR_3 pozdĺž optickej osi. Ďalej zavedieme nasledujúce označenie.:

$U_1(y_1, V_1)$ sú parametre vybraného paraxiálneho lúča v mieste vzťažnej roviny VR_1 pred tým než lúč vošiel do prostredia šošovky.

U_2 sú parametre po lome na prvej ploche t. zn. po VR_2 . U_3 sú parametre lúča po prechode optickej vrstvy L = / n na ploche VR_3.

$U_4(y_4, V_4)$ sú parametre na VR_4 po lome na zadnej ploche šošovky. Nech M_T je matica optickej vrstvy (3.23) a M_{R1} a M_{R2} lomové matice (3.35), ktoré odpovedajú prvej a druhej lámavej ploche. V nich potom

$$P_1 = \frac{(n-1)}{R_1} \tag{3.37}$$

$$P_2 = \frac{(1-n)}{R_2} \tag{3.38}$$

Predpokladajme, že túto šošovku obklopuje prostredie s indexom lomu $n_0 = 1$. Môžeme písať, že

$$U_4 = M_{R2} \cdot U_3 = M_{R2} \cdot (M_T \cdot U_2) = M_{R2} \cdot M_T \cdot (M_{R1} \cdot U_1) = M_{R2} \cdot M_T \cdot M_{R1} \cdot U_1 \,. \tag{3.39}$$

Je zrejmé, že výsledná matica M transformácie lúča, ktorý prechádza zloženou optickou sústavou, bude rovná súčinu matíc zodpovedajúcich jednotlivým prvkom sústavy, avšak usporiadaných v opačnom poradí, t. zn.

$$M = M_{R2} \cdot M_T \cdot M_{R1} \,. \tag{3.40}$$

Takže, keď vyjadríme jednotlivé matice :

$$M_{R2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} M_T = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Po dosadení do (3.40) dostávame pre celkovú maticu :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P_1 L & L \\ -(P_1 + P_2 - P_1 P_2 L) & 1 - P_2 L \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

3.7 Tenká šošovka

Majme ďalej na mysli tzv. tenkú šošovku. Je to šošovka, ktorá sa vyznačuje veľmi malou (zanedbateľne malou) vzdialenosťou medzi lámavými plochami, t. zn. $L \to 0$. V tomto prípade matica M_T sa stáva jednotkovou maticou a celková matica M prechádza na taký istý tvar, aký zodpovedá matici M_R jednej lámavej plochy, t. j. (3.35), avšak s optickou mohutnosťou

$$P = P_1 + P_2 \,. \tag{3.43}$$

Pričom súčasne :

$$P = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (n-1)\cdot\frac{(R_2 - R_1)}{R_1 \cdot R_2}, \tag{3.44}$$

t. j.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

3.8 Matica sústavy. Ohniská. Hlavné body a hlavné roviny centrovanej sústavy

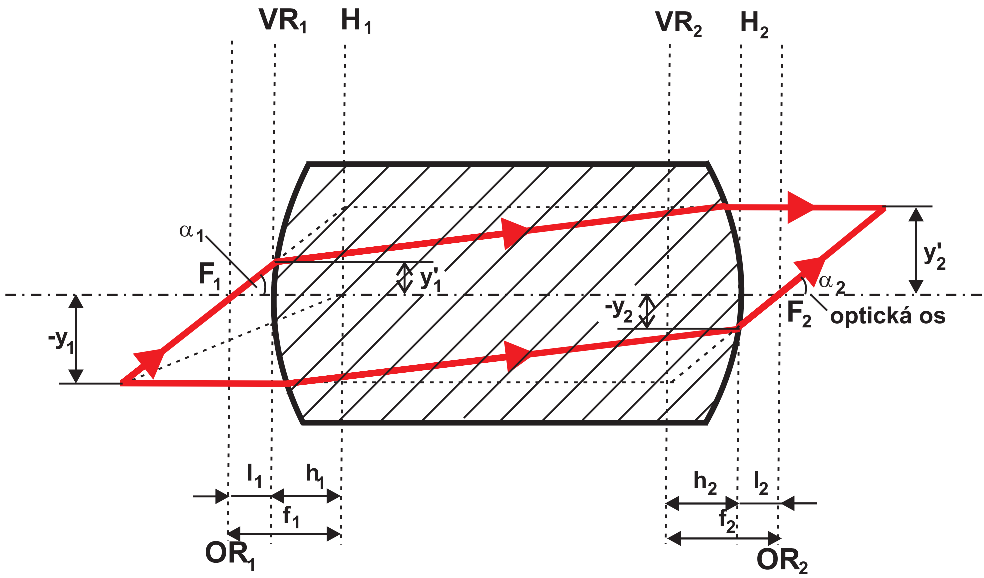
Ako sme uviedli transformačné vlastnosti každej časti optickej sústavy sa dajú popísať transformačnou maticou, takže transformačné vlastnosti celej sústavy sú popísateľné súčinom transformačných matíc jej jednotlivých častí. To, že je to súčin, môžeme priblížiť ešte nasledovne: Keď si všimneme sústavu rovníc (3.16) vyjadrenú v maticovom tvare vidíme, že výstupné parametre y_2, V_2 sú dané stĺpcovou maticou a sú vyjadrené ako súčin stĺpcovej matice vstupných parametrov y_1 , V_1 a matice, ktorej prvky určujú vlastnosti napr. lámavej plochy. Ak za touto plochou nasleduje ďalší optický prvok napr. ďalšia lámavá plocha, stáva sa uvedený súčin vstupnými parametrami pre tento prvok, teda pre lámavú plochu, ktorá za tým nasleduje ap.

Ďalej nájdeme celkovú maticu M transformácie parametrov paraxiálneho lúča pre ľubovoľnú opticky centrovanú sústavu, keď sú známe hodnoty indexu lomu, krivosť, a vzájomná poloha lámavých a odrazových plôch. Nech prvky tejto matice sú $A, B, C, D,$ t. j.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

Všimnime si lúč, ktorý vstupuje do optickej sústavy v mieste so súradnicou y_1. Pre tento lúč je $\alpha_1 = 0$, a teda $V_1 = n_1 \cdot \alpha_1 = 0$. Lúč vychádza zo sústavy v mieste so súradnicou $y_2 = A \cdot y_1$ a má parameter $V_2 = C \cdot y_1$. Uhol, ktorý zviera tento lúč s optickou osou (pre paraxiálny lúč) vyjadríme ako $\alpha_2 = V_2 / n_2$, preto tento lúč pretína optickú os v bode F_2 . Vzdialenosť bodu F_2 od vzťažnej roviny VR_2 je $l_2 = -y_2 / \alpha_2 = -n_2 \cdot y_2 / V_2$. Keď dosadíme za y_2 môžeme vzdialenosť vyjadriť $l_2 = -n_2 \cdot A / C$. Vzdialenosť l_2 nie je závislá od súradnice y_1 , pretože všetky lúče, ktoré sú rovnobežné s optickou osou prechádzajú po výstupe z optickej sústavy bodom F_2. Tento bod nazývame obrazovým ohniskom alebo pravým hlavným ohniskom optickej sústavy.

Na obr. 3.6 je znázornený chod paraxiálneho lúča uvažovanou optickou sústavou.



Obr. 3.6. Optická sústava realizovaná dvoma lámavými plochami. Ohniská. Hlavné body. Hlavné roviny

Hlavnou rovinou H_2 budeme nazývať rovinu kolmú k optickej ose, ktorá prechádza priesečníkom lúča rovnobežného s optickou osou a priamky, na ktorej leží lúč, ktorý zo sústavy vystupuje (pozri obr. 3.6). **Ohnisková vzdialenosť** f_2 bude potom vzdialenosť ohniska F_2 od tejto roviny. Môžeme ju potom vyjadriť:

$$f_2 = -\frac{y_1}{\alpha_2} = -\frac{n_2 \cdot y_1}{V_2}, \tag{3.47}$$

keď vyjadríme $V_2 = C.\, y_1$ a dosadíme do (3.47) dostaneme pre ohniskovú vzdialenosť

$$f_2 = -\frac{n_2}{C}\,. \tag{3.48}$$

Vidíme, že ohnisková vzdialenosť f_2 je pri známom indexe lomu n_2 určená prvkom C matice (3.46).

Určime teraz **ohniskovú vzdialenosť** f_1 danú vzdialenosťou ohniska F_1 od hlavnej roviny H_1 (pozri obr. 3.6). Bod F_1 budeme nazývať predmetovým ohniskom alebo ľavým hlavným ohniskom optickej sústavy. Ako je známe, je to bod na optickej osi, ktorým po prechode optickou sústavou prechádzajú všetky rovnobežné lúče, ktoré pred vstupom do optickej sústavy postupovali v zápornom smere osi z (inými slovami sprava doľava) a boli rovnobežné s optickou osou. Ďalej poznamenajme, že hlavná rovina H_1 je rovina kolmá na optickú os, ktorá súčasne prechádza priesečníkom vstupujúceho lúča prechádzajúceho ohniskom F_1 a lúča postupujúceho rovnobežne s optickou osou. Majme teda na mysli lúč prechádzajúci ohniskom F_1, ktorý zaviera s optickou osou uhol $\alpha_1^{,}$. Na výstupe z optickej sústavy bude tento lúč rovnobežný s optickou osou a teda $V_2^{,} = n_2 \cdot \alpha_2^{,} = 0$ pretože $\alpha_2^{,} = 0$. Ináč $V_2^{,} = C \cdot y_1^{,} + D \cdot V_1^{,} = 0$. Keď dosadíme $V_1^{,} = n_1 \cdot \alpha_1^{,}$, dostaneme

$$y_1^{,} = -\frac{D}{C} \cdot n_1 \cdot \alpha_1^{,} \tag{3.49}$$

Zo situácie na obr. 3.6 vyplýva, že

$$l_1 = -\frac{y_1^{,}}{\alpha_1^{,}} = \frac{D}{C} \cdot n_1 . \tag{3.50}$$

Je zrejmé, že l_1 nezávisí od uhla $\alpha_1^{,}$, pretože všetky lúče, ktoré prechádzajú ohniskom F_1, po prechode cez sústavu sú rovnobežné s optickou osou. Ďalej je zrejmé, že

$$f_1 = \frac{y_2^{,}}{\alpha_1^{,}} = \frac{n_1 \cdot y_2^{,}}{V_1^{,}} , \tag{3.51}$$

keď vyjadríme $V_1^{,} = C \cdot y_2^{,}$ dostaneme

$$f_1 = \frac{n_1}{C} . \tag{3.52}$$

Priesečníky hlavných rovín H_1 a H_2 s optickou osou spolu s ohniskami F_1, F_2 nazývame **kardinálnymi bodmi**. Ich polohu úplne určuje transformácia ľubovoľného paraxiálneho lúča pri prechode optickou sústavou. Keď sú známe, je možné zostrojiť výstupný lúč zo sústavy bez toho, aby sme zostrojili reálny chod lúčov v sústave. Súvis polôh kardinálnych bodov s prvkami matice sústavy *M* optickej sústavy sú uvedené v nasledujúcej tabuľke (tab. 3.1).

Tab. 3.1

	Názov	Vzdialenosť	Vzdialenosť, keď $n_1 = n_2 = 1$
1.	Poloha OR 1	$l_1 = n_1\, D / C$	$f_1 = D / C$
2.	Ohnis. vzdialenosť	$f_1 = n_1 / C$	$f_1 = 1 / C$
3.	Poloha HR 1	$f_1 - l_1 = n_1\, (D - 1) / C$	$f_1 - l_1 = (D - 1) / C$
4.	Poloha OR 2	$l_2 = - n_2\, A / C$	$l_2 = - A / C$
5.	Ohnis. vzdialenosť	$f_2 = - n_2 / C$	$f_2 = - 1 / C$
6.	Poloha HR 2	$f_2 - l_2 = n_2 (1 - A) / C$	$f_2 - l_2 = (1 - A) / C$

Všimnime si napr. 2. riadok tab. 3.1. Vidíme, že ohnisková vzdialenosť f_1 je daná parametrom C celkovej matice (3.46) a podobne pomocou prvkov matice M vieme určiť ďalšie veličiny opticky centrovanej sústavy.

Záporne vzatá prevrátená hodnota parametra C dáva (v 5. riadku) ohniskovú vzdialenosť f_2, keď je známy index lomu prostredia, z ktorého je realizovaná optická sústava (šošovka).

Pri tenkej šošovke záporne vzatý parameter C vyjadruje optickú silu $P = - C$. Pre hrubú šošovku ako je vidieť z matice (3.42) - je optická mohutnosť daná $P = P_1 + P_2 - P_1 P_2 L$. Keď dosadíme za výrazy P_1, P_2 a L dostaneme:

$$P = \frac{1}{f_2} = (n-1)\cdot\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)\cdot l}{n\cdot R_1.R_2}\right]. \qquad (3.53)$$

Vidíme, že optická mohutnosť tenkej šošovky má význam prevrátenej hodnoty ohniskovej vzdialenosti. Keď bude optická mohutnosť kladná t.j**. $P > 0$, takúto šošovku budeme nazývať spojkou**. Šošovku, pri ktorej je optická mohutnosť záporná, t. j. **$P < 0$ budeme nazývať rozptylkou.**

Keby sme napr. chceli vedieť polohu hlavných rovín optickej sústavy využijeme prvky A, D matice sústavy a príslušné vzťahy z tab. 3.1. Ako je vidieť z vyššie uvedeného predmetové ohnisko spojky bude ležať vpravo, ak lúče prichádzajú zľava (teda za šošovkou). Súradnica z jeho polohy bude kladná. Pre rozptylku, ak lúče prichádzajú tiež zľava, bude ohnisko ležať vľavo (t.zn. pred šošovkou). Jeho poloha bude daná zápornou súradnicou z.

3.9 Transformácia parametrov lúča šíriaceho sa medzi hlavnými rovinami

Vytvorme maticu M_h transformácie parametrov lúča, ktorý sa šíri medzi hlavnými rovinami H_1 a H_2 , na rozdiel od predchádzajúceho prípadu, keď sme transformovali parametre lúča šíriaceho sa medzi vzťažnými rovinami VR_1 a VR_2. Z vyššie uvedeného je jasné, že príslušná matica M_H sa dá napísať :

$$M_H = M_{T2} \cdot M \cdot M_{T1} . \tag{3.54}$$

Matica M_{T2} bude popisovať transformáciu parametrov lúča na úseku $L_2 = (1 - A) / C = l_2 / n_2$, čo je vzdialenosť hlavnej roviny H_2 a vzťažnej roviny VR_2 predelená indexom lomu n_2 . Matica M_{T1} podobne popisuje transformáciu parametrov lúča na úseku $L_1 = (1 - D) / C = l_1 / n_1$, ktorý odpovedá vzdialenosti H_1 od VR_1 podelenej indexu lomu n_1. Súčasne sme uvážili, že det $M = AD\text{-}BC = 1$. Potom po prenásobení uvedených matíc dostaneme :

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

Vidíme, že matica transformácie parametrov lúča M_H má rovnaké prvky ako má transformačná matica M_R (3.45) pre tenkú šošovku, keď optická mohutnosť $P = - C$. Poznamenajme, že lúč, ktorý dopadá na hlavnú rovinu H_1 v mieste y_1, vychádza v mieste s tou istou súradnicou hlavnej roviny H_2 t. j. $y_2 = y_1$.

3.10 Transformácia parametrov lúča šíriaceho sa medzi dvoma ohniskovými (fokálnymi) rovinami

Ohniskovými (fokálnymi) rovinami nazývame roviny, ktoré sú kolmé na optickú os a súčasne prechádzajú predmetovým, resp. obrazovým ohniskom optickej sústavy,. schematicky sú znázornené obr. 3.7 a obr. 3.8.

Podobne ako sme hľadali maticu M_H transformácie parametrov lúča šíriaceho sa medzi hlavnými rovinami optickej sústavy, môžeme nájsť trnsformačnú maticu M_F parametrov lúča šíriaceho sa medzi ohniskovými rovinami. Pre tento prípad môžeme písať sústavu rovníc :

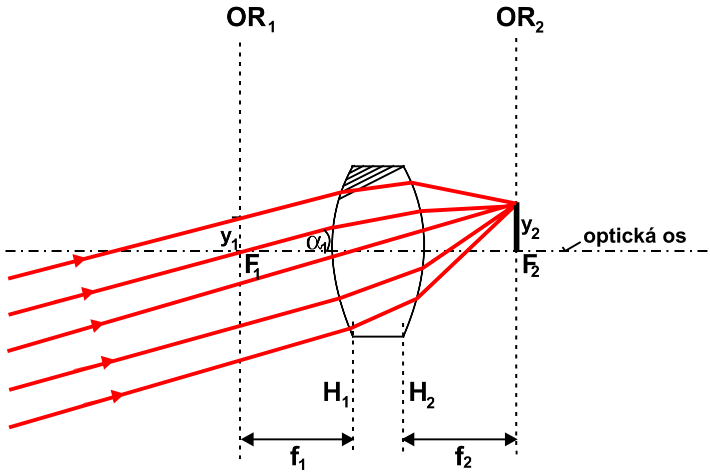
$$y_2 = A \cdot y_1 + B \cdot V_1 \tag{3.56a}$$

$$V_2 = C \cdot y_1 + D \cdot V_1 , \tag{3.56b}$$

konkrétne:

$$y_2 = 0 \cdot y_1 - \frac{V_1}{C} \tag{3.57a}$$

$$V_2 = C \cdot y_1 + 0 \cdot V_1 . \tag{3.57b}$$



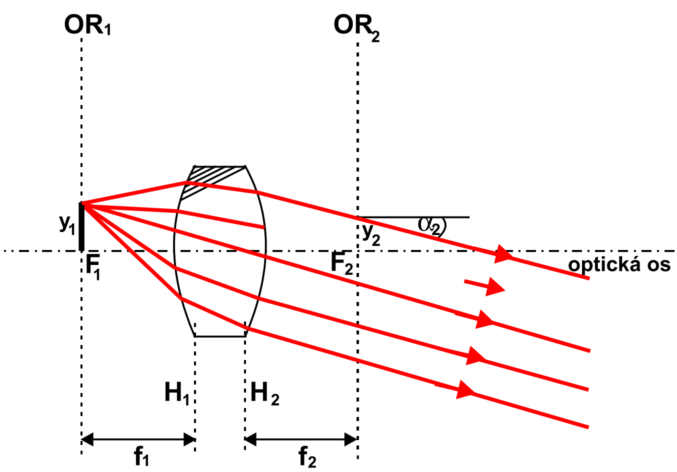
Obr. 3.7. Obrazové (fokálne) roviny

V maticovom tvare bude mať sústava tvar

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/C \\ C & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}. \tag{3.58}$$

Ak využijeme naviac ešte tab. 3.1 pre transformačnú maticu dostaneme :

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & -1/C \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -1/f_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.59}$$



Obr. 3.8. Ohniskové roviny. Lúče vychádzajúce z bodu na ohniskovej rovine OR_1 sú po prechode opt. sústavou rovnobežné

Z rovníc (3.57 a,b) a (3.58) alebo tiež z matice (3.59) vidíme, že všetky rovnobežné lúče, ktoré pretínajú prednú (ľavú) ohniskovú rovinu OR_1 v rôznych miestach pod tým istým uhlom α_1 sa pretínajú na zadnej ohniskovej rovine OR_2 v tom istom bode so súradnicou y_2 (pozri obr. 3.7). Súradnica y_2 je fun-kciou uhlu α_1 t.j. $y_2 = f_2 \cdot \alpha_1$ a nie súradnice y_1.

Predstavme si teraz, že lúče budú vychádzať z jedného bodu ohniskovej roviny OR_1, ktorý má súradnice y_1 tak, ako je to znázornené na obr. 3.8.

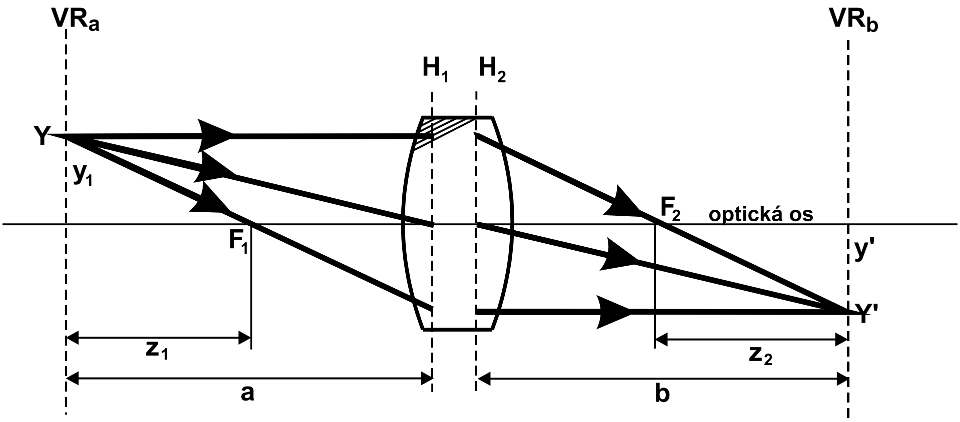
Vchádzajú teda do optickej sústavy pod rôznymi uhlami α_1. Zadnú (pravú) ohniskovú rovinu OR_2 pretínajú v rôznych miestach pod tým istým uhlom $\alpha_2 = -y_1 / f_2$.

3.11 Transformačná matica parametrov lúča medzi dvoma ľubovoľnými rovinami. Predmetová a ohnisková rovina. Priečne a pozdĺžne zväčšenie

Na obr. 3.9 sú znázornené dve ľubovoľné vzťažné roviny VR_a a VR_b, ktoré sú od hlavných rovín H_1 a H_2 vzdialené o úseky „a“ a „b“. Vzdialenosť a budeme v zmysle vyššie uvedeného považovať za zápornú, t. j. $a < 0$, keď rovina VR_a leží vľavo od roviny H_1. Keď si teraz predstavíme, že v rovine VR_a budú ležať body, ktoré chceme optickou sústavou zobraziť, rovina VR_b bude ležať v takej vzdialenosti b od H_2, aby sa tieto body zobrazili ako ostré obrazy (napr. bod Y sa zobrazí na Y′ v VR_b).

Polohu rovín voči ohniskám vyjadríme pomocou súradníc $z_1 = a - f_1$ a $z_2 = b - f_2$. Keď využijeme vyššie uvedené postupy a nájdeme transformáciu parametrov lúča šíriaceho sa medzi rovinami VR_a a VR_b v maticovom tvare, dostaneme :

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{b}{f_2} & -a+\dfrac{ab}{f_2}+b \\ -\dfrac{1}{f_2} & 1+\dfrac{a}{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{z_2}{f_2} & \dfrac{z_1 z_2}{f_2}+f_2 \\ -\dfrac{1}{f_2} & \dfrac{z_1}{f_2} \end{pmatrix}. \tag{3.59}$$



Obr. 3.9. Predmetová a obrazová rovina

Súčasne sme použili predstavu, že optická sústava je obklopená prostredím s indexom lomu $n_1 = n_2 = 1$. Ak teda sú a, b vybrané tak, že pravý horný prvok matice M_{ab} je rovný nule, bude platiť :

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f_2}, \tag{3.60}$$

alebo

$$z_1 \cdot z_2 = -f_2^2 . \tag{3.61}$$

Potom vieme, že $y_2 = A \cdot y_1 = (1 - b/f_2) \cdot y_1$. To znamená, že všetky lúče, ktoré vychádzajú z bodu Y, ležiacom na rovine VR $_a$, pod rôznymi uhlami α_1 so súradnicou y_1 budú prechádzať tým istým bodom Y´ ležiacom na rovine VR $_b$. Inými slovami, homocentrický zväzok lúčov (lúče, ktoré prechádzajú jedným bodom, tiež majúce spoločný stred), ktoré vychádzajú z bodu Y, na výstupe z optickej sústavy bude tiež homocentrický a vytvorí v bode Y´ bodový obraz bodu Y. Je zrejmé, že k ľubovoľnému bodu, ktorý leží na rovine VR$_a$ bude existovať združený bod na rovine VR$_b$. Alebo tiež optická sústava zobrazuje rovinu VR$_a$ na rovinu VR$_b$ **s určitým zväčšením (priečnym)**, ktoré môžeme vyjadriť:

$$\delta_y = \frac{y_2}{y_1} = 1 - \frac{b}{f_2} = \frac{b}{a} . \tag{3.62}$$

Poloha združených rovín VR $_a$ a VR $_b$ daná vzťahmi (3.60), (3.61).

Predstavme si ďalej, že rovinu VR $_a$ posunieme o Δa v smere osi z , potom sa združená rovina VR $_b$ posunie v smere osi z o Δb. Toto posunutie Δb je možné považovať za dĺžku zobrazenia Δa v smere optickej osi. Pri veľmi malom posunutí z (3.60) vyplýva, že

$$\frac{\Delta a}{a^2} = \frac{\Delta b}{b^2} \tag{3.63}$$

Potom **pozdĺžným zväčšením** budeme rozumieť veličinu :

$$\delta_z = \frac{\Delta b}{\Delta a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 . \tag{3.64}$$

Keď porovnáme vzťah (3.64) so vzťahom (3.62) vidíme, že platí

$$\delta_z = \delta_y^2 . \tag{3.65}$$

Pozdĺžne zväčšenie je teda rovné kvadrátu priečneho zväčšenia. Preto zobrazenie (predmetu) priestorového útvaru zachováva jeho geometrickú podobnosť len keď $|\delta_y| = 1$. Ako vyplýva z (3.60) takéto zobrazenie môžeme získať, keď $a = -b$, potom $a = -2f_2$, $b = 2f_2$. Zobrazenie v takomto prípade zodpovedá prevrátenému obrazu, pretože $\delta = -1$.

3.12 Niektoré poznámky k optickým prístrojom

Vráťme sa ešte k matici (3.46). Keď jej prvok C bude rovný nule, z tab. 3.1 vidíme, že ohnisková vzdialenosť optickej sústavy rastie nad všetky medze. Takúto sústavu nazývame **teleskopickou** alebo **afokálnou**. Príkladom takejto sústavy môže byť napr. ďalekohľad, pri ktorom ohniskovú rovinu objektívu stotožňujeme s prednou ohniskovou rovinou okulára. Keď $C = 0$ uhol, ktorý zviera vychádzajúci lúč s optickou osou, t. j. $\alpha_2 = D\,\alpha_1$, nie je závislý od y_1, t. zn., že všetky rovnobežné lúče, ktoré dopadajú na objektív ďalekohľadu na výstupe okuláru budú tiež rovnobežné. Vzťah medzi α_2 a α_1 bude daný ako $\alpha_2 / \alpha_1 = D$. Prvok D matice (3.46) vyjadruje teda uhlové zväčšenie optickej (teleskopickej) sústavy. Inými slovami, uhlové zväčšenie ďalekohľadu vyjadruje koľkokrát sa zväčší zorný uhol predmetu videného cez ďalekohľad voči zornému uhla, pod ktorým vidí tento predmet naše oko bez ďalekohľadu.

Literatúra

[1] BUTIKOV, E. I.: Optika, Vysšaja škola, Moskva l986
[2] FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M.: Feynmanove prednášky z fyziky, (Slovenský preklad), Alfa, Bratislava l980-90
[3] GODŽAJEV, N. M.: Optika, Vysšaja skola, Moskva l977
[4] ILKOVIČ, D.: Fyzika II, Alfa Bratislava, SNTL Praha l970
[5] MATVEJEV, A. N.: Optika, Vysšaja škola, Moskva l985
[6] SAVEĽJEV, I. V.: Kurs obščej fiziki, Tom 2, Nauka, Moskva l982
[7] ŠTRBA, A., MESÁROŠ, V., SENDERÁKOVÁ, D.: Optika s príkladmi I, UK, Bratislava 1996

4. Interferencia vĺn

Pre vlnový stav popísaný vlnovou rovnicou (4.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{4.1}$$

platí princíp superpozície, ktorý hovorí, že ak sú funkcie $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t})$ a $\mathrm{g}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t})$ riešením vlnovej rovnice (4.1), je riešením i ich súčet $\mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) + \mathrm{g}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t})$. Platnosť tohto tvrdenia vyplýva z linearity vlnovej rovnice a môžeme sa o nej presvedčiť bezprostredným dosadením.

Pri voľnej formulácii môžeme povedať, že z princípu superpozície plynie, že vlny sa prostredím šíria nezávisle od prítomnosti či neprítomnosti iných vĺn. Napriek tomu „vlnové pole“ vytvorené jednotlivými vlnami sa môže drasticky líšiť od vlnového poľa vytvoreného tými istými vlnami keď sa prostredím šíria súčasne, a to i vtedy, ak sa jedná o vlny rovnakého charakteru. Pravdepodobne preto sa takémuto efektu hovorí „interferencia“ (čo znamená „zasahovanie“ alebo „vmešovanie sa“) vĺn a takto sa tento jav menuje napriek tomu, že je dôsledkom nezávislosti šírenia sa vĺn. Ako sa interferencia, alebo v slovenčine „skladanie“ vĺn prejavuje najlepšie uvidíme na konkrétnych príkladoch.

4.1 Interferencia jednorozmerných harmonických vĺn (interferencia „lúčov“)

Nech sa v jednorozmernom prostredí šíri vlna vytvorená bodovým zdrojom v mieste so súradnicou x. Popis vlnového stavu súvisiaceho s touto vlnou je daný vzťahmi:

$$u_1 = u_0 \sin(\omega t - k \cdot (x - x_1)) \qquad \text{pre} \quad x \le x_1 \quad \text{a}$$
$$u_1 = u_0 \sin(\omega t + k \cdot (x - x_1)) \qquad \text{pre} \quad x > x_1 .$$

Zároveň nech sa v mieste x_2 generuje vlna rovnakej frekvencie a amplitúdy, t. j. vytvorí sa vlna, ktorá je popísaná vzťahmi:

$$u_2 = u_0 \sin(\omega t - k \cdot (x - x_2)) \qquad \text{pre} \quad x \le x_2 \quad \text{a}$$
$$u_2 = u_0 \sin(\omega t + k \cdot (x - x_2)) \qquad \text{pre} \quad x > x_2 .$$

Všimnime si závislosť výchylky od času a súradnice v oblasti v ktorej je $x > x_1$ a súčasne $x > x_2$. Sčítaním výchyliek určených predchádzajúcimi vzťahmi dostávame:

$$u = u_1 + u_2 = 2u_0 \cdot \cos(k \cdot (\mathrm{x}_1 - x_2)/2) \cdot \sin(\omega t - k \cdot (x - (\mathrm{x}_1 + x_2)/2)) .$$

Ako vidíme, v tejto oblasti je súčet pôvodných vĺn postupujúcich v smere osi x opäť vlna postupujúca v smere osi x. Jej amplitúda však závisí od vzdialenosti zdrojov, t. j. od rozdielu súradníc x_1- x_2 . Keď je vzdialenosť týchto zdrojov rovná nepárnemu násobku polvĺn, je amplitúda výslednej vlny rovná nule (všeobecnejšie - rozdielu amplitúd pôvodných vĺn). Pri vzdialenosti zdrojov rovnej násobku vlnových dĺžok je amplitúda výslednej vlny rovná súčtu amplitúd interferujúcich vĺn. V oblasti $x_1 < x < x_2$, t. j. v oblasti v ktorej sa pôvodné vlny šíria proti sebe, pre ich súčet pomocou vzťahov elementárnej trigonometrie dostaneme výraz:

$$u = 2u_0 \cdot \cos(k \cdot (x - (\mathrm{x}_1 + x_2)/2) \cdot \sin(\omega t - k \cdot (x + (\mathrm{x}_1 - x_2)/2)) \ .$$

Ako vidíme, v tejto oblasti sa mení charakter riešenia. Zatiaľ čo v oblasti so súhlasným smerom šírenia sa vĺn, miesto v ktorom je výchylka maximálna sa v čase mení (premiestňuje sa rýchlosťou šírenia sa vĺn), v oblasti s protichodným smerom šírenia sa pôvodných vĺn sa poloha maxima nemení ("stojatá vlna").

Zvláštnym prípadom interferencie vĺn je interferencia vĺn s odlišnými frekvenciami (rázy). V ľubovoľnom bode prostredia, ktorým sa šíria vlny s odlišnými frekvenciami, t. j.

$$u_1 = u_0 \sin(\omega_1 t - k \cdot (x - x_1))$$

a

$$u_2 = u_0 \sin(\omega_2 t + k \cdot (x - x_1)) \, ,$$

môžeme pre ich súčet napísať:

$$u = 2u_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t + k \cdot (x - (\mathrm{x}_1 + x_2)/2) \cdot \sin(\omega t - k \cdot (x + (\mathrm{x}_1 - x_2)/2) \ , \qquad (4.2)$$

kde :

$$\Omega = (\omega_1 - \omega_2)/2 \quad \text{a} \quad \omega = (\omega_1 + \omega_2)/2 \ .$$

Znamená to, že amplitúda výsledného vlnového stavu sa v čase periodicky mení s frekvenciou rovnou rozdielu frekvencií pôvodných vĺn. Pokiaľ je rozdiel frekvencií uvedených vĺn malý, je možné časovú zmenu amplitúdy pozorovať. Videli by sme, že v istých okamžikoch je amplitúda výslednej vlny dvojnásobná, inokedy menšia. V okamžiku, v ktorom je amplitúda rovná dvojnásobku amplitúdy pôvodných vĺn je hustota energie a tým i intenzita vlnenia v danom mieste štvornásobná (hustota energie a intenzita sú úmerné štvorcu amplitúdy). Zdanlivo je teda porušený zákon zachovania energie. Avšak iba zdanlivo, lebo v iných miestach je práve vtedy amplitúda výsledného vlnenia nulová. V dostatočne dlhom čase sa vystriedajú všetky možné hodnoty amplitúdy, od nulovej do dvojnásobnej hodnoty. Pre strednú hodnotu štvorca amplitúdy dostaneme:

$$\overline{(2u_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t))^2} = \overline{1/2 \cdot (1 + \cos(2 \cdot \Omega \cdot t)) \cdot 4u_0^{\ 2}} = 2 \cdot u_0^{\ 2} \ ,$$

pretože stredná hodnota harmonickej funkcie je rovná nule. Stredná hodnota intenzity v každom mieste je teda rovná súčtu intenzít pôvodných vĺn.

Často sa stretávame - menovite u optických zdrojov - s tým, že zdroj je síce možné považovať za „monochromatický“, t. j. taký, ktorý vyžaruje harmonickú vlnu s konštantnou frekvenciou, ale fázový člen δ_1 generovaného signálu sa v čase náhodile mení. Zapíšme to:

$$u_1 = u_0 \sin(\omega t - k \cdot x - \delta_1)\,.$$

Nech takáto vlna interferuje s inou vlnou rovnakého charakteru:

$$u_2 = u_0 \sin(\omega t - k \cdot x - \delta_2)\,,$$

pre výsledný stav môžeme napísať:

$$u = 2u_0 \cdot \cos((\delta_1 - \delta_2)/2) \cdot \sin(\omega t - k \cdot x + (\delta_1 + \delta_2)/2)\,.$$

Ako je vidieť, ak náhodné fázové členy δ_1 a δ_2 nadobúdajú hodnoty z dostatočne veľkého intervalu (väčšieho ako 2π), bude sa, v závislosti od okamžitého fázového rozdielu amplitúda súčtu vĺn meniť od nuly, až do maximálnej hodnoty, ktorá sa dosiahne vtedy, keď funkcia kosínus v predchádzajúcom vzťahu je rovná jednotke. Výsledok je teda analogický ako pri rázoch, i keď rozdiel fáz nie je spôsobený odlišnou frekvenciou, ale náhodnými zmenami fázy. Ak sa fázové rozdiely vyskytujú rovnomerne v celom intervale 2π, bude podobne ako pri rázoch, stredná hodnota intenzity prislúchajúca výslednému vlnovému stavu rovná súčtu intenzít interferujúcich vĺn. Tak to je pri interferencii vĺn pochádzajúcich od tzv. „nekoherentných“ zdrojov. A to rovnako v prípade akustických alebo elektromagnetických vĺn. Rozdiel je v tom, že u svetelných vĺn sa intenzita v interferenčnom poli od rôznych zdrojov mení tak rýchlo, že ju pri použití bežných (nekoherentných) zdrojov svetla nevieme pozorovať. V dôsledku toho to vyzerá tak, ako by k interferencii vôbec nedochádzalo. Pri akustických, prípadne elektromagnetických rádiových vlnách (pri nižších frekvenciách) je možné interferenciu pozorovať i u nekoherentných zdrojov, pretože zmeny fázy sa odohrávajú dostatočne pomaly na to, aby sme im zodpovedajúce zmeny amplitúdy mohli sledovať. (V poslednej dobe vyvinuté lasery najvyššej generácie majú takú vysokú „stabilitu“, že pomocou veľmi rýchlych detektorov sa podarilo evidovať i interferenciu svetla generovaného odlišnými zdrojmi.)

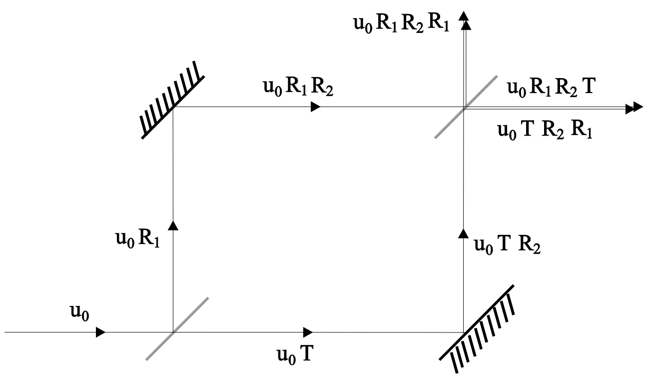
4.2 Interferometre

Pri vyšetrovaní interferencie mechanických, alebo elektromagnetických vĺn z rádiofrekvenčnej oblasti sa nestretávame s väčšími ťažkosťami. Je tomu tak preto, že frekvencie týchto vĺn sú pomerne malé, takže vlnové dĺžky sú oveľa väčšie ako nekontrolovateľné zmeny polohy prvkov upravujúcich chod interferujúcich lúčov spôsobené otrasmi zariadenia a podobne, takže zmeny fázy interferujúcich vĺn spôsobené nekontrolovateľnými vplyvmi iba nepodstatne ovplyvňujú amplitúdu výsledného signálu. Navyše sú zdroje týchto vĺn spravidla ovládané elektronickými generátormi, takže nie sú ťažkosti s kontrolou fázy a frekvencie jednotlivých zdrojov.

Pri vyšetrovaní interferencie optických (svetelných) vĺn je situácia opačná - vlnové dĺžky sú pomerne malé (zlomky μm), pretože frekvencie sú poriadku 10^{15} Hz. Navyše ich frekvencia je spravidla kontrolovateľná iba v rozsahu niekoľko málo platných miest, takže pri interferencii vĺn vytvorených nezávislými zdrojmi vždy dochádza k rázom vysokej frekvencie. Z toho dôvodu sa pri interferencii optických vĺn interferujúce vlny prakticky vždy odvodzujú od toho istého zdroja, t. j. prakticky vždy ide o „koherentné“ (t. j. „spoluvytvorené“) vlny. V takom prípade je frekvencia oboch vĺn rovnaká a ich fázový rozdiel (pri stabilnom rozdiele ich optických dráh) je stály. Je tomu skutočne tak vtedy, ak rozdiel vzdialeností, ktorými prešli interferujúce vlny od zdroja po miesto interferencie nie je príliš odlišný. Požiadavka malého rozdielu optických dráh súvisí s tým, že fáza a prípadne i frekvencia zdroja sa môžu v čase meniť, takže i keď sú interferujúce vlny odvodené od toho istého zdroja, máme do činenia s vlnami generovanými v okamžikoch s výrazným časovým odstupom a rozdiel ich fáz môže byť náhodilý. Inými slovami fáza vlny vytvorenej zdrojom v priebehu príliš dlhého intervalu sa nemení podľa vzťahu $\varphi = \omega \cdot t$, ale k hodnote ω.t sa pridáva dodatočná, náhodile sa meniaca hodnota.

Mach - Zehnderov interferometer

pozostáva z dvoch plne odrážajúcich zrkadiel a dvoch čiastočne reflektujúcich polopriepustných) zrkadiel, deliacich svetelný lúč na dva, približne rovnako intenzívne lúče (obr. 4.1). Svetelný zväzok dopadajúci na vstupné polopriepustné zrkadlo sa delí do dvoch ramien, v ktorých sa odráža na plne reflektujúcich zrkadlách. Potom oba zväzky dopadajú na výstupné polopriepustné zrkadlo. Tým sa oba oddelené zväzky spoja a vytvoria dve dvojice interferujúcich lúčov. U jednej z týchto dvojíc oba lúče majú „rovnakú históriu“, t. j. pri prechode interferometrom oba lúče absolvujú rovnaké prechody a odrazy i keď v inom poradí (samozrejme za predpokladu, že koeficienty odrazu R_2 oboch plne reflektujúcich a koeficienty prestupu T a odrazu R_1 oboch polopriepustných zrkadiel sú tiež rovnaké). Lúče druhej dvojice majú odlišnú históriu.



Obr. 4.1. Schéma Mach-Zehnderovho interferometra

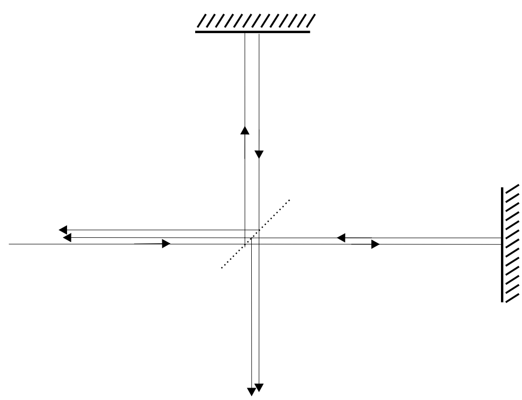
Všimnime si zatiaľ dvojicu s rovnakou históriou. Ak sú zrkadlá nastavené tak, že optické dráhy v oboch vetvách sú rovnaké, po prechode interferometrom musia mať oba lúče rovnakú fázu (pretože sú koherentné), takže vytvoria signál, ktorého amplitúda je súčtom amplitúdy interferujúcich lúčov. Keby sa však zmenil napríklad index lomu v jednom ramene, zhoda fáz interferujúcich lúčov by sa narušila a výsledná amplitúda by bola rovná $2u_0.T.R_1.R_2.\cos(\phi)$, kde ϕ je vyvolaný rozdiel fáz. Pri rozdieli fáz rovnom $\pi/2$ by tak došlo k odčítaniu ich amplitúd (minimum intenzity interferujúcich zväzkov).

Intenzita výstupného zväzku je úmerná štvorcu amplitúdy, t. j. v situácii, keď sú optické dráhy oboch ramien rovnaké, je určená výrazom $(2u_0 R_1 \cdot R_2 \cdot T)^2$. Ak sú zrkadlá bezstratové a ak polopriepustné zrkadlo delí dopadajúci lúč na dva rovnako intenzívne lúče (t. j. ak platí $R_2 = 1$ a $R_1 = T = 1/\sqrt{2}$), tak výsledná intenzita je rovná intenzite vstupujúceho zväzku. To by ale bol rozpor so zákonom zachovania energie, pretože mimo uvažovaného zväzku z interferometra vystupuje ešte zväzok s lúčmi s „odlišnou“ históriou. Pokiaľ je splnený uvedený predpoklad o veľkostiach koeficientov odrazu a prechodu, amplitúdy lúčov v tomto druhom zväzku sú také isté ako v prvom zväzku. Energia vytekajúca z interferometra prostredníctvom tohto zväzku je tak vlastne „navyše“. Platnosť zákona zachovania energie môže ešte „zachrániť“ to, že rozdiel fáz lúčov v druhom zväzku sa líši o $\pi / 2$ od rozdielu fáz lúčov prvého zväzku. Takto by v jednom zväzku došlo k maximu interferencie práve vtedy, keď je intenzita druhého zväzku nulová a naopak. Keď si všimneme vyjadrenie amplitúd jednotlivých zväzkov uvedených na obr.4.1, môžeme tvrdiť, že pri odraze na polopriepustnom zrkadle musí dôjsť k fázovému posunutiu odrazeného lúča voči lúču prechádzajúcemu o hodnotu $\pi/4$ (pri dvojnásobnom odraze o $\pi/2$). Vďaka tomuto fázovému posunutiu je súčet intenzít oboch vystupujúcich zväzkov rovný intenzite lúča vstupujúceho do interferometra.

Neviem ako na vás, ale na mňa získaný výsledok pôsobí fascinujúco - napriek tomu, že sme nič nepovedali o tom aký je mechanizmus odrazu a prechodu svetla cez polopriepustné zrkadlo, pomocou takej jednoduchej úvahy sme sa dozvedeli, ako sa musí zmeniť vzájomná fáza vlny odrazenej a prešlej cez polopriepustné zrkadlo!

Michelsonov interferometer

pozostáva z dvoch zrkadiel s koeficientom odrazu blízkym jednotke a z jedného polopriepustného zrkadla, ktorým sa delí optický zväzok na dva približne rovnako intenzívne lúče. Principiálna schéma Michelsonovho inerferometra je uvedená na obr. 4.2. Výhodou tohto interferometra je, že sa zmenou polohy jedného zo zrkadiel dá jednoducho meniť rozdiel dráh interferujúcich lúčov. Veľkosť tohto rozdielu však spravidla nesmie byť



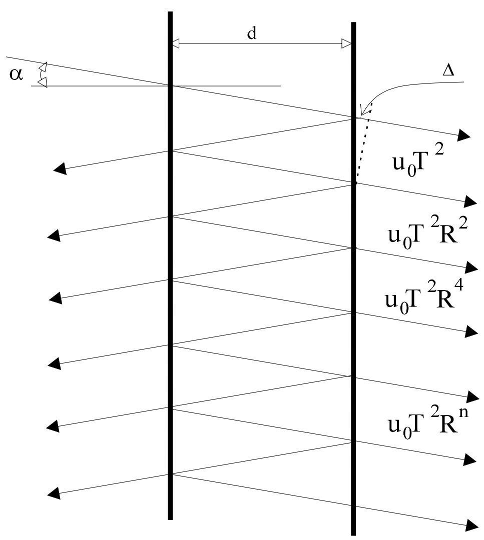
Obr. 4.2. Schéma Michelsonovho interferometra

príliš veľká. (Nesmie byť väčšia, ako „dĺžka koherencie“ použitého svetelného zdroja.) Ako sme uviedli na začiatku tohto paragrafu, pri veľkom rozdiele dráh sa stratí stálosť fázového rozdielu interferujúcich lúčov, pretože sú odvodené od primárnej vlny vygenerovanej v príliš odlišných okamžikoch jej skutočného vyžiarenia. Vďaka moderným zdrojom monochromatického svetla (laserom) môže byť (v špeciálnych prípadoch) rozdiel dráh pri ktorom dochádza k interferencii s dostatočným kontrastom (s dostatočným pomerom intenzity v maxime a v minime interferencie) i niekoľko metrov. Pri laseroch horšej kvality táto „dĺžka koherencie“ dosahuje iba niekoľko centimetrov. Aj to je však pri porovnaní s klasickými zdrojmi pomerne veľká „dĺžka koherencie“ a vďaka nej je možné využiť interferenciu svetla na mnohé praktické ciele.

Oba uvedené interferometre patria k interferometrom, v ktorých sa na výstupe skladajú dve vlny vytvorené z vlny, ktorá bola privedená na vstup interferometra. V ďalšom odstavci bude popisovaný Fabryho-Perotov interferometer, ktorý sa principiálne líši od predchádzajúcich práve tým, že z neho vystupujú nie dve, ale celý súbor vĺn s navzájom posunutými fázami. Môžeme ho považovať za predstaviteľa „mnoholúčových“ interferometrov.

Fabryho - Perotov interferometer

pozostáva z dvoch rovnobežných priehľadných dosiek, opatrených reflexnou vrstvou. Koeficient odrazu tejto vrstvy má byť čo najväčší, pritom však priepustnosť tejto vrstvy nesmie byť nulová, ale čo najbližšia k hodnote $\sqrt{(1-R^2)}$, takže sa svetelná energia na zrkadlách nestráca, iba rozdeľuje do prešlej a odrazenej vlny. Takto dochádza k mnohonásobnému odrazu svetelnej vlny šíriacej sa medzi doskami interferometra a pri každom dopade vlny na reflexnú vrstvu časť vlny prejde, takže z interferometra vystupuje súbor mnohých koherentných vĺn. Amplitúdy a fáze týchto vĺn nie sú rovnaké. Pomer amplitúd dvoch nasledujúcich vĺn je daný koeficientom odrazu a rozdiel ich fáz je daný dráhovým rozdielom δ, ktorý závisí od vzdialenosti reflektujúcich dosiek vytvárajúcich interferometer a od uhla α, pod



Obr. 4.3. Chod lúčov vo Fabryho-Perotovom interferometri

ktorým vlny dopadajú na reflektujúce dosky. Pre jednoduchosť predpokladáme, že index lomu prostredia medzi reflektujúcimi rovinami je rovný jednej, podobne ako index lomu mimo interferometra. Keďže úsek na obr. 4. 3 označený ako Δ je rovný 2d.tg(α).sin(α), závislosť dráhového rozdielu od uhla dopadu je:

$$\delta(\alpha) = \frac{2 \cdot d}{\cos(\alpha)} - 2d \cdot \mathrm{tg}(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = 2d \cdot \cos(\alpha) ,$$

d je v tomto vzťahu vzdialenosť reflektujúcich plôch. Ak je koeficient odrazu na povrchu dosiek rovný *R* a koeficient prestupu *T* (pre ktoré zo zákona zachovania energie musí platiť $T^2 \leq 1 - R^2$), vlnový stav vystupujúceho zväzku môžeme vyjadriť súčtom:

$$u = u_0 \cdot T^2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(R^{2n} \cdot \sin\left(\omega t - n \cdot k \cdot 2d \cdot \cos(\alpha)\right) \right),$$

kde N je počet prechodov zväzku interferometrom.

V záujme ľahšieho vyjadrenia tohto súčtu vlnový stav jednotlivých parciálnych vĺn vyjadrime v komplexnom tvare

$$u = u_0 \cdot T^2 \cdot R^{2n} \cdot \exp(j \cdot (\omega \cdot t - n \cdot k \cdot 2 \cdot d \cdot \cos(\alpha))) \quad .$$

Súčet $\sum u_n$ je súčtom geometrickej postupnosti s kvocientom $R^2 \cdot \exp(-2kd \cos(\alpha))$. Súčet N členov tejto postupnosti je rovný:

$$u = \frac{u_0 T^2 \cdot (1 - R^{2N} \exp(-j \cdot N \cdot 2k \cdot d \cdot \cos(\alpha))}{1 - R^2 \cdot \exp(-j \cdot 2k \cdot d \cdot \cos(\alpha))} \cdot \exp(j\omega t) . \tag{4.3}$$

Štvorec amplitúdy vĺn vyjadrených komplexným číslom u sa určí ako súčin výrazu u s komplexne združeným výrazom u^* . Pomocou elementárnych úprav súčinu u $.u^*$, ako i s použitím toho, že cos(α) = 1 - 2.sin²(α/2), pre intenzitu zväzku vystupujúceho z interferometra dostaneme výraz:

$$I \cong T^4 \cdot \frac{(1 - R^{2N})^2 + 4R^{2N} \cdot \sin^2(2N \cdot \pi \cdot d \cdot \cos(\alpha)/\lambda)}{(1 - R^2)^2 + 4R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot d \cdot \cos(\alpha)/\lambda)} \cdot I_o \quad . \tag{4.3'}$$

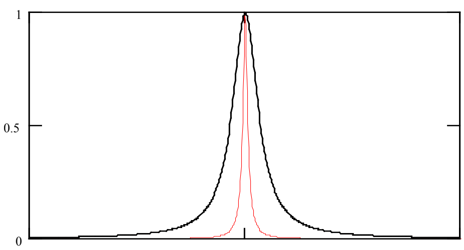
Keď koeficient odrazu nie je dostatočne blízky jednotke (alebo keď sú hrúbka interferometra a uhol α dostatočne malé, takže sa lúč pri mnohonásobnom prechode interferometrom iba nepodstatne presúva pozdĺž jeho reflektujúcich plôch a v dôsledku toho je počet interferujúcich lúčov veľmi veľký), je amplitúda lúčov s vysokým n zanedbateľne malá voči amplitúde lúčov vytvorených pri prvých prechodoch interferometrom. Možno potom vo vzťahu (4.3) pre výpočet intenzity zanedbať členy obsahujúce výraz R^{2N}. (Dostaneme tak výraz, ktorý zodpovedá nekonečnému súčtu príslušnej geometrickej postupnosti.) Ak navyše predpokladáme, že cos(α) je rovný jednej, pre priepustnosť interferometra dostaneme:

$$p(\lambda) = \frac{T^4}{(1-R^2)^2 + 4R^2 \cdot \sin^2(2\pi \cdot d/\lambda)} . \tag{4.4}$$

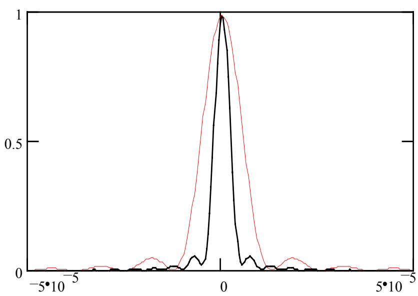
Ako je vidieť z tohoto výrazu, za predpokladu že $T^2 = 1 - R^2$, je maximálna priepustnosť rovná jednej. K maximálnej priepustnosti dôjde vtedy, keď vlnová dĺžka spĺňa vzťah 2d/λ = n , t. j. :

$$\lambda_{\max} = 2d/n \ , \tag{4.5}$$

kde n je celé číslo. Z tohto vzťahu je vidieť, že voľbou vzdialenosti *d* môžeme „nastavovať" vlnovú dĺžku, ktorá má takýmto interferometrom prechádzať. Je treba si ale uvedomiť, že ak je splnená podmienka (4.5) pre isté n pre požadovanú vlnovú dĺžku, pre iné celé čísla je podmienka maximálnej priepustnosti splnená pre iné vlnové dĺžky.



Obr .4.4. Závislosť priepustnosti interferenčného filtra od vlnovej dĺžky (vyjadrenej v μm) pre dve rôzne hodnoty koeficientu odrazu reflexných vrstiev



Obr. 4.5. Závislosť priepustnosti Fabry-Perotovho interferometra od vlnovej dĺžky pre dva rôzne počty interferujúcich vĺn

Závislosť intenzity od vlnovej dĺžky podľa (4.4) je pre rôzne hodnoty koeficientu odrazu *R* uvedená na obr. 4. 4. Ako je vidieť, „šírka" oblasti vlnových dĺžok v ktorej svetlo cez takýto interferometer prechádza silno závisí od koeficientu odrazu *R* . Pre *R* blízke jednotke interferometer „prepúšťa" iba svetlo blízke vlnovým dĺžkam udaným vzťahom (4.5).

Takýto „interferometer", avšak „naladený" na jednu vlnovú dĺžku a spravidla s malou a nepremennou hrúbkou *d* (priestor medzi doskami teraz nie je vyplnený vzduchom, ale pevným prostredím), sa často používa na to, aby sa zo svetelného zväzku tvoreného svetlom s viacerými vlnovými dĺžkami vybralo svetlo požadovanej vlnovej dĺžky. Pri takomto použití spravidla namiesto názvu „interferometer" používame názov „interferenčný spektrálny filter".

Šírka oblasti vlnových dĺžok, ktoré interferenčným filtrom prechádzajú, sa charakterizuje tzv. „pološírkou“ priepustnosti. Pretože spektrálna závislosť priepustnosti takéhoto filtra sa nemení skokom z maximálnej priepustnosti na nulu, pološírka priepustnosti sa stanovuje ako odľahlosť vlnových dĺžok, pri ktorých sa priepustnosť filtra z maximálnej priepustnosti zmení na jej polovicu. Ako je vidieť zo vzťahu (4.4) je tomu tak vtedy, keď vlnová dĺžka $\lambda = \lambda_{max} + \delta_\lambda$ je taká, že:

$$2R \cdot \sin(2\pi \cdot d / (\lambda_{max} \pm \delta_\lambda)) = (1 - R^2) \quad .$$

Keď je $(1 - R^2)$ dostatočne malé, $\sin(\pi.d/\lambda)$ možno nahradiť jeho argumentom, a ten možno napísať v tvare:

$$\frac{2\pi \cdot d}{\lambda_{max} + \delta_\lambda} = \frac{2\pi \cdot d}{\lambda_{max}} \pm \frac{2\pi \cdot d}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\delta_\lambda}{\lambda_{max}} \quad .$$

Keďže $2\pi.d / \lambda = 2.n.\pi$ a $(1 - R^2)$ je približne rovné nule, pre δ_λ / λ dostaneme vzťah:

$$\frac{\delta_\lambda}{\lambda_{max}} = \pm \frac{(1 - R^2)}{4\pi \cdot R} \cdot \frac{\lambda_{max}}{d} \quad .$$

Keď sú hrúbka interferometra a uhol α natoľko veľké, že počet interferujúcich zväzkov je obmedzený geometriou zariadenia (prechádzajúci lúč sa posunul až na okraj interferometra), počet sčítancov v súčte (4.3) je konečný. Ak je koeficient odrazu zrkadiel taký veľký, že i jeho $2N$ - tá mocnina je blízka jednotke, pre priepustnosť interferometra dostaneme:

$$p(\lambda) = T^4 \cdot \frac{R^{2(N-1)} \cdot \sin^2(\cdot N \cdot 2\pi \cdot d \cdot \cos(\alpha) / \lambda)}{\sin^2(2\pi \cdot d \cdot \cos(\alpha) / \lambda)} \quad .$$

Šírka oblastí priepustnosti interferometra je v tomto prípade určená odľahlosťou vlnovej dĺžky, pre ktorú funkcia sinus v čitateli prvýkrát nadobúda nulovú hodnotu pri nenulovej hodnote argumentu v menovateli. Pretože $N.\pi.d.\cos(\alpha)/\lambda_{max} = k.\pi$, kde k je celé číslo, je $N.\pi.d..\cos(\alpha)/(\lambda_{max} - \delta_\lambda) = (k+1).\pi$, z čoho po úprave pre δ_λ dostaneme výraz:

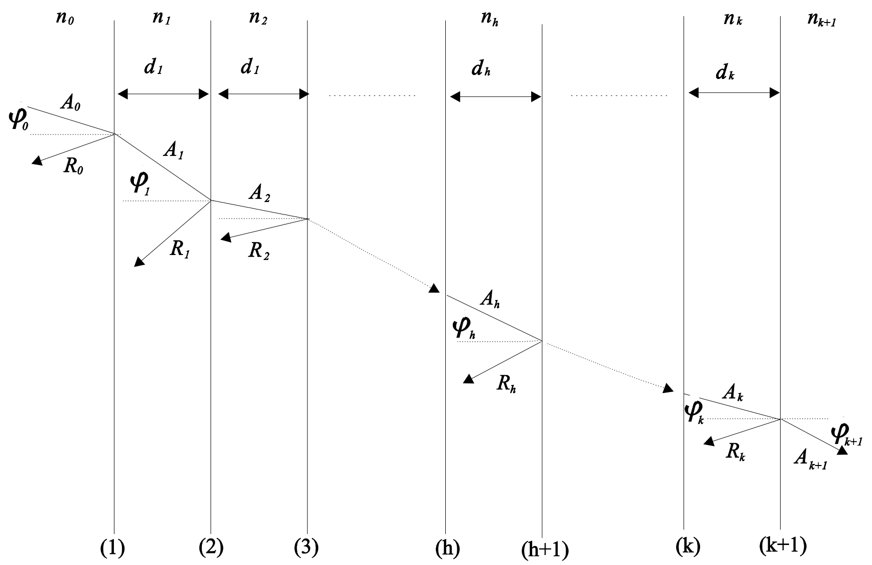
$$\frac{\delta_\lambda}{\lambda_{max}} = \frac{\lambda_{max}}{N} \quad .$$

Ako je vidieť zo vzťahu (4.4), vlnová dĺžka pre ktorú vykazuje interferometer maximálnu priepustnosť závisí, okrem iného, i od smeru ktorým sa vlna v interferometri šíri. Preto, keď na interferometer dopadá svetelný zväzok pozostávajúci z vĺn s blízkymi, no odlišnými vlnovými dĺžkami, pričom smery šírenia sa týchto vĺn ležia v konečne širokom intervale uhlov, vlny odlišných vlnových dĺžok prejdú cez interferometer v odlišných smeroch. Interferometer teda môže smerovo, a tým i priestorovo, „oddeliť“ jednotlivé spektrálne zložky dopadajúceho zväzku. V dôsledku toho Fabry - Perotov interferometer možno používať ako spektrálny analyzátor s vysokou rozlišovacou schopnosťou.

4.3. Maticový popis viacvrstvových interferenčných filtrov

V predchádzajúcej časti boli opísané interferometrické prvky s činiteľom odrazu R blízkym jednotke, ktorá sa spravidla dosahuje pomocou tenkých kovových vrstiev. Analogické prvky, ale s väčšou variabilitou vlastností sa dajú vytvoriť pomocou štruktúr s viacerými tenkými dielektrickými vrstvami. Pretože takéto vrstvy majú v súčasnosti pomerne veľký význam, uvedieme ich základný popis a urobíme tak s využitím maticového vyjadrenia, ktoré je vhodné pre počítačové spracovanie. Môže to byť užitočné nielen pre výsledok, ale i pre samotný postup pri popise, lebo maticový popis je užitočný i pri popise iných sústav (pozri napr. maticový popis sústavy prvkov geometrickej optiky v pred-chádzajúcej kapitole).

Principiálna štruktúra optického mnohovrstvového filtra je uvedená na obr. 4.6.



Obr. 4.6. Principiálna štruktúra dielektrického mnohovrstvového filtra

Na obr.4.6. je použité nasledovné označenie:

k	- počet vrstiev
$d_1...d_k$	- hrúbky vrstiev
$n_1...n_k$	- index lomu vrstiev
n_0	- index lomu vstupného prostredia
n_{k+1}	- index lomu výstupného prostredia
φ_0	- uhol dopadu svetla na prvú vrstvu
φ_{k+1}	- uhol, pod ktorým svetlo z filtra vystupuje
$\varphi_1..\varphi_k$	- uhly, pod ktorými sa svetlo šíri v jednotlivých vrstvách

Keď na takúto štruktúru dopadá rovinná monochromatická vlna, v jednotlivých vrstvách sa mnohonásobnými odrazmi na rozhraniach vrstiev vytvoria rovinné vlny prechádzajúce sústavou v kladnom smere (v smysle, v ktorom prechádza pôvodna dopadajúca vlna) a „odrazené“ vlny, prechádzajúce v opačnom smere. Označme ich ako vlny A_0 , A_1 , ... A_k , A_{k+1} a „odrazené“ vlny ako R_0, R_1, ... R_k ($R_{k+1} = 0$).

Optickú dráhu lúčov $\bar{x}_i$, ktorú prejdú medzi dvoma rozhraniami, možno vyjadriť vzťahom :

$$\bar{x}_i = n_i d_i \cos \varphi_i$$

a fázový rozdiel optických lúčov x_i pri prechode i-tou vrstvou je:

$$x_i = \frac{2\pi}{\lambda} n_i d_i \cos \varphi_i \quad , \tag{4.6}$$

kde λ je vlnová dĺžka prechádzajúceho svetla. Uhly φ_i vyjadrujúce smer šírenia sa svetla v jednotlivých vrstvách sú dané uhlom dopadu φ_0 a Schnellovým zákonom:

$$n_0 . \sin \varphi_0 = n_1 . \sin \varphi_1 = n_2 . \sin \varphi_2 = ... = n_{k+1} . \sin \varphi_{k+1} \ .$$

Preto pre uhol šírenia sa v i-tej vrstve platí:

$$\varphi_i = \arcsin\left(\frac{n_0 . \sin \varphi_0}{n_i} \right), \text{ kde i = 1, ... , k+1 } .$$

Pre určenie optického stavu takejto sústavy je potrebné nájsť amplitúdy (a fázy) všetkých vĺn A_i a R_i . Avšak pre popis „činnosti“ takejto sústavy stačí nájsť koeficient odrazu r na sústave, t. j. nájsť pomer amplitúdy vlny, ktorá sa od sústavy odráža (R_0) a dopadajúcej vlny (A_0): $r = R_0 / A_0$. Pomer intenzít

$$I_I / I_d = (R_0 / A_0)^2 = R = r^2 \ ,$$

kde I_r je intenzita odrazeného a I_d intenzita dopadajúceho svetla sa nazýva **odrazivosť sústavy.** Keďže optický tenkovrstvový filter teoreticky žiadne svetlo neabsorbuje, pre priepustnosť sústavy T platí vzťah $T = 1 - R$.

Vlny vytvorené v jednotlivých vrstvách sú navzájom viazané okrajovými podmienkami. Na všetkých rozhraniach musí byť splnená podmienka rovnosti tangenciálnych zložiek intenzity elektrického poľa a tangenciálnych zložiek indukcie magnetického poľa. Aby sme popis zjednodušili, predpokladajme v ďalšom, že na sústavu tenkých vrstiev z obklopujúceho prostredia dopadá rovinná vlna kolmo na povrch sústavy ($\varphi_0 = 0$) . V dôsledku toho vlny vo všetkých vrtstvách budú kolmé na rozhrania vrstiev. Intenzitu elektrického poľa a indukciu magnetického poľa v mieste (h)-teho rozhrania vyjadrené pomocou funkcií popisujúcich pole v h-tej vrstve označme ako ${}^{(h)}E_h$, resp. ${}^{(h)}B_h$ a intenzitu elektrického poľa a indukciu magnetického poľa v mieste toho istého rozhrania, ale vyjadrenú pomocou funkcií popisujúcich pole v h+1-vej vrstve (napravo od rozhrania), označme ako ${}^{(h)}E_{h+1}$, resp ${}^{(h)}B_{h+1}$. Hraničné podmienky na (h)-tom rozhraní môžeme za uvedených predpokladov vyjadriť jednoduchými vzťahmi:

$$ {}^{(h+1)}E = {}^{(h)}E_h^{(+)} + {}^{(h)}E_h^{(-)} = {}^{(h)}E_{h+1}^{(+)} + {}^{(h)}E_{h+1}^{(-)} \quad , \qquad (4.7\ \mathrm{a}) $$

kde $E^{(+)}$ a $E^{(-)}$ označujú vlny šíriace sa v kladnom smere osi x a v smere opačnom. Pre rovnosť tangenciálnych zložiek vektora indukcie magnetického poľa analogicky môžeme napísať:

$$ {}^{(h+1)}B_h^{(+)} + {}^{(h)}B_h^{(-)} = {}^{(h)}B_{h+1}^{(+)} + {}^{(h)}B_{h+1}^{(-)} \quad . \qquad (4.7\ \mathrm{b}) $$

Ako funkcie A a R popisujúce optický stav môžeme vziať funkcie zhodné s funkcia-mi popisujúcimi elektrické pole vĺn $E_j^{(+)}$ a $E_j^{(-)}$. Hraničné podmienky (4.7 a) a (4.7 b), konkretizované pre prvé rozhranie, môžeme potom vyjadriť :

$$ {}^{(1)}E = {}^{(1)}A_0 + {}^{(1)}R_0 = {}^{(1)}A_1 + {}^{(1)}R_1 $$

a (4.8.1)

$$ {}^{(1)}B = \left({}^{(1)}A_0 - {}^{(1)}R_0\right) \cdot \frac{n_0}{c_0} = \left({}^{(1)}A_1 - {}^{(1)}R_1\right) \cdot \frac{n_1}{c_0} \quad , $$

(c_0 je rýchlosť šírenia sa elektromagnetických vĺn vo vákuu), pretože podľa tretej Maxwellovej rovnice v dielektriku (pozri (1.3)) je indukcia magnetického poľa vlny šíriacej sa v smere osi x rovná $B^{(+)} = E^{(+)}/c$ a $B^{(-)} = -E^{(-)}/c$ (c je rýchlosť šírenia sa elektromagnetických vĺn v danom prostredí). Pre rozhranie (h) a (h+1) analogicky dostaneme:

$$ {}^{(h)}E = {}^{(h)}A_h + {}^{(h)}R_h = {}^{(h)}A_{h-1} + {}^{(h)}R_{h-1} = {}^{(h-1)}A_{h-1}e^{-i\cdot x_h} + {}^{(h-1)}R_{h-1}e^{i\cdot x_h} $$

a (4.8.h)

$$ {}^{(h)}B = \left({}^{(h)}A_h - {}^{(h)}R_h\right)\frac{n_h}{c_0} = \left({}^{(h)}A_{h-1} - {}^{(h)}R_{h-1}\right)\frac{n_{h-1}}{c_0} = \left({}^{(h)}A_{h-1}e^{i\cdot x_h} - {}^{(h)}R_{h-1}e^{-i\cdot x_h}\right)\frac{n_{h-1}}{c_0} \quad , $$

resp.:

$$ {}^{(h+1)}E = {}^{(h+1)}A_{h+1} + {}^{(h+1)}R_{h+1} = {}^{(h+1)}A_h + {}^{(h+1)}R_h = {}^{(h)}A_h \cdot e^{-i\cdot x_h} + {}^{(h)}R_h \cdot e^{i\cdot x_h} $$

a (4.8. h+1)

$$ {}^{(h+1)}B = \left({}^{(h+1)}A_{h+1} - {}^{(h+1)}R_{h+1}\right)\frac{n_{h+1}}{c_0} = \left({}^{(h+1)}A_h - {}^{(h+1)}R_h\right)\frac{n_h}{c_0} = \left({}^{(h)}A_h e^{i\cdot x_h} - {}^{(h)}R_h e^{-i\cdot x_h}\right)\frac{n_h}{c_0} $$

a pre rozhranie (k+1) :

$$^{(k+1)}E = {}^{(k+1)}A_{k+1} = {}^{(k+1)}A_k + {}^{(k+1)}R_k = {}^{(k)}A_k \cdot e^{-i\cdot x_k} + {}^{(k)}R_k \cdot e^{i\cdot x_k}$$

a (4.8.k)

$$^{(k+1)}B = {}^{(k+1)}A_{k+1} \cdot \frac{n_{k+1}}{c_0} = \left({}^{(k+1)}A_k - {}^{(h+1)}R_k\right)\frac{n_k}{c_0} = \left({}^{(h)}A_k \cdot e^{i\cdot x_k} - {}^{(k)}R_k \cdot e^{-i\cdot x_k}\right)\frac{n_K}{c_0},$$

pretože $R_{k+1} = 0$. Sčítaním, resp. odčítaním častí rovníc (4.8.h+1) vyznačených prerušeným rámikom, môžeme vyjadriť hodnoty ${}^{(h)}A_h \cdot e^{-i\cdot x_h}$, resp. ${}^{(h)}R_h \cdot e^{i\cdot x_h}$. Dostaneme tak

$$^{(h)}A_h = \left({}^{(h+1)}E + {}^{(h+1)}B\frac{c_0}{n_{h+1}}\right)\cdot e^{i\cdot x_h}$$

a

$$^{(h)}R_h = \left({}^{(h+1)}E + {}^{(h+1)}B \cdot \frac{c_0}{n_{h+1}}\right)\cdot e^{-i\cdot x_h} \quad .$$

Dosadením týchto hodnôt do rámikom vyznačených častí vzťahov (4.8. h) dostaneme:

$$^{(h)}E = \left(e^{i\cdot x_h} + e^{-i\cdot x_h}\right){}^{(h+1)}E + \left(e^{i\cdot x_h} - e^{-i\cdot x_h}\right)\cdot \frac{1}{n_h}\cdot {}^{(h+1)}Bc_0$$

a (4.9)

$$^{(h)}Bc_0 = \left(e^{i\cdot x_h} - e^{-i\cdot x_h}\right)\cdot n_0 \cdot {}^{(h+1)}E + \left(e^{i\cdot x_h} + e^{-i\cdot x_h}\right){}^{(h+1)}Bc_0$$

Posledné dve rovnice znamenajú, že pole v mieste rozhrania (h) sa dá vyjadriť prostredníctvom lineárnej kombinácie hodnôt poľa v mieste rozhrania (h+1). Koeficienty ktoré pri tom vystupujú sú plne určené parametrami vrstvy h, ktorá leží medzi rozhraniami (h) a (h+1). Matematické súvislosti použité v tomto paragrafe majú tú vlastnosť, že indukcia magnetického poľa B v nich vystupuje vynásobená c_0, alebo ich možno upraviť tak, aby B bolo vynásobené c_0. Vďaka tomu sa dá nasledujúci postup ich úprav trochu zjednodušiť, keď budeme charakterizovať optickú situáciu prostredníctvom veličín E a Bc_0 miesto veličín E a B. Rešpektujúc uvedenú „nelogičnosť“ sa rovnice (4.9) dajú vyjadriť v maticovej forme ako

$$\left\| \begin{matrix} {}^{(h)}E \\ {}^{(h)}Bc_0 \end{matrix} \right\| = \| \quad M_h \| \cdot \left\| \begin{matrix} {}^{(h+1)}E \\ {}^{(h+1)}Bc_0 \end{matrix} \right\| \quad , \qquad (4.10.a)$$

kde $\|M_h\|$ je matica, ktorej prvky sú zhodné s koeficientmi vystupujúcimi v rovniciach (4.9), t. j.:

$$\|M_h\| = \left\| \begin{matrix} \left(e^{i\cdot x_h} + e^{-i\cdot x_h}\right) & \left(e^{i\cdot x_h} - e^{-i\cdot x_h}\right)/n_h \\ \left(e^{i\cdot x_h} - e^{-i\cdot x_h}\right) n_h & \left(e^{i\cdot x_h} + e^{-i\cdot x_h}\right) \end{matrix} \right\| \quad . \qquad (4.10.b)$$

alebo

$$\|M_h\| = \begin{Vmatrix} \cos(x_h) & i\sin(x_h)/n_h \\ i\sin(x_h)n_h & \cos(x_h) \end{Vmatrix}.$$

Ako sme už uviedli prvky tejto matice sú určené iba parametrami h-tej vrstvy. V dôskedku toho hodnota intenzity elektrického poľa a indukcie magnetického poľa v mieste prvého rozhrania (${}^{(1)}E$ a ${}^{(1)}Bc_0$) sa dajú vypočítať pomocou poľa v mieste druhého rozhrania, tie pomocou poľa v nasledujúcom rozhraní, až poľa v mieste posledného rozhrania. V maticovom zápise podľa vzťahov (4.10) tak dostaneme:

$$\begin{Vmatrix} {}^{(1)}E \\ {}^{(1)}Bc_0 \end{Vmatrix} = \|M_1\| . \|M_2\| . \|M_3\| ... \|M_k\| . \begin{Vmatrix} {}^{(k+1)}E \\ {}^{(k+1)}Bc_0 \end{Vmatrix},$$

alebo:

$$\begin{Vmatrix} {}^{(1)}E \\ {}^{(1)}Bc_0 \end{Vmatrix} = \|M\| . \begin{Vmatrix} {}^{(k+1)}E \\ {}^{(k+1)}Bc_0 \end{Vmatrix}, \tag{4.11}$$

kde :

$$\|M\| = \begin{Vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{Vmatrix} = \|M_1\| . \|M_2\| . \|M_3\| ... \|M_k\|. \tag{4.12}$$

Rozpísaním (4.10) s použitím označenia prvkov matice $\|M\|$ podľa (4.12) dostaneme:

$${}^{(1)}E = m_{1,1} \cdot {}^{(k+1)}E + m_{1,2} \cdot {}^{(k+1)}Bc_0$$

$${}^{(1)}Bc_0 = m_{2,1} \cdot {}^{(k+1)}E + m_{2,2} \cdot {}^{(k+1)}Bc_0$$

Keď vyjadríme ${}^{(k+1)}Bc_0$ podľa (4.8.k) ako ${}^{(k+1)}En_{k+1}$, po predelení predchádzajúcich rovníc dostaneme:

$$\frac{{}^{(1)}E}{{}^{(1)}Bc_0} = \frac{m_{1,1} + m_{1,2} \cdot n_{k+1}}{m_{2,1} + m_{2,2} \cdot n_{k+1}}.$$

Predelením rovníc (4.8.1) a použitím definície koeficienta odrazivosti R dostaneme:

$$\frac{{}^{(1)}E}{{}^{(1)}Bc_0} = \frac{1+r}{(1-r)\cdot n_0}$$

Porovnaním pravých strán posledných dvoch rovníc po jednoduchých úpravách dostaneme pre vyjadrenie koeficientu R vzťah :

$$r = \frac{\frac{n_0}{n_{k+1}} m_{11} + n_0 m_{12} - \frac{1}{n_{k+1}} m_{21} - m_{22}}{\frac{n_0}{n_{k+1}} m_{11} + n_0 m_{12} + \frac{1}{n_{k+1}} m_{21} + m_{22}} \tag{4.13}$$

Uvedené vzťahy boli odvodené pre kolmý dopad, takže platia pre polarizované svetlo, ako i pre svetlo prirodzené, lebo vtedy sú obe polarizácie rovnocenné. Avšak pri šikmom dopade sa prejaví rozdiel medzi koeficientmi odrazu jednotlivých polarizácií, takže priebehy koeficienta odrazu a tým i priepustnosti takéhoto interferenčného filtra môžu byť pre rôzne polarizácie odlišné. Prirodzené (nepolarizované) svetlo možno považovať za súčet dvoch zložiek s odlišnými (kolmými) rovinami polarizácie. Pritom zložka, ktorá sa označuje indexom P, má rovinu polarizácie zhodnú s rovinou dopadu a zložka S s rovinou kolmou na rovinu dopadu. Pre intenzitu prirodzeného svetla tak platí vzťah

$$I = \frac{I_p}{2} + \frac{I_s}{2} \quad . \tag{4.14}$$

Pre pomer intenzít odrazeného a dopadajúceho svetla platí

$$\frac{I_r}{I_d} = \frac{I_{rp} + I_{rs}}{I_{dp} + I_{ds}} \, . \tag{4.15}$$

Pre pomer lomeného a dopadajúceho svetla platí obdobne

$$\frac{I_e}{I_d} = \frac{I_{ep} + I_{es}}{I_{dp} + I_{ds}} \, . \tag{4.16}$$

Pre praktické výpočty z predchádzajúcich vzťahov vyplýva:

pre kolmý dopad $I_p = I_s$, a teda

$$R = \left(\frac{R_0}{A_0} \right)^2 , \tag{4.17}$$

pre šikmý dopad

$$R = \frac{\left(\frac{R_{0p}}{A_{0p}} \right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{R_{0s}}{A_{0s}} \right)^2}{2} \, . \tag{4.18}$$

Keďže indexy lomu a hrúbku jednotlivých vrstiev v optickom interferenčnom filtri možno v istých medziach voliť ľubovoľne, existuje veľa rôznych filtrov. Môžu to byť „filtre“, ktoré znižujú odrazivosť optických prvkov v širokom spektrálnom rozsahu (používajú sa napríklad na fotografických objektívoch), alebo naopak, koeficient odrazivosti zvyšujú (slnečné okuliare). Sú známe filtre s vhodnou „pásovou“ závislosťou priepustosti od vlnovej dĺžky, alebo filtre, ktoré majú vysokú odrazivosť v úzkej oblasti spektra a pri ostatných vlnových ĺžkach majú vysokú priepustnosť. Posledne uvedené sú užitočné napríklad pri prenose rôznych správ pomocou odlišných vlnových dĺžok jedným optickým kanálom, pretože umožňujú na vysielacej strane signály nesené rôznymi vlnovými dĺžkami spojiť a na prijímacej strane ich jeden od druhého oddeliť.

Pri návrhu mnohovrstvových filtrov je možné využívať vrstvy s rôznymi indexmi lomu, ako i s rôznymi hrúbkami. Avšak zaujímavé vlastnosti sa dosahujú i s filtrami s rovnakou optickou hrúbkou a dvomi rôznyma druhmi skla. Pre návrh, resp. analýzu filtrov rozmanitých štruktúr je často výhodné použiť predchádzajúci maticový postup pri výpočte koeficienta odrazu, resp. priepustnosti interferenčných filtrov. Ako príklad takéhoto výpočtu uveďme nasledovné štruktúry:

1. Štruktúra HLHL ..... HLH

V nadpise sme použili „H“ ako symbol pre označenie vrstvy s vysokým indexom lomu a „L“ vrstvy s nízkymi indexom lomu. Ďalej predpokladajme, že hrúbka vrstiev filtra je taká, aby platilo:

$$d_H = \frac{\lambda_z}{4n_H \cos\varphi_H} \qquad , d_L = \frac{\lambda_z}{4n_L \cos\varphi_L} , \tag{4.19}$$

kde λ_z je vlnová dĺžka, pre ktorú nastane maximum odrazivosti (základná vlnová dĺžka).

Pomocou uvedeného maticového postpu vypočítaná spektrálna závislosť koeficienta odrazivosti filtra pozostávajúceho z 23 vrstiev je uvedená na obr. 4.7. I bez detailného výpočtu sa dá očakávať, že odrazivosť filtra stúpa s rastúcim počtom vrstiev. Pri veľkom počte vrstiev sa odrazivosť na vlnovej dĺžke λ_z blíži k hodnote 1.

2. Štruktúra HLHL ...... HLLH......LHLH

Pre hrúbky vrstiev platia tie isté vzťahy ako v predchádzajúcom prípade. Vrstva LL, ktorá je umiestnená v strede spôsobuje pri vlnovej dĺžke λ_z zníženie odrazivosti na nulu.

Rozbor pre štruktúru HLHL....LHLH

Ak hodnoty (4.19) dosadíme do výrazu pre dráhový a fázový rozdiel (4.6), dostávame

pre dráhový rozdiel

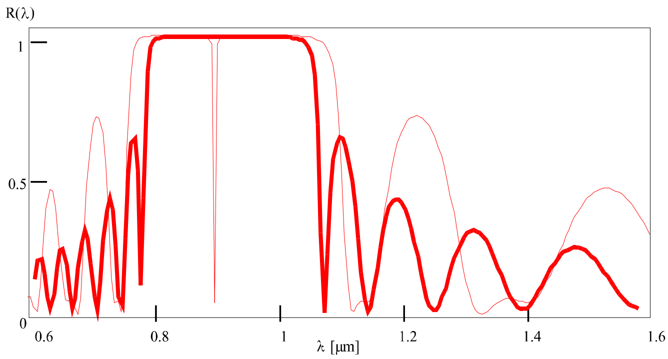
$$\bar{x}_H = 2n_H . d_H \cos\varphi_H = 2n_H . \frac{\lambda_z}{4n_H \cos\varphi_H} . \cos\varphi_H = \frac{\lambda_z}{2} , \tag{4.20}$$

$$\bar{x}_L = 2n_L.d_L \cos\varphi_L = 2n_L.\frac{\lambda_z}{4n_L \cos\varphi_L}.\cos\varphi_L = \frac{\lambda_z}{2}, \tag{4.21}$$

pre fázový rozdiel

$$x_H = \frac{2\pi}{\lambda}.\bar{x}_H = \frac{2\pi}{\lambda_z}.\frac{\lambda_Z}{2} = \pi \tag{4.22}$$

$$x_L = \frac{2\pi}{\lambda}.\bar{x}_L = \frac{2\pi}{\lambda_Z}.\frac{\lambda_Z}{2} = \pi \tag{4.23}$$



Obr. 4.7. Odrazivosť interferenčných filtrov:
a) štruktúra HLHL...HLH (hrubá čiara),
b) štruktúra HL..HLLH..LH (tenká čiara)

Pri fázovom rozdiele $x = \pi$ sa vzťahy podstatne zjednodušia. Ak uvažujeme index lomu vstupného prostredia $n_0 = 1$ (vzduch) a ako výstupné prostredie sklo s indexom lomu n, možno s použitím (4.6) až (4.13) dostať výraz

$$R = \left(\frac{n_H^{k+1} - n_L^{k-1}.n}{n_H^{k+1} + n_L^{k-1}.n} \right)^2, \tag{24}$$

čo možno upraviť do tvaru

$$R = \left(\frac{N^2 - n}{N^2 + n} \right)^2 \quad \text{kde} \quad N = \sqrt{\frac{n_H^{k+1}}{n_L^{k-1}}}. \tag{4.25}$$

Tento výraz sa podobá vzťahu pre maximálnu odrazivosť jednej tenkej vrstvy na skle, ak optické žiarenie dopadá zo vzduchu.

$$R = \left(\frac{n_1 - n}{n_1 + n} \right)^2 , \tag{4.26}$$

kde n je index lomu skla a n_1 index lomu optickej vrstvy.

Zo vzťahov (4.26) a (4.25) teda vyplýva, že pri vlnovej dĺžke λ_Z je odrazivosť štruktúry HLH....HLH rovnaká ako keby bola na skle nanesená jedna vrstva s indexom lomu $N = \sqrt{n_H^{k+1} / n_L^{k-1}}$.

Z tab. 1 vidieť, že index lomu náhradnej vrstvy s indexom lomu N je podstatne väčší ako je index lomu prírodných materiálov a s rastúcim počtom vrstiev ho možno zvyšovať neobmedzene. Takto jednoducho však možno odrazivosť počítať len pre vlnovú dĺžku λ_Z . Pre zistenie spektrálnej závislosti je treba použiť vzťahy (4.6) až (4.13). Pri uvažovaní šikmého dopadu svetla je potrebné modifikovať aj výrazy (4.4)

Tab.1.

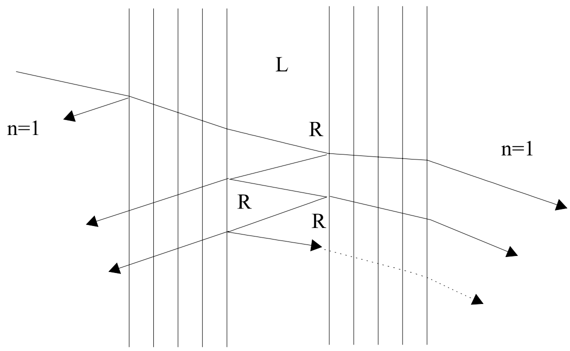
Index lomu náhradnej vrstvy N a odrazivosť R pre rôzne počty vrstiev filtra . Index lomu podložky a indexy lomu vrstiev sú : n_{k+1}=1.51, n_H=2.4, n_L=1.36

k	1	3	7	13
N	2,4	4,24	13,19	127,91
R	0,34	0,71	0,97	0,996

Rozbor pre štruktúru HLH ....HLLH...HLH

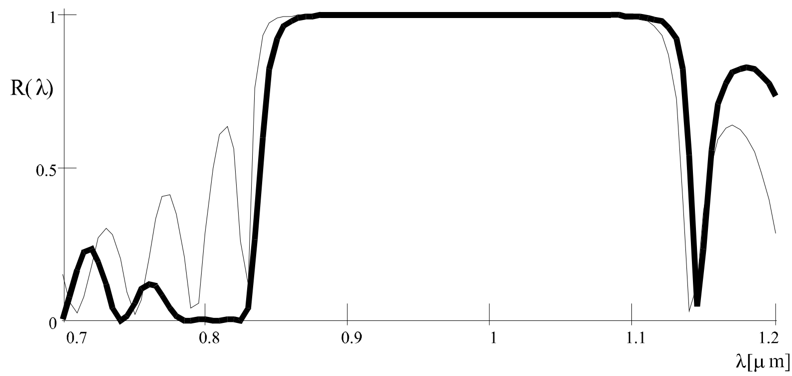
Filter so štruktúrou „vzduch, HL..HLLH..LH, vzduch“ si môžeme predstaviť zložený z dvoch sústav - štruktúry: vzduch, HL..HL, ukončenú prostredím s indexom lomu ako v L-prostredí a štruktúry „prostredie s indexom lomu ako v L, LH..LH, vzduch“, pretože na rozhraní medzi L a L nedochádza k odrazu. Takéto štruktúry majú rovnaký koeficient odrazu, ale s opačnou fázou. Chod svetla medzi takýmito štruktúrami bude analogický chodu medzi dvomi reflexnými vrstvami tak, ako to je pri Fabry-Perrotovom interferometri.

Hodnota amplitúdy výslednej odrazenej vlny bude teda súčtom parciálnych amplitúd vytvorených v dôsledku mnohonásobného odrazu medzi štruktúrami plus vlna daná odrazom na prvej štruktúre. Pretože tento výsledok závisí od fázového posunu vĺn vytvorených odrazom na prvej štruktúre a vĺn vytvorených odrazom na druhej štruktúre, výsledok **môže byť rovný nule** a pri vhodnej fáze koeficienta odrazu, alebo hrúbky strednej vrstvy LL aj bude rovný nule, ako je to vidieť z hodnôt vypočítaných pre HL..LL..H štruktúru, uvedených na obr. 4.8.



Obr. 4.8. K výkladu rozdielu HL...HL filtra a Hl..LL..LH filtra

Na dokreslenie rozborov uvedených v predchádzajúcich odstavcoch uvedieme príklad filtra, ktorý bol navrhnutý pre oddelenie signálov prenášajúcich na dvoch optických vlnách s odlišnými, ale blízkymi vlnovými dĺžkami - 810 a 860 nm. Pre spolahlivé oddelenie týchto signálov je potrebné, aby sa koeficienty odrazu na týchto vlnových dĺžkach líšili približne o dva rády. Takáto pomerne náročná požiadavka dá sa splniť napríklad pomocou dvadsaťtri vrsvového filtra typu HL..HLH s indexmi lomu 2.3 (vrstva TiO_2) a 1.49 (vrstva SiO_2) s hrúbkami zodpovedajúcimi rezonancii pre vlnovú dĺžku 960 nm pre všetky vnútorné vrstvy a hrúbka krajných troch vrstiev bola zmenená tak, aby sa dosiahol požadovaný pomer koeficienta odrazu. Závislosť koeficienta odrazu od vlnovej dĺžky vypočítaná popísaným maticovým postupom je uvedená na obr. 4.9.



Obr. 4.9. Ilustrácia dosažiteľných spektrálnych závislostí koeficienta odrazu viacvrstvého filtra

4.4 Interferencia vĺn v priestore

Interferencia rovinných vĺn

Nech sa prostredím šíria dve koherentné rovinné vlny (teda vlny s rovnakými frekvenciami ω a rovnakými absolútnymi hodnotami vlnových vektorov a konštantným rozdielom ich fáz) a nech tieto vlny s osou *z* zvierajú uhol (+/-) α . Ak sú amplitúdy týchto vĺn rovnaké, vlnový stav možno popísať výrazom:

$$u = u_0 \sin(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + u_0 \sin(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}), \tag{4.27}$$

kde $\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = k_0 \cos(\alpha) \cdot z + k_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot y$ a $\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = k_0 \cos(\alpha) \cdot z - k_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot y$. Po vykonaní sčítania naznačeného vo vzťahu (4.27) s použitím vzorcov elementárnej trigonometrie pre vyjadrenie interferenčného poľa dostaneme výraz:

$$u = 2u_0 \cos(k_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot y) \cdot \sin(\omega t - k_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot z). \tag{4.27'}$$

Interferenčné pole pri interferencii takýchto dvoch vĺn ilustruje obr. 4.10, na ktorom sú vyznačené vlnoplochy interferujúcich vĺn a plochy, na ktorých ležia maximá amplitúdy vytvoreného interferenčného poľa (maximá jeho intenzity). Pretože sme uvažovali rovnaké amplitúdy oboch interferujúcich vĺn, intenzita v miestach kde nadobúda minimálnu hodnotu je rovná nule. Z hodnoty argumentu kosínusového člena vzťahu (4.27') vyplýva, že vzdialenosť dvoch susedných rovín, v ktorých interferenčné pole nadobúda maximálnu hodnotu $2u_0$, je rovná

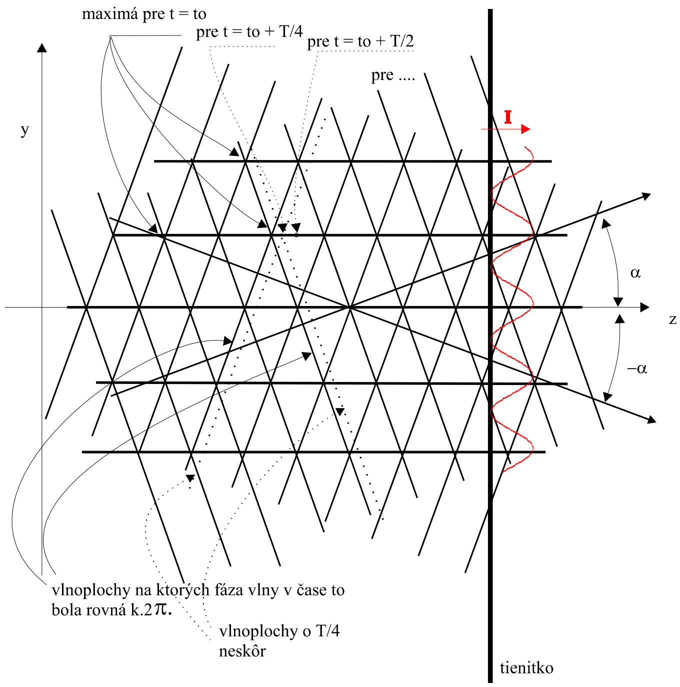
$$d = \frac{\pi}{k \cdot \sin(\alpha)} = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin(\alpha)}. \tag{4.28}$$

Zo vzťahu (4.27.) zároveň vidieť, že roviny, v ktorých má interferenčné pole minimálnu hodnotu, ležia vstrede medzi rovinami s maximálnou hodnotou, takže ich vzdialenosť je rovnaká.

Keď do priestoru interferenčného poľa vložíme vhodný objekt na ktorom sa dopadajúce svetlo (aspoň čiastočne) rozptyľuje[1] uvidíme, že je v rôznych miestach osvetlené rozdielne, v závislosti od amplitúdy interferenčného poľa v zodpovedajúcom

[1] Budeme ho nazývať „**tienitko**" na rozdiel od „**tienidla**", ktorého funkciou je „tieniť", to znamená neprepúšťať svetlo, zatiaľ čo u tienitka je podstatné, aby sa časť svetla rozptýlila, čo umožní vidieť priestorové rozloženie intenzity svetla. I keď sú obe slová odvodené od toho istého slovného základu, u „tienitka" sa často požaduje, aby podstatná časť svetla cez tienitko prešla. Niekedy dokonca bez zmeny smeru šírenia sa.

mieste. V uvažovanom prípade to znamená, že na ňom budeme vidieť „sústavu interferenčných prúžkov“ orientovaných v smere osi x, t. j práve v smere, ktorý na obr. 4.10 nie je vyznačený, pretože je kolmý k rovine nákresu. Rozloženie intenzity osvetlenia na tienitku je rezom priestorového rozloženia intenzity interferenčného poľa.



Obr. 4.10. Poloha maxím intrferenčného poľa dvoch rovinných vĺn

Vzdialenosť týchto interferenčných prúžkov je určená vzdialenosťou rovín, v ktorých ležia maximá interferenčného poľa a uhlom γ, ktorý zviera rovina tienitka so symetrálou vlnových vektorov interferujúcich rovinných vĺn (v uvažovanom prípade s osou z). Ako vyplýva zo vzťahu (4.27) vzdialenosť prúžkov pozorovaných na tienitku je rovná

$$d' = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma)} \quad , \tag{4.28'}$$

takže je rovná vzdialenosti maxím interferenčného poľa vtedy, keď je tienitko kolmé na symetrálu interferujúcich vĺn. Keďže veľkosť vlnovej dĺžky λ je pre optické vlny rádu zlomku mikrometra, je vzdialenosť interferenčných prúžkov spravidla veľmi malá, takže ich voľným okom nie je možné pozorovať, pokiaľ uhol α nie je dostatočne malý. Na to, aby vzdialenosť interferenčných prúžkov bola rádu milimetra, musí byť uhol medzi interferujúcimi vlnami rádu zlomku oblúkovej minúty.

Interferencia guľových vĺn0

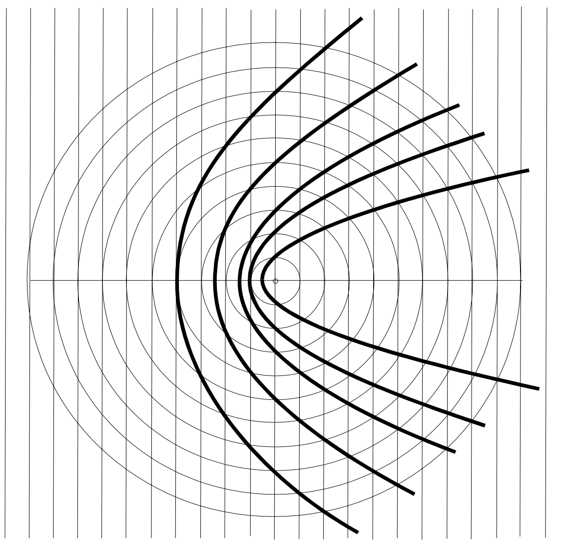
Ako sme videli v prvej kapitole, vlnový stav zodpovedajúci guľovej vlne možno popísať výrazom:

$$u = \frac{u_0}{r} \cdot \sin(\omega t - k \cdot r) \quad ,$$

kde r je absolútna hodnota polohového vektora voči stredu vĺn. Ak sa guľová vlna šíri prostredím súčasne s koherentnou rovinnou vlnou, postupujúcou napríklad v smere osi z, vytvorí sa interferenčné pole, ktorého maximá sú v miestach, v ktorých je fáza oboch vĺn rovnaká, alebo sa líši o celistvý násobok 2π. To znamená, že v miestach, v ktorých je splnená podmienka:

$$k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k \cdot z + n \cdot 2\pi \quad ,$$

bude amplitúda interferenčného poľa maximálna. Ako je ľahko vidieť, takáto podmienka určuje sústavu paraboloidov s osou zhodnou s osou z, s vrcholmi na osi z v bodoch $-n.\lambda/2$ a ohniskami v počiatku, t. j. v mieste, v ktorom je zdroj uvažovanej guľovej vlny.



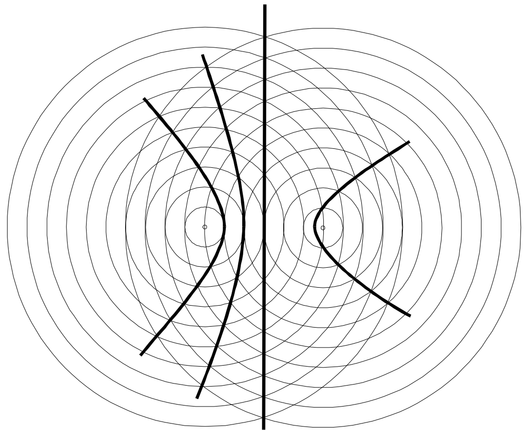
Obr. 4.11. Interferenčné pole rovinnej a guľovej vlny. Hrubo je vyznačených niekoľko plôch, v ktorých je fáza oboch vĺn rovnaká

Tvar interferenčných prúžkov, ktoré by sme mohli pozorovať na rovinnom tienitku vloženom do tohto interferenčného poľa, bude závisieť od polohy tienitka. Ak ho uložíme kolmo k smeru šírenia sa rovinnej vlny, interferenčné prúžky budú mať tvar sústredných kružníc (plochy maxím interferenčno poľa sú rotačné paraboloidy). Pri ostatných polohách tienitka budú mať interferenčné prúžky tvar elíps. Na tienitku rovnobežnom so smerom šírenia sa rovinnej vlny by tieto elipsy boli degenerované na paraboly.

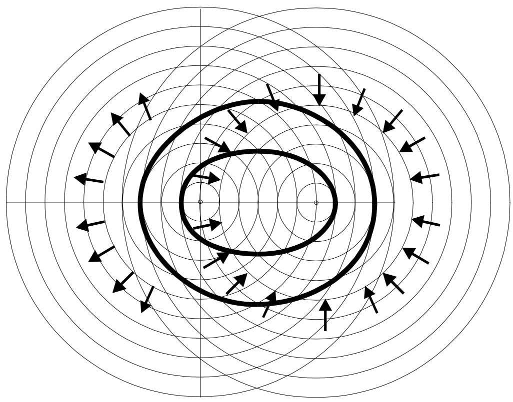
V prípade, že sa jedná o interferenciu dvoch guľových vĺn, povedzme že so stredmi na osi z a so súradnicami (+/-) z_0, podmienka rovnakej fázy oboch vĺn je:

$$k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2} = k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2} + n \cdot 2\pi \quad ,$$

čo môžeme čítať i nasledovne : „rozdiel vzdialeností bodu so súradnicami (x,y,z) od bodu ($0,0,z_0$) a bodu ($0,0,-z_0$) je (pre jednu hodnotu n) rovná konštante ($n.2\pi$ / k). To je ale formulácia zhodná s definíciou rotačných hyperboloidov s ohniskami v stredoch uvažovaných guľových vĺn. Vidíme teda, že plochy na ktorých ležia maximá interferenčného poľa rovinnej a guľovej vlny vytvárajú sústavu rotačných hyperboloidov.



Obr. 4.12. Vlnoplochy dvoch rozbiehavých guľových vĺn a niekoľko plôch, na ktorých ležia maximá interferencie týchto vĺn



Obr. 4.13. Vlnoplochy zbiehavej a rozbiehavej guľovej vlny a niektoré z plôch, na ktorých ležia maximá interferencie týchto vĺn

Ak by sme uvažovali guľové vlny, z ktorých jedna je vlna zbiehavá a druhá rozbiehavá, podmienka zhodnosti fázy by mala tvar:

$$k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2} = -k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2} + n \cdot 2\pi \quad ,$$

čo možno prečítať ako: **súčet** vzdialeností od stredov guľových vĺn sa má rovnať celistvému násobku vlnových dĺžok (2π / k je rovné λ). Maximá interferencie v tomto prípade sú teda rozložené na elipsoidoch s ohniskami v stredoch uvažovaných guľových vĺn. Tvar vlnoplôch interferujúcich vĺn a tvar plôch, na ktorých ležia maximá interferenčného poľa v uvedených prípadoch, sú zakreslené na obrázkoch 4.12. a 4.13.

Literatúra

[1] VAŠÍČEK, A: „Optika tenkých vrstev“, ČSAV, Praha 1956.
[2] KNITL, Z.: Optics of Thin Films, John Willey & Sons, London, New York, Sydney, Toronto 1979.
[3] DADO, M, JANKŮJ, J.: Možnosti využitia interferenčných filtrov pre optický prenosový systém s vlnovým multiplexom, Vedecká konferencia VŠT, Košice, september1988.

5. Vedenie vĺn

5.1 Planárny vlnovod

I keď sa na prvý pohľad môže zdať, že to s predmetom kapitoly nebude súvisieť, vráťme sa na chvíľu k popisu interferencie dvoch rovinných vĺn (obr. 4.10). Ako sme uviedli v predchádzajúcom paragrafe, interferenčné pole dvoch rovinných vĺn s rovnakými amplitúdami je popísané výrazom

$$u(x,y,z,t) = 2u_0 \cos(k_0 \cos(\alpha)\cdot y)\cdot \sin(\omega t - k_0 \sin(\alpha)\cdot z)\,, \tag{5.1}$$

kde k_0 je absolútna hodnota vlnového vektora uvažovaných vĺn, rovná $2\pi/\lambda$ a α je uhol, ktorý zvierajú vlnové vektory uvažovaných vĺn s ich symetrálou (smer šírenia sa týchto vĺn sme vybrali tak, aby ich symetrála bola zhodná s osou z). Z uvedeného výrazu je zrejmé, že v priestore, v ktorom interferujú dve rovinné vlny existujú miesta, v ktorých je optický stav nulový. Tieto miesta ležia na rovinách rovnobežných so symetrálou interferujúcich vĺn[1] a sú medzi sebou vzdialené o

$$\Delta l = \lambda\,/2.\sin(\alpha)\,. \tag{5.2}$$

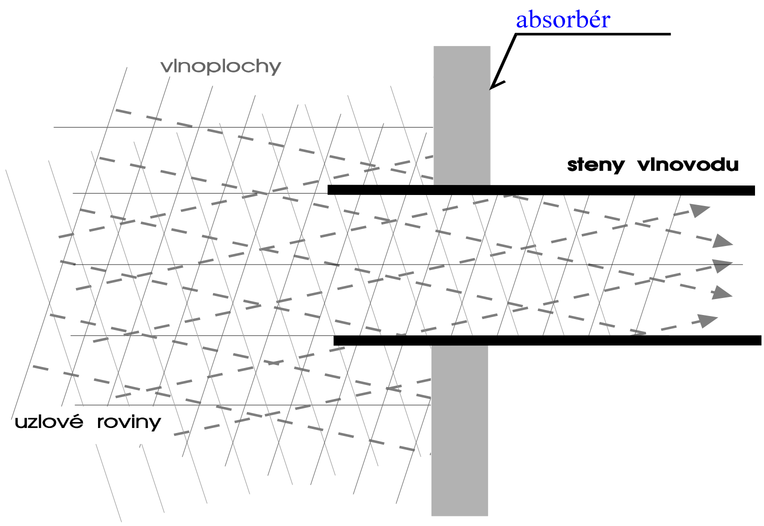
Okolnosť, že existujú roviny, v ktorých je optický stav uvažovaného interferenčného poľa nulový poskytuje zaujímavú možnosť: predstavme si, že do týchto rovín vložíme dokonale vodivé rovinné platne, ktoré tým, že sú dokonale vodivé, zaručujú, že elektrické pole bude mať tam, kde sa platne nachádzajú nulovú intenzitu. Znamená to, že v nich nemôže existovať elektromagnetické pole, takže cez takéto roviny ani nemôže elektromagnetická vlna prechádzať. Avšak podľa vzťahu (5.1) intenzita elektrického poľa i pred vložením takýchto platní v miestach kde sa teraz platne nachádzajú bola nulová. Platne teda neovplyvňujú rozloženie elektromagnetického poľa, ktoré bolo výsledkom interferencie dvoch rovinných vĺn s rovnakými amplitúdami. Pri tom však rozdeľujú priestor interferenčného poľa na oblasti, medzi ktorými neprechádzajú elektromagnetické vlny, a teda medzi týmito oblasťami nedochádza ani k výmene energie.

Stačí teda, aby sme položili do interferenčného poľa dve vodivé platne a celý priestor rozdelíme na tri oblasti, medzi ktorými sa nevymieňa energia. Keby sme v takomto prípade nejakým vhodným spôsobom odstránili elektromagnetické pole v okrajových častiach (napríklad vyplnením týchto častí priestoru absorbujúcim prostredím), pole **medzi platňami** ostane neporušené, to znamená, že bude popísané výrazom (5.1). Zdôraznime, že ak chceme, aby platne neovplyvnili rozloženie vytvoreného interferenčného poľa,

[1] Presná formulácia je: tieto roviny sú kolmé na vektor $(\vec{k}_1 \times \vec{k}_2)\times(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$, kde $\vec{k}_1$ a $\vec{k}_2$ sú vlnové vektory uvažovaných vĺn.

musíme ich uložiť v „uzloch“ tohto interferenčného poľa , t. j. v miestach, kde je amplitúda interferenčného poľa nulová.

Na popisovaný problém sa môžeme dívať i ako na problém popisu vlnového stavu pri okrajových podmienkach určených polohou dokonale vodivých platní (ktoré zaručujú, že tam, kde sa platne nachádzajú, má elektrické pole nulovú intenzitu). Riešenie vlnovej rovnice ale nezávisí od toho, čo bolo skôr, či sme najprv vytvorili pole istej konfigurácie a potom vložili do neho vodivé platne, ktoré zaručujú uvedené okrajové podmienky, alebo nopak, či sme vytvorili podmienky, ktoré zaručujú splnenie okrajových podmienok (v našom prípade, že vlnový stav bude rovný nule v istých rovinách) a potom vybudili pole. Znamená to, že v priestore medzi vhodne uloženými vodivými doskami bude optický stav v oboch prípadoch popísaný vzťahom (5.1), ktorý vznikol ako popis interferenčného poľa vytvoreného interferenciou dvoch rovinných vĺn. Takáto zdanlivá „dvojznačnosť“ interpretácie matematického popisu má jednoduché fyzikálne vysvetlenie: v skutočnosti je pole medzi dvoma dokonale vodivými doskami naozaj interferenciou dvoch vĺn. Vlna, ktorú nejakým vhodným spôsobom vytvoríme medzi doskami, sa pri dopade na vodivé dosky odráža. Ak táto, povedzme že zvonku zavedená vlna, je rovinná, po odraze bude opäť rovinnou vlnou, ale s odlišným vlnovým vektorom. Ak sú dosky rovnobežné, po odraze na druhej doske bude jej smer šírenia sa zhodný so smerom šírenia sa pôvodnej vlny. Takže v priestore medzi doskami sa šíria dve vlny: vlna po párnom a vlna po nepárnom počte odrazov. Pretože sa obe tieto rovinné vlny šíria v tom istom prostredí, interferujú práve tak ako sme to na začiatku popisu predpokladali.



Obr. 5.1. Súvis geometrie planárneho vlnovodu a interferenčného poľa rovinných vĺn

Zo skutočnosti, že vzťah (5.1) popisuje pole medzi dvoma vodivými rovnobežnými doskami, vyplýva, že medzi takýmito doskami sa nemôžu šíriť vlny s ľubovoľným smerom šírenia sa. Inak povedané, že medzi sklonom ich vlnových vektorov (uhlom α), ich vlnovou dĺžkou a vzdialenosťou dosiek musí byť súvis vyplývajúci zo vzťahu (5.2). Prísne vzaté, skutočný vzťah medzi uvedenými veličinami je trochu všeobecnejší. Uvedené dokonale vodivé roviny, bez toho, aby sme ovplyvnili pôvodné interferenčné pole, môžeme uložiť nie len vo vzdialenosti λ /2.sin(α), ale i v n - násobnej vzdielenosti (n je celé číslo), pretože i v takejto vzdialenosti interferenčné pole nadobúda nulovú hodnotu vlnového stavu. Všeobecne teda platí, že vzťah medi vlnovou dĺžkou, vzájomným sklonom rovinných vĺn šíriacich sa medzi dvoma vodivými doskami a vzdialenosťou týchto dosiek je

$$\Delta l = n \cdot \lambda / \left(2 \cdot \sin(\alpha)\right) \ . \tag{5.2'}$$

Dochádzame teda k tomu, že dve rovnobežné, dokonale vodivé rovinné dosky zapríčinia, že elektromagnetická vlna neopúšťa priestor medzi nimi, t. j., že dosky môžu „viesť “ elektromagnetickú vlnu. A to bez ohľadu na to, aké sú podmienky šírenia sa elektromagnetických vĺn mimo priestor vymedzený uvedenými doskami. Hovoríme, že takéto dosky vytvárajú **planárny vlnovod** .

Podľa vzťahu (5.1) je fázová rýchlosť šírenia sa signálu omedzeného na vnútorný priestor trochu odlišná od rýchlosti šírenia sa rovinnej vlny vo voľnom priestore, a to i vtedy, keď priestor „vo vlnovode“ je vyplnený tým istým prostredím ako vo voľnom priestore. Vidieť to z toho, že vo vzťahu (5.1) v argumente výrazu závisiaceho od súradnice z (súradnice v smere ktorej sa signál šíri) je súradnica z vynásobená hodnotou $\mathrm{k}_0 \cdot \cos(\alpha)$, kde α môže nadobúdať hodnoty vyplývajúce zo vzťahu (5.2') .

Elektromagnetická vlna, ktorá sa šíri „planárnym vlnovodom“ v smere osi z nemá pre všetky hodnoty súradnice y rovnakú amplitúdu. Podľa vzťahu (5.1) je rozloženie poľa v závislosti od súradnice y harmonické, t. j. vyjadrené výrazom $\cos(k_y \cdot y)$, kde $k_y = k_0 \cos(\alpha)$. Rozloženie tohto poľa nie je jednoznačne určené vzdialenosťou dosiek Δl, a to ani pri rovnakej frekvencii vĺn, ktoré pole vytvárajú. Rozloženie poľa závisí mimo Δl a frekvencie (t. j vlnovej dĺžky λ_0, ktorú by vlny mali vo voľnom priestore) ešte od čísla n, ktoré nazývame vidovým číslom. Rozloženie poľa prislúchajúce vidovému číslu n sa nazýva **n-tým módom** (alebo vidom). Ako sme už uviedli, tvar rozloženia optického poľa v smere osi y je pre všetky módy popísaný harmonickou funkciou, avšak s rôznymi periódami. Hodnota týchto periód musí byť taká, aby sa medzi dosky „zmestil“ práve celý počet polperiód, pretože v mieste dosák je pole nulové. Poznamenajme, že periódu závislosti amplitúdy poľa od súradnice y nemôžeme nazvať vlnovou dĺžkou, pretože sa nejedná o šírenie sa vĺn v tomto smere. Zaužívalo sa pre ňu označenie „**priestorová perióda**“ a pre jej prevrátenú hodnotu „**priestorová frekvencia**“.

Z technického (telekomunikačného) hľadiska je dôležité, že rýchlosti šírenia sa jednotlivých vidov prislúchajúcich tej istej frekvencii elektromagnetického poľa sú odlišné.

Táto odlišnosť vyplýva z toho, že pri rovnakom Δl a rovnakom λ_0 je uhol α závislý od n , takže fázový člen určený výrazom $k_0 \cos(\alpha)$ závisí od vidového čísla n. Tento jav je dôležitý preto, že pri súčasnom prenose signálu pomocou dvoch vidov s odlišnými fázovými rýchlosťami existujú miesta, v ktorých je fáza elektrického poľa prislúchajúceho odlišným vidom opačná. Môžu preto vznikať „hluché miesta“ v ktorých je registrovaný signál veľmi slabý a to napriek tomu, že amplitúda vĺn prenášajúcich signál je dostatočne veľká.

Pokiaľ je uhol α malý, podľa (5.2) môžeme preň napísať $\alpha = n \cdot \lambda / 2 \cdot \Delta l$, takže pre vzdialenosť Δl v ktorej sa fáza prvého módu líši od fázy druhého módu o π platí :

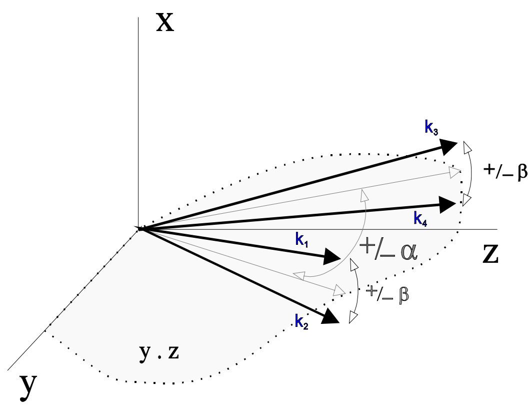
$$k_0(\cos(\lambda/\Delta l) - \cos(2\lambda/\Delta l)) \cdot x = \pi$$

a po vyjadrení funkcie kosínus prvými dvoma členmi Tailorovho radu dostaneme približnú hodnotu

$$x = (\Delta l)^2 / 3\lambda_0 \ .$$

5.2 Obdĺžnikový vlnovod

Všimnime si teraz ako vyzerá interferenčné pole štyroch rovinných koherentných vĺn s vlnovými vektormi odklonenými od osi z o uhly $\pm\alpha$ v rovine $y.z$ a $\pm\beta$ v rovine $x.z$. Ak sú amplitúdy týchto vĺn rovnaké a súčiny vlnových vektorov k_1, k_2, k_3 a k_4, s jednotkovými vektormi v smere súradných osí vyjadríme pomocou vlnového čísla k_0, a kosínov uhlov α a β, môžeme vlnové stavy u_1 až u_4, prislúchajúce týmto štyrom vlnám vyjadriť nasledovne:



Obr. 5.2.a. Ilustrácia k vzniku obdĺžnikového vlnovodu

$$u_1(x,y,z,t) = u_0 \sin(\omega t - k_0(\cos\alpha\cos\beta \cdot x - \sin\alpha\cos\beta \cdot y - \cos\alpha\sin\beta \cdot z))$$

$$u_2(x,y,z,t) = u_0 \sin(\omega t - k_0(\cos\alpha\cos\beta \cdot x + \sin\alpha\cos\beta \cdot y - \cos\alpha\sin\beta \cdot z))$$

$$u_3(x,y,z,t) = u_0 \sin(\omega t - k_0(\cos\alpha\cos\beta \cdot x - \sin\alpha\cos\beta \cdot y + \cos\alpha\sin\beta \cdot z))$$

$$u_4(x,y,z,t) = u_0 \sin(\omega t - k_0(\cos\alpha\cos\beta \cdot x + \sin\alpha\cos\beta \cdot y + \cos\alpha\sin\beta \cdot z)) \ .$$

Pre vlnový stav v interferenčnom poli týchto štyroch vĺn postupne dostávame : po spočítaní výrazov určujúcich vlnové stavy vĺn u_1 a u_2 a u_3 a u_4 dostaneme:

$$u(x,y,z,t) = 2u_0 \cos(k_0 \sin\alpha \cos\beta \cdot y) \cdot \sin(\omega t - k_0 \cos\alpha \sin\beta \cdot z - k_0 \cos\alpha \cos\beta \cdot x) +$$

$$+ 2u_0 \cos(k_0 \sin\alpha \cos\beta \cdot y) \cdot \sin(\omega t + k_0 \cos\alpha \sin\beta \cdot z - k_0 \cos\alpha \cos\beta \cdot x)$$

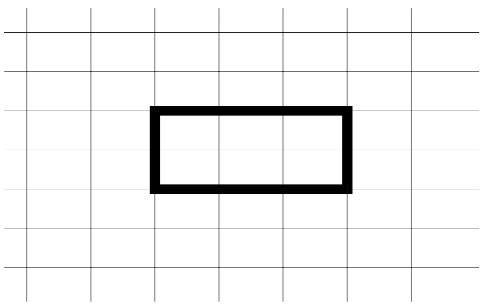
a po spočítaní výrazov na pravej strane poslednej rovnice :

$$u(x,y,z,t) = 4u_0 \cos(k_0 \sin\alpha \cos\beta \cdot y) \cdot \cos(k_0 \cos\alpha \sin\beta \cdot z) \cdot \sin(\omega t - k_0 \cos\alpha \cos\beta \cdot x) \; . \tag{5.3}$$

Vidíme, že podobne ako v prípade interferencie dvoch rovinných vĺn sa interferenciou vĺn s rovnakými amplitúdami vytvoria miesta, v ktorých je amplitúda interferenčného poľa rovná nule. Avšak kým v prípade interferencie dvoch rovinných vĺn bola amplitúda nulová v rovinách vzdialených od seba o $\Delta l = n \cdot \lambda / 2 \sin\alpha$, tak interferenčné pole štyroch vĺn s rovnakou amplitúdou má nulovú hodnotu v rovinách vzdialených od seba o

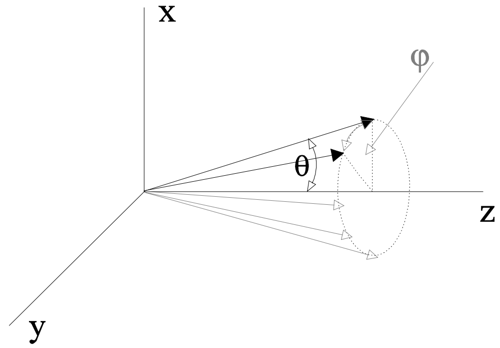
$$\Delta y = \frac{n \cdot \pi}{2\cos\beta \cdot \sin\alpha} \qquad \text{a} \qquad \Delta z = \frac{m \cdot \lambda}{2\cos\alpha \cdot \sin\beta} \; , \tag{5.4}$$

ktoré sú schematicky vyznačené na obr. 5.2.b. Ako je vidieť tieto roviny sú kolmé k osiam y a x a rozdeľujú interferenčné pole na obdĺžnikovité útvary (obdĺžnikové hranoly nekonečnej výšky). Vložením dokonale vodivých platní do týchto rovín by sme mohli podobne ako v predchádzajúcom prípade interferenčné pole rozdeliť na nezávislé oblasti. Takto vymedzená oblasť má podobné vlastnosti ako planárny vlnovod popísaný v predchádzajúcich odstavcoch. Obmedzenie nezávislých oblastí je však teraz v oboch smeroch kolmých k smeru, v ktorom sa vlna šíri. Z toho dôvodu k popisu konkrétneho poľa, ktoré môže v takomto útvare existovať, je potrebné zadať (mimo vzdialeností vodivých rovín a frekvencie vlny, ktorá sa vlnovodom šíri) dve vidové čísla n a m. Ako je vidieť z posledného súčiniteľa výrazu na pravej strane vzťahu (5.3) fázová rýchlosť vĺn v takomto **obdĺžnikovom vlnovode** závisí od uhlov α a β, ktoré sú podľa (5.4) závislé vzdialeností jeho stien v smere osi x, ale i osi y a od modových čísiel m a n.



Obr. 5.2.b. Uzlové roviny interferenčného poľa vĺn podľa obr.5.2.a. Hrubo sú vyznačené steny obdĺžnikového vlnovodu

5.3 Cylindrický vlnovod



Obr. 5.3.a. Ku vzniku cylindrického vlnovodu

Podobne ako sme postupovali pri popise interferenčného poľa štyroch rovinných vĺn je možné postupovať i vtedy, keď sa prostredím šíri súčasne viacero vĺn. K špeciálnemu, ale prakticky zaujímavému výsledku nás privedie vyšetrenie interferenčného poľa vytvoreného nekonečným počtom rovinných vĺn, ktoré sú od zvoleného smeru, napríklad od osi z, odklonené o ten istý uhol ϑ. Aby sme zjednodušili výpočet, vyjadrime jednotlivé interferujúce rovinné vlny v komplexnom tvare, t. j. v tvare:

$$u(x,y,z,t) = \exp(i(\omega t - k_x \cdot x - k_y \cdot y - k_z \cdot z)) \quad .$$

Keď zložky vlnového vektora $\vec{k}$ vyjadríme prostredníctvom uhlov ϑ a φ (obr.5.3.a.), dostaneme:

$$u(x,y,z,t) = u_0 \exp(i(\omega t - k_0 \cos\vartheta \cdot x - k_0 \sin\vartheta \sin\varphi \cdot y - k_0 \sin\vartheta \cos\varphi \cdot z\big) .$$

Interferenčné pole je v tomto prípade dané súčtom nekonečného počtu interferujúcich vĺn, takže je popísané výrazom :

$$u(x,y,z,t) = \int_{2\pi} u_0 \cdot \exp(i(\omega t - k_0 \cos\vartheta \cdot x - k_0 \sin\vartheta \sin\varphi \cdot y - k_0 \sin\vartheta \cos\varphi \cdot z)) d\varphi \ ,$$

z ktorého, po úprave s využitím integrálneho vzťahu pre Besselovu funkciu nultého rádu

$$\mathrm{J}_0(z) = \frac{u_0}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \exp(i \cdot z \cdot \cos\tau) \cdot d\tau \quad ,$$

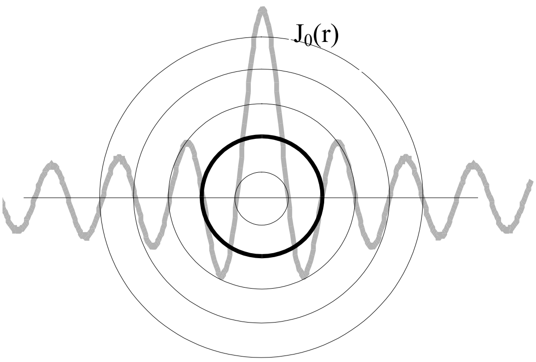
dostaneme pre hodnotu vlnového stavu v rovine $x.z$:

$$u(x,0,z,t) = 2 \cdot \mathrm{J}_0(k_0 \sin\vartheta \cdot x) \cdot \exp(i(\omega t - k_0 \cos\vartheta . z)) \ .$$

Keďže problém je osove (cylindricky) symetrický s osou symetrie zhodnou s osou z, ten istý stav, ktorý má pole v mieste $(0, x)$, má vo všetkých bodoch rovnako vzdialených od osi z (v tom istom čase a pre tú istú súradnicu z), takže rozloženie interferenčného poľa možno vyjadriť i pomocou súradnice r vyjadrujúcej vzdialenosť uvažovaného bodu od osi z , t. j.:

$$u(r,z,t) = 2 \cdot \mathrm{J}_0(k_0 \sin\vartheta \cdot r) \cdot \exp(i(\omega t - k_0 \cos\vartheta . z)) \ . \qquad (5.5)$$

Ako je vidieť z vyjadrenia takéhoto interferenčného poľa, jeho nulové hodnoty ležia v miestach, v ktorých je $k_0 \sin \vartheta \cdot r$ rovné koreňom Besselovej funkcie $J_0(r)$. Znamená to, že plochy, na ktorých má interferenčné pole nulové hodnoty sú v tomto prípade valcové plochy s osou zhodnou s osou z. Úplne analogicky s postupom v predchádzajúcich prípadoch by sme mohli do týchto plôch vložiť dokonale vodivé valcové plochy, ktoré by vymedzili oblasti, medzi ktorými sa nevymieňa energia elektromagnetického poľa - vytvorili by sa tým **cylindrické vlnovody**. Takéto vlnovody sú skutočne realizované a v súčasnosti sa i technicky využívajú.



Obr. 5.3.b . Uzlové plochy interferenčného poľa podľa (5.5). Hrubo je vyznačená uzlová plocha vymedzujúca druhý mód

Zo vzťahu (5.5) je vidieť, že podobne ako v pravouhlom (obdĺžnikovom), alebo planárnom vlnovode i v cylindrickom vlnovode sa môžu vytvoriť rôzne vidy, pretože polomer vodivého valca, ktorý vymedzuje priestor v ktorom je vlna vedená, môže byť rovný ktorémukoľvek z koreňov Besselovej funkcie. Zo vzťahu (5.5) je tiež vidieť, že fázová rýchlosť, podobne ako v predchádzajúcich vlnovodoch, závisí od vidového čísla n, vyjadrujúceho o ktorý koreň Besselovej funkcie ide.

Záverom poznamenajme, že pre vedenie optických vĺn sa nepoužívajú práve také vlnovody, aké sme v predchádzajúcich odstavcoch v základných rysoch popísali. Ohraničenie optického poľa sa v reálnych optických vlnovodoch uskutočňuje nie v dôsledku odrazu na vodivej vrstve, ale prostredníctvom úplného odazu na rozhraní dvoch prostredí s odlišnými indexmi lomu (odlišnými rýchlosťami šírenia sa svetlných vĺn). Hovorí sa im i „**dielektrické vlnovody**“. Používanie dielektrických vlnovodov je výhodné jednak preto, že sa dajú pomerne ľahko realizovať, ale i preto, že pri úplnom odraze na rozhraní dvoch prostredí nedochádza k stratám energie, zatiaľ čo pri odraze na kovových vrtvách sa nikdy nedosiahne stopercentný odraz (nie sú k dispozícii dokonale vodivé materiály), takže dochádza k pomerne vysokým stratám a vedený signál sa zoslabuje. Z toho, že mechanizmus vedenia vlny je odlišný v dielektrických vlnovodoch vyplývajú i odlišnosti v rozložení poľa niektorých vlastností vlnovodov, ale napriek tomu, ich základné vlastnosti sú analogické vlastnostiam ktoré sme mohli popísať pomocou jednoduchej predstavy o vytvorení vlnovodu „vydelením“ vhodnej časti interferenčného poľa vodivými plochami.

Literatúra

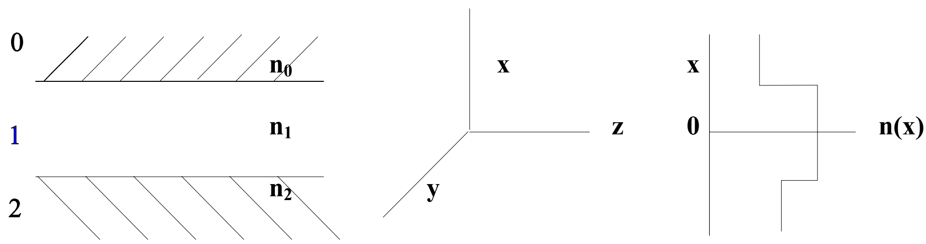
FEYNMAN, R.P., LEIGHTON, R.B., SANDS, M.: Feynmanove prednášky z fyziky / 3 , Slovenský preklad, Alfa, Bratislava 1988.

6. Dielektrické vlnovody

Najjednoduchšia štruktúra pre vedenie optického žiarenia je **planárny vlnovod** so skokovou zmenou indexu lomu. Aj keď sa v praxi nestretávame s ideálnym planárnym vlnovodom, jeho štúdium nám poslúži na pochopenie základných procesov, odohrávajúcich sa v štruktúrach vedúcich optické žiarenie. Na dôvažok, mnoho praktických prípadov sa dá po zjednodušení previesť na prípad optického planárneho vlnovodu. Z dôvodu názornosti budeme planárny vlnovod vyšetrovať ako metódami geometrickej optiky, tak aj metódami vlnovej teórie. Uvidíme, že obidva prístupy vedú k rovnakým výsledkom.

6.1 Planárny vlnovod

Planárny vlnovod je tvorený tenkou, nekonečnou rovinnou doskou hrúbky d s indexom lomu n_1, obklopenou prostrediami s indexmi lomu n_0 a n_2, pričom $n_1 > n_0, n_2$. Planárny vlnovod si teda môžeme predstaviť ako nekonečný sendvič. Veľmi často je prostredím nad doskou vzduch s indexom lomu $n_0 = 1$. Indexy lomu sa môžu meniť iba v smere osi x, v rovine yz ostávajú konštantné. Pre prípad planárneho vlnovodu so skokovou zmenou indexu lomu dochádza k zmene indexu lomu na hraniciach medzi prostrediami 0,1 a 1,2, ako je naznačené na obr. 6.1. Pre demonštráciu šírenia sa svetelného žiarenia vo vlnovode predpokladajme, že v čelnej rovine vlnovodu je umiestnený lineárny zdroj žiarenia, ktorého vlastnosti nezávisia od súradnice y. V reálnom prípade môžeme takýto zdroj simulovať úzkou, nekonečne dlhou štrbinou v nepriepustnej clone. Zdroj nech vyžaruje do všetkých smerov v intervale uhlov $\theta_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$, kde uhol θ_1 odčítavame od osi z. Priestorová Fourierova analýza nám dovoľuje rozložiť svetelné pole zdroja žiarenia na sumu homogénnych rovinných vĺn, pričom každú rovinnú vlnu môžeme reprezentovať lúčom, šíriacim sa pod uhlom θ_1, odčítavaným od osi z.



Obr. 6.1. Schematické znázornenie planárneho vlnovodu a rozloženie indexov lomu

Podmienky úplného odrazu lúča od prostredia 0 - pokrývky vlnovodu, sú splnené, ak uhol šírenia $\theta_1 \leq \theta_{0c}$, pričom

$$\theta_{0c} = \arccos(n_0 / n_1). \tag{6.1}$$

V prípade, že $\theta_1 > \theta_{0c}$, lúč sa na rozhraní čiastočne odráža späť do vlnovodu a časť energie lúča preniká do prostredia nad vlnovodom pod uhlom θ_0, daným v súlade s modifikovaným Snellovým zákonom lomu výrazom

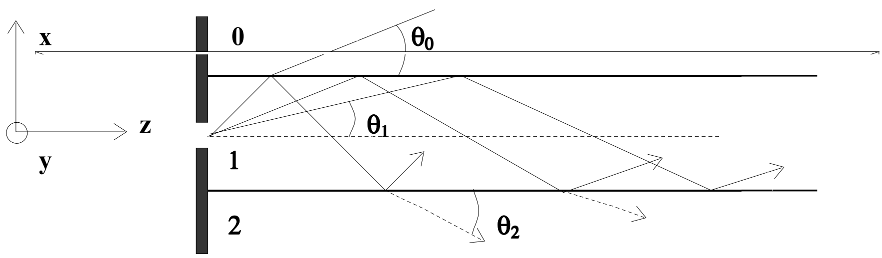
$$n_0 \cos\theta_0 = n_1 \cos\theta_1 \tag{6.2}$$

(v tejto kapitole budeme k popisu lúčov používať uhly pod ktorými dopadajú lúče na rozhranie prostredí a nie uhly odčítavané od kolmice k rozhraniu prostredí, ako bolo zavedené v predchádzajúcich kapitolach, z toho vyplýva modifikácia zákonu lomu).

Odrazený lúč putuje prostredím vlnovodu pod uhlom $-\theta_1$, až kým nedosiahne rozhranie prostredí 1,2. Ak je uhol šírenia $\theta_1 > \theta_{2c}$, kde

$$\theta_{2c} = \arccos(n_2 / n_1), \tag{6.3}$$

lúč sa opäť čiastočne lomí a čiastočne odráža. Pri splnení podmienok $\theta_1 > \theta_{0c}, \theta_{2c}$, dochádza k nekonečnému procesu čiastočných odrazov a lomov na rozhraniach 0,1 a 1,2, takže počiatočná energia rovinnej vlny sa postupne odovzdáva prostrediam obklopujúcim planárny vlnovod. Výsledkom je, že informácia, ktorú vyslal zdroj žiarenia, nedospeje k prijímateľovi na opačnom konci vlnovodu, ale sa nedefinovane rozptýli do okolitého prostredia. Vidíme, že takéto lúče neprenášajú energiu vo vlnovode na väčšie vzdialenosti a voláme ich **žiarivé vidy**. V ďalšom pre jednoduchosť predpokladajme $n_0 < n_2$.



Obr. 6.2. Znázornenie možných prípadov šírenia sa svetelných lúčov vo vlnovode

Úplne ináč sa správajú lúče, ktoré sa šíria pod uhlami $\theta_1 < \theta_{2c}$. Tieto lúče sa úplne odrážajú od obidvoch rozhraní 0,1 a 1,2, takže pôvodná energia lúča je stále koncentrovaná vo vlnovodnej vrstve a je ňou vedená. Vlny predstavované lúčmi s uhlom šírenia $\theta_1 < \theta_{2c}$

preto voláme **vedené vidy**. Zvláštne postavenie má **kritický uhol** šírenia $\theta_1 = \theta_{2c}$. V súlade s (6.3) platí

$$\sin\theta_{2c} = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1}. \tag{6.4}$$

Lúče dopadajúce z prostredia vzduchu (n = 1) na čelo vlnovodu pod uhlom θ vzhľadom na os z, vnikajú do vlnovodu pod uhlom θ_1, daným vzťahom

$$\sin\theta = n_1 \sin\theta_1 . \tag{6.5}$$

Ak $\theta < \theta_c$, kde

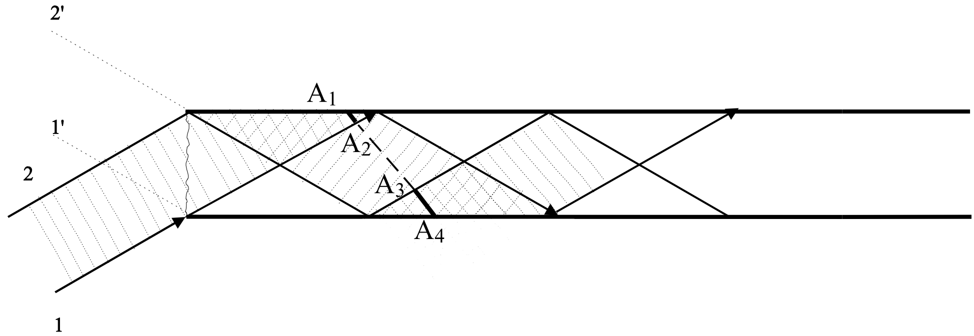
$$\sin\theta_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \tag{6.6}$$

všetky dopadajúce lúče sa pretransformujú na vedené vidy a vlnovod ich vedie bez strát vďaka úplnému odrazu na obidvoch rozhraniach. V optike sa sínus maximálneho uhla dopadu lúča na čelo vlnovodu, ktorý sa ešte vedie vlnovodom, nazýva **numerická apertúra NA**. Takže

$$NA = \sin\theta_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \tag{6.7}$$

6.2 Vidy planárneho vlnovodu

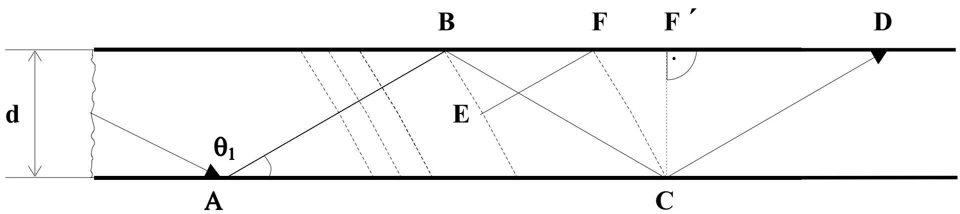
Vyšetrujme, ako sa vo vlnovode šíri zväzok lúčov, reprezentujúci rovinnú vlnu. Do vlnovodu na vstupe vniká pod uhlom θ_1 časť rovinnej vlny, ohraničená krajnými lúčmi 1,2, tak ako je znázornené na obr. 6.3. Ak je splnená podmienka úplného odrazu na obidvoch rozhraniach, vnikajúca vlna sa bude na rozhraniach postupne bez strát odrážať a zväzok lúčov vyplní lomený pás. Z obr. 6.3 vidíme, že zväzok lúčov nevyplní celý priestor vlnovodu. Vyplnenie prázdneho priestoru dostaneme, ak budeme uvažovať aj vlnu, ktorá vniká do vlnovodu pod uhlom - θ_1 (medzi lúčmi 1´, 2´). Pri určitých hodnotách uhlov θ_1 vytvoria časti vĺn 12 a 1 ´2´ periodicky sa opakujúce pole v pozdĺžnom smere - formuje sa vedený vid. Položme si otázku, aké sú podmienky pre vznik vedeného vidu. Vyšetrujme fázu jednotlivých vĺn na úsečke A_1A_4 kolmej k lúčom. Úsečka A_1A_2 je vlnoplochou rovinnej vlny 1,2 po n odrazoch (na obr.6.3 je n = 0), úsečka A_2A_3 je vlnoplochou rovinnej vlny 1´,2´ po n + 1 odrazoch a úsečka A_3A_4 reprezentuje vlnoplochu rovinnej vlny 1,2 po n + 2 odrazoch od rozhraní prostredí, formujúcich planárny vlnovod. Aby dochádzalo k vzniku vedených vidov, musia sa fázy na úsečkách A_1A_2, A_2A_3 a A_3A_4 rovnať, aby čiastkové vlny vytvorili jednu rovinnú vlnu. V opačnom prípade by v okolí bodov A_2 a A_3 dochádzalo k posunu fáz, takže vlnoplocha by nebola rovinná. V konečnom dôsledku by sa v týchto miestach zmenil smer šírenia sa novej vlny, zmenil by sa uhol dopadu na rozhrania prostredí obklopujúcich vlnovod, následkom čoho by dochádzalo k vyžarovaniu energie z vlnovodu do okolia a vlnovodný efekt by sa vytratil. Sformulujme podmienku, pri splnení ktorej sa budú vytvárať vedené vidy.



Obr. 6.3. Schematické zobrazenie šírenia sa rovinnej vlny v planárnom vlnovode

Uvažujme cik-cakovitý chod lúča, ako je znázornené na obr. 6.4. Predpokladajme, že lúč sa úplne odráža od obidvoch rozhraní, takže $\theta_1 < \theta_{2c}$ a jeho dráhu nech predstavuje trajektória ABCD. Čiarkovane, kolmo na chod lúča sú vyznačené roviny konštantnej fázy - vlnoplochy homogénnej rovinnej vlny, takže fáza vlny v bode B pred odrazom a v bode E je rovnaká. Po dvoch nasledujúcich odrazoch v bodoch B a C musí mať vlna v bode C, na základe predošlej úvahy, takú fázu, akú bude mať fázu vlna v bode F, aby sa znovu vytvorila vlnoplocha FC. Pritom musíme zahrnúť vplyv fázového posuvu pri úplných odrazoch v bodoch B a C. Presnejšie povedané, rozdiel fáz pri chode lúča z B do C a pri chode z E do F, musí byť rovný celočíselnému m násobku 2π. Ak označíme fázové posuvy vznikajúce pri úplných vnútorných odrazoch v bodoch B a C ako Φ_{10} a Φ_{12}, uvedený fázový rozdiel môžeme zapísať vzťahom

$$-k_1\left(\overline{BC}-\overline{EF}\right)+\Phi_{10}+\Phi_{12}=-2m\pi \tag{6.8}$$



Obr. 6 .4. Znázornenie chodu lúča v planárnom vlnovode.
Čiarkovane sú vyznačené vlnoplochy rovinnej vlny

Vyjadrením dĺžok $\overline{BC}$ a $\overline{EF}$ pomocou hrúbky vlnovodu d a uhla θ_1 pod ktorým sa lúč šíri, dostávame

$$\overline{BC}=d/\sin\theta_1 \qquad \overline{EF}=\overline{BF}\,.\cos\theta_1$$

$$\overline{BF}=\overline{BF'}-\overline{FF'}=d/tg\theta_1-d\cdot tg\theta_1$$

Dosadením do (6.8) a po úpravách dostaneme

$$-2k_1 d \sin\theta_1 + \Phi_{10} + \Phi_{12} = -2m\pi \ . \tag{6.9}$$

Táto rovnica sa nazýva **charakteristická rovnica** alebo rovnica **vlastných hodnôt vlnovodu**. Riešeniami tejto rovnice sú uhly θ_1, zodpovedajúce vidom vlnovodu. Rovinná vlna, šíriaca sa pod týmto uhlom, vytvára v procese interferencie priamej a odrazenej vlny priestorové rozloženie elektrického a magnetického poľa vidu. Každej hodnote m zodpovedá jedna hodnota θ_1, ktorá je riešením (6.9). Ak si uvedomíme, že pre splnenie podmienky totálneho odrazu od obidvoch rozhraní musí platiť $\theta_1 < \theta_{2c}$, vidíme, že tejto podmienke vyhovuje konečný počet hodnôt θ_1, a teda v dielektrickom vlnovode sa môže šíriť iba konečný počet vedených vidov.

Poznamenajme, že keď $\Phi_{10} + \Phi_{12}$ sa rovná nule (alebo celistvému násobku 2π) charakteristická rovnica (6.9) je zhodná s podmienkou (5.2´) predchádzajúcej kapitoly, popisujúcej vlnovody s vodivými stenami, pretože Δl a α majú ten istý fyzikálny význam ako d a θ. K obmedzeniu počtu vidov vo vlnovode s kovovými stenami, na rozdiel od vlnovodov dielektrických, nedochádza, pretože koeficient odrazu je rovný (blízky) jednotke i pri kolmom dopade. Avšak preto, že koeficient odrazu je v kovových vlnovodoch iba približne rovný jednotke, je v nich výrazne väčší útlm ako vo vlnovodoch dielektrických.

Fázové posuny Φ_{10} a Φ_{12} majú rôzne hodnoty v závislosti od polarizácie rovinnej vlny. Preto sa vidy vlnovodu musia rozlišovať podľa polarizácie rovinnej vlny, z ktorej vznikajú. Ak zložka magnetického poľa leží v rovine dopadu, vidy sa nazývajú H alebo TE (transverzálne elektrické) vidy a v smere šírenia sa vidu existuje nenulová iba zložka magnetického poľa. Vidy, ktoré majú v smere šírenia nenulovú iba zložku elektrického poľa, nazývame E alebo TM (transverzálne magnetické) vidy.

Pri riešení charakteristickej rovnice pre TE vidy musíme v rovnici (6.9) namiesto uhlov Φ_{10} a Φ_{12} dosadiť príslušný fázový posun Φ_e a dostaneme [1]

---

[1] Exaktne odvodíme hodnoty fázových posunov pri úplnom odraze rovinnej vlny na rozhraní prostredí s indexmi lomu n_1 a n_2 ($n_2 < n_1$). Postup založíme na úprave vzťahov (2.79) a (2.80) pre rovnobežnú (TM vidy) a kolmú (TE vidy) zložku rovinnej vlny. Vzťahy (2.79) a (2.80) môžeme zapísať v tvare:

$$E_{ro} = r_m \cdot E_{rd} \qquad E_{ko} = r_e \cdot E_{kd} \ , \tag{*.1}$$

kde koeficienty odrazu (pozor, nie odrazivosť !) r_e, r_m sú komplexné čísla

$$r_m = \frac{n_{21}^2 \cdot \cos\alpha_1 + j \cdot \sqrt{\sin^2\alpha_1 - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cdot \cos\alpha_1 - j \cdot \sqrt{\sin^2\alpha_1 - n_{21}^2}} \qquad r_e = \frac{\cos\alpha_1 + j \cdot \sqrt{\sin^2\alpha_1 - n_{21}^2}}{\cos\alpha_1 - j \cdot \sqrt{\sin^2\alpha_1 - n_{21}^2}} \tag{*.2}$$

a dajú sa teda napísať v tvare

$$r_m = |r_m| \cdot e^{j\phi_m} \qquad r_e = |r_e| \cdot e^{j\phi_e} \tag{*.3}$$

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{jk_{0x}}{k_{1x}}\right)+\mathrm{arctg}\left(\frac{jk_{2x}}{k_{1x}}\right)=dk_1\sin(\theta_1)-m\pi \tag{6.10}$$

kde k_{ix} sú x-ové zložky vlnového vektora v príslušnom prostredí. Veľmi vhodné je vyjadriť rovnicu vlastných hodnôt v tvare bezrozmerných veličín. Za tým účelom vynásobime priečnu zložku vlnového vektora k_{1x} a priečne konštanty tlmenia k_{0x}, k_{2x} hodnotou d - hrúbkou vlnovodu

$$\begin{aligned} U &= k_{1x}d = dk_1\sin\theta_1 \\ V &= jk_{2x}d \\ W &= jk_{0x}d \end{aligned} \tag{6.11.a,b,c}$$

a dosadením dostaneme

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{V}{U}\right)+\mathrm{arctg}\left(\frac{W}{U}\right)=U-m\pi\ . \tag{6.12}$$

Aplikovaním funkcie tangens na obe strany rovnice a použitím vzťahu pre tangens súčtu uhlov rovnicu upravíme do tvaru

$$tgU=\frac{U(V+W)}{U^2-VW} \tag{6.13}$$

Bližším rozborom vzťahov (*.2) zistíme, že sú to podiely komplexne združených čísiel

$$r_{m,e}=\frac{a+j\cdot b}{a-j\cdot b}=\frac{c}{c^*}=\frac{|c|\cdot e^{j\varphi_{m,e}}}{|c|\cdot e^{-j\varphi_{m,e}}}=1\cdot e^{j\cdot 2\varphi_{m,e}} \tag{*.4}$$

Zo (*.4) okamžite plynie $|r_{e,m}|=1$ a $\phi_{m,e}=2\cdot\varphi_{m,e}$. Určme fázové posuvy $\phi_{m,e}$ pre TE a TM polarizáciu:

$$tg\varphi_{m,e}=\frac{\mathrm{Im}\{c\}}{\mathrm{Re}\{c\}}=\frac{b}{a}\quad\text{, takže}\quad tg\varphi_m=\frac{\sqrt{\sin^2\alpha_1-n_{21}^2}}{n_{21}^2\cos\alpha_1}\quad\text{a}\quad tg\varphi_e=\frac{\sqrt{\sin^2\alpha_1-n_{21}^2}}{\cos\alpha_1} \tag{*.5}$$

Na základe (2.7)- (2.10) platí

$n_{21}=k_2/k_1$, $\sin\alpha_1=k_{1x}/k_1$, $\cos\alpha_1=k_{1z}/k_1$, $k_{1z}=k_{2z}=k_z$

dosadením do (*.5) a úpravou dostaneme

$$tg\varphi_m=\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\sqrt{k_{1x}^2-k_2^2}}{k_{1z}}=\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{jk_{2z}}{k_{1z}}\qquad tg\varphi_e=\frac{\sqrt{k_{1x}^2-k_2^2}}{k_{1z}}=\frac{jk_{2z}}{k_{1z}}\ ,$$

takže

$$\phi_m=2\cdot arctg\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{jk_{2z}}{k_{1z}}\right)\qquad \phi_e=2\cdot arctg\left(\frac{jk_{2z}}{k_{1z}}\right). \tag{*.6}$$

Stačí si uvedomiť, že v našej kapitole sú súradnice x a z zamenené oproti 2. kapitole a vo vzťahoch (*.6) zameniť x-ové zložky konštanty šírenia za z-ové.

Pred naznačením postupu riešenia (6.13) uveďme, že pre TM vidy dosadzujeme do charakteristickej rovnice (6.9) za Φ_{10} a Φ_{12} vyjadrenie Φ_m zo vzťahu (*.6). Podobným postupom ako pre TE vidy odvodíme rovnicu vlastných hodnôt pre TM vidy v tvare

$$tgU = \frac{n_1^2 U\left(n_0^2 V + n_2^2 W\right)}{n_0^2 n_2^2 U^2 - n_1^4 VW}\,. \tag{6.14}$$

Bezrozmerné parametre $U, V, W,$ opisujúce priečnu konštantu šírenia vo vlnovode a konštanty tlmenia v pokrývke a podložke vlnovodu, sú zviazané s pozdĺžnou zložkou vlnového vektora k_z, ktorú v optike označujeme β

$$k_z = k_1 \cos\theta_1 = \beta \tag{6.15}$$

a vlnovými číslami k_1, k_0, k_2 v týchto troch prostrediach pomocou vzťahov

$$U/d = k_{1x} = \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \tag{6.16.a}$$

$$V/d = jk_{2x} = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \tag{6.16.b}$$

$$W/d = jk_{0x} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2} \tag{6.16.c}$$

Jedna z dvoch charakteristických rovníc a trojica výrazov (6.16.a,b,c) vytvára systém štyroch rovníc so štyrmi neznámymi U, V, W a β. Tento systém má pre každé m jednoznačné riešenie. V závislosti od m a polarizácie poľa, pre ktoré je riešená rovnica vlastných hodnôt, klasifikujeme vidy vlnovodu v tvare H_m (TE_m) a E_m (TM_m) vidov. Rovnica vlastných hodnôt je transcedentnou rovnicou a preto sa v princípe dá riešiť iba metódami numerickej matematiky.

Riešením uvedeného systému je súbor hodnôt β_m, a teda podľa (6.15) aj súbor uhlov θ_{1m}. Ako sme povedali, riešenia θ_{1m} musia pre vedené vidy spĺňať podmienku $\theta_{1m} < \theta_{2c}$, takže množina hodnôt β_m je konečná, čo korešponduje s konečným počtom vedených vidov šíriacich sa vo vlnovode. Počet vidov je daný iba geometrickými parametrami vlnovodu cez hrúbku vlnovodnej vrstvy d a materiálovými vlastnosťami pokrývky, podložky vlnovodu a vlastného vlnovodu, nakoľko vlnové čísla k_0, k_1, k_2 v týchto prostrediach sú zviazané s indexmi lomu n_0, n_1, n_2 pomocou vzťahu $k_i = n_i k$, kde k je vlnové číslo v prípade vákua. Pozdĺžna konštanta šírenia β_m nám popisuje rozloženie poľa vidu m-tého rádu v smere osi z a zároveň nám dáva informáciu o **fázovej rýchlosti** sa šírenia tohto vidu v pozdĺžnom smere ($v_z = \omega/\beta$). Rozdielna rýchlosť jednotlivých vidov je príčinou tzv. **vidovej disperzie**, efektu, keď informácia vyslaná súčasne vo viacerých vidoch, dorazí k prijímateľovi v rozličných časoch. V optike sa zavádza tzv. **efektívny index lomu** N_{ef}, definovaný vzťahom

$$N_{ef} = \beta / k \tag{6.17}$$

a je to vlastne hodnota indexu lomu, ktorú „vidí“ vid v pozdĺžnom smere. Rýchlosť šírenia potom môžeme zapísať v kompaktnom tvare $v = c/N_{ef}$. Ak si uvedomíme, že platí $0 < \theta_1 < \theta_{2c} < \theta_{0c}$, potom na základe (6.1), (6.3) a (6.15) dostávame

$$kn_0 < kn_2 < \beta < kn_1 , \tag{6.18}$$

alebo alternatívne

$$n_0 < n_2 < N_{ef} < n_1 . \tag{6.19}$$

Uviedli sme, že množina riešení β_m rovnice vlastných hodnôt pre vedené vidy je konečná. Položme si otázku, kedy bude táto množina obsahovať aspoň jednu hodnotu, to znamená, že vo vlnovode sa bude šíriť aspoň jeden vid. Sformulujme podmienku, kedy začne vznikať tento prvý vid H_0 pre transverzálne elektrické vidy. Pre splnenie podmienky totálneho odrazu v tomto kritickom prípade platí

$$\theta_1 = \theta_{2c} = \arccos(n_2 / n_1) , \tag{6.20}$$

takže konštanta šírenia β_m má v tomto prípade hodnotu

$$\beta = kn_1 \cos\theta_1 = kn_2 = k_2 . \tag{6.21}$$

Na základe vzťahu (6.16.b) vidíme, že daný vid vzniká pri podmienke $V = 0$. Dosadením tejto hodnoty do charakteristickej rovnice (6.12) dostávame

$$arctg \frac{W}{U} = U - m\pi . \tag{6.22}$$

Prvý vid vzniká pri splnení (6.22) s podmienkou $m = 0$. Ďalšie vidy H_m vzniknú pri splnení (6.22), postupne s uvažovaním $m = 1,2,3,...$ Pre riešenie uvedeného problému zavedieme ďalšie, v optike veľmi významné veličiny. **Normovaná frekvencia**

$$v \equiv \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{6.23}$$

spája parametre vlnovodu d, n_1, n_2 s vlnovou dĺžkou λ optického žiarenia, ktoré sa vo vlnovode šíri. **Normovaná fázova konštanta**

$$B \equiv \frac{\beta^2 - n_2^2 k^2}{\left(n_1^2 - n_2^2\right) k^2} = \frac{N_{ef}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{V^2}{v^2} \tag{6.24}$$

je bezrozmerná veličina a udáva závislosť konštanty šírenia β od normovanej frekvencie v. Nakoniec zavedieme **stupeň asymetričnosti vlnovodu** vzťahom

$$a \equiv \frac{n_2^2 - n_0^2}{n_1^2 - n_2^2} . \tag{6.25}$$

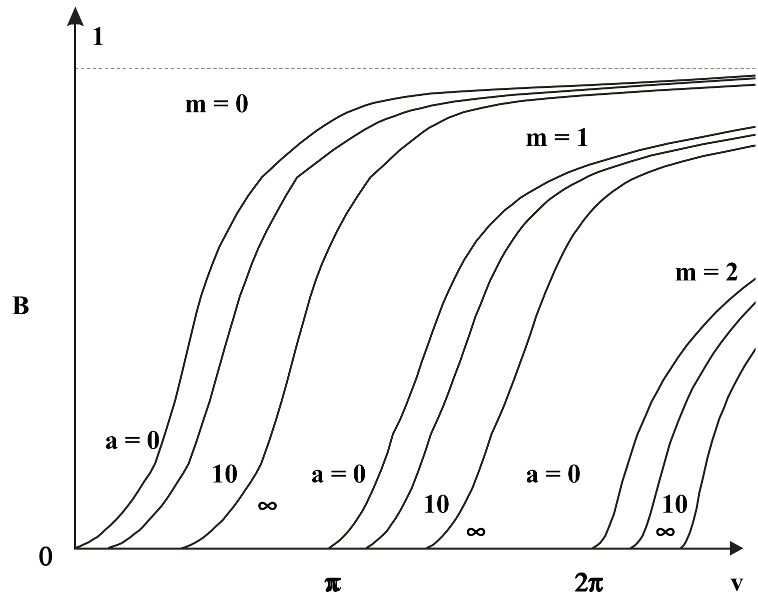
Ak uvážime, že

$$W/U = \frac{\sqrt{\beta^2 - k_0^2} \cdot d}{\sqrt{k_1^2 - \beta^2} \cdot d} = \sqrt{\frac{N_{ef}^2 + n_0^2}{n_1^2 - n_2^2}} = \sqrt{B + a} \tag{6.26}$$

$$U = d\sqrt{k_1^2 - \beta^2} = \frac{2\pi d}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - N_{ef}^2} = v \cdot \sqrt{1 - B}\ , \tag{6.27}$$

rovnica (6.22) prejde do tvaru

$$arctg\sqrt{B + a} = v \cdot \sqrt{1 - B} - m\pi\ . \tag{6.28}$$



Obr. 6.5. Závislosť normovanej fázovej konštanty B *od normovanej frekvencie* v *pre rôzne stupne asymetričnosti planárneho vlnovodu*

Podmienky vzniku prvého vidu sú dané vzťahmi $B = 0$ ($V = 0$) a $m = 0$, takže pre kritickú normovanú frekvenciu v_0 pre prvý vid H_0 dostaneme z (6.28)

$$v_0 = arctg\sqrt{a}\ . \tag{6.29}$$

Kritická normovaná frekvencia v_m vzniku ďalších H_m vidov je daná vzťahom

$$v_m = v_0 + m\pi \, . \qquad (6.30)$$

Na obr. 6.5 je daná závislosť normovanej konštanty šírenia B od normovanej frekvencie v, pre rôzne stupne asymetričnosti. vlnovodu. Z obrázka ihneď vidíme, že v prípade $v < v_0$ sa vo vlnovode nemôže šíriť žiaden H vid. Ďalším zistením je, že ak stupeň asymetričnosti $a = 0$, vlnovod vedie aspoň jeden vid od nulových frekvencií. Tento prípad nastáva, ak $n_0 = n_2$, pre tzv. **symetrický vlnovod**. Na druhej strane, ak $a \to \infty$, vlnovod vedie aspoň jeden vid vprípade, že $v > \pi/2$. Tento prípad nastáva pre tzv**. slabovedúci vlnovod**, kedy $n_1 \approx n_2$.

6.3 Elektromagnetická teória planárneho vrstvového vlnovodu

Táto kapitola by mala nasledovať až po všeobecnej teórii dielektrických vlnovodov, avšak z dôvodov názornosti ju zaraďujeme za kapitolu, popisujúcu riešenie planárneho vlnovodu metódami geometrickej optiky. Lepšie tak vyniknú spojitosti medzi výsledkami získanými oboma prístupmi.

V planárnom vlnovode je oblasť šírenia sa optického žiarenia ohraničená iba v jednom smere, v našom prípade v smere osi x. Index lomu planárneho vlnovodu $n(\mathrm{x})$ a príslušné polia vidov sú funkciou iba tejto koordináty. Z neohraničenosti a homogénnosti vlnovodu v smere osi y vyplýva, že nemôže záležať na tom, v ktorom mieste na osi y pozorujeme javy vo vlnovode, a teda polia vidov nezávisia od súradnice y. To nás oprávňuje k záveru, že všetky derivácie v Maxwellových rovniciach podľa premennej y sú nulové, teda $\partial/\partial y = 0$. Ďalej predpokladajme, bez újmy na všeobecnosti, že vidy sa šíria v smere osi z . Ak nebudeme brať na zreteľ časovú harmonickú závislosť polí, môžeme celkové elektrické a magnetické pole zapísať v tvare

$$\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}) = \vec{\mathrm{E}}(x) \cdot \exp(-j\beta z) \qquad \vec{\mathrm{H}}(\vec{\mathrm{r}}) = \vec{\mathrm{H}}(x) \cdot \exp(-j\beta z) \, . \qquad (6.31)$$

Dosadením riešení (6.31) do Maxwellových rovníc (6.59) (odvodenie v ďalších kapitolách)

$$\nabla \times \vec{\mathrm{E}} = -j\omega\mu_0 \vec{\mathrm{H}} \qquad \nabla \times \vec{\mathrm{H}} = j\omega\varepsilon\vec{\mathrm{E}} \, , \qquad (6.59.a,b)$$

s uvažovaním $\partial/\partial y = 0$, dostávame dva systémy parciálnych diferenciálnych rovníc pre zložky EM poľa

$$\beta E_y = -\omega\mu_0 H_x \qquad (6.32.a) \qquad \beta H_y = \omega\varepsilon_0 n^2 E_x \qquad (6.33.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y = -j\omega\mu_0 H_z \qquad (6.32.b) \qquad \frac{\partial}{\partial x} H_y = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_z \qquad (6.33.b)$$

$$-j\beta H_x - \frac{\partial}{\partial x}H_z = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_y \quad (6.32.c) \qquad j\beta E_x + \frac{\partial}{\partial x}E_z = j\omega\mu_0 H_y\ , \quad (6.33.c)$$

kde rovnice (6.32.a), (6.32.b), (6.33.c) sme dostali z rovnice (6.59.a) a rovnice (6.33.a), (6.33.b) a (6.32.c) z rovnice (6.59.b). Vidíme, že sme získali dva systémy parciálnych dif. rovníc so separovanými premennými. Systémy nie sú vzájomne zviazané, takže všeobecné riešenie sa rozpadne na TE a TM vidy. Ľavý systém obsahuje iba zložky poľa E_y, H_x, H_z, pričom ostatné zložky sú nulové a prislúcha transverzálne elektrickým TE vidom. Pravý systém zodpovedá TM vidom. Takéto čiste transverzálne vidy s nulovou zložkou elektrického (magnetického) poľa pre TE (TM) vidy v smere šírenia existujú iba v prípade planárneho vlnovodu. Neskôr uvidíme, že v zložitejších optických vlnovodných štruktúrach tomu tak nie je.

Systémy (6.32),(6.33) riešime vylúčením premenných H_x, H_z pre TE vidy a premenných E_x, E_z pre TM vidy. Získame tak **vlnové rovnice** pre zložky poľa E_y a H_y

$$\text{TE}: \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y + \left(n^2k^2 - \beta^2\right)E_y = 0 \qquad (6.34)$$

$$\text{TM}: \frac{\partial^2}{\partial x^2}H_y + \left(n^2k^2 - \beta^2\right)H_y = 0\,, \qquad (6.35)$$

kde

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \omega/c \qquad (6.36)$$

je vlnové číslo v prípade vákua. Zaveďme označenie

$$k_{ix}^2 = n_i^2k^2 - \beta^2\,,$$

kde i = 0,1,2 sa vzťahuje k jednotlivým prostrediam formujúcim vlnovod. Veličina k_{ix} reprezentuje priečnu zložku vlnového vektora v príslušnom prostredí. Všeobecné riešenie rovnice (6.34) je dané superpozícou parciálnych riešení $\exp(jk_{ix}x)$, $\exp(-jk_{ix}x)$ v tvare

$$E_y^i = C_1^i\exp\left(jk_{ix}x\right) + C_2^i\exp\left(-jk_{ix}x\right). \qquad (6.37)$$

Bude záležať len na charaktere k_{ix}, aký typ riešenia získame. Ak bude k_{ix} reálne, riešenie bude mať tvar harmonickej funkcie, v prípade, že k_{ix} je čiste imaginárne, bude mať riešenie vlnovej rovnice charakter exponenciálnej funkcie. Podobné závery platia pre H_y.

Tým je ukončený prvý krok riešenia vlnovodu, a síce riešenie Maxwellových rovníc. Ďalším krokom je uvažovanie hraničných podmienok na rozhraniach prostredí 0,1 a 1,2. V predošlých kapitolách ste sa dočítali, že na rozhraní dvoch elektricky nevodivých prostredí musí byť splnená podmienka spojitosti tangenciálnych zložiek vektorov polí.

Konkrétne v našom prípade to znamená, že na rozhraní prostredí musia byť spojité zložky polí H_z a E_y (H_y, $E_z = 0$) pre TE vidy a E_z a H_y pre TM vidy.

TE vidy

Fyzikálnym podmienkam $E_y \to 0$, ak $x \to \infty$ a $x \to -\infty$, na základe faktu, že $k_{0x}^2 < 0$, $k_{1x}^2 > 0$, $k_{2x}^2 < 0$ vyhovuje riešenie (6.37) rovnice (6.34) v tvare

$$E_y^0(x) = C_2^0 \exp(-jk_{0x}x) \qquad \text{pre } x \geq 0, \tag{6.38.a}$$

$$E_y^1(x) = A\cos k_{1x}x + B\sin k_{1x}x \qquad \text{pre } 0 \geq x \geq -\mathrm{d}, \tag{6.38.b}$$

$$E_y^2(x) = C_1^2 \exp(jk_{2x}x) \qquad \text{pre } x \leq \text{-d}, \tag{6.38.c}$$

kde sme položili $C_1^1 = A$ a $C_2^1 = B$. Z podmienok spojitosti na rozhraní

$$E_y^0(0) = E_y^1(0) \qquad E_y^2(-d) = E_y^1(-d) \tag{6.39}$$

máme

$$C_2^0 = A \tag{6.40.a}$$

$$C_1^2 \exp(-jk_{2x}d) = A\cos k_{1x}d - B\sin k_{1x}d\ . \tag{6.40.b}$$

Dosadením do (6.38.a), (6.38.c) získame

$$E_y^0(x) = A\exp(-jk_{0x}x) \qquad x \geq 0 \tag{6.41.a}$$

$$E_y^2(x) = (A\cos k_{1x}d - B\sin k_{1x}d)\exp(jk_{2x}\{x+d\}) \qquad x \leq \text{-d}. \tag{6.41.b}$$

Z rovnice (6.32.b) získame zložky vektora poľa H_z

$$H_z^0(x) = \frac{k_{0x}}{\omega\mu_0} A\exp(-jk_{0x}x) \qquad \text{pre } x \geq 0, \tag{6.42.a}$$

$$H_z^1(x) = \frac{k_{1x}}{j\omega\mu_0}(A\sin k_{1x}x - B\cos k_{1x}x) \qquad \text{pre } 0 \geq x \geq -\mathrm{d}, \tag{6.42.b}$$

$$H_z^2(x) = -\frac{k_{2x}}{\omega\mu_0}(A\cos k_{1x}d - B\sin k_{1x}d)\exp(jk_{2x}\{x+d\}) \quad \text{pre } x \leq \text{-d}. \tag{6.42.c}$$

Z podmienok spojitosti na rozhraní

$$H_z^0(0) = H_z^1(0) \qquad H_z^2(-d) = H_z^1(-d) \tag{6.43}$$

dostávame

$$k_{0x}A = jk_{1x}B \tag{6.44.a}$$

$$k_{2x}(A\cos k_{1x}d - B\sin k_{1x}d) = -jk_{1x}(A\cos k_{1x}d + B\sin k_{1x}d). \tag{6.44.b}$$

Dosadením normovaných priečnych konštánt (6.11.a,b,c) získame homogénny systém pre neznáme *A,B*

$$WA + UB = 0 \tag{6.45.a}$$

$$A\left(U \sin U - V \cos U\right) + B\left(U \cos U + V \sin U\right) = 0\ , \tag{6.45.b}$$

ktorý má netriviálne riešenie iba v prípade, že determinant systému (6.45) je rovný nule

$$W\left(U \cos U + V \sin U\right) - U\left(U \sin U - V \cos U\right) = 0\ . \tag{6.46}$$

Po úprave

$$tgU = \frac{U\left(V + W\right)}{U^2 - VW}\ . \tag{6.47}$$

Táto rovnica sa úplne zhoduje s rovnicou (6.13) získanou metódou geometrickej optiky. Rozloženie EM poľa TE vidov je určené rovnicami (6.38.b), (6.41.a,b) a (6.42.a,b,c), kde

$$B = -\frac{W}{U} A \tag{6.48}$$

a konštanta A je daná podmienkami vybudenia príslušného vidu. Vo vlnovodnej vrstve majú vedené vidy charakter harmonickej vlny v priečnom smere a v prostrediach pokrývky a podložky vlnovodu majú charakter evanescentnej, exponenciálne tlmenej vlny v priečnom smere.

TM vidy

Podobným postupom dostaneme pre TM vidy:

1. Rozloženie EM poľa

$$E_y = 0 \qquad H_x = H_z = 0$$

$$E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0 n^2} H_y \tag{6.49.a}$$

$$H_y^0(x) = C \exp\left(-jk_{0x} x\right) \qquad x \geq 0 \tag{6.49.b}$$

$$H_y^1(x) = C \cos k_{1x} x + D \sin k_{1x} x \qquad 0 \geq x \geq -\mathrm{d} \tag{6.49.c}$$

$$H_y^2(x) = \left(C \cos k_{1x} d - D \sin k_{1x} d\right) \exp\left(jk_{2x}\left\{x + d\right\}\right) \qquad x \leq \text{-d} \tag{6.49.d}$$

$$E_z^0(x) = -\frac{k_{0x}}{\omega\varepsilon_0 n_0^2} C \exp\left(-jk_{0x} x\right) \qquad x \geq 0 \tag{6.49.e}$$

$$E_z^1(x) = -\frac{k_{1x}}{j\omega\varepsilon_0 n_1^2}\left(C\sin k_{1x}x - D\cos k_{1x}x\right) \quad 0 \geq x \geq -\mathrm{d} \qquad (6.49.f)$$

$$E_z^2(x) = \frac{k_{2x}}{\omega\varepsilon_0 n_2^2}\left(C\cos k_{1x}d - D\sin k_{1x}d\right)\exp\left(jk_{2x}\{x+d\}\right) \quad x \leq \text{-d} \qquad (6.49.g)$$

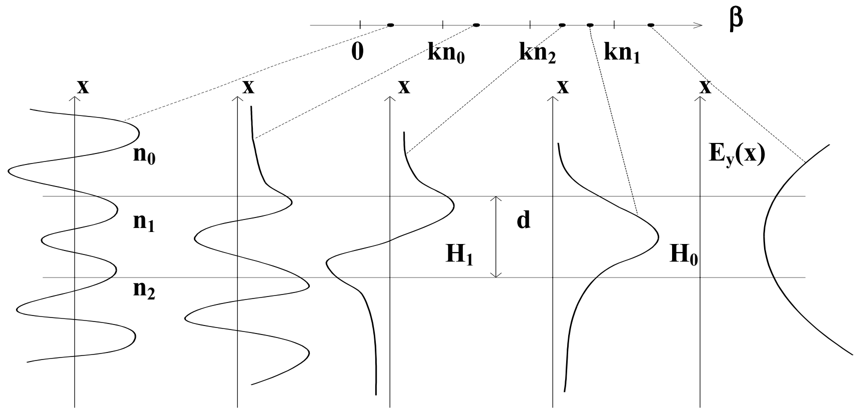
kde

$$D = -\frac{n_1^2 W}{n_0^2 U}C \qquad (6.50)$$

a konštanta C je určená podmienkami vybudenia vidu vo vlnovode.

2. Charakteristickú rovnicu zhodnú so vzťahom (6.14).

Príklady typických rozložení zložiek vektora poľa E_y pre H_m vidy alebo zložky H_z pre E_m vidy pre prvé dve vidové čísla a príklady žiarivých vidov sú na obr.6.6.



Obr. 6.6. Rozloženie EM poľa v planárnom vlnovode pre rôzne hodnoty konštanty šírenia β

6.4 Tok energie vlnovodom

S pomocou vzťahov pre zložky EM poľa vidov vyjadríme výkon prenášaný vidmi vo vlnovode. Celkový výkon prenášaný vedenými vidmi je daný superpozíciou výkonov prenášaných jednotlivými vidmi. Aká časť celkového výkonu bude prenášaná konkrétnym vidom závisí od podmienok vybudenia. Výkon prenášaný vidom získame pomocou z-ovej zložky S_z časovej strednej hodnoty Poyntingovho vektora $\vec{\mathrm{S}} = \vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{H}}^*$, kde $\vec{\mathrm{H}}^*$ je komplexne združený vektor k intenzite magnetického poľa $\vec{\mathrm{H}}$. Výkon prenášaný v smere z jednotkovou šírkou vlnovodu v smere osi y je

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \langle S_z \rangle dx \,. \tag{6.51}$$

Pre TE vid je $S_z = -E_y H_x^*$. Vyjadrením H_x pomocou vzťahu (6.32.a) dostávame

$$P = \frac{\beta}{\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| E_y \right|^2 dx \,. \tag{6.52}$$

Dosadením za E_y vyjadrenia (6.38.b), (6.41.a,b) elektrického poľa v jednotlivých oblastiach, uvažujúc vzťah (6.48) a charakteristickú rovnicu (6.47), dostávame po integrácii

$$P = |A|^2 \frac{\beta d}{2\omega\mu_0} \left(1 + \frac{W^2}{U^2} \right) \left(1 + \frac{1}{V} + \frac{1}{W} \right). \tag{6.53}$$

Rozloženie energie prenášanej vo vlnovodnej vrstve, podložke a pokrývke vlnovodu je dané pomerom troch sčítancov v poslednej zátvorke. Rozloženie energie medzi jednotlivé vrstvy závisí od vidu a od frekvencie šíriacej sa vlny. Pri rastúcej frekvencii rastie podiel energie šíriacej sa vo vlnovodnej vrstve a naopak.

Pre TM vid je $S_z = E_x H_y^*$. Vyjadrením E_x pomocou vzťahu (6.33.a) dostávame pre výkon prenášaný TM vidom cez jednotkovú šírku vlnovodu v tvare

$$P = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| H_y \right|^2 dx \,. \tag{6.54}$$

Dosadením za H_y vyjadrenia (6.49.c,d,e) magnetického poľa v jednotlivých oblastiach, uvažujúc vzťah (6.50) a charakteristickú rovnicu (6.14), dostávame po integrácii

$$P = |C|^2 \frac{\beta d}{2\omega\varepsilon_0} \left(1 + \frac{n_1^4 W^2}{n_0^4 U^2} \right) \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{\left(U^2 + V^2\right) n_2^2 / V}{n_2^4 U^2 + n_1^4 V^2} + \frac{\left(U^2 + W^2\right) n_0^2 / W}{n_0^4 U^2 + n_1^4 W^2} \right). \tag{6.55}$$

Rozloženie energie prenášanej jednotlivými vrstvami je opäť dané pomerom troch sčítancov v poslednej zátvorke.

6.5 Vlnová teória dielektrického vlnovodu

Vlnová teória šírenia vĺn vo vlnovodoch je vybudovaná na riešení Maxwellových (ML) rovníc s príslušnými okrajovými podmienkami

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} , \tag{6.56.a, b}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho . \tag{6.56.c, d}$$

kde $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ sú vektorové funkcie závislé od časovej a priestorovej súradnice, vyjadrujúce postupne intenzitu elektrického poľa, intenzitu magnetického poľa, indukciu elektrického poľa a indukciu magnetického poľa, ρ je objemová hustota voľného náboja, a $\vec{J}$ je prúdová hustota prúdov voľných nábojov. Optické vlnovody sa obyčajne zhotovujú z materiálov, ktorých vlastnosti v prvom priblížení nezávisia od intenzity a smeru šírenia sa optického žiarenia. V takýchto izotropných materiáloch, nevykazujúcich nelineárne efekty, platia materiálové vzťahy

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} , \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} , \tag{6.57.a,b}$$

kde permitivita ε je skalárnou funkciou priestorových súradníc, permeabilita μ je na optických frekvenciach prakticky rovná permeabilite vákua μ_0 a je nezávislá od časovej a priestorových súradníc. V lineárnych prostrediach platí princíp superpozície. Táto skutočnosť dáva možnosť vyjadriť vlnu so všeobecnou časovou závislosťou ako superpozíciu vĺn harmonických, ktoré s výhodou opíšeme fázorom alebo komplexnou amplitúdou. Vzájomné priradenie vektora poľa $\vec{X}(x,y,z,t)$ a fázora $\dot{\vec{X}}(x, y, z)$ je dané vzťahom

$$\vec{X}(x, y, z, t) = \mathrm{Im}\left(\dot{\vec{X}} e^{j\omega t} \right). \tag{6.58}$$

V prípade uvažovania harmonického charakteru elektromagnetických (EM) polí $\dot{\vec{X}} e^{j\omega t}$, nadobudnú ML pre izotropné, nemagnetické (μ = μ_0) a nevodivé ($\vec{J} = 0$) prostredia bez voľných nábojov (ρ = 0) tvar

$$\nabla \times \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_0 \dot{\vec{H}} \quad \nabla \times \dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon \dot{\vec{E}} \tag{6.59.a,b}$$

$$\nabla \cdot \dot{\vec{D}} = 0 \quad \nabla \cdot \dot{\vec{B}} = 0 . \tag{6.59.c,d}$$

Vektorovým aplikovaním operátora nabla na rovnicu (6.59.a), následnou separáciou premennej $\dot{\vec{H}}$ pomocou (6.59.b) a s využitím vektorových rovností

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} , \quad \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 , \tag{6.60.a,b}$$

dostávame vektorovú vlnovú rovnicu elektrického poľa

$$\nabla^2\dot{\vec{E}}+\omega^2\mu_0\varepsilon\dot{\vec{E}}=\nabla(\nabla\cdot\dot{\vec{E}}) . \tag{6.61}$$

V prostredí bez nábojov platí (6.59.c) a s uvážením materiálového vzťahu (6.57.a) môžeme písať

$$\nabla\cdot(\varepsilon\dot{\vec{E}})=\varepsilon\nabla\cdot\dot{\vec{E}}+\nabla\varepsilon\cdot\dot{\vec{E}}=0 , \tag{6.62}$$

čo po dosadení do (6.61) zjednoduší vlnovú rovnicu do tvaru

$$\nabla^2\dot{\vec{E}}+\omega^2\mu_0\varepsilon\dot{\vec{E}}=-\nabla(\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\cdot\dot{\vec{E}}) , \tag{6.63}$$

alebo alternatívne

$$\nabla^2\dot{\vec{E}}+\omega^2\mu_0\varepsilon\dot{\vec{E}}=-\nabla(\nabla(\ln\varepsilon_r)\cdot\dot{\vec{E}}) , \tag{6.63}$$

kde $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ je relatívna permitivita a ε_0 je permitivita vákua. Podobným postupom odvodíme

$$\nabla^2\dot{\vec{H}}+\omega^2\mu_0\varepsilon\dot{\vec{H}}=(\nabla\times\dot{\vec{H}})\times\nabla\ln\varepsilon_r . \tag{6.64}$$

6.6 Vidy pozdĺžne homogénneho vlnovodu

Pokiaľ je index lomu prostredia vlnovodu ($n=\sqrt{\varepsilon_r}$) funkciou iba dvoch súradníc, napríklad x a y, hovoríme, že ide o prostredie pozdĺžne homogénne v smere osi z. V takom prípade môžeme riešenie vlnovej rovnice (6.63), resp. (6.64) hľadať v tvare

$$\dot{\vec{X}}(x,y,z)=\dot{\vec{X}}(x,y)\cdot\exp(-jk_z z), \tag{6.65}$$

kde $\dot{\vec{X}}=\dot{\vec{E}},\dot{\vec{H}}$ a $\dot{\vec{X}}(x,y)$ je vektorová veličina závisla iba od priečnych súradníc x a y. V teórii optických vlnovodov je zvykom označovať pozdĺžnu zložku konštanty šírenia

$$k_z=\beta .$$

Vidom EM vlny je **každé** riešenie ML rovníc, ktoré spĺňa okrajové podmienky. Jednotlivé vidy sa od seba navzájom líšia geometriou poľa, podmienkami existencie, priečnymi konštantami šírenia a pozdĺžnou konštantou šírenia. Vidy principiálne rozdeľujeme na **žiarivé** a **vedené**. Žiarivé vidy sú postupne vyžarované z vlnovodného prostredia do okolia vlnovodu, naopak, **vedené vidy sa v ideálnom bezstratovom vlnovode šíria vlnovodnou štruktúrou bez tlmenia**. Pozdĺžna konštanta šírenia β vedených vidov je reálna a v prípade pozdĺžne homogénneho vlnovodu platí

$$\left|e^{-j\beta z}\right|=1 ,$$

takže amplitúda vedených vidov sa so zmenou z-ovej súradnice nemení. Vedené vidy sú hlavnou zložkou spektra vĺn, ktorá sa podieľa na prenose energie vlnovodnou štruktúrou.

Všeobecne je energia signálu prenášaná optickým vlnovodom rozdelená do viacerých vedených vidov.

Pozdĺžna konštanta šírenia β je funkciou frekvencie a tiež funkciou uvažovaného vidu. Tieto závislosti konštanty β sú príčinou disperzie signálu vo vlnovode.

Na základe uvedeného môže byť celkové elektrické a magnetické pole v bezstratovom a pozdĺžne homogénnom vlnovode zapísané v tvare

$$\dot{\vec{E}}(x,y,z)=\sum_n a_n^+\dot{\vec{E}}_n^+(x,y)\exp(-j\beta_n z)+\sum_n a_n^-\dot{\vec{E}}_n^-(x,y)\exp(j\beta_n z)+\dot{\vec{E}}_{rad}(x,y,z) \; , \quad (6.66.a)$$

$$\dot{\vec{H}}(x,y,z)=\sum_n a_n^+\dot{\vec{H}}_n^+(x,y)\exp(-j\beta_n z)+\sum_n a_n^-\dot{\vec{H}}_n^-(x,y)\exp(j\beta_n z)+\dot{\vec{H}}_{rad}(x,y,z), \quad (6.66.b)$$

kde $\dot{\vec{E}}_n^+, \dot{\vec{E}}_n^-, \dot{\vec{H}}_n^+, \dot{\vec{H}}_n^-$ predstavujú dopredu a nazad sa šíriace vidy, a_n^+, a_n^- sú ich amplitúdy, β_n je pozdĺžna konštanta šírenia sa *n*-tého vidu a nakoniec $\dot{\vec{E}}_{rad}, \dot{\vec{H}}_{rad}$ predstavujú žiarivé vidy. Konkrétne hodnoty amplitúd a_n^+, a_n^- závisia od zdroja budenia. Žiarivé vidy vytvárajú **spojité spektrum**, na rozdiel od **diskrétneho charakteru** vedených vidov.

V ďalšom budeme uvažovať vlnovody nekonečnej dĺžky, takže nebude dochádzať k odrazom dopredu sa šíriacich vidov na zakončení vlnovodu, v dôsledku čoho zanedbávame nazad sa šíriace vidy. Z analýzy vlnovodu taktiež vylúčime žiarivé vidy, ktoré nás v tomto momente príliš nezaujímajú. Celkové EM pole bude dané

$$\dot{\vec{E}}(x,y,z)=\sum_n a_n\dot{\vec{E}}_n(x,y)\exp(-j\beta_n z) \; , \quad (6.67.a)$$

$$\dot{\vec{H}}(x,y,z)=\sum_n a_n\dot{\vec{H}}_n(x,y)\exp(-j\beta_n z) \; . \quad (6.67.b)$$

Z hľadiska redukcie vektorového problému riešenia (6.63), (6.64) na skalárny je možné postupovať nasledovne. Polia vidov a operátor nabla rozložíme do priečnych (transverzálnych) a pozdĺžnych (longitudiálnych) zložiek

$$\dot{\vec{E}}_n=\dot{\vec{E}}_{tn}+\dot{E}_{zn}\vec{z} \; , \qquad \dot{\vec{H}}_n=\dot{\vec{H}}_{tn}+\dot{H}_{zn}\vec{z} \; , \qquad \nabla=\nabla_t+\frac{\partial}{\partial z}\vec{z} \; . \quad (6.68)$$

Vektorové vlnové rovnice (6.63) a (6.64) zapíšeme v zložkovom tvare, osobitne pre priečne a osobitne pre pozdĺžne zložky EM poľa

$$\nabla_t^2\dot{\vec{E}}_{tn}+\left(\omega^2\mu_0\varepsilon-\beta_n^2\right)\dot{\vec{E}}_{tn}=-\nabla_t\left(\nabla_t(\ln\varepsilon_r)\cdot\dot{\vec{E}}_{tn}\right) \; , \quad (6.69.a)$$

$$\nabla_t^2 \dot{\vec{\mathrm{H}}}_{tn} + \left(\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta_n^2\right) \dot{\vec{\mathrm{H}}}_{tn} = \left(\nabla_t \times \dot{\vec{\mathrm{H}}}_{tn}\right) \times \nabla_t \left(\ln \varepsilon_r\right) \ , \tag{6.69.b}$$

$$\nabla_t^2 \dot{E}_{zn} + \left(\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta_n^2\right) \dot{E}_{zn} = j\beta_n \dot{\vec{\mathrm{E}}}_{tn} \cdot \nabla_t \left(\ln \varepsilon_r\right) \ , \tag{6.69.c}$$

$$\nabla_t^2 \dot{H}_{zn} + \left(\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta_n^2\right) \dot{H}_{zn} = \left(\nabla_t \dot{H}_{zn} + j\beta_n \dot{\vec{\mathrm{H}}}_{tn}\right) \cdot \nabla_t \left(\ln \varepsilon_r\right) \ . \tag{6.69.d}$$

Matematická poznámka

Skalárna funkcia Ψ a vektorová funkcia $\vec{\mathrm{A}}$ závisia od kartézskych súradníc (*x,y,z*). Ak $\vec{x}, \vec{y}\, a\, \vec{z}$ sú jednotkové vektory v smere osi *x*, *y* a *z* súčasne, potom platí

$$\vec{\mathrm{A}} = \left(A_x, A_y, A_z\right) = A_x \vec{x} + A_y \vec{y} + A_z \vec{z} = \vec{\mathrm{A}}_t + A_z \vec{z} \tag{M.1}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z} \tag{M.2}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{M.3}$$

$$\nabla \Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = \nabla_t \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{z} \tag{M.4}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla_t \vec{\mathrm{A}}_t + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{M.5}$$

$$\nabla \times \vec{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial x & \partial/\partial x \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}; \qquad \nabla_t \times \vec{\mathrm{A}}_t = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \vec{z} \tag{M.6}$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \nabla_t^2 \Psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi \tag{M.7}$$

$$\nabla^2 \vec{\mathrm{A}} = \left(\nabla^2 A_x\right)\vec{x} + \left(\nabla^2 A_y\right)\vec{y} + \left(\nabla^2 A_z\right)\vec{z} \tag{M.8}$$

$$\nabla^2 \vec{\mathrm{A}} = \nabla_t{}^2 \vec{\mathrm{A}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{\mathrm{A}} \tag{M.9}$$

$$\vec{z} \times \left(A_x, A_y, 0\right) = \left(-A_y, A_x, 0\right) \tag{M.10}$$

Pri aplikovaní uvedených operátorových rovností na rovnice (6.63), (6.64) si treba uvedomiť, že nami uvažované vektory $\vec{\dot{\mathrm{E}}}_n, \vec{\dot{\mathrm{H}}}_n$ nadobúdajú tvar (6.65) a relatívna permitivita je funkciou iba priečnych súradníc $\varepsilon_r = \varepsilon_r(x,y)$.

Z rovníc (6.59.a,b), s použitím (M.10) dostaneme

$$\vec{\dot{\mathrm{E}}}_{tn} = \frac{j}{\omega\varepsilon}\vec{z}\times\left(j\beta_n\vec{\dot{\mathrm{H}}}_{tn} + \nabla_t\dot{H}_{zn}\right), \tag{6.70.a}$$

$$\vec{\dot{\mathrm{H}}}_{tn} = -\frac{j}{\omega\mu_0}\vec{z}\times\left(j\beta_n\vec{\dot{\mathrm{E}}}_{tn} + \nabla_t\dot{E}_{zn}\right). \tag{6.70.b}$$

Dosadením (6.70.b) za $\vec{\dot{\mathrm{H}}}_{tn}$ do vzťahu (6.70.a) a podobne vzťahu (6.70.a) za $\vec{\dot{\mathrm{E}}}_{tn}$ do vzťahu (6.70.b) získame vyjadrenie priečnych zložiek $\vec{\dot{\mathrm{E}}}_{tn}$, $\vec{\dot{\mathrm{H}}}_{tn}$ pomocou pozdĺžnych zložiek $\vec{\dot{E}}_{zn}, \vec{\dot{H}}_{zn}$ elektromagnetického poľa

$$\vec{\dot{\mathrm{E}}}_{tn} = \frac{j}{\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta_n^2}\left(\omega\mu_0\vec{z}\times\nabla_t\dot{H}_{zn} - \beta_n\nabla_t\dot{E}_{zn}\right), \tag{6.71.a}$$

$$\vec{\dot{\mathrm{H}}}_{tn} = -\frac{j}{\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta_n^2}\left(\omega\varepsilon\vec{z}\times\nabla_t\dot{E}_{zn} + \beta_n\nabla_t\dot{H}_{zn}\right). \tag{6.71.b}$$

Spätným dosadením vyjadrení $\vec{\dot{\mathrm{E}}}_{tn}$, $\vec{\dot{\mathrm{H}}}_{tn}$ do rovníc (6.69.c,d) získame dve diferenciálne rovnice, ktoré obsahujú iba pozdĺžne zložky $\dot{E}_{zn}, \dot{H}_{zn}$ elektromagnetického poľa

$$\nabla_t^2\dot{E}_{zn} + \left(\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta_n^2\right)\dot{E}_{zn} = \frac{\beta_n}{\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta_n^2}\left(-\omega\mu_0\vec{z}\times\nabla_t\dot{H}_{zn} + \beta_n\nabla_t\dot{E}_{zn}\right)\cdot\nabla_t\left(\ln\varepsilon_r\right)$$

$$\nabla_t^2\dot{H}_{zn} + \left(\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta_n^2\right)\dot{H}_{zn} = \left(\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon}{\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta_n^2}\nabla_t\dot{H}_{zn} + \frac{\beta_n}{\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta_n^2}\omega\varepsilon\vec{z}\times\nabla_t\dot{E}_{zn}\right)\cdot\nabla_t\left(\ln\varepsilon_r\right)$$

(6.72.a,b)

Tieto rovnice sú skalárne. Ak sa nám podarí vyriešiť takto vzniknutý systém dvoch diferenciálnych rovníc pre neznáme $\dot{E}_{zn}$ a $\dot{H}_{zn}$, potom priečne zložky EM poľa dopočítame pomocou vzťahov (6.71.a,b). Vzhľadom na prítomnosť zložiek $\dot{E}_{zn}$ a $\dot{H}_{zn}$ v oboch rovniciach (6.72.a,b), všeobecne je pomerne zložité riešiť analyticky tento systém a niekedy sa dá riešenie nájsť iba numerickými metódami. Systém (6.72.a,b) sa dá zjednodušiť pre určité druhy vlnovodov. Takými vlnovodmi sú vlnovody s pozvoľnou zmenou indexu lomu v priečnom smere, kedy môžeme v prvom priblížení položiť $\nabla_t(\ln\varepsilon_r) \cong 0$, čím dostaneme systém homogénnych diferenciálnych rovníc

$$\nabla_t^2 \dot{E}_{zn} + \left(\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta_n^2\right)\dot{E}_{zn} = 0\,, \tag{6.73.a}$$

$$\nabla_t^2 \dot{H}_{zn} + \left(\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta_n^2\right)\dot{H}_{zn} = 0\,, \tag{6.73.b}$$

pre ktoré je zaužívaný názov - **Helmholtzove rovnice**. Špeciálnym prípadom sú vlnovody so skokovou zmenou indexu lomu, kde relatívna permitivita ε_r je konštantná v každej oblasti tvoriacej vlnovod a na rozhraní sa mení skokom. V každej z oblasti, vzhľadom na nulový gradient permitivity, platí systém (6.73.a,b) a za permitivitu dosadzujeme príslušnu permitivitu prostredia danej oblasti. Na rozhraní oblastí s rôznou permitivitou je požadovaná spojitosť tangenciálnych zložiek vektorov elektrického a magnetického poľa. Vzťahy (6.71.a,b) platia aj v tomto prípade.

6.7 Vláknový optický vlnovod

Vláknové optické vlnovody sú prakticky jedinou vlnovodnou štruktúrou vhodnou pre vedenie EM vĺn na optických kmitočtoch na väčšie vzdialenosti. Prenosové vlastnosti vláknových vlnovodov môžeme v širokej miere ovplyvňovať vhodným návrhom konštrukčných parametrov. K základným konštrukčným parametrom patria priečne rozmery a rozloženie indexu lomu v priereze vláknového vlnovodu. Ideálny vláknový vlnovod si môžeme predstaviť ako nekonečný valec, zložený z dvoch častí - **jadra vlnovodu**, ktoré zahrňuje os vlnovodu a **plášťa vlnovodu**, ktorý obklopuje jadro vlnovodu. Rozloženie indexu lomu v jadre aj plášti vykazuje osovú symetriu v priečnom reze vlnovodom. Podľa priebehu indexu lomu v jadre vláknového vlnovodu rozdeľujeme vláknové vlnovody na **vlnovody so skokovou zmenou indexu lomu** a na vlnovody so spojite premenným indexom lomu, ktoré sú nazývané aj **gradientnými** vlnovodmi. Závislosť indexu lomu vláknového vlnovodu so skokovou zmenou indexu lomu je daná vzťahmi

jadro:	$n = n_1$	$0 \le r \le \mathrm{a}_1$
plášť:	$n = n_2$	$\mathrm{a}_1 \le r \le \mathrm{a}_2,$

kde a_1 je polomer jadra. Gradientný vlnovod je charakterizovaný vzťahmi

jadro:	$n = n(r)$	$0 \le r \le \mathrm{a}_1$
plášť:	$n = n_2$	$a_1 \le r$.

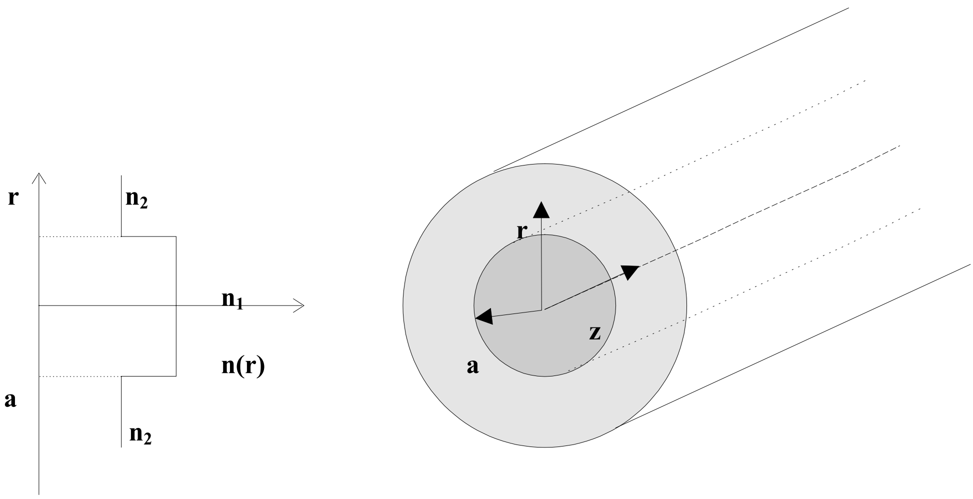
Poznamenajme, že plášť obidvoch typov vlákien môže byť tvorený niekoľkými vrstvami s rozdielnymi indexmi lomu. K najrozšírenejším typom vláknových vlnovodov patrí dvojvrstvový vlnovod so skokovou zmenou indexu lomu a gradientný vlnovod so závislosťou indexu lomu blízkou parabolickej.

Z hľadiska pracovného režimu môžeme vláknové vlnovody rozdeliť na **jednovidové a mnohovidové**. V mnohovidových vlnovodoch sa spravidla predpokladá šírenie niekoľko sto vidov. V ďalšom obmedzíme našu analýzu na dvojvrstvový vlnovod so skokovou zmenou indexu lomu.

6.8 Vlnová teória ideálneho vláknového vlnovodu so skokovou zmenou indexu lomu (tzv. SI vlákno - *z angl. Step Index*)

Geometria uvažovaného SI vlákna je na obr. 6.7. SI vlákno je považované za ideálne, ak je bezstratové a pozdĺž osi vlnovodu zachováva kruhovú symetriu konštrukčných parametrov vlákna.

V ďalšom nás bude zaujímať, aké je rozloženie EM poľa jednotlivých vidov, aké sú konštanty šírenia vidov a aké sú podmienky vzniku jednotlivých vidov v SI vlákne.



Obr. 6.7. Geometria SI vlákna a rozloženie indexov lomu

Určenie zložiek vektorov EM poľa SI vlákna je založené na riešeni rovníc (6.73) pre pozdĺžne zložky vektorov poľa, zvlášť v jadre a zvlášť v plášti, určení priečnych zložiek EM poľa zo vzťahov (6.71) a následnom zabezpečení spojitosti tangenciálnych zložiek vektorov EM poľa na rozhraní jadro - plášť.

S pomocou vzťahov

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \ , \quad n = \sqrt{\varepsilon_r} \ ,$$

kde k_0 je vlnové číslo vlny vo vákuu, môžeme rovnice (6.73) prepísať do tvaru

$$\nabla_t^2 \dot{E}_{zj} + \left(k_j^2 - \beta^2\right)\dot{E}_{zj} = 0 \ , \qquad (6.74.a)$$

$$\nabla_t^2 \dot{H}_{zj} + \left(k_j^2 - \beta^2\right)\dot{H}_{zj} = 0 \ , \quad j = 1, 2 \ , \qquad (6.74.b)$$

kde $k_j = n_j k_0$, index j označuje prostredie a nadobúda hodnotu $j = 1$ pre jadro s indexom lomu n_1 a $j = 2$ pre plášť s indexom lomu n_2. Vzhľadom na kruhovú symetriu SI vlákna je výhodné zapísať rovnice (6.74) v cylindrických súradniciach

$$\frac{\partial^2 \Psi_{zj}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi_{zj}}{\partial \phi^2} + \left(k_j^2 - \beta^2\right)\Psi_{zj} = 0 \ , \quad j = 1, 2 \ , \qquad (6.75)$$

kde Ψ_{zj} predstavuje $\dot{E}_{zj}$ alebo $\dot{H}_{zj}$. Rovnicu (6.75) budeme riešiť metódou separácie premenných. Riešenie predpokladajme v tvare súčinu dvoch funkcií premenných r, respektíve ϕ

$$\Psi_{zj}(r, \phi) = R_j(r)\Phi_j(\phi) . \qquad (6.76)$$

Po dosadení predpokladaného riešenia do (6.75), vynásobení r^2 a delení $R\Phi$ dostávame

$$\frac{r^2}{R_j}\frac{d^2 R_j}{dr^2} + \frac{r}{R_j}\frac{dR_j}{dr} + r^2\left(k_j^2 - \beta^2\right) + \frac{1}{\Phi_j}\frac{d^2\Phi_j}{d\phi^2} = 0 \ . \qquad (6.77)$$

Posledný sčítanec v rovnici (6.77) je nezávislý od r. Aby mohla byť rovnica splnená pre ľubovoľné r a ϕ, musí byť tento člen konštantný. Položme $\frac{1}{\Phi_j}\frac{d^2\Phi_j}{d\phi^2} = -\nu^2$. Z toho dostávame

$$\frac{d^2\Phi_j}{d\phi^2} + \nu^2\Phi_j = 0 \ , \qquad j = 1, 2 \ , \qquad (6.78)$$

čo je obyčajná diferenciálna rovnica druhého rádu. Jej alternatívne riešenia sú

$$\Phi(\phi) = C_1 e^{j\nu\phi} + C_2 e^{-j\nu\phi} = A_1 \cos\nu\phi + A_2 \sin\nu\phi \ . \qquad (6.79)$$

Pole vo vnútri vlnovodu musí byť jednoznačné a preto musí platiť $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$. Z toho plynie, že **$\nu$ je číslo celé**. Dosadením do (6.77) dostávame

$$\frac{d^2 R_j}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_j}{dr} + \left(k_j^2 - \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R_j = 0 \ , \qquad (6.80)$$

alebo alternatívne

$$\frac{d^2 R_j}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_j}{dr} + \left(k_{tj}^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) R_j = 0\,, \tag{6.81}$$

kde $k_{tj} = \sqrt{k_j^2 - \beta^2}$ je priečna konštanta šírenia. Zároveň platí

$$k_{tj}^2 = k_{rj}^2 + k_{\phi j}^2\,. \tag{6.82}$$

Rovnica (6.81) je **Besselovou rovnicou**. Jej riešenie závisí od charakteru konštanty k_{tj}. Ak je $k_j^2 - \beta^2 \geq 0$, je k_{tj} reálna a riešením rovnice (6.81) je lineárna kombinácia Besselových funkcií prvého a druhého druhu, rádu ν

$$R(r) = C_3 J_\nu(k_t r) + C_4 Y_\nu(k_t r)\,, \tag{6.83}$$

kde sme pre jednoduchosť vynechali index prostredia j. Vzhľadom na to, že $Y(k_t r) \rightarrow \infty$ pre $r \rightarrow 0$, je v prípade keď vrstva obsahuje os z ($r = 0$), konštanta C_4 rovná nule.

V prípade $k_j^2 - \beta^2 < 0$, je k_{tj} rýdzo imaginárna a riešenie rovnice (6.81) je

$$R(r) = C_5 I_\nu(jk_t r) + C_6 K_\nu(jk_t r)\,, \tag{6.84}$$

I_ν a K_ν sú modifikované Besselove funkcie prvého a druhého druhu, ν – tého rádu, j znamená imaginárnu jednotku. Pre vrstvu, ktorej povrch sa rozprestiera do nekonečna, je $C_5 = 0$, nakoľko $I_\nu(jk_t r) \rightarrow \infty$, pre $r \rightarrow \infty$.

Riešenie rovnice (6.81) s uvážením vzťahu (6.76) a závislosti poľa od pozdĺžnej súradnice z je teda

$$\dot{E}_z(r,\phi,z) = AZ_E(k_t r)\cos(\nu\phi)\cdot e^{-j\beta z} \tag{6.85.a}$$

$$\dot{H}_z(r,\phi,z) = BZ_H(k_t r)\sin(\nu\phi)\cdot e^{-j\beta z} \qquad \text{pre } k_j^2 - \beta^2 \geq 0 \tag{6.85.b}$$

$$\dot{E}_z(r,\phi,z) = CZ_E(jk_t r)\cos(\nu\phi)\cdot e^{-j\beta z} \tag{6.86.a}$$

$$\dot{H}_z(r,\phi,z) = DZ_H(jk_t r)\sin(\nu\phi)\cdot e^{-j\beta z} \quad \text{pre } k_j^2 - \beta^2 < 0\,. \tag{6.86.b}$$

Z_E, Z_H je superpozícia Besselových funkcií podľa (6.83) resp. (6.84). Nakoľko počiatok odčítania uhlov v cylindrickej sústave môže byť zvolený ľubovoľne, môžeme z riešení (6.79) vybrať ktorúkoľvek goniometrickú funkciu. Pre ν = 0 musíme miesto riešenia (6.79) položiť jedničku. Ak vyberieme pre E_z funkciu cos(νϕ), musíme pre zložku magnetického poľa H_z vybrať funkciu sin(νϕ), v opačom prípade by nebolo možné splniť podmienky na rozhraní jadro - plášť.

Po vyriešení závislosti z - ových zložiek vektorov EM poľa pristúpime k určeniu zostávajúcich priečnych zložiek vektorov poľa. Rovnice (6.71) rozpíšeme v zložkovom tvare v cylindrickom súradnom systéme (pozor na zámenu imaginárnej jednotky j a indexu prostredia)

$$\dot{E}_{rj} = \frac{j}{k_{tj}^2}\left(-\beta\frac{\partial \dot{E}_{zj}}{\partial r} - \omega\mu_0 \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{H}_{zj}}{\partial \phi}\right),$$

$$\dot{E}_{\phi j} = \frac{j}{k_{tj}^2}\left(-\beta\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{E}_{zj}}{\partial \phi} + \omega\mu_0 \frac{\partial \dot{H}_{zj}}{\partial r}\right),$$

$$\dot{H}_{rj} = \frac{j}{k_{tj}^2}\left(-\beta\frac{\partial \dot{H}_{zj}}{\partial r} + \omega\varepsilon_0 n_j^2 \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{E}_{zj}}{\partial \phi}\right),$$

$$\dot{H}_{\phi j} = \frac{j}{k_{tj}^2}\left(-\beta\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{H}_{zj}}{\partial \phi} - \omega\varepsilon_0 n_j^2 \frac{\partial \dot{E}_{zj}}{\partial r}\right). \qquad (6.87.a\text{-}d)$$

Podobne ako pri planárnom vlnovode aj v prípade vláknového vlnovodu platí, že podmienkou vedenia vidu štruktúrou je

$$n_2 < n_1.$$

Fyzikálny zmysel majú iba tie riešenia, pre ktoré je $\beta^2 < k_1^2$. Ak

$$k_2^2 \le \beta^2 \le k_1^2, \qquad (6.88)$$

potom je priečna konštanta $k_{t1} = \sqrt{k_1^2 - \beta^2}$ v jadre reálna a pole v ňom je popísané funkciou podľa (6.83). V plášti je priečna konštanta $k_{t2} = \sqrt{k_2^2 - \beta^2}$ rýdzo imaginárna a pole v ňom je popísané funkciou (6.84). V plášti existuje v uvedenom prípade **evanescentná vlna**.

Podobne ako pre planárny vlnovod zavedieme **normované priečne konštanty** vzťahmi

$$\begin{aligned} U &= k_{t1}a = a\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \\ V &= jk_{t2}a = a\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}\ . \end{aligned} \qquad (6.89)$$

Normovanú frekvenciu definujeme podobne ako pre planárny vlnovod

$$v \equiv \sqrt{U^2 + V^2} = k_0 a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\ . \qquad (6.90)$$

Zavedenie normovanej frekvencie umožňuje vyjadrovať charakteristiky vlnovodu nezávisle od konštrukčných parametrov n_1, n_2 a polomeru jadra a. Definujme ešte **normovanú fázovú konštantu** B

$$B \equiv \frac{\beta^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} = \frac{N_{ef}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{V^2}{v^2}\,, \tag{6.91}$$

kde ako v predchádzajúcom $N_{ef} = \beta/k_0$. Pre vedené vidy spadá veľkosť konštanty B do intervalu $0 \le B \le 1$.

Zložky vektorov EM poľa vedených vidov vyjadríme pomocou normovaných konštánt U a V. Pre zjednodušenie zápisu vynecháme závislosť vektorov poľa od pozdĺžnej súradnice z, ktorá je pre všetky zložky rovnaká - $e^{-j\beta z}$. Pre r < a je z (6.85) a (6.87)

$$\dot{E}_{z1} = AJ_\nu(U\frac{r}{a})\cos(\nu\phi) \tag{6.92.a}$$

$$\dot{H}_{z1} = BJ_\nu(U\frac{r}{a})\sin(\nu\phi) \tag{6.92.b}$$

$$\dot{E}_{r1} = -j\frac{a}{U}\left[\beta AJ'_\nu(Ur/a) + \omega\mu_0\frac{\nu a}{Ur}BJ_\nu(Ur/a)\right]\cos(\nu\phi) \tag{6.92.c}$$

$$\dot{E}_{\phi 1} = j\frac{a}{U}\left[\omega\mu_0 BJ'_\nu(Ur/a) + \frac{\nu\beta a}{Ur}AJ_\nu(Ur/a)\right]\sin(\nu\phi) \tag{6.92.d}$$

$$\dot{H}_{r1} = -j\frac{a}{U}\left[\beta BJ'_\nu(Ur/a) + \omega\varepsilon_0 n_1^2\frac{\nu a}{Ur}AJ_\nu(Ur/a)\right]\sin(\nu\phi) \tag{6.92.e}$$

$$\dot{H}_{\phi 1} = -j\frac{a}{U}\left[\omega\varepsilon_0 n_1^2 AJ'_\nu(Ur/a) + \frac{\nu\beta a}{Ur}BJ_\nu(Ur/a)\right]\cos(\nu\phi) \tag{6.92.f}$$

Pre $r > a$ je z (6.86) a (6.87)

$$\dot{E}_{z2} = CK_\nu(V\frac{r}{a})\cos(\nu\phi) \tag{6.93.a}$$

$$\dot{H}_{z2} = DK_\nu(V\frac{r}{a})\sin(\nu\phi) \tag{6.93.b}$$

$$\dot{E}_{r2} = j\frac{a}{V}\left[\beta CK'_\nu(Vr/a) + \omega\mu_0\frac{\nu a}{Vr}DK_\nu(Vr/a)\right]\cos(\nu\phi) \tag{6.93.c}$$

$$\dot{E}_{\phi 2} = -j\frac{a}{V}\left[\omega\mu_0 DK'_\nu(Vr/a) + \frac{\nu\beta a}{Vr}CK_\nu(Vr/a)\right]\sin(\nu\phi) \tag{6.93.d}$$

$$\dot{H}_{r2} = j\frac{a}{V}\left[\beta DK'_\nu(Vr/a) + \omega\varepsilon_0 n_2^2 \frac{\nu a}{Vr} CK_\nu(Vr/a)\right]\sin(\nu\phi) \tag{6.93.e}$$

$$\dot{H}_{\phi 2} = j\frac{a}{V}\left[\omega\varepsilon_0 n_2^2 CK'_\nu(Vr/a) + \frac{\nu\beta a}{Vr} DK_\nu(Vr/a)\right]\cos(\nu\phi) \tag{6.93.f}$$

V predchádzajúcich vzťahoch sme symbolmi J´ a K´ označili derivácie Besselových funkcií J a K podľa argumentu. Na rozhraní jadro - plášť musia byť splnené podmienky spojitosti tangenciálnych zložiek vektorov EM poľa

$$\dot{E}_{z1}(r = a, \phi, z) = \dot{E}_{z2}(r = a, \phi, z)$$

$$\dot{E}_{\phi 1}(r = a, \phi, z) = \dot{E}_{\phi 2}(r = a, \phi, z)$$

$$\dot{H}_{z1}(r = a, \phi, z) = \dot{H}_{z2}(r = a, \phi, z)$$

$$\dot{H}_{\phi 1}(r = a, \phi, z) = \dot{H}_{\phi 2}(r = a, \phi, z)$$

Po dosadení do uvedených podmienok dostávame

$$AJ_\nu(U) = CK_\nu(V) \tag{6.94.a-d}$$

$$\frac{1}{U}\left[\omega\mu_0 BJ'_\nu(U) + \frac{\nu\beta}{U} AJ_\nu(U)\right] = -\frac{1}{V}\left[\omega\mu_0 DK'_\nu(V) + \frac{\nu\beta}{V} CK_\nu(V)\right]$$

$$BJ_\nu(U) = DK_\nu(V)$$

$$\frac{1}{U}\left[\omega\varepsilon_0 n_1^2 AJ'_\nu(U) + \frac{\nu\beta}{U} BJ_\nu(U)\right] = -\frac{1}{V}\left[\omega\varepsilon_0 n_2^2 CK'_\nu(V) + \frac{\nu\beta}{V} DK_\nu(V)\right].$$

Z rovníc (6.94.a) a (6.94.c) vyjadríme konštanty A, B a dosadíme do (6.94.b) a (6.94.d). Po úprave získame sústavu dvoch rovníc pre neznáme C a D

$$\nu\beta\left[\frac{1}{U^2} + \frac{1}{V^2}\right]C + \omega\mu_0\left[\frac{J'_\nu(U)}{UJ_\nu(U)} + \frac{K'_\nu(V)}{VK_\nu(V)}\right]D = 0\,, \tag{6.95}$$

$$\omega\varepsilon_0\left[n_1^2\frac{J'_\nu(U)}{UJ_\nu(U)} + n_2^2\frac{K'_\nu(V)}{VK_\nu(V)}\right]C + \nu\beta\left[\frac{1}{U^2} + \frac{1}{V^2}\right]D = 0\,. \tag{6.96}$$

Sústava má netriviálne riešenie iba v prípade, keď determinant sústavy je nulový. Po úpravach, s využitím (6.90) dostávame

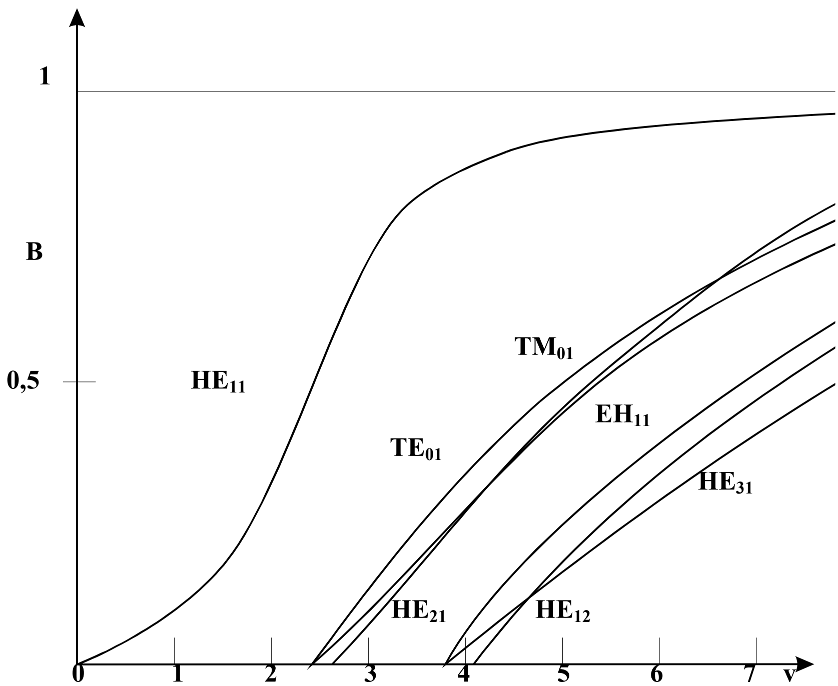
$$\left[n_1^2\frac{J'_\nu(U)}{UJ_\nu(U)} + n_2^2\frac{K'_\nu(V)}{VK_\nu(V)}\right]\left[\frac{J'_\nu(U)}{UJ_\nu(U)} + \frac{K'_\nu(V)}{VK_\nu(V)}\right] = \left(\frac{\nu\beta}{k_0}\right)^2\left(\frac{v}{UV}\right)^4, \tag{6.97}$$

kde $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ je vlnové číslo vákua. Táto rovnica spolu so vzťahmi (6.89) sa nazýva **disperzná rovnica** a je to **rovnica pre neznámu pozdĺžnu konštantu šírenia β.** Všimnime si, že neznáma β je v rovnici prítomná explicitne aj implicitne, cez parametre U,V. Vzhľadom na to, že Besselove funkcie $J_\nu(x)$ sú kváziperiodické, má disperzná rovnica pre zvolené ν **nekonečne mnoho riešení**. Každé riešenie v oblasti

$$k_2 \le \beta \le k_1$$

zodpovedá jednému vedenému vidu, takže vo vlnovode sa môže šíriť iba **konečný počet vedených vidov**. Z disperznej rovnice je možné vypočítať **disperzné charakteristiky** vláknového vlnovodu, ktoré je výhodné vynášať v súradniciach ν, B, definovaných vzťahmi (6.90), (6.91). V tomto prípade sú charakteristiky univerzálne, nezávisle od konkrétnych konštrukčných parametrov. Príklad disperzných charakteristík je na obr. 6.8.

Zvláštnu skupinu riešení tvoria **rotačne symetrické vidy**, pre ktoré je ν = 0.



Obr. 6.8 Závislosť normovanej konštanty šírenia B od normovanej frekvencie v pre niektoré vidy SI vlnovodu

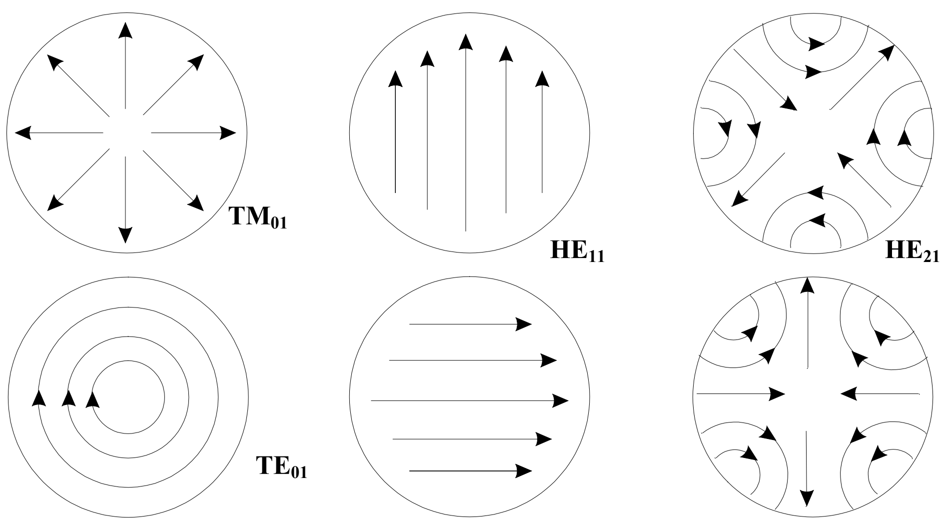
Dosadením do (6.97) sa disperzná rovnica rozpadá na dve nezávisle rovnice

$$\frac{J_0'(U)}{UJ_0(U)}+\frac{K_0'(V)}{VK_0(V)}=0 \qquad \text{pre } TE_{0\mu} \text{ vidy} \tag{6.98}$$

$$n_1^2\frac{J_0'(U)}{UJ_0(U)}+n_2^2\frac{K_0'(V)}{VK_0(V)}=0 \qquad \text{pre } TM_{0\mu} \text{ vidy.} \tag{6.99}$$

Z rovníc (6.95) a (6.98) plynie C = 0, a teda $E_z = 0$. Preto je rovnica (6.98) rovnicou **transverzálne elektrických vidov**, ktoré nemajú v pozdĺžnom smere šírenia prítomnú zložku elektrického poľa. Podobne z rovníc (6.96) a (6.99) plynie D = 0, a teda $H_z = 0$ a rovnica (6.99) je rovnicou **transverzálne magnetických vidov**.

Vo všeobecnom prípade, keď $\nu \neq 0$, disperzná rovnica popisuje tzv. **hybridné vidy**, charakterizované nenulovými konštantami C a D. Voláme ich HE alebo EH vidmi, podľa toho, ktorá pozdĺžna zložka EM poľa je dominantná (pre HE vidy je v smere z dominantná H_z zložka). Povedali sme, že v intervale $k_2 \leq \beta \leq k_1$ existuje pre zvolené ν konečný počet riešení (6.97). Ak označíme poradie riešenia symbolom μ, potom príslušné vidy označujeme symbolmi $TE_{0\mu}$, $TM_{0\mu}$ $HE_{\nu\mu}$, $EH_{\nu\mu}$. TE a TM vidy môžu mať iba **jeden polarizačný stav**, zatiaľ čo HE a EH vidy sa môžu vyskytovať v **dvoch polarizačných stavoch**. Vyplýva to z toho, že vo vzťahoch (6.85), (6.86) sme mohli miesto funkcií $\cos(\nu\phi)$ voliť funkcie $\sin(\nu\phi)$ a opačne.



Obr. 6.9. Možné polarizačné stavy niektorých vidov a schematické znázornenie rozloženia intenzity elektrického poľa pomocou siločiar

6.9 Medzné podmienky vzniku vidu

Medzná frekvencia vidu zodpovedá stavu, keď vlna prestáva byť v radiálnom smere tlmená alebo kedy sa v radiálnom smere začína šíriť energia. Pod touto frekvenciou **zaniká** vedená vlna príslušného vidu a stáva sa z nej vlna vyžarovaná. Medznú frekvenciu stanovíme riešením disperznej rovnice pre $V \to 0$. Pre kritickú normovanú frekvenciu v_c v tomto prípade platí $v_c = U$.

Kritickú normovanú frekvenciu v_c stanovíme pre rotačne symetrické $TE_{0\mu}$, $TM_{0\mu}$ vidy, kedy nie je postup odvodzovania príliš komplikovaný. Pre jednoduchšie určenie medzných podmienok $TE_{0\mu}$, $TM_{0\mu}$ vidov upravíme rovnice (6.98), (6.99). Pre Besselove funkcie platí

$$\frac{J'_\nu(U)}{J_\nu(U)} = \mp \frac{J_{\nu\pm1}(U)}{J_\nu(U)} \pm \frac{\nu}{U} , \tag{6.100}$$

$$\frac{K'_\nu(V)}{K_\nu(V)} = -\frac{K_{\nu\pm1}(V)}{K_\nu(V)} \pm \frac{\nu}{V} , \tag{6.101}$$

takže po dosadení do rovníc (6.98) a (6.99) dostávame

$$\frac{J_1(U)}{UJ_0(U)} + \frac{K_1(V)}{VK_0(V)} = 0 \qquad \text{pre } TE_{0\mu} \text{ vidy,} \tag{6.102}$$

$$n_1^2 \frac{J_1(U)}{UJ_0(U)} + n_2^2 \frac{K_1(V)}{VK_0(V)} = 0 \qquad \text{pre } TM_{0\mu} \text{ vidy.} \tag{6.103}$$

V limitnom prípade, keď $V \to 0$, platia nasledujúce aproximačné vyjadrenia

$$K_0(V) = \ln\frac{1.154}{V} , \tag{6.104}$$

$$K_\nu(V) = \frac{(\nu-1)!}{2}\left(\frac{2}{V}\right)^\nu , \tag{6.105}$$

takže

$$\lim_{V\to0} \frac{K_1(V)}{VK_0(V)} = \lim_{V\to0} \frac{1}{V^2 \ln\left(\frac{1.154}{V}\right)} = \infty . \tag{6.106}$$

Dosadením limity (6.106) do rovníc (6.102) a (6.103) získame spoločnú podmienku riešiteľnosti obidvoch rovníc

$$U\frac{J_0(U)}{J_1(U)} = v_c \frac{J_0(v_c)}{J_1(v_c)} = 0 . \tag{6.107}$$

Na základe platnosti rekurentného vzťahu

$$J_\nu(x) = \frac{x}{2\nu}\{J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)\} \qquad (6.108)$$

dochádzame k záveru, že podmienka (6.107) je splnená, ak platí $J_0(v_c) = 0$. Riešenia rovníc (6.102) a (6.103) sú teda totožné s riešeniami rovnice $J_0(v_c) = 0$. Ak označíme symbolom $Z_{0\mu}$ v poradí μ-tý nulový bod Besselovej funkcie $J_0(x)$, potom riešeniami rovníc (6.102) a (6.103) sú body $Z_{0\mu}$ a rotačne symetrické $TE_{0\mu}$, $TM_{0\mu}$ vidy majú spoločné kritické normované frekvencie, dané vzťahom (pozri 1. stĺpec tab.6.1)

$$v_{c0\mu}^{TE-TM} = Z_{0\mu} \qquad \mu = 1, 2 \ldots \qquad (6.109)$$

V prípade, keď $\nu \neq 0$, je postup stanovenia kritickej normovanej frekvencie zložitejší a uvedieme len závery. Označme symbolom $Z_{\nu\mu}$, μ - tý nulový bod Besselovej funkcie ν-tého rádu $J_\nu(x)$.

i) EH vidy, označované ako $EH_{\nu\mu}$. majú kritickú normovanú frekvenciu danú vzťahom

$$v_{c\nu\mu}^{EH} = Z_{\nu\mu} \qquad \nu = 1, 2 \ldots \qquad \mu = 1, 2 \ldots \qquad (6.109)$$

ii) kritická normovaná frekvencia $\nu_{c\nu\mu}^{HE}$ vyšších azimutálnych vidov $HE_{\nu\mu}$, keď $\nu > 1$, sa spočíta ako riešenie rovnice

$$\frac{J_{\nu-1}(v_c)}{J_\nu(v_c)} = \frac{v_c}{\nu - 1}\frac{n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \qquad (6.110)$$

iii) prvorádové azimutálne $HE_{1\mu}$, vidy majú kritickú frekvenciu danú vzťahom

$$v_{c1\mu}^{HE} = Z_{1(\mu-1)} \qquad \mu = 1, 2 \ldots \qquad (6.111)$$

V tabuľke 6.1 sú uvedené kritické normované frekvencie pre niekoľko prvých vidov SI vlnovodu pre prípad $n_1^2/n_2^2 = 1.1$.

Tab.6.1

Kritické normované frekvencie vidov vláknového SI vlnovodu

	$\nu_{c0\mu}^{TE-TM}$	$\nu_{c1\mu}^{HE}$	$\nu_{c1\mu}^{EH}$	$\nu_{c2\mu}^{HE}$	$\nu_{c2\mu}^{EH}$
μ = 1	2.405	0.0	3.832	2.445	5.136
μ = 2	5.520	3.832	7.016	5.538	8.417
μ = 3	8.654	7.016	10.173	8.665	11.620

Zvláštny význam medzi jednotlivými vidmi SI vlnovodu má **vid HE_{11}**, ktorý má **nulovú kritickú normovanú frekvenciu**. To znamená, že tento vid sa môže vlnovodom šíriť pri každej frekvencii optického žiarenia. Dostávame sa tak k **pojmu jednovidového režimu**, stavu keď sa vlnovodom šíri iba základný HE_{11} vid. Tento stav nastáva, ak konštrukčné parametre vláknového vlnovodu sú navrhnuté tak, že pre žiarenie na príslušnej vlnovej dĺžke platí v < 2.405 a vidy TE_{01} a TM_{01} sa vlnovodom ešte nešíria. Zo vzťahu (6.90) odvodíme kritickú vlnovú dĺžku jednovidového prenosu

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{2{,}405} a\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \,. \tag{6.112}$$

6.10 Priblíženie slabo vedúceho vlákna

Exaktná analýza šírenia vĺn v mnohovidových vlnovodoch, kde sa môže šíriť až niekoľko sto vidov, je časovo veľmi náročná. Vo väčšine prakticky reálnych prípadoch platí $n_1 \cong n_2$ a riešenia disperznej rovnice pre $HE_{\nu+1,p}$ vidy sa blížia riešeniam pre $EH_{\nu-1,p}$ vidy. V priblížení slabo vedúcich vlnovodov tak **nastáva zhoda** v pozdĺžnej konštante šírenia (a teda rýchlosti šírenia vlnovodom) a kritickej frekvencii vzniku uvedených vidov. Superpozíciou takej dvojice vidov s vhodne zvolenými amplitúdami je možné získať vid, ktorý má iba jednu kartézsku zložku priečnej intenzity elektrického poľa a jednu zložku priečnej intenzity magnetického poľa, E_x a H_y alebo E_y a H_x. Také vidy sa **nazývajú lineárne polarizovanými LP_{lp} vidmi**, kde index l nadobúda hodnotu $l = \nu$.

Dosaďme podmienku $n_1 \cong n_2 \cong n$ do disperznej rovnice (6.97). Získame rovnicu

$$\frac{J_\nu'(U)}{UJ_\nu(U)} + \frac{K_\nu'(V)}{VK_\nu(V)} = \pm\nu\left(\frac{\nu}{UV}\right)^2 , \tag{6.113}$$

ktorú môžeme pomocou rekurentných vzťahov (6.100), (6.101) upraviť na

$$\frac{J_{\nu\pm1}(U)}{UJ_\nu(U)} \pm \frac{K_{\nu\pm1}(V)}{VK_\nu(V)} = 0 , \tag{6.114}$$

kde horné znamienko platí pre EH vidy a spodné pre HE vidy. Zavedením nových indexov $l = \nu - 1$ pre HE vidy a $l = \nu + 1$ pre EH vidy získame rovnice

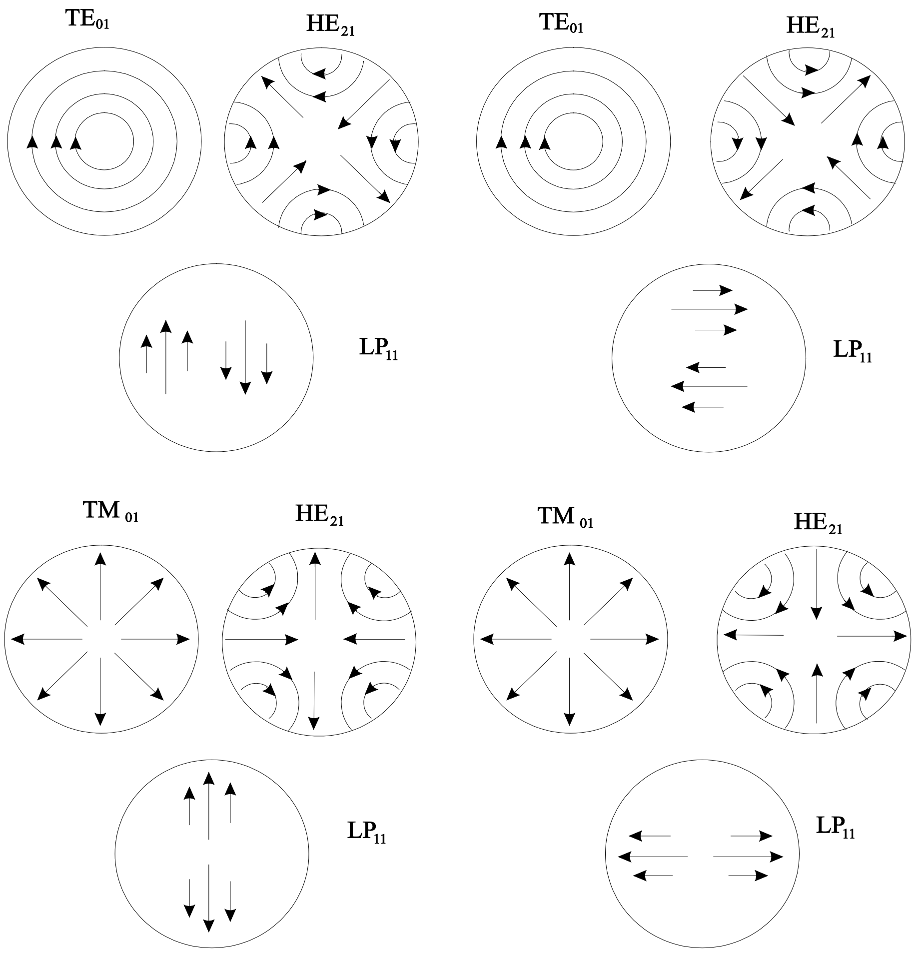
$$\frac{J_l(U)}{UJ_{l+1}(U)} = \frac{K_l(V)}{VK_{l+1}(V)} \tag{6.115}$$

$$\frac{J_l(U)}{UJ_{l-1}(U)} = -\frac{K_l(V)}{VK_{l-1}(V)} \tag{6.116}$$

S použitím rekurentného vzťahu (6.108) a vzťahu

$$K_l(x) = \frac{x}{2l}\left[K_{l+1}(x) - K_{l-1}(x)\right] \tag{6.117.a,b}$$

sa dá rovnica (6.116) upraviť na rovnicu (6.115) a opačne.To nás oprávňuje vysloviť vyššie uvedené tvrdenie, že konštanty šírenia β vidov $EH_{l-1,p}$ a $HE_{l+1,p}$ sú v tejto aproximácii rovnaké a vidy $EH_{l+1,p}$ a $HE_{l-1,p}$ vytvárajú LP_{lp} vidy. Vidy LP_{lp} sú všeobecne **štyrikrát degenerované**, to znamená, nájdeme ich v štyroch rôznych polarizačných stavoch, nakoľko každý z EH a HE vidov je vo vlnovode prítomný v dvoch polarizačných stavoch. Výnimku tvoria LP_{0p} vidy, ktoré su **degenerované dvojnásobne**, nakoľko sú vytvárané iba z HE_{1p} vidov (vidy EH_{-1p} neexistujú). Na obr. 6.10 je príklad konštrukcie štyroch možných LP_{11} vidov.



Obr. 6.10. Scheématické znázornenie vzniku rôznych polarizácií LP_{11} vidov

V tabuľke 6.2 je uvedené zloženie niekoľkých prvých lineárne polarizovaných vidov a ich kritické normované frekvencie. Z tabuľky je zrejmé, že základnému HE_{11} vidu zodpovedá vid LP_{01}.

Tab.6.2

Vytváranie LP vidov a ich kritické normované frekvencie

LP vid	Vytvárajúce vidy	v_c
LP_{01}	HE_{11}	0
LP_{11}	HE_{21}, TE_{01}, TM_{01}	2.405
LP_{02}	HE_{12}	3.832
LP_{21}	HE_{31}, EH_{11}	3.832
LP_{31}	HE_{41}, EH_{21}	5.136
LP_{12}	HE_{22}, TE_{02}, TM_{02}	5.520
LP_{41}	HE_{51}, EH_{31}	6.380
LP_{03}	HE_{13}	7.016
LP_{22}	HE_{32}, EH_{12}	7.016

6.11 Tok energie dvojvrstvovým vláknovým vlnovodom

Tok energie vláknovým vlnovodom určíme zo strednej časovej hodnoty Poyntingovho vektora. Zložka Poyntingovho vektora v smere šírenia (os z) je

$$P_z \vec{z} = \vec{\mathrm{E}}_t \times \vec{\mathrm{H}}_t\,, \qquad \text{kde } \vec{\mathrm{E}}_t = E_r \vec{r} + E_\phi \vec{\phi}\,, \qquad \vec{\mathrm{H}}_t = H_r \vec{r} + H_\phi \vec{\phi}$$

a $\vec{r}, \vec{\phi}$ sú jednotkové vektory v smere súradníc r a ϕ. Po dosadení

$$P_z = E_r H_\phi - E_\phi H_r$$

a stredná hodnota Poyntingovho vektora je

$$\langle P_z \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ E_r H_\phi^* - E_\phi H_r^* \right\}, \tag{6.118}$$

Výkon prenášaný jadrom je

$$P_{w1} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \langle P_{z1} \rangle r dr d\phi \quad . \tag{6.119}$$

Výkon prenášaný plášťom je

$$P_{w2} = \int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \langle P_{z2} \rangle r dr d\phi \; . \tag{6.120}$$

Pre všeobecný vlnovod je vyčíslenie týchto vzťahov veľmi prácne. Pre slabo vedúci vlnovod sa dá odvodiť vzťah pre pomer výkonu vidu v plášti k celkovému výkonu

$$\frac{P_{2lp}}{P_{1lp} + P_{2lp}} = \frac{U^2}{v^2}\left\{1 - \frac{J_l^2(U)}{J_{l+1}(U) \cdot J_{l-1}(U)}\right\} \tag{6.121}$$

Zo vzťahu je vidieť, že s **rastúcou frekvenciou klesá podiel energie šíriacej sa plášťom vlnovodu**. Väčšinou je pracovná frekvencia optického žiarenia volená tak, aby podiel energie šíriacej sa plášťom bol čo najmenší.

Literatúra

[1] SCHRÖFEL J., NOVOTNÝ, K.: Optické vlnovody, Praha, SNTL 1986
[2] NOVOTNÝ, K.: Základy optických komunikací, Praha, Edič. stredisko ČVUT 1982
[3] UNGER, H.G.: Planar optical waveguides and fibres, Oxford, Clarendon Press 1977
[4] SNYDER, A.W., Love J.D.: Optical Waveguide Theory, London, Chapman and Hall 1983
[5] MARCUSE, D.: Theory of Dielectric Optical Waveguides, New York, Academic Press 1974

7. Jednoduchý popis difrakčných javov

7.1 Úvod

Pri popise vplyvu nehomogénneho transparentného (difrakčného) tienitka[1] na chod vĺn, sa v rôznych učebniciach a monografiách spravidla vychádza z Huygensovho-Fresnelovho princípu, avšak bez toho, aby sa venovala pozornosť konzistencii tohto princípu s matematickým popisom procesu šírenia sa vĺn. Sú monografie, v ktorých sa tento problém neobchádza, avšak v takom prípade je výklad matematicky príliš náročný na to, aby bol použiteľný v základných učebniciach na technických školách. Preto sa domnievame, že pri výklade difrakcie môže byť užitočné využiť nasledovný jednoduchý postup, vychádzajúci zo známej vety o jednoznačnosti riešenia vlnovej diferenciálnej rovnice pri zadaní okrajových podmienok (Cauchyho veta).

Táto Cauchyho veta hovorí, že ak plocha S rozdeľuje priestor na dva polpriestory tak, že v jednom z nich nie sú zdroje vĺn a na ploche S je zadaná časová závislosť vlnového stavu a derivácie vlnového stavu podľa normály k tejto ploche, je týmito závislosťami v polpriestore bez zdrojov jednoznačne určené riešenie vlnovej rovnice. V záujme všeobecnosti poznamenajme, že pri určení vlnového stavu v celom priestore a vo všetkých časoch je možné vychádzať i zo znalosti vlnového stavu v jednom okamžiku, ale zo znalosti vlnového stavu v tomto okamžiku a jeho časovej derivácie v **celom** priestore. V takomto prípade sa hovorí o riešení, ktoré vychádza zo znalosti „počiatočných podmienok". Pri svetelných vlnách je ale prakticky nemožné vytvoriť požadovaný „počiatočný stav" podľa ľubovoľnej požadovanej funkcie.

Tvrdenie, že vlnový stav v priestore bez zdrojov je jednoznačne určený vlnami, ktoré do priestoru prichádzajú (t. j. vlnovým stavom na jeho okraji) natoľko koreluje s intuitívnou predstavou, že ho v nasledujúcom texte použijeme i bez matematického dôkazu, namiesto ktorého v závere kapitoly uvádzame zdôvodnenie Cauchyho vety vychádzajúce z mechanizmu numerického riešenia vlnovej rovnice. Pre matematický dôkaz odkazujeme čitateľa na príslušnú literatúru.

7.1 Difrakcia rovinnej vlny na jednorozmernej amplitúdovej mriežke

Nech rovinná vlna

$$u(x, y, z, t) = u_0 \sin(\omega t - k_0 \cdot z) \tag{7.1}$$

[1] Porovnaj s poznámkou pod čiarou v paragrafe 4.4 na strane 86. I v tomto prípade nie je cieľom zatieniť (zabrániť chodu lúčov). Cieľom je modifikovať priestorové rozloženie amplitúdy svetla.

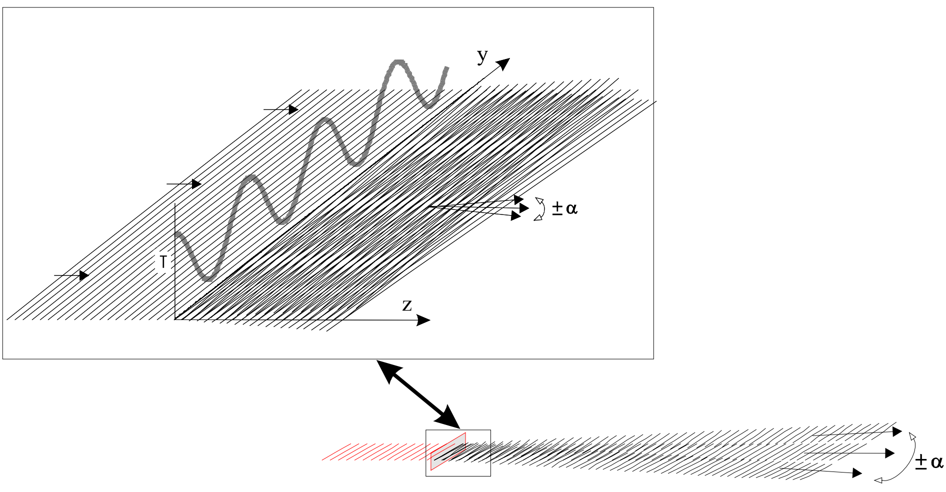
dopadá na transparentné rovinné tienitko uložené v rovine $z = 0$, ktorého priepustnosť je daná výrazom:

$$T(x, y) = T_1 + T_2 \cos(2\pi \cdot y / a) \,, \qquad (7.2)$$

kde a je priestorová perióda závislosti priepustnosti od súradnice a hodnoty T_1 a T_2 sú také, aby $T_1 + T_2 \le 1$, $T_1 - T_2 \ge 0$. Vlnový stav v rovine $z = 0$ bezprostredne po prechode vlny cez tienitko je určený súčinom výrazu (7.1) popisujúceho vlnový stav, ktorý by bol v rovine $z = 0^+$ bez tienitka a priepustnosťou tienitka, určenou výrazom (7.2), takže dostávame:

$$u(x, y, z, t)_{z=0^+} = u_0 T_1 \sin(\omega t) + u_0 T_2 \cos(2\pi \cdot y / a) \cdot \sin(\omega t) \ . \qquad (7.3)$$

Takú závislosť vlnového stavu od súradnice ako ju udáva vzťah (3) možno vytvoriť nielen prechodom vlny cez tienitko s priepustnosťou udanou výrazom (2), ale i superpozíciou troch koherentných rovinných vĺn, z ktorých jedna sa šíri v smere osi z a druhé dve sa šíria v smere odklonenom od osi z o uhol (+/-) α v rovine $y.z$ (obr.7.1).



Obr.7.1. Vplyv difrakčného tienitka s harmonickou závislosťou priepustnosti od súradnice y

Amplitúdy týchto vĺn označme: u_1 , u_2 a u_3 . Ak $u_2 = u_3$, pre vlnový stav určený superpozíciou týchto vĺn v rovine $x.y$ môžeme napísať:

$$u'(y, z) = u_1 \sin(\omega t - k_0 \cdot z) + 2u_2 \cos(k_0 \sin(\alpha) \cdot y) \cdot \sin(\omega t - k_0 \cos(\alpha) \cdot z) \,. \qquad (7.4)$$

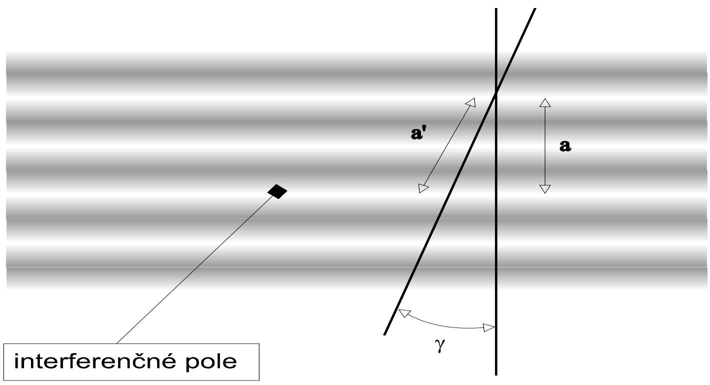
Z porovnania výrazov (7.3) a (7.4) vyplýva, že vtedy, keď

$$u_1 = u_0 \cdot T_1 \ , \ u_1 = \tfrac{1}{2} \cdot u_0 \cdot T_2 \quad \text{a} \quad k_0 \sin(\alpha) = 2\pi / a \ , \qquad (7.5)$$

je vlnový stav v rovine $z = 0$ vytvorený prechodom rovinnej vlny cez tienitko s priepustnosťou udanou vzťahom (7.2) zhodný s vlnovým stavom vytvoreným superpozíciou uvedených troch vĺn. Pri malých uhloch α dochádza v rovine $z = 0$ nielen k zhode vlnových stavov, ale i k zhode derivácie vlnového stavu podľa normály k rovine $z = 0$, takže s odvolaním sa na vetu o jednoznačnosti riešenia pri zadaných okrajových podmienkach možno tvrdiť, že po prechode rovinnej vlny cez takéto tienitko je vlnový stav v celom polpriestore $z > 0$ zhodný s vlnovým stavom popísaným superpozíciou uvedených troch rovinných vĺn. Z toho vyplýva, že prechod rovinnej vlny cez tienitko s harmonickou závislosťou priepustnosti od súradnice vedie k zmenšeniu amplitúdy tejto vlny a k vzniku ďalších dvoch (difragovaných) rovinných vĺn, odklonených od pôvodnej vlny o uhol (+/-) α, pre ktorý zo vzťahu (5) pre $a >> \lambda$ vyplýva:

$$\alpha = \frac{\lambda}{a} . \tag{7.5`}$$

Ako vidíme, veľmi jednoduchou úvahou sme dospeli k popisu difrakcie, na harmonickej mriežke na tienitku s harmonickou závislosťou priepustnosti od súradnice. I keď uvedený popis neposkytuje predstavu o mechanizme vzniku difragovaných vĺn, možno ho považovať za užitočný, a to i preto, že z neho bezprostredne vyplývajú viaceré rysy difrakcie, ktoré sa pri klasickom výklade pomocou Huyghensovho-Fresnelovho princípu často neuvádzajú. Okrem toho, že sa stáva zrejmým, že pri prechode vlny cez harmonickú mriežku, vznikajú iba dve difragované vlny (maximá prvého rádu), je napríklad možné veľmi rýchlo vidieť, ako vyzerá difrakcia pri šikmom dopade vlny na mriežku.



Obr. 7.2. Súvis polohy mriežky a jej efektívnej mriežkovej konštanty

Aby sme to ilustrovali, myslime si v interferenčnom poli uvažovaných troch rovinných vĺn rovinu sklonenú o uhol γ voči osi z (obr. 7.2.). Na to, aby sa tienitkom uloženým v tejto rovine z prechádzajúcej rovinnej vlny s amplitúdou nezávislou od súradnice mohol vytvoriť vlnový stav zodpovedajúci superpozícii uvedených troch vĺn, musí byť jeho priepustnosť harmonická, avšak priestorová závislosť jeho priepustnosti musí mať periódu rovnú

$$a' = a/\cos(\gamma) \quad ,$$

kde a je perióda závislosti vlnového stavu v rovine z = *konštanta*. To znamená, že pri šikmom dopade vlny na difrakčnú mriežku sa vytvárajú vlny odklonené od smeru šírenia sa pôvodnej rovinnej vlny o uhol $\alpha = \arcsin(1/\cos(\gamma)\cdot a')$. Pre malé uhly dopadu γ to znamená, že uhol odklonu difrakciou vytvorených vĺn nezávisí od uhla pod ktorým difragovaná vlna na mriežku dopadá.

Na základe predchádzajúcej úvahy možno ukázať, ako bude vyzerať difrakčný obrazec i vtedy, keď tienitko nemá harmonickú závislosť priepustnosti od súradnice. V takom prípade možno pri hľadaní popisu difrakcie vychádzať z vyjadrenia vlnového stavu v rovine $z = 0$ prostredníctvom Fourierovho radu, t. j. z výrazu:

$$u(x,y)_{z=0} = u_0 + \sum_n u_n \sin(2\pi\cdot n\cdot y/a + \phi_n) \quad . \tag{7.6}$$

Z predchádzajúceho vyplýva, že každému členu tohto Fourierovho radu prislúcha dvojica rovinných vĺn, ktorých vlnové vektory zvierajú s osou z uhly určené vzťahom

$$k_0 \sin(\alpha_n) = 2\pi\cdot n/a \quad ,$$

kde a je základná perióda závislosti vlnového stavu od súradnice v rovine $z = 0$, a teda i perióda priestorovej závislosti priepustnosti použitého tienitka. Fourierov rad (7.6) tak poskytuje jednoduchý a názorný súvis amplitúd jednotlivých difrakčných maxím s Fourierovskými amplitúdami závislosti priepustnosti tienitka od súradnice y.

Pri prechode rovinnej vlny s amplitúdou u_0 cez klasickú mriežku s obdĺžnikovou závislosťou od súradnice[2] možno vlnový stav v rovine $z = 0$ vyjadriť súčinom $T(\mathrm{y}).u(x,y,z,t)_{z=0}$. Keď $T(\mathrm{y})$ vyjadríme Fourierovým radom, dostaneme:

$$u(x,y,z,t)_{z=0} = \frac{u_0}{2} + \sum_n \left(\frac{2u_0}{n\pi} \sin(n\pi/2)\cdot\sin(n\cdot 2\pi\cdot y/a \right)\cdot\sin(\omega t) \quad .$$

Pretože amplitúdy jednotlivých harmonických zložiek tohto radu sú rovné $2u_0$ / n.π , možno ich podľa vzťahu (7.5) nahradiť dvojicami rovinných vĺn s amplitúdami u_0 /2π.n , čo korešponduje amplitúdam n-tého difrakčného rádu podľa tradičného vyjadrenia difrakcie na mriežke s "obdĺžnikovou" závislosťou priepustnosti.

Analogický postup možno použiť i pre popis difrakcie pri prechode vlny cez tienitko s aperiodickou závislosťou priepustnosti od súradnice. Rozdiel spočíva iba v tom, že miesto vyjadrenia vlnového stavu Fourierým radom, závislosť vlnového stavu v rovine

---

[2] To znamená cez tienitko s priepustnosťou rovnou $T(y) = 1$ pre $y \in \left(m\cdot a, (m+\tfrac{1}{2})a\right)$, kde m je celé číslo a priepustnosťou rovnou $T(y) = 0$ pre ostatné y.

$z = 0$ vyjadríme Fourierovým integrálom.Tak napríklad pri prechode rovinnej vlny cez štrbinu šírky d (priepustnosť T je rovná 1 pre $y \in (-d/2, d/2)$ a $T = 0$ pre $y \notin (-d/2, d/2)$), možno závislosť priepustnosti štrbiny od súradnice vyjadriť Fourierovým integrálom:

$$T(y) = \tfrac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\eta \cdot d/2)}{\eta} \cdot \cos(\eta \cdot y) \cdot d\eta \,.$$

Vlnový stav v rovine $z = 0$ (po prechode tienitkom) je rovný súčinu pôvodného vlnového stavu a priepustnosti tienitka, takže:

$$u(x, y, z, t)_{z=0} = u_0 \cdot \tfrac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(\eta \cdot d/2)}{\eta} \cdot \cos(\eta \cdot y) \cdot d\eta \cdot \sin(\omega t)\,.$$

Pretože premenná η má fyzikálny zmysel priestorovej frekvencie ($\eta = 2\pi/a$, kde a je perióda priestorovej závislosti príslušnej "zložky" Fourierovho rozkladu), môžeme s použitím vzťahu (7.5) pre malé uhly

α (pre ktoré je $\sin(\alpha) = \alpha$ a $\cos(\alpha) = 1$) vlnový stav v rovine $z = 0$ vyjadriť:

$$u(x, y, z, t)_{z=0} = u_0 \cdot \tfrac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha \cdot k_0 \cdot a/2)}{\alpha} \cdot \cos(\alpha \cdot k_0 \cdot y) \cdot d\alpha \cdot \sin(\omega t)\,.$$

Ako sme ukázali v predchádzajúcich odsekoch, každú harmonickú zložku závislosti vlnového stavu v rovine $z = 0$ možno nahradiť súčtom dvoch harmonických rovinných vĺn odklonených od osi z o uhol α. Znamená to, že v polpriestore $z > 0$ možno pre vlnový stav napísať:

$$u(x, y, z, t)_{z \geq 0} = \frac{u_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha \cdot k_0 \cdot a/2)}{\alpha} (\sin(\omega t - k_0 \alpha . y - k_0 . z) +$$

$$+ \sin(\omega t + k_0 \alpha . y - k_0 . z)) . d\alpha \,.$$

Ako je vidieť z tohto vzťahu, závislosť amplitúdy difragovanej vlny od uhla a vypočítaná uvedeným postupom korešponduje závislosti plynúcej z tradičného postupu.

7.2 Difrakcia na kruhovej mriežke

Vyjadrime najprv aké je rozloženie amplitúdy a fázy interferenčného poľa dvoch guľových vĺn, z ktorých jedna je rozbiehavá guľová vlna so stredom v $\vec{r}_1$ a druhá zbiehavá so stredom v mieste $\vec{r}_2$. Vlnový stav vytvorený superpozíciou týchto dvoch vĺn môžeme vyjadriť vzťahom:

$$u'(\vec{r}, t) = \frac{u_0}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \cdot \sin\left(\omega t - k \cdot |\vec{r} - \vec{r}_1|\right) + \frac{u_0}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \cdot \sin\left(\omega t - k \cdot |\vec{r} - \vec{r}_2|\right). \qquad (7.8)$$

Keď vyberieme polohy stredov týchto vĺn tak, aby $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2 = -\vec{r}_0 \cdot \vec{i}$ ($\vec{i}$ je jednotkový vektor v smere osi z), pre vyjadrenie vlnového stavu v rovine $z = 0$ po jednoduchých úpravách dostaneme nasledujúci výraz:

$$u'(x,y,z,t)_{z=0} = \frac{2 \cdot u_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + r_0^2}} \cdot \cos\left(k_0 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + r_0^2}\right) \cdot \sin(\omega t) \,. \qquad (7.9)$$

Ako je vidieť zo vzťahu (7.9), fáza tohto interferenčného poľa je v rovine $z = 0$ všade rovnaká, podobne ako tomu bolo pri interferencii rovinných vĺn s vlnovými vektormi odklonenými od osi z o uhol (+/-) α. V dôsledku toho môžeme povedať, že ak rovinná vlna $u = u_0 \sin(\omega t - k \cdot z)$ prejde cez „kruhovú mriežku“, t. j. cez tienitko, ktorého závislosť priepustnosti od súradnice je vyjadrená vzťahom

$$T(x,y) = T_1 + \frac{2 \cdot T_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + r_0^2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + r_0^2}}{a}\right), \qquad (7.10)$$

je vlnový stav bezprostredne po prechode vlny týmto tienitkom (až na aditívnu konštantu) taký istý, ako vlnový stav vytvorený interferenciou guľovej rozbiehavej a zbiehavej vlny so stredmi symetricky uloženými voči rovine tienitka a rovinnej vlny šíriacej sa kolmo na rovinu tienitka. Amplitúdy týchto vĺn, podobne ako pri difrakcii na jednorozmernej mriežke, sú určené parametrami závislosti priepustnosti tienitka od súradnice. Z porovnania vzťahov (7.9) a (7.10) vidíme, že keď

$$u_1 = T_1 \cdot u_0 \,, \quad u_{21} = u_3 = \tfrac{1}{2} T_2 \cdot u_0 \quad \text{a} \quad a = \frac{2\pi}{k_0} \,, \qquad (7.11)$$

je vlnový stav v rovine $z = 0$ v prípade prechodu vlny tienitkom s nehomogénnou .priepustnosťou (7.10) taký istý ako v prípade interferencie uvedených vĺn. Pretože i derivácia vlnového stavu podľa normály k rovine tienitka vlnového stavu rovinnej vlny s amplitúdou modulovanou priepustnosťou vyjadrenou vzťahom (7.10) je zhodná s deriváciou vlnového stavu popísaného superpozíciou uvedených guľových vĺn a rovinnej vlny, je podľa vety o jednoznačnosti riešenia vlnovej rovnice, vlnový stav v oboch prípadoch v celom polpriestore $z > 0$ rovnaký. Prechodom rovinnej vlny cez tienitko s priepustnosťou vyjadrenou výrazom (7.10) sa teda vytvorí superpozícia rovinnej vlny (s menšou amplitúdou) a zbiehavej a rozbiehavej guľovej vlny so stredmi vo vzdialenosti (+/-) r od roviny tienitka.

7.3 Difrakcia na tienitku s dvojrozmernou závislosťou priepustnosti od súradnice

Doteraz sme vyšetrovali priebeh difrakcie pri prechode svetla transparentným tienitkom, ktorého priepustnosť (prípadne rozloženie fázy) závisí od jednej súradnice. I keď sme vyšetrovali i priebeh difrakcie na tienitku s kruhovo symetrickým rozložením priepustnosti, u ktorého sa priepustnosť mení v smere osi x ako i v smere osi y, v istom zmysle slova i takýto priebeh je jednorozmerný - priepustnosť závisí len od jedinej súradnice - polomeru r.

Za dvojrozmernú závislosť pokladáme takú závislosť, pri ktorej sa funkčná hodnota mení pri zmene každej zo súradníc x a y (resp. r a ϕ pri cylindrických súradniciach). Pre ilustráciu difrakčných vlastností dvojrozmerných difrakčných tienitiek nám postačí, keď vyšetríme iba tienitka so špeciálnym druhom závislosti priepustnosti od súradníc a to s takým rozložením priepustnosti, ktorý sa dá vyjadriť ako súčin funkcie závisiacej od súradnice x a funkcie závisiacej od y, t. j. priebehov priepustnosti typu:

$$T(x,y) = T_x(x) \cdot T_y(y) .$$

Nech sa teda závislosť priepustnosti tienitka od súradníc dá vyjadriť napríklad nasledovne:

$$T(x,y) = \tfrac{1}{2} \cdot (1+\cos(2\pi \cdot x/a)) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (1+\cos(2\pi \cdot y/b)) . \qquad (7.12)$$

Optický stav v rovine $z = 0$ po prechode rovinnej vlny takýmto tienitkom, ktoré je uložené práve v rovine $z = 0$, možno vyjadriť ako :

$$u(x,y,z,t)_{z=0} = T(x) \cdot \tfrac{1}{2}(1+\cos(2\pi \cdot y/b) \cdot u_0 \cdot \sin(\omega t) \ , \qquad (7.13)$$

kde $T(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+\cos(2\pi \cdot x/a))$. Pretože rovinná vlna, ktorej amplitúda závisí od súradnice harmonicky, sa dá nahradiť trojicou rovinných vĺn s vlnovými vektormi odklonenými o difrakčný uhol β, môžeme (pokiaľ je uhol β malý) miesto (7.13) napísať

$$u(x,y,z,t)_{z=0} =$$

$$= T(x)\frac{u_0}{4}\sin(\omega t - k\beta y - kz)_{z=0} + T(x)\frac{u_0}{2}\sin(\omega t - kz)_{z=0} + T(x)\frac{u_0}{4}\sin(\omega t - k\beta y - kz)_{z=0} .$$

Keďže všetky členy predchádzajúcej rovnice majú amplitúdy harmonicky závislé od súradnice x , každý z nich predstavuje tri rovinné vlny navzájom odklonené o difrakčný uhol β ležiaci v rovine $x.z$. Difrakčné uhly α a β sú závislé od mriežkových konštánt [3] v smere osi x a y a rovnajú sa $\alpha = \lambda / a$ a $\beta = \lambda / b$.

[3] Inými slovami: od periód závislosti priepustnosti v smere osi x a osi y .

Pre vlnový stav v priestore za difrakčným tienitkom (to znamená pre súradnice $z > 0$) tak dostaneme vyjadrenie z ktorého je zrejmé, že prechodom rovinnej vlny cez takéto tienitko sa vytvorí súbor deviatich rovinných vĺn :

$$\begin{aligned}
&u(x,y,z,t)_{z>0} = \\
&= \frac{u_0}{16}\sin(\omega t - k\alpha x - k\beta y - kz) + \frac{u_0}{8}\sin(\omega t - k\alpha x - 0\cdot ky - k\cdot z) + \frac{u_0}{16}\sin(\omega t - k\alpha x + k\beta y - kz) + \\
&+ \frac{u_0}{8}\sin(\omega t - 0\cdot kx - k\beta y - kz) + \frac{u_0}{4}\sin(\omega t - 0\cdot kx - 0\cdot ky - k\cdot z) + \frac{u_0}{8}\sin(\omega t - 0\cdot kx + k\beta y - kz) + \\
&+ \frac{u_0}{16}\sin(\omega t + k\alpha x - k\beta y - kz) + \frac{u_0}{8}\sin(\omega t + k\alpha x - 0\cdot ky - k\cdot z) + \frac{u_0}{16}\sin(\omega t + k\alpha x + k\beta y - kz)
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Grafická forma tohto zápisu je zvolená tak, aby zodpovedala difrakčnému obrazu, ktorý by sa vytvoril na tienitku po difrakcii úzkeho rovnobežného zväzku na mriežke s uve-denou závislosťou priepustnosti od súradnice - v prostriedku difrakčného obrazca sa s naj-vyššou intenzitou vytvorí stopa od pôvodného zväzku (lúča) na jeho stranách sú slabšie stopy od lúčov odklonených o uhol +/- β v dôsledku difrakcie spôsobenej závislosťou priepustnosti od súradnice *y,* ale neovplyvnené difrakciou v dôsledku závislosti priepustnosti od súradnice *x*. V uvedenom zápise tomu zodpovedá prostredný riadok. V hornom a dolnom riadku sú uvedené členy, ktoré popisujú lúče vytvorené difrakciou v dôsledku závislosti priepustnosti od súradnice *x* , takže v rohoch tohto „obdĺžnika“ budú stopy od najmenej intenzívnych lúčov, odklonených v oboch smeroch .

Zavedením vhodne indexovaných veličín môžeme predchádzajúci vzťah prepísať do pomerne jednoduchej formy:

$$u(x,y,z,t)_{z>0} = \sum_{i,j} u_0 \cdot a_{i,j} \cdot \sin(\omega t - k_{\alpha,i}x - k_{\beta,j}y - k_{i,j}z),$$

kde indexy i a j nadobúdajú hodnoty : -1, 0, +1, a použité veličiny $a_{i,j}$, $k_{\alpha,i}$, $k_{\beta,i}$ a $k_{i,j}$ sa rovnajú:

$$a_{i,j} = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{1+i^2}\cdot\tfrac{1}{1+j^2}\ ,\quad k_{\alpha,i} = i\cdot k\cdot\sin(\alpha)\ ,\ k_{\beta,j} = j\cdot k\cdot\sin(\beta)\quad \text{a}$$

$$k_{i,j} = k\cdot\sqrt{1-(i\cdot\sin\alpha)^2-(j\cdot\sin\beta)^2}\ .$$

Tento zápis už neobsahuje predchádzajúce obmedzenie na malé difrakčné uhly.

Záverom ešte uveďme ako bude vyzerať difrakcia na obdĺžnikovom otvore, t.j. difrakcia rovinnej vlny pri prechode tienitkom, ktorého priepustnosť T = 1, keď $x \in (-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2})$ a $y \in (-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2})$ a T=0, keď $x \notin (-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2})$ a $y \notin (-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2})$. Pretože i teraz môžeme priepustnosť zapísať ako súčin funkcie závisiacej od *x* a funkcie závisiacej od *y*, pri odvodení popisu difrakcie môžeme postupovať analogicky ako v predchádzajúcom prípade. Predpokladáme teda, že priepustnosť

$T(x,y) = T_x(x) \cdot T_y(y)$, kde T_x sa rovná 1, keď $x \in (-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2})$ a rovná sa nule, keď $x \notin (-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2})$. Podobne $T_y = 1$ keď $y \in (-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2})$ a $T_y = 0$, keď $y \notin (-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2})$. Vlnový stav v rovine $z = 0$ (po prechode tienitkom) môžeme preto vyjadriť ako:

$$u(x,y,z,t)_{z=0} = u_0 \cdot T_x(x) \cdot T_y(y) \cdot \sin(\omega t).$$

Vlnový stav s amplitúdou neperiodicky závislou od súradnice y môžeme nahradiť Fourierovým integrálom, čo fyzikálne predstavuje „superpozíciu“ nekonečne veľkého počtu rovinných vĺn s vlnovými vektormi odklonenými od osi z o všetky možné hodnoty +/- β z intervalu 0 až 2π a s amplitúdou závislou od uhla β. Dostávame tak:

$$u(x,y,z,t)_{z=0} = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot T_x(x) \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sin(k \cdot \sin(\beta) \cdot b/2)}{\beta} \cdot \sin(\omega t - k \cdot \sin\beta \cdot y - k \cdot \cos\beta \cdot z) \cdot d\beta$$

Keď pomocou Fourierovho integrálu vyjadríme i vplyv závislosti amplitúdy od súradnice x, dostaneme:

$$u_{z>0} =$$

$$= \frac{u_0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sin(k_x(\alpha) \cdot a/2)}{\alpha} \cdot \frac{\sin(k_y(\beta) \cdot b/2)}{\beta} \cdot \sin(\omega t - k_x(\alpha)x - k_y(\beta)y - k_z(\alpha,\beta)z)\, d\alpha d\beta$$

kde $k_x(\alpha) = k \cdot \sin(\alpha)$, $k_y(\beta) = k \cdot \sin(\beta)$ a $k_z(\alpha,\beta) = k\sqrt{1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}$.

Zaujímavý výsledok môžeme z predchádzajúceho vzťahu dostať pomocou predstavy limitného zmenšenia veľkosti otvoru ($a \to 0$, $b \to 0$). Prechodom a a b k nule sa výrazy $\frac{\sin(k_\alpha \cdot a/2)}{\alpha}$ a $\frac{\sin(k_\beta \cdot b/2)}{\beta}$, určujúce amplitúdu difragovanej vlny, tiež stávajú nulové. Inými slovami, difragovaná vlna prestane existovať. Avšak ak zároveň so zmenšovaním otvoru v tienitku budeme zväčšovať amplitúdu vlny dopadajúcej na tienitko, amplitúda difragovanej vlny i v limitnom prípade môže byť konečná. Limitným zmenšením veľkosti otvorov (veľkosti a a b) výrazy $\frac{\sin(k_\alpha \cdot a/2)}{\alpha}$ a $\frac{\sin(k_\beta \cdot b/2)}{\beta}$ nadobudnú hodnoty $a/2$ a $b/2$, takže amplitúdy difrakciou vytvorených rovinných vĺn prestanú závisieť od smeru, do ktorého sa šíria. Superpozícia rovinných vĺn rovnomerne zastúpených v každom smere však predstavuje guľovú vlnu. Takým spôsobom dostávame výsledok, podľa ktorého na bodovom (veľmi malom) otvore sa difrakciou vytvoria guľové vlny. Tento výsledok koreluje s Huygensovým princípom, podľa ktorého každý bod čela vlny možno považovať za zdroj guľovej vlny. Uvedeným postupom sme sa však k tomuto tvrdeniu dopracovali - stráca preto pre nás Huygensov charakter princípu a stáva sa dôsledkom (vyplývajúcim z vety o jednoznačnosti riešenia vlnového problému pri zadaní okrajových podmienok).

7.4 Fázová mriežka

V predchádzajúcich paragrafoch sme sa zaoberali prípadmi, keď svetelná vlna prechádza cez tienitko s priestorovo závislou priepustnosťou. Videli sme, že pri prechode takýmto tienitkom vznikajú nové, difrakčné vlny, a to v prípade, že fáza prešlej vlny sa tienitkom ovplyvňuje homogénne. Venujme sa teraz chvíľu prípadu, keď svetelná vlna prechádza cez tienitko s priepustnosťou rovnakou vo všetkých miestach, avšak optická hrúbka tienitka (súčin indexu lomu a jeho geometrickej hrúbky) je v rôznych miestach odlišná. Pre jednoduchosť predpokladajme, že optická hrúbka fázovej mriežky je harmonickou funkciou jednej súradnice, kolmej k rovine mriežky, t. j. že

$$h = h_0 + \Delta h \cdot \sin(2\pi \cdot y / d)\,, \tag{7.15}$$

kde d je perióda priestorovej závislosti optickej hrúbky (mriežková konštanta fázovej mriežky). Nech na takúto platničku kolmo dopadá rovinná svetelná vlna vlnovej dĺžky λ. Bezprostredne po prechode tejto vlny cez popísanú fázovú mriežku, je vlnový stav určený nasledovným výrazom

$$u(y) = u_0 \sin(\omega t - 2\pi \cdot \frac{h(y)}{\lambda}) \quad . \tag{7.15'}$$

Predpokladajme, že rozdiely fázového posunutia v rôznych miestach platničky sú také malé, že $\Delta h/\lambda << 1$. V takom prípade možno vlnový stav po prechode platničkou vo všetkých bodoch vyjadriť superpozíciou dvoch vĺn s fázou nezávislou od súradníc ležiacich v platničke - prvá z týchto vĺn má amplitúdu a fázu konštantnú a rovnú strednej hodnote amplitúdy a fázy pôvodnej vlny po jej prechode platničkou. Druhá z nich má tiež fázu konštantnú, ale voči prvej vlne posunutú o $\pi/2$ a navyše jej amplitúda závisí od súradnice y. Že súčet takýchto dvoch vĺn dáva vlnový stav zodpovedajúci vzťahu (7.15') sa dá ľahko vidieť pri zápise ich vlnového stavu pomocou komplexných čísel. Ak vlnové stavy zodpovedajúce týmto vlnám v rovine $z = 0$ vyjadríme ako $a_1.\exp(j\omega t)$ a $a_2.\exp(j(\omega t - \pi/2))$, ich súčet je rovný:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \exp(i(\omega t + artg(a_2/a_1))\,), \tag{7.16}$$

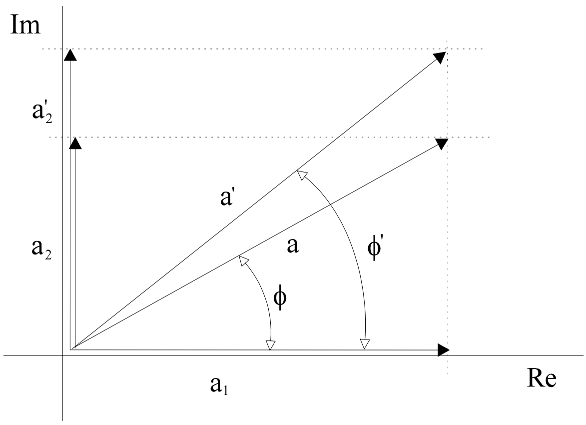
z čoho pre malé hodnoty a_2 dostávame

$$a_1 \cdot \exp(i(\omega t + (a_2 / a_1))\,)\,. \tag{7.16'}$$

Porovnaním tohoto výrazu so vzťahom (7.15') vidíme, že keď

$$a_1 / a_2 = 2\pi \cdot \Delta h \cdot \sin(\frac{2\pi \cdot y}{\lambda})\,, \tag{7.17}$$

výraz (7.16') skutočne odpovedá vlnovému stavu vytvorenému prechodom cez fázovú mriežku. Z predchádzajúceho však vieme, že taká závislosť amplitúdy, ako udáva vzťah (7.17) je rovnocenná existencii dvoch vĺn odklonených o uhol $\alpha = (+/-)\ d\ /\ \lambda$ od pôvodného smeru a s amplitúdami $u_{1,2} = 2\pi.\Delta h.a_1\ /\lambda$. Na fázovej mriežke dochádza teda k difrakcii tak, ako tomu bolo na mriežke amplitúdovej. Všimnime si ešte, že energetické pomery sú u fázovej mriežky odlišné. Zatiaľ čo pri amplitúdovej mriežke je súčet intenzít svetelných zväzkov po prechode cez mriežku vždy menší ako intenzita dopadajúceho lúča (a to i vtedy, keď $T_1 = T_2$, t. j., keď je modulácia amplitúdy stopercentná), pri fázovej mriežke je súčet intenzít vĺn vytvorených difrakciou rovný intenzite dopadajúcej vlny, pretože v tomto prípade je amplitúda „neodklonenej“ vlny rovná nule.



Obr. 7.3. Sčítanie vĺn, ktorých fáza sa líši o π/2 . Všimnite si, že fáza súčtu týchto vĺn závisí od pomeru ich amplitúd

7.5 Akustooptické modulátory a deflektory

Ako sme videli v predchádzajúcich odsekoch, pri prechode svetelného zväzku cez amplitúdovú alebo fázovú mriežku, dochádza k vzniku nového (difragovaného) zväzku, ktorého amplitúda a smer šírenia sa závisia od parametrov použitej mriežky. Keby sme mali k dispozícii mriežku, ktorej parametre môžeme v priebehu jej použitia meniť, mali by sme k dispozícii zariadenie, umožňujúce reguláciu amplitúdy a smeru šírenia sa vytvoreného zväzku. Mechanizmov, pomocou ktorých sa dá meniť priepustnosť a index lomu je niekoľko. Sú to napríklad závislosť indexu lomu od elektrického poľa (elektrooptický efekt), závislosť priepustnosti vhodných materiálov od elektrického alebo magnetického poľa (tekuté kryštály, prípadne kvapaliny so silne polarizovateľnými koloidnými časticami), závislosť indexu lomu polovodičov od koncentrácie nosičov náboja, závislosť indexu lomu od mechanického napätia (piezooptický efekt) a podobne.

Bezprostredné použitie uvedených mechanizmov znamená realizovať prvok, v ktorom je budúca mriežka technológiou prvku dopredu určená. Napríklad: prvok má vytvorenú sústavu elektród, ktorá predurčuje mriežkovú konštantu mriežky vytvorenej elektrickým poľom, alebo prvok pozostáva z komôrok vyplnených striedavo magnetoopticky aktívnou a neaktívnou kvapalinou a podobne. Nie je preto možné bez obmedzenia regulovať mriežkovú konštantu takto vytváranej mriežky. Existujú však nepriame spôsoby, ktoré umožňujú realizáciu mriežok, ktorých amplitúda ako i mriežková konštanta sa dájú meniť. Z možností ktoré to dovoľujú uveďme dva : postup využívajúci závislosť indexu lomu polovodičov od koncentrácie nosičov náboja a postup založený na piezooptickom efekte.

Keď vhodnú polovodičovú vrstvu (z materiálu vykazujúceho dostatočne silnú fotovodivosť) osvetlíme dvoma koherentnými rovinnými vlnami zvierajúcimi uhol 2α a s vlnovými dĺžkami zodpovedajúcimi oblasti fotovodivosti použitého polovodiča, vytvorí sa v polovodičovej vrstve nerovnomerné rozloženie nosičov náboja. Maximálna hustota nosičov náboja bude korešpondovať miestam s maximálnou intenzitou interferenčného poľa použitých vĺn. Keď takýto prvok osvetlíme vlnou s väčšou vlnovou dĺžkou (pre ktorú je použitá vrstva priehľadná), bude sa vrstva správať ako fázová mriežka, pretože index lomu materiálu závisí od koncentrácie nosičov náboja. Amplitúdou osvetlenia je možné meniť veľkosť modulácie indexu lomu, a tým i amplitúdu difrakciou vytvoreného zväzku. Navyše, zmenou uhla, ktorý zvierajú interferujúce rovinné vlny sa mení vzdialenosť interferenčných maxím, a teda mriežková konštanta takto vytvorenej mriežky. Zmení sa tým smer šírenia sa difrakciou vytvorenej vlny. Môže teda byť takáto vrstva použitá ako optický modulátor, alebo deflektor. Rozsah jeho použiteľnosti závisí od rýchlosti odozvy rozloženia koncentrácie nosičov náboja pri zmene amplitúdy, alebo uhla osvetľovacích zväzkov. Práve v dôsledku toho, že polovodiče s vysokou fotovodivosťou vykazujú pomerne vysokú zotrvačnosť (veľkú dobu života a zároveň vysokú dobu relaxácie koncentrácie nosičov náboja) je využitie takýchto modulátorov obmedzené.

Druhý možný spôsob vytvorenia fázovej mriežky je založený na piezooptickom efekte vyvolanom akustickou (ultrazvukovou) vlnou šíriacou sa vo vhodnom prostredí. Napríklad index lomu kvapalín závisí od ich hustoty a teda bezprostredne od deformácie vyvolanej šíriacou sa akustickou vlnou. Takým spôsobom napríklad kyveta naplnená vodou, ak sa ňou šíri ultrazvuková vlna, predstavuje pre svetelnú vlnu prechádzajúcu kvapalinou kolmo na smer šírenia sa akustickej vlny fázovú mriežku. Pretože vlnová dĺžka akustických vĺn je pri vysokých frekvenciách (desiatky až stovky MHz) dostatočne malá, je difrakčný uhol vyvolaný takouto mriežkou dostatočne veľký na to, aby mohol byť tento efekt prakticky využitý ako deflektor svetelných vĺn. Výhodou takéhoto deflektora je, že zmena jeho mriežkovej konštanty sa nemusí dosahovať zmenou geometrie usporiadania ako v predchádzajúcom prípade, ale zmenou frekvencie elektrického signálu, ktorým sa generuje akustická vlna. Amplitúda difragovaného zväzku je prirodzene závislá od amplitúdy akustickej vlny.

Pre úplnosť musíme ešte upozorniť na to, že difrakcia na akustickej vlne sa odohráva na "pohybujúcej sa mriežke"[4], zatiaľ čo poloha mriežok v predchádzajúcich

---

[4] Dokonca i pri difrakcii na “stojatej“ akustickej vlne je tomu tak, pretože stojatá vlna je superpozíciou dvoch proti sebe postupujúcich vĺn.

prípadoch sa v čase nemenila. S tým súvisí to, že poloha miesta s vybranou hodnotou posunu fáze sa v rovine $z = 0$ v čase mení. Vyšetrime, ako táto skutočnosť ovplyvňuje priebeh difrakcie. Pre jednoduchosť sa najprv pozrime, ako by vyzerala difrakcia, keby akustická vlna vytvárala nie fázovú, ale amplitúdovú mriežku. Vlnový stav v rovine $z = 0$ by v takom prípade bol rovný:

$$u = u_0 \cdot \Delta T \cdot \sin(\Omega t - K \cdot y) \cdot \sin(\omega t), \tag{7.18}$$

kde ΔT je amplitúda modulácie optickej priepustnosti vyvolanej akustickou vlnou, Ω je frekvencia akustickej vlny a K je jej vlnové číslo. Na to, aby superpozícia dvoch rovinných vĺn zvierajúcich uhol 2α vytvorila priestorovú moduláciu amplitúdy s pohybujúcim sa maximom stačí predpokladať, že tieto vlny nemajú rovnakú frekvenciu. Skutočne, sčítaním dvoch rovinných vĺn

$$u_1 = u_{1,0} \cdot \sin((\omega - \Omega)t - k \cdot \sin(\alpha) \cdot y - k \cdot \cos(\alpha) \cdot z) \qquad \text{a vlny :}$$

$$u'_1 = u_{1,0} \cdot \sin((\omega + \Omega)t + k \cdot \sin(\alpha) \cdot y - k \cdot \cos(\alpha) \cdot z)$$

dostaneme vyjadrenie vlnového stavu zhodného s výrazom (7.18). Teda: Difrakciou na mriežke tvorenej vlnou s frekvenciou Ω sa vytvoria difragované vlny s frekvenciou voči frekvencii pôvodnej vlny posunutou o (+/-) Ω. Mriežka vytvorená akustickou vlnou je v skutočnosti fázovou mriežkou, ale z úvahy o nahraditeľnosti amplitúdovej a fázovej mriežky, uvedenej v predchádzajúcom odseku vyplýva, že výsledok je analogický.

Predchádzajúce zdôvodnenie difrakcie na akustickej vlne nerešpektuje kvantovú povahu vĺn. Pri rešpektovaní kvantových predstáv sa na interakciu svetelnej a akustickej vlny máme dívať ako na inerakciu akustických a optických kvánt (fotónov a fonónov), ktorých energie sú: **h**ω, **h**Ω a impulzy (hybnosti) **h**ω/c a **h**Ω/v (**h** je Planckova konštanta h delená 2π a v je rýchlosť šírenia sa akustických vĺn). Pretože platí zákon zachovania energie, interakcia fotónu a fonónu môže viesť ku vzniku nového fotónu, ktorého energia je súčtom energií interagujúcich častíc (pre fotóny a fonóny sa často používa termín „kvázičastice“). Potiaľ je vlnový a kvantový popis v zhode, pretože súčet energií znamená súčet frekvencií. Problém spočíva v tom, že pri vzniku nového fotónu sa musí zachovať i celková hybnosť. Súčet hybnosti pôvodného fotónu a fonónu sa ale rovná hybnosti fotónu s ďaleko väčšou frekvenciou než zodpovedá šúčtu ich energií. K takejto interakcii preto môže dôjsť iba v prípade, keď rýchlosť šírenia sa svetla závisí špeciálnym spôsobom od smeru šírenia sa, alebo vtedy, keď sa na procese zúčastňujú ďalšie „častice“ (napr. tepelné fonóny), pomocou ktorých sa rozdiely hybností „vykompenzujú“.

7.6 Kombinácia amplitúdovej a fázovej mriežky

Na jednoduchom príklade ilustrujme, aké možnosti poskytuje kombinácia amplitúdovej mriežky a regulácie fázy vlny pri jej prechode cez tienitko. Aby závislosti priepustnosti od súradnice tienitka korešpondovali závislosti interferenčnéhi poľa rovinných, ako i guľových vĺn (vzťahy (7.2), resp. (7.10)), sme museli zaviesť konštantný člen T_1, pretože druhý člen v týchto výrazoch nadobúda i záporné hodnoty, čo je v rozpore s bežným chápaním priepustnosti. Keď však pripustíme, že tienitko môže byť realizované ako platnička, ktorá je nehomogénna nielen z hľadiska jej transparentnosti, ale i optickej hrúbky, záporné hodnoty $T(y)$ sú realizovateľné. Stačí za tým účelom vytvoriť tienitko s priepustnosťou rovnou absolútnej hodnote požadovanej priepustnosti a miesta, v ktorých požadovaná priepustnosť má byť záporná, pokryť polvlnovou vrstvou (vrstvou posúvajúcou fázu prešlej vlny o π). Pre prípad popísaný vzťahmi (7.9) a (7.10) by to znamenalo, že plnú zhodu vlnových stavov určených vzťahmi (7.9) a (7.10) dostaneme superpozíciou uvedených dvoch guľových vĺn (bez rovinnej vlny, ktorá je "pokračovaním" rekonštrukčnej vlny), pretože T_1 je rovné nule. To znamená, že vlna dopadajúca na tienitko by sa plne transformovala na difragované vlny. Uvedená možnosť napovedá, že (odhliadnuc od technických obtiaží) je možné pomocou jednoduchej vlny a fázovej platničky, ktorej priepustnosť a posunutie fázy vhodným spôsobom závisia od súradnice, v rovine $z = 0$, (alebo na akejkoľvek inej ploche) realizovať vlnový stav s ľubovoľným rozložením amplitúdy a fázy. Tým sa odstráni príčina, pre ktorú sa na difrakčnom tienitku s priepustnosťou zhodnou so závislosťou amplitúdy interferencie dvoch vĺn vytvoria obe interferujúce vlny (mimo vlny ktorá na tienitko dopadala). Principiálne je teda možné, aby sa celá energia vlny prichádzajúcej na difrakčné tienitko použila na vytvorenie iba jednej z vĺn vznikajúcich difrakciou.

7.7 Vplyv difrakcie na vlnu prechádzajúcu difrakčným tienitkom

Z predchádzajúceho výkladu vyplýva, že prechodom rovinnej alebo guľovej vlny difrakčným tienitkom vznikajú ďalšie (difragované) vlny a primárna vlna (až na pokles amplitúdy) ostáva rovnaká. Pretože prenos informácie o objektoch pomocou svetelných vĺn je vždy realizovaný rovinnými alebo guľovými vlnami (s rozmanitými smermi rovinných vĺn a polomermi guľových vĺn), môžeme povedať, že prechodom svetelnej vlny cez difrakčné tienitko sa neovplyvní informácia prenášaná touto vlnou : videli sme, že pri prechode rovinnej vlny cez difrakčné tienitko vždy časť vlny prejde bez zmeny smeru šírenia sa, v istom rozmedzí uhlov bez ohľadu na to, pod akým uhlom vlna na tienitko dopadá. Keď primárna vlna pozostáva z rovinných vĺn s nie príliš odlišnými smermi šírenia sa, z každej z nich sa difrakciou odštiepia vlny odklonené o rovnaký uhol. To znamená, že v difragovanej vlne pochádzajúcej z primárnej vlny sú zastúpené rovnako usporiadané rovinné (prípadne guľové) vlny ako vo vlne primárnej. Takže difrakciou vytvorené vlny nesú tú istú informáciu o objekte ako vlna primárna. Na prvý pohľad neuveriteľný výsledok - prechodom svetla cez dosku s mnohými dierami sa pôvodná vlna neovplyvní ! Je tomu naozaj tak, avšak s istým obmedzením : platí to iba vtedy, keď difrakčný uhol (uhol odklonu) je väčší ako „uhlová veľkosť“ objektu, t. j. ako uhol ktorý zvierajú vlny pochádzajúce od protiľahlých častí objektu. Pokiaľ je uhlová veľkosť objektu väčšia ako difrakčný uhol, bude sa obraz vytvorený vlnou prešlou bez zmeny smeru šírenia prekrývať s obrazmi vytvorenými vlnami difragovanými (odklonenými).

Videli sme, že veľkosť difrakčného uhla je tým väčšia, čím je „vzdialenosť otvorov“ v tienitku menšia, teda čím ich je viac. Takže tienitko s otvormi s dostatočnou hustotou umožňuje neporušene sledovať i veľké objekty. Z toho dôvodu pomerne dobre môžeme vidieť dostatočne jasné objekty, i keď sa dívame cez husté mriežky. Pri pozeraní cez menej husté mriežky (napríklad cez tkaninu dáždnika) si môžeme všimnúť, že obrazy sú difrakciou „rozmazané“, pretože sa primárny obraz prekrýva s obrazmi vytvorenými difragovanými lúčmi. Takéto efekty môžeme ľahko pozorovať na lampách pouličného osvetlenia, pretože tie sú dostatočne jasovo odlíšené od ostatných objektov. Ak sa pozorne pozriete, budete vidieť, že v blízkosti smerov, v ktorých sú jasné zdroje svetla, vytvára sa difrakčná štruktúra zodpovedajúca tej, ktorú sme popísali vzťahom (7.14). Má uvedenú štvorcovú štruktúru (alebo obdĺžnikovú, závisí to od štruktúry tkaniny), avšak je vidieť i maximá vyšších rádov, pretože mriežka tvorená tkaninou nie je harmonická. Všimnite si, že otáčaním dáždnika sa otáča i vytvorený obrazec. Je to dôkaz, že to nie je atmosférický úkaz.

7.8 Zdôvodnenie Cauchyho vety

Všeobecný dôkaz vety o jednoznačnosti riešenia vlnovej rovnice pri zadaní okrajových podmienok je pomerne náročný. Jednoducho si však môžeme ukázať, že pri znalosti vlnového stavu na jednej rovine a znalosti jeho derivácie podľa normály k tejto rovine, je riešenie jednoznačne určené v celom priestore.

Predpokladajme teda, že vieme, ako závisí vlnový stav od času v bodoch jednej roviny a ako závisí od času derivácia vlnového stavu od normály k tejto rovine. Súradnú sústavu zvoľme tak, aby osi x a y ležali vo vybranej rovine, takže uvedenou normálou je os z . Inými slovami : vieme, že

$$u(x,y,z,t)_{z=0} = f(x,y,t)$$

a

$$\left(\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\right)_{z=0} = g(x,y,t) \, ,$$

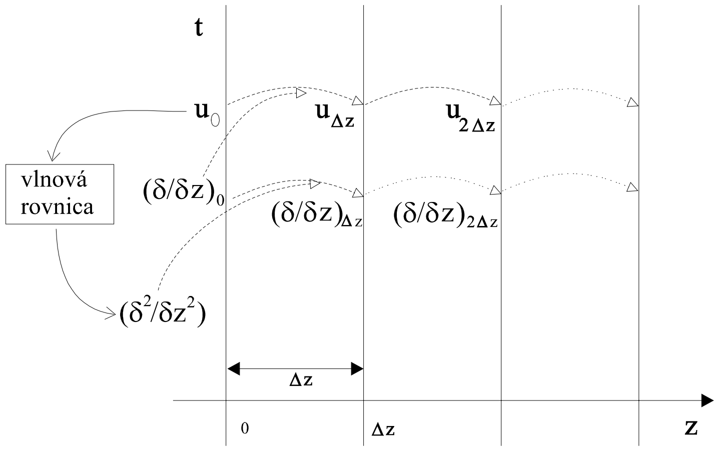
kde f(x,y,t) a g(x,y,t) sú známe funkcie. Keď poznáme deriváciu $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ v rovine $z = 0$, tak v malých vzdialenostiach od tejto roviny môžeme vypočítať hodnotu vlnového stavu, pretože sa rovná hodnote v miestach so súradnicou $z = 0$ (ktorú poznáme) plus prírastok rovný súčinu derivácie podľa z a prírastku Δz .

Takže:

$$u(x, y, z, t)_{\Delta z} = u(x, y, z, t)_{z=0} + \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \right)_{z=0} \cdot \Delta z \; .$$

Keby sme poznali i druhú deriváciu vlnového stavu podľa súradnice z, mohli by sme analogickým spôsobom vypočítať aká je hodnota prvej derivácie vlnového stavu v rovine $z = \Delta z$. I keď hodnotu druhej derivácie vlnového stavu podľa z nemáme zadanú, môžeme ju pomocou zadaných funkcií f(x, y, t) a g(x, y, t) a vlnovej rovnice určiť. Z vlnovej rovnice totižto vyplýva, že

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} \; .$$



Obr. 7.8. Schéma postupu pri výpočte vlnového stavu určeného okrajovými podmienkami

Keďže poznáme hodnoty $u(x,y,z,t)_{z=0}$, môžeme hodnoty $\left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} \right)_{z=0}$ a $\left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} \right)_{z=0}$ priamym derivovaním $u(x,y,z,t)$ určiť. Dostávame sa k tomu, že keď poznáme vlnový stav v rovine $x \, . \, y$ a jeho deriváciu podľa z v rovine $z = 0$, môžeme na základe vlnovej rovnice vypočítať hodnoty vlnového stavu a jeho derivácie v rovine $z = \Delta z$. A teraz, úplne zhodným spôsobom ako sme to práve urobili, zo znalosti situácie v rovine $z = \Delta z$ môžeme určiť hodnoty vlnového stavu a jeho derivácií v ďalšej rovine, napríklad v rovine $z = 2.\Delta z$ (obr.7.8.) Keď tak budeme pokračovať, (po dostatočne veľkom počte krokov) získame hodnoty vlnového stavu a jeho derivácií v ľubovoľnom mieste priestoru. Samozrejme, že vtedy, keď sa uspokojíme s približnou znalosťou vlnovej situácie, potrebný počet krokov nebude rovný nekonečnu, takže je možné uvedený postup skutočne realizovať. A to dokonca s ľubovoľnou (ale konečnou) presnosťou.

Pre nás je v danej situácii dôležité ani nie to, aké budú hodnoty vlnového stavu, ale fakt, že ich môžeme na základe znalosti stavu v rovine z = 0 určiť v ľubovoľnom bode priestoru, čo znamená práve to, čo je obsahom uvedenej Cauchyho vety o jednoznačnosti riešenia vlnovej rovnice pri zadaní okrajových podmienok.

Literatúra

[1] ŠTRBA, A., MESÁROŠ, V., SENDERÁKOVÁ, D.: Optika s príkladmi I, UK Bratislava, 1996.

[2] KOMRSKA, J.: Kritický přehled skalární teorie difrakce, Ústav přístrojové techniky ČSAV, Brno 1980.

8. Výklad princípu holografie

8.1 Čo je „obraz“ ?

Význam slova „obraz“ v hovorovej reči je iný ako sa používa v optike. To, čo rozumieme obrazom v hovorovej reči (namaľovaný obraz), v optike obrazom nie je. Je to nanajvýš objekt, ktorý má s pôvodným objektom niektoré rysy spoločné. Ale ani slovo objekt v hovorovej reči nemá obsah zhodný s obsahom chápaným v optike. V optike pod **objektom rozumieme to, z čoho “vychádza“ svetelný signál tvorený superpozíciou elementárnych vĺn** (guľových vĺn so stredmi v jednotlivých bodoch tohoto „objektu“). Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že objektom v optickom zmysle musí byť zdroj svetla. Zdroj svetla skutočne je optickým objektom. Ale optickým objektom môže byť i teleso, ktoré nie je zdrojom svetla. Svetelný signál vytvorený takým objektom, ktorý nie je zdrojom svetla, pochádza od vonkajšieho zdroja a na povrchu „objektu“ sa odráža. Avšak pri slove „**odraz**“ sa musíme zastaviť, pretože nie každým odrazom sa teleso stáva optickým objektom. Ako vieme, odraz môže byť v podstate dvojaký: **zrkadlový**, alebo **difúzny**.

Pri zrkadlovom odraze dochádza ku vzniku odrazenej vlny v jednotlivých bodoch povrchu telesa, ktorých hustota je taká veľká, že vzdialenosť týchto bodov je oveľa menšia, ako je vlnová dĺžka odrážaného svetla. Navyše fáza odrazom vytvoreného svetla sa v každom bode reflektujúceho telesa rovná fáze dopadajúceho svetla (v špeciálnych prípadoch sa nemusí priamo rovnať fáze dopadajúceho svetla, ale musí byť jej jednoznačnou funkciou) . V dôsledku toho, pri známom tvare povrchu reflektujúceho telesa, je fáza odrazeného svetla a jej rozloženie v priestore (t. j. tvar vlnoplôch odrazenej vlny) jednoznačne určené rozložením fázy dopadajúcej vlny. Znamená to, že keď poznáme tvar reflektujúcej plochy a rozloženie fáze (tvar vlnoplôch) dopadajúcej vlny, môžeme určiť tvar vlnoplôch odrazenej vlny. Vlna po zrkadlovom odraze teda nemusí byť tvorená superpozíciou elementárnych (guľových) vĺn so stredmi na povrchu tohto telesa. Teleso, na ktorom dochádza ku zrkadlovému odrazu, nie je v uvedenom zmysle optickým objektom.

Pozrime sa, ako to vyzerá pri difúznom odraze. K difúznemu odrazu dochádza vtedy, keď sa odraz realizuje na oddelených bodoch telesa (jeho malých častiach) so vzdialenosťou zrovnateľnou , alebo väčšou ako je vlnová dĺžka dopadajúceho svetla, alebo keď poloha týchto reflektujúcich bodov „**varíruje**“ (mení svoju polohu) okolo nejakej hladkej plochy (ktorá by odpovedala idealizovanému povrchu objektu) tak, že ich vzdialenosť od ideálneho povrchu telesa je zrovnateľná s vlnovou dĺžkou odrážaného svetla. V dôsledku toho je funkcia vyjadrujúca rozloženie fázy dopadajúcej vlny v jednotlivých miestach difúzne odrážajúceho objektu náhodne zmenená tak, že rozloženie fázy pôvodnej dopadajúcej vlny nie je v rozložení fázy odrazenej vlny rozhodujúce. Difúzne odrážajúci objekt akoby vytváral „svoje“ rozloženie fázy odrazeného svetla.

Pretože vlna vytváraná odrazom na difúznom povrchu pochádza z oddelených bodov, dá sa považovať za súbor elementárnych guľových vĺn, čo je typické pre zdroj svetla.

Aby sme chápanie uľahčili, uveďme, že možno hovoriť i o „elementárnom“ bodovom objekte, to znamená o objekte, ktorý vysiela guľovú vlnu. Optický objekt potom môžeme charakterizovať ako súbor bodových zdrojov s istým usporiadaním (s pevnými vzájomnými vzdialenosťami) týchto bodov. Pri tom je dôležité, aby svetelná vlna vytvorená objektom mala charakter vlny vytvorenej „súborom“ bodových zdrojov a nezáleží na tom, či to svetlo je skutočne vytvorené objektom, alebo je „vytvorené“ z dopadajúceho „osvetlenia“. Pri „splynutí“ reflektujúcich bodov do hladkého plošného útvaru [1] by sa z **objektu** stalo **zrkadlo**.

K podobnej „degenerácii“ charakteru objektu môže dôjsť i pri telesách vyžarujúcich svetelnú vlnu. Napríklad, keby body plošného svetelného zdroja vyžarovali svetlo v každom bode s fázou navzájom korelovanou, dostali by sme zdroj rovinnej, guľovej, prípadne inej vlny, v závislosti od vzájomnej súvislosti fázy svetelnej vlny vyžiarenej v jednotlivých bodoch. V prípade, že by takýto zdroj vyžaroval vlny, ktoré majú v istej rovine rovnakú fázu, vytvorila by sa rovinná vlna. Všimnite si, že takáto rovinná vlna nenesie informáciu o mieste v ktorom vznikla. Keby sme takúto vlnu „analyzovali“ zrakom, mysleli by sme si, že vznikla vo veľmi vzdialenom bode (v nekonečne). Podobne by sme došli k omylu, keby sme analyzovali vlny zmenené zrkadlovým odrazom. Ako vieme, pri odraze rovinnej vlny na rovinnom zrkadle vznikne opäť rovinná vlna (ale s iným smerom šírenia sa), a táto nová rovinná vlna **nenesie** informácie o tom, aký bol pôvodný smer šírenia sa pôvodnej vlny, a teda sa ani nedá určiť, či je to odrazená vlna, alebo nie. (To znamená, že zrkadlo, presnejšie povedané dokonale čisté zrkadlo, nemožno vidieť !) Keď sa budeme dívať na stenu s dokonalým zrkadlom, nemôžeme (len) na základe analýzy prijímaných svetelných vĺn povedať, či je na stene zrkadlo, alebo je na nej otvor, cez ktorý vidíme „do iného priestoru“ (do okolia).

Teraz, keď sa zdá, že už vieme, čo je objekt, vráťme sa k pojmu obraz. V kapitole o geometrickej optike sme videli, že použitím šošoviek alebo dutých zrkadiel možno chod lúčov vychádzajúcich z jedného bodu pozmeniť tak, aby sa lúče opäť „stretli“ v nejakom (inom) bode. Tieto lúče sa ale v uvedenom bode nestratia - prechádzajú cezeň a šíria sa ďalej. Ak „bodovým“ zdrojom rozumieme ten bod, z ktorého lúče vychádzajú, tak i bod v ktorom sa lúče pretínajú po prechode cez šošovku, je „bodovým zdrojom“, pretože z hľadiska optiky má tie isté vlastnosti ako skutočný bodový zdroj. Aby sme predsa len odlíšili funkcie týchto odlišných bodov, hovoríme o jednom ako o „zdroji“ alebo „objekte“, a o druhom ako o „obraze“ tohto bodového objektu.

Prísne vzaté, ale medzi nimi nie je rozdiel. Vytvorený „obraz“ môžeme pomocou ďalšej šošovky opäť „zobraziť“ a vytvoriť „obraz obrazu“ a tak ďalej. Vidíme, že z hľa-

---

[1] Pojem „hladký“ tu znamená, že body telesa so vzájomnou vzdialenosťou zrovnateľnou s vlnovou dĺžkou sú vzdialené od ideálnej plochy značne menej než je vlnová dĺžka.

diska optiky objektom nie je vlastne to **teleso**, ktoré vytvára alebo odráža svetelné vlny, ale **svetelná vlna** samotná (pokiaľ máme na mysli optický objekt, tak vlna v jeho bezprostrednej blízkosti, ak hovoríme o optickom obraze, tak o telese, ktoré svetlo vytvorilo ani neuvažujeme). Vytvoriť „obraz“ znamená vytvoriť optickú vlnu (chod svetelných lúčov) rovnakú, aká bola bezprostredne pri objekte. Pri bodovom zdroji jedinou geometrickou vlastnosťou tohto zdroja je to, že je to bod. To znamená, že vlna, ktorú tento zdroj vytvára, je guľová a tak vlastne každá guľová vlna s rovnakou frekvenciou je „rekonštrukciou“ pôvodnej guľovej vlny. U zdrojov pozostávajúcich z viacerých bodov pôjde nielen o to, aby sme vytvorili vlny „vychádzajúce“ opäť z bodov, ale tiež aby ich vzájomné priestorové usporiadanie bolo „analogické“. Nemusí byť absolútne zhodné s usporiadaním v objekte - obraz môže byť zmenšený, prevrátený a podobne. Pri dokonalom ideálnom zobrazení sa však bude jednať o vytvorenie vlny **identickej** s vlnou, ktorá bola v bezprostrednom okolí objektu.

8.2 Objektová vlna

Pri výklade difrakcie sme vychádzali z dôležitej vety - vety o jednoznačnosti riešenia vlnovej rovnice pri zadaní okrajových podmienok. Táto veta nám pomôže pochopiť i dôležitý rys zobrazovania pomocou vĺn (nielen optických): na vytvorenie obrazu nepotrebujeme vedieť, aká bola vlna v mieste objektu - stačí vedieť, aký je vlnový stav na ľubovoľnej ploche ležiacej medzi objektom a „pozorovateľom“, rozdeľujúcej priestor na dva polpriestory [2]. Na základe znalosti vlnového stavu na hraničnej ploche môžeme určiť, aký bude vlnový stav v ľubovoľnom mieste v oblasti za hraničnou plochou. Budúci čas sme v predchádzajúcej vete použili preto, že spravidla nepoznáme časovú závislosť vlnového stavu na deliacej ploche vo všetkých časoch v minulosti. Avšak na určenie vlnového stavu v nejakom bode priestoru a v nejakom čase potrebujeme poznať vlnový stav na hraničnej ploche v čase o nejakú dobu skôr ako je okamžik, v ktorom máme vlnový stav v uvažovanom bode určiť. Táto doba je rovná dobe potrebnej na prechod vlny z miesta hraničnej plochy do uvažovaného bodu. Z uvedeného je zrejmé, že presné určenie vlnového stavu je možné vtedy, keď hraničná plocha nie je nekonečne veľká[3], alebo keď hraničná plocha síce siaha ďaleko (do nekonečna), ale vlnový stav v príliš vzdialených miestach hraničnej plochy je zanedbateľne malý.

Zo znalosti vlnového stavu na hraničnej ploche možno určiť vlnový stav i „pred“ touto plochou. Miesto dôkazu stačí si uvedomiť, že vlnová rovnica je invariantná k transformácii $t \to -t$ (pokiaľ neuvažujeme tlmenie vĺn). Znamená to, že keby sme mali

[2] Pre istotu poznamenajme, že potrebujeme poznať časovú závislosť vlnového stavu na hraničnej ploche - nestačí poznať stav v jednom okamžiku.

[3] Často je výhodné uvažovať (vybrať) hraničnú plochu zhodnú s niektorou vlnoplochou vyšetrovanej vlny.

k dispozícii vlnu (keby sme ju poznali) iba v priestore „za hraničnou plochou“ a v každom mieste tohto prostredia by sme „obrátili smer šírenia sa“ uvažovanej vlny, v priebehu šírenia sa tejto obrátenej vlny by sa okrem iného vytvoril i vlnový stav zodpovedajúci stavu v mieste jej vzniku. V našom chápaní pojmu objekt sa to dá povedať i nasledovne : vytvoril by sa objekt od ktorého uvažovaná vlna pochádza. Muselo by však byť zaručené, že prostredie ktorým sa šíri „obrátená vlna“ je také isté, aké bolo v priebehu šírenia sa pôvodnej vlny.

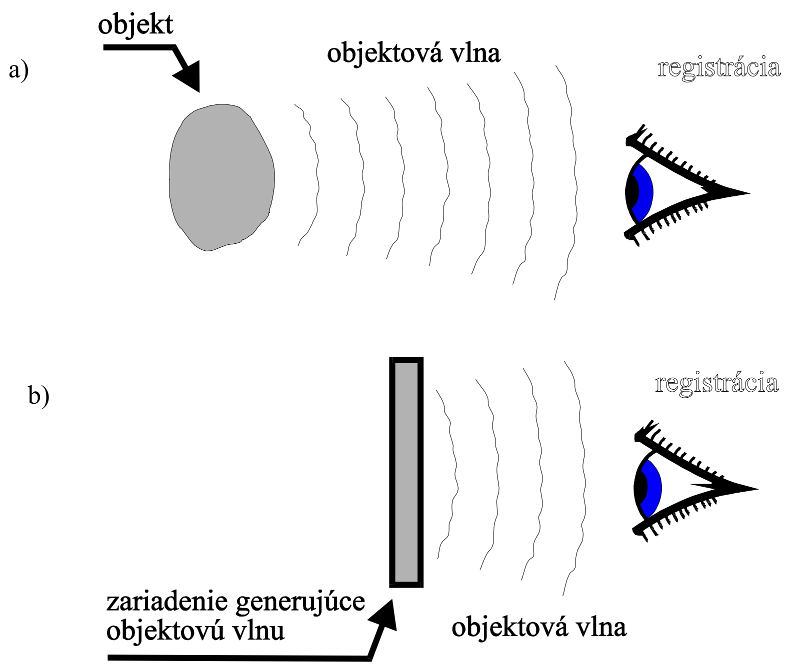
Možno je zaujímavé uvedomiť si, že uvedené tvrdenie je samozrejmým „predpokladom“ používaným zrakovým centrom mozgu pri vyhodnocovaní zrakových vnemov. Napríklad pri pozorovaní obrazu „v zrkadle“ náš vnem odpovedá tomu, ako by objekty boli **za zrkadlom** , teda vidíme objekty nie tam, kde sú, ale tam a také, aké by vytvorili vlnu, ktorá sprostredkovala vnem obrazu, ale pri jej prechode cez opticky homogénne prostredie, t. j. bez zrkadliacich plôch. Uvedená poznámka opäť ilustruje fakt, že pre vnem, rovnako ako pre vytvorenie obrazu objektu nie je dôležitý samotný objekt, ale vlna, ktorú objekt vytvára - **objektová vlna** .

8.3 Rekonštrukcia objektovej vlny

Na základe toho, čo sme povedali je zrejmé, že vytvorenie dokonalého obrazu je možné vytvorením vlny, ktorá je zhodná s pôvodnou objektovou vlnou (t. j. s vlnou vytvorenou objektom). V holografii sa pre taký proces zaužíval názov **rekonštrukcia** (znovuvytvorenie) **objektovej vlny** .

Vytvoriť rekonštrukciu objektovej vlny je možné rôznymi spôsobmi. Jeden z nich sme vlastne už uviedli - bol to spôsob využívajúci zobrazovacie prvky geometrickej optiky (zrkadlá, šošovky). Pri takejto rekonštrukcii je rekonštruovaná vlna „existenčne spojená“ s objektovou vlnou - so zánikom objektovej vlny zaniká i rekonštruovaná vlna. Existujú však i také spôsoby rekonštrukcie objektovej vlny, ktoré umožňujú rekonštrukciu časove nezávislú od pôvodnej objektovej vlny. Práve takýmito procesmi sa zaoberá **holografia**, t. j. teória a prax vytvárania obrazov objektov pomocou rekonštrukcie objektových vĺn.

Základná myšlienka, základná schéma holografického zobrazovania je znázornená na obr. 8.1. Proces klasickej optickej registrácie objektu, vrátane zrakového vnemu je znázornený na obr. 8.1.a. Tento proces sa dá vyjadriť slovami : objekt - objektová vlna - registrácia . Takáto schéma je použitá i napr. pri fotografovaní : objekt - objektová vlna - registrácia pomocou fotografického prístroja. Špecifikum fotografovania sa prejavuje v skladbe registrácie (objektív + záznamový materiál v mieste optického obrazu). Schéma holografického zobrazovania je iná: zariadenie vytvárajúce rekonštrukciu objektovej vlny - objektová (rekonštruovaná) vlna - registrácia (obr. 8.1,b.). Objekt v tejto schéme nevystupuje.



Obr. 8.1. Priame „videnie“ objektu (a) a jeho videnie sprostredkované rekonštrukciou objektovej vlny (b)

Zatiaľ sme nehovorili o tom, ako je možné vytvoriť rekonštrukciu objektovej vlny, i keď prostriedky umožňujúce takýto proces sme už prebrali. Sú nimi **odraz a lom vĺn** a **difrakcia** vĺn. Principiálne by sa mohla rekonštrukcia objektovej vlny vytvoriť i pomocou vhodne riadenej, „regulovanej“ generácie. „Stačilo“ by, aby sa na jednej ploche, napríklad tam, kde je na obr. 8.1.b. zakreslené „zariadenie pre rekonštrukciu“ generovala svetelná vlna tak, aby sa v každom mieste tejto plochy vytvárala vlna, ktorej amplitúda, frekvencia a fáza je zhodná s pôvodnou objektovou vlnou. Ak by sa tak stalo, tak (v dôsledku platnosti vety o jednoznačnosti riešenia) v celom priestore „za“ touto plochou by bola vygenerovaná vlna zhodná s objektovou vlnou. Avšak takýto proces „regulovanej generácie“ zatiaľ nie je zvládnutý.

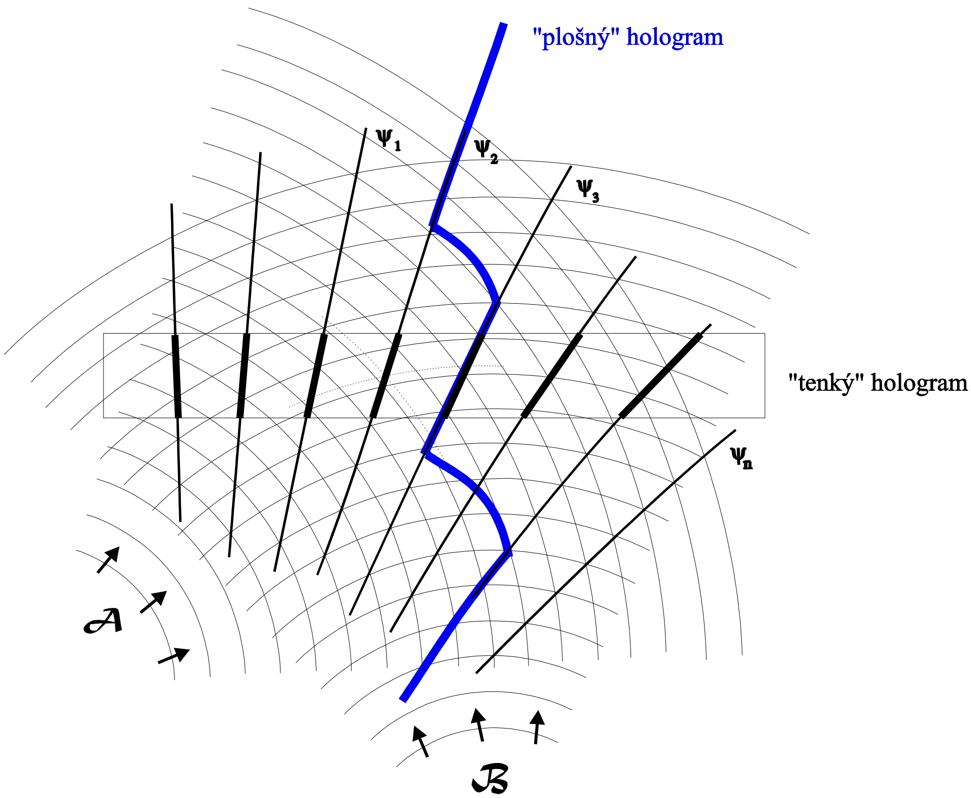
Jednoduchšie (realizovateľné) je, na rekonštrukciu využiť mechanizmy, ktoré sú založené nie na generácii, ale na premene vĺn vytvorených v inom mieste. Vieme napríklad, že pri odraze vĺn na (krivom) zrkadle sa dopadajúca vlna mení (transformuje) na inú vlnu. Rozloženie amplitúdy a fázy vlny po odraze závisí od tvaru reflektujúcej plochy a od hodnoty koeficientu odrazu v jednotlivých miestach odrážajúcej plochy. K podobnej transformácii dopadajúcej vlny dochádza pri prechode vlny cez rozhranie dvoch prostredí s rôznymi rýchlosťami šírenia sa vĺn (pri lome vĺn). Ďalší možný mechanizmus „transformácie“ vĺn je difrakcia vĺn, s ktorou sme sa už zoznámili v minulej kapitole.

Otázne zatiaľ zostáva, ako určiť, aký ma byť ten objekt, na ktorom sa dopadajúca vlna transformuje na vlnu zhodnú s pôvodnou objektovou vlnou a ako takýto objekt vytvoriť. Aby sme si uvedomili aké požiadavky kladieme na toto „zariadenie“ zopakujme, že má vytvoriť vlnu, ktorej frekvencia, amplitúda a fáza v každom mieste plochy na ktorej sa vlna rekonštruuje musia byť zhodné s pôvodnou objektovou vlnou. Vymenované parametre (pokiaľ sú zadané v každom bode uvažovanej plochy) **úplne** popisujú objektovú vlnu. To je dôvod, pre ktorý sa proces rekonštrukcie nazýva **holografia** („holos“ znamená po grécky celý, úplný).

8.4 Rekonštrukcia vĺn odrazom

Uviedli sme už, že pri dopade vlny na zrkadlovo reflektujúcu plochu sa vytvorí nová (odrazená) vlna, ktorej amplitúda v každom mieste reflektujúcej plochy je rovná súčinu amplitúdy dopadajúcej vlny a koeficienta odrazu v danom mieste reflektujúcej plochy a tvar jej vlnoplôch (t. j. priestorové rozloženie fáze odrazenej vlny) závisí od tvaru reflektujúcej plochy a tvaru vlnoplôch dopadajúcej vlny. Na základe toho je možné vlnový stav prislúchajúci odrazenej vlne vypočítať (napríklad pomocou Huygensovho-Fresnelovho princípu). My ale chceme použiť odraz na vytvorenie rekonštrukcie objektovej vlny. Takže úloha, ktorú máme riešiť je opačná - určiť na akej ploche sa dopadajúca vlna transformuje na vlnu zhodnú s pôvodnou objektovou vlnou. I keď je táto úloha na prvý pohľad zložitá, jej riešenie je relatívne jednoduché.

Keď si uvedomíme, že fáza vlny vytvorenej odrazom je v každom bode reflektujúcej plochy (nekonečne blízko k tejto ploche) zhodná s fázou dopadajúcej vlny v tomto bode, je riešenie takmer samozrejmé. Stačí nájsť plochu (alebo plochy, pretože ich môže byť i viac), na ktorej je uvedená podmienka rovnosti fáz splnená. Graficky sa hľadaná plocha ľahko nájde. Zakreslime rozloženie fázy oboch vĺn tak, že nakreslíme vlnoplochy vzdialené o celistvý násobok vlnovej dĺžky (obr. 8.2.). V miestach, kde sa pretínajú zakreslené vlnoplochy jednej vlny s vlnoplochami druhej vlny, je fáza oboch vĺn rovnaká. Takto ale dostaneme z hľadaných plôch, na ktorých je podmienka rovnakej fázy splnená, iba oddelené body. Aby sme zistili ďalšie body týchto plôch myslime si mimo už zakreslených vlnolôch ešte vlnoplochy s fázou málo odlišnou od fázy už zakreslených vlnoplôch (čiarkované vlnoplochy na obr. 8.2.). Môžete si myslieť, že sú to tie isté vlnoplochy, ale o maličký čas neskôr. Priesečník týchto dodatočných vlnoplôch je mierne posunutý voči predchádzajúcemu a jasne naznačuje, ako treba „pospájať“ v predchádzajúcom kroku nájdené body hľadaných plôch, aby sme hľadané plochy správne zakreslili. Ako vidíme, keď sú uvažované vlny periodické, hľadaných plôch je veľa (dokonca nekonečne veľa). Je tomu tak preto, že vlnoplochy posunuté o vlnovú dĺžku majú fázu posunutú o 2π , ktorá sa nedá rozoznať od pôvodnej fázy. Keby takéto rozlíšenie bolo možné, mohli by sme povedať na ktorej ploche je fáza oboch vĺn rovnaká a na ktorej z nich sa líši povedzme o n-násobok 2π .



Obr. 8.2. Plochy Ψ_n na ktorých je fáza objektovej vlny $\mathcal{B}$ rovná fáze referenčnej vlny $\mathcal{A}$. Pre rekonštrukciu možno úseky plôch Ψ_n vybrať tak, aby tvorili „tenký hologram“, alebo aby vytvárali „plošný hologram“

Predstavme si teraz, že plochu, na ktorej sa fázy oboch vĺn rovnajú, máme realizovanú ako nejaký fyzikálny objekt, na ktorom sa môže dopadajúca vlna odrážať. Ďalej si predstavme, že na tento objekt dopadá vlna, ktorej rozloženie fázy je zhodné s rozložením fázy jednej z uvažovaných vĺn. Vieme, že fáza vlny vytvorenej odrazom je zhodná s fázou vlny dopadajúcej a že použitá „odrazová“ plocha spĺňa podmienku rovnosti fáz uvažovaných vĺn. V dôsledku toho je na reflektujúcej ploche rozloženie fázy odrazenej vlny zhodné s rozložením fázy druhej z uvažovaných vĺn (ak dopadajúca vlna má rozloženie fázy zhodné s prvou z uvažovaných vĺn). Podľa vety o jednoznačnosti riešenia musí byť potom rozloženie ich fáz zhodné i v celom ďalšom priestore. Keby sa na reflektujúcej ploche ešte dosiahla zhoda rozloženia amplitúdy s pôvodnou objektovou vlnou, došlo by odrazom na takejto ploche k vzniku vlny zhodnej s pôvodnou vlnou. Aby sa tak stalo, stačí, aby koeficient odrazu bol v jednotlivých miestach rovný pomeru amplitúdy uvažovaných vĺn. Samozrejme, že keď amplitúda uvažovaných vĺn nie je vo všetkých miestach rovnaká, tak v záujme splnenia požiadavky zhody amplitúd, musí koeficient odrazu reflektujúcej vlny vhodným spôsobom závisieť od polohy na reflektujúcej ploche.

Aby sme to zhrnuli: ak máme dve koherentné vlny, vlnu $\mathcal{A}$ a vlnu $\mathcal{B}$, môžeme vytvoriť plochu Ψ, na ktorej majú tieto vlny rovnakú fázu. Dopadom jednej z nich, napríklad vlny $\mathcal{A}$ na túto plochu sa vytvorí vlna, ktorá má rozloženie fázy zhodné s vlnou $\mathcal{B}$. Ak koeficient odrazu je v každom bode plochy Ψ rovný pomeru amplitúd týchto vĺn, pri dopade vlny $\mathcal{A}$ sa odrazom na ploche Ψ vytvorí vlna $\mathcal{B}$.

Na vytvorenie plôch, na ktorých je fáza uvažovaných vĺn rovnaká (na znak toho, že ich môže byť viac, označme ich Ψ_n) sa môže využiť fotografický proces. Keď sú uvažované vlny $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ koherentné, a necháme ich **súčasne** prechádzať prostredím, vytvorí sa interferenčné pole, ktorého vlnový stav má maximálne hodnoty v miestach, v ktorých je fáza interferujúcich vĺn rovnaká. To sú práve tie miesta, ktoré hľadáme. Keď je priestor v ktorom je vytvorené interferenčné pole týchto vĺn vyplnený fotografickou emulziou, dôjde k vzniku záznamu, t. j. k vzniku drobných zŕn striebra s hustotou priamo závislou od intenzity optického vlnového stavu v uvažovanom mieste. Najväčšia hustota zŕn striebra sa tak vytvorí na plochách, v ktorých je fáza uvažovaných vĺn rovnaká, pretože tam sú maximá interferenčného poľa. Ak je amplitúda jednej z týchto vĺn, povedzme vlny $\mathcal{A}$ všade rovnaká a všade väčšia ako amplitúda vlny $\mathcal{B}$, rozloženie hustoty vytvorených zŕn bude sledovať rozloženie amplitúdy vlny $\mathcal{B}$.

Myslime si, že sme v zázname interferenčného poľa vĺn $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ nejakým spôsobom odstránili všetky zrná striebra, až na tie, ktoré ležia v miestach, v ktorých je maximum jedného z interferenčných prúžkov vytvoreného záznamu interferenčného poľa (realizovali by sme tak jednu z plôch Ψ_n). Ak na takto „upravený“ záznam necháme dopadať vlnu $\mathcal{A}$, bude sa transformovať na vlnu $\mathcal{B}$, pretože amplitúda odrazenej vlny závisí od hustoty strieborných vĺn, a to zodpovedá amplitúde vlny $\mathcal{A}$ a ich poloha je taká, že fáza odrazenej vlny je zhodná s fázou, ktorú mala v tom mieste vlna $\mathcal{B}$.

Keby sme v zázname interferenčného poľa uvažovaných vĺn nechali zrná ležiace na viacerých plochách Ψ_n , na každej z nich sa vlna $\mathcal{A}$ bude transformovať na vlnu $\mathcal{B}$. Fáza vĺn vytvorených na rôznych plochách Ψ_n sa líši o celistvý násobok 2π . To znamená, že vlny vytvorené na týchto plochách sa budú algebraicky sčítavať, takže výsledok bude silnejší ako keby sme „prebytočné“ plochy odstránili. Bolo by teda zbytočné robiť nepredstaviteľne náročné „odstraňovanie“ prebytočných plôch Ψ_n. Samozrejme k algebraickému sčítaniu dôjde iba vtedy, keď frekvencia (vlnová dĺžka) vlny, ktorú použijeme na osvetlenie plôch Ψ_n, je zhodná s frekvenciou pôvodnych vĺn $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$).

Aby sme neskreslili predstavu o procese vytvárania rekonštrukcie vlny poznamenajme, že zrná striebra sa vytvoria nielen na plochách v ktorých je fáza interferujúcich vĺn rovnaká. Svetelná vlna vytvorená na zrnách ležiacich mimo plôch Ψ_n nemá fázu korešpondujúcu rekonštruovanej vlne, takže nebude „správnym spôsobom“ prispievať k rekonštrukcii objektovej vlny. Avšak tam, kde je fáza interferujúcich vĺn odlišná, je hustota zŕn menšia (sme mimo maxima interferencie), takže príspevok svetla „odrazeného“ (alebo rozptýleného) s nevhodnou fázou je menší ako s fázou požadovanou. Hustota zŕn v miestach, kde sa vytvárajú vlny s opačnou fázou, a teda najnegatívnejšie vplývajú na proces rekonštrukcie je našťastie najnižšia (ležia v minime interferenčného poľa), takže existencia zŕn v týchto miestach nepokazí proces rekonštrukcie.

Vidíme tak, že vytvorenie „zariadenia“ ktoré vygeneruje vlnu zhodnú s pôvodnou objektovou vlnou je možné. Tvorí ho fotografický záznam interferenčného poľa objektovej vlny s inou vlnou (ktorá musí byť koherentná s objektovou vlnou) a zariadenie, ktoré nám pri rekonštrukcii umožní vytvoriť vlnu zhodnú s touto „pomocnou“ vlnou. Táto pomocná vlna sa nazýva **„referenčná“** vlna. Údaje, ktoré sú obsiahnuté v zázname interferenčného poľa spolu s údajmi o tom aká je frekvencia objektovej a referenčnej vlny a aké je rozloženie vlnoplôch referenčnej vlny, tvoria **úplný** záznam. „Úplný záznam“ znamená taký záznam, ktorý stačí na rekonštrukciu objektovej vlny. Niekedy sa mylne hovorí, že samotný záznam interferenčného poľa objektovej a referenčnej vlny obsahuje všetky informácie. Tento omyl sa prejavuje i v názve ktorý sa prijal pre takýto záznam - nazýva sa **hologram** .

Význam omylu uvedeného v predchádzajúcom odseku by mohol mať praktické dôsledky vtedy, keď by sme pre vytvorenie záznamu objektovej vlny použili referenčnú vlnu s „komplikovaným“ priebehom závislosti jej amplitúdy a fázy od súradnice. Napríklad, keby sme ako referenčnú vlnu použili vlnu vytvorenú odrazom od nejakého objektu s difúzne odrážajúcim povrchom. Pri osvetlení takto vytvoreného záznamu vlnou zhodnou s použitou referenčnou vlnou by tiež mohlo dôjsť k vzniku rekonštrukcie, ale hologram by musel byť uložený **presne** v tom istom mieste ako bol pri vytváraní záznamu. Nesmelo by samozrejme dôjsť ani k jeho deformácii. A to je málo pravdepodobné, pretože v priebehu chemického spracovávania fotografického záznamu (v priebehu „vyvolávania“) k takýmto deformáciám dochádza. Keď sa ako referenčná vlna použije vlna s „hladkou“ závislosťou amplitúdy a fázy, poloha hologramu pri rekonštrukcii nie je kritická, pretože malým posunutím sa na reflektujúcich plochách vlnový stav prislúchajúci rekonštrukčnej vlne v podstate nezmení. Podobne je to so zmenou smeru šírenia sa rekonštrukčnej (referenčnej vlny), alebo so zakrivením jej vlnoplôch. Samozrejme iba vtedy, ak ide o zakrivenie s polomerom krivosti značne väčším než je vzdialenosť interferenčných prúžkov vytvárajúcich hologram. Pri osvetlení hologramu vytvoreného s „komplikovanou“ referenčnou vlnou však i malá zmena polohy hologramu môže viesť k výraznej zmene vlnového stavu v mieste záznamu a preto môže dôjsť i k tomu, že sa rekonštrukcia vôbec nevytvorí. Pri použití jednoduchej (elementárnej) vlny ako vlny referenčnej sa malá zmena smeru (alebo polomeru) prejaví iba slabou závislosťou priestorového rozloženia fázy vĺn vytvorených na zázname. Táto zmena fázy sa samozrejme prejaví i na rekonštruovanej vlne, čo vedie k analogickej zmene: obraz objektu, vytvorený rekonštruovanou vlnou, nebude presne v tom mieste, v ktorom bol pôvodný objekt - bude bližšie, alebo ďalej od hologramu, alebo dôjde k jeho posunutiu.

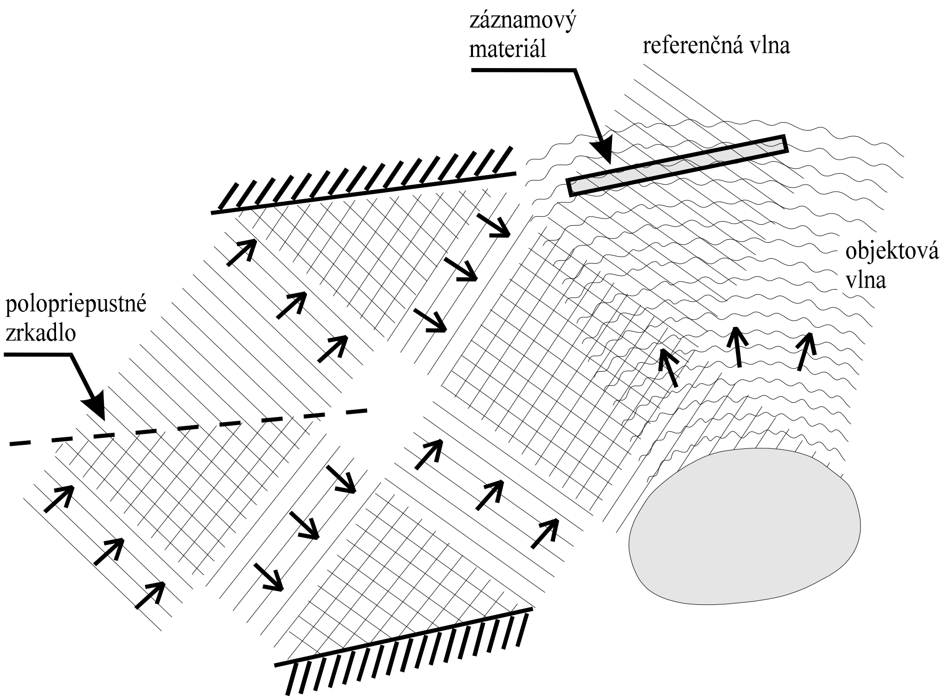
Použitie „komplikovanej“ referenčnej vlny by principiálne mohlo prinášať výhody vtedy, keď by sme chceli dosiahnuť, aby bola rekonštrukcia nedostupná nepovolanému „čitateľovi“. My by sme však museli mať ďalšie zariadenie, ktoré dovolí vytvoriť rekonštrukčnú vlnu úplne zhodnú s použitou referenčnou vlnou, aby sme pomocou záznamu mohli urobiť rekonštrukciu.

Keď je hologram, t. j. záznam interferenčného poľa objektovej a referenčnej vlny presný a je osvetlený vlnou identickou s vlnou ktorá bola použitá ako referenčná vlna, vytvorí sa presná rekonštrukcia objektovej vlny, t. j. vytvorí sa vlna identická s objektovou vlnou. Takáto rekonštruovaná objektová vlna má všetky vlastnosti pôvodnej objektovej vlny v takej miere, že sa nedá rozoznať, či sledujeme obraz bezprostredne, alebo pomocou rekonštrukcie objektovej vlny. Lesky, priestorový vnem, veľkosť objektu, poloha domnelého objektu - to všetko je úplne zhodné s vnemom pri sledovaní pôvodného objektu. Ako uvidíme ďalej jediné čo môže prezradiť, že nesledujeme pôvodný objekt ale holograficky vytvorený obraz, je farba obrazu.

Už sme uviedli, že referenčná vlna musí byť koherentná s objektovou vlnou (inak by nevzniklo interferenčné pole). Z toho dôvodu na vytvorenie holografického záznamu sa nemôže použiť prirodzené svetlo, pretože nemá dostatočne veľkú koherenčnú dĺžku potrebnú na vytvorenie interferenčného poľa objektovej a referenčnej vlny. (Požiadavka veľkej koherenčnej dĺžky nie je nutná pri vytváraní hologramov plošných objektov, ale i v takomto prípade by vytvorenie hologramu pomocou prirodzeného svetla narážalo na značné ťažkosti.) To je hlavný dôvod, prečo sa rozvoj holografie datuje do šesťdesiatych rokov, i keď ju (anglický fyzik maďarského pôvodu) D. Gábor objavil v štyridsiatych rokoch - muselo sa počkať na objavenie zdrojov svetla s dostatočnou dĺžkou koherencie - na lasery.

Existencia laserových zdrojov s veľkou dĺžkou koherencie umožnila pri tvorbe hologramov používať také usporiadania, pri ktorých sa nemusí prísne dodržiavať zhodnosť optických dráh interferujúcich vĺn (objektovej a referenčnej). Na druhej strane vyvinutie fotografických emulzií s obzvlášť malými zrnami umožňuje vytváranie záznamov s vysokou hustotou interferenčných čiar (prúžkov), takže sa môžu používať i usporiadania s relatívne veľkými uhlami medzi objektovou a referenčnou vlnou. Príklad schémy optického usporiadania použiteľného pri vytváraní holografického záznamu je uvedené na obr. 8.3.a.

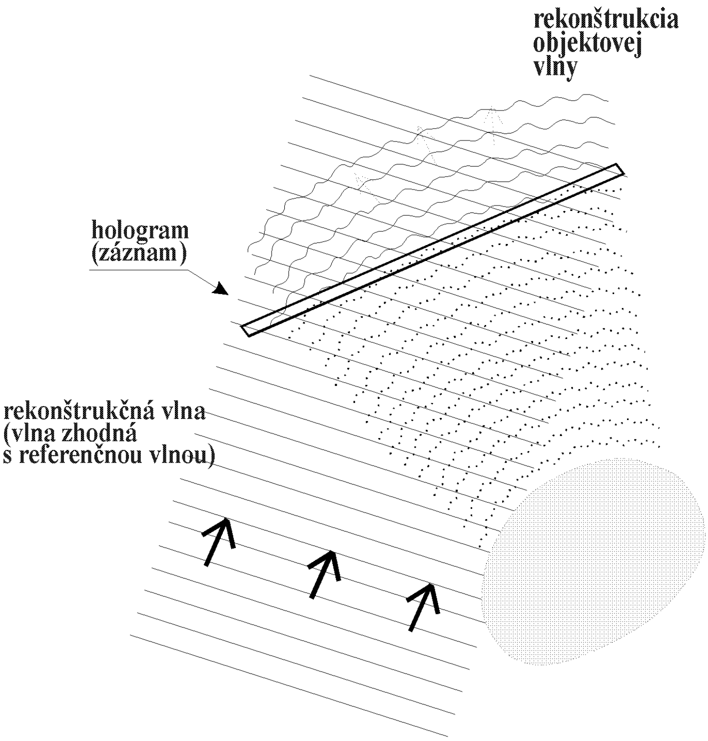
Všimnime si, že pri vytváraní hologramu nie je (nemusí byť) použitá žiadna zobrazovacia sústava v tom zmysle, ako sme ich poznali v geometrickej optike. Rovnako pri vytváraní rekonštrukcie stačí ak uložíme hologram do toho istého miesta, kde bol pri vytváraní záznamu a osvetlíme ho tým istým spôsobom, akým sa vytvárala referenčná vlna pri vytváraní záznamu (zhoda referenčnej a rekonštrukčnej vlny). A napriek tomu (alebo práve preto) holografia umožňuje najvernejší záznam. Usporiadanie pre rekonštrukciu, ako to je vidieť z obr. 8.3.b. môže byť až zarážajúco jednoduché.



Obr. 8.3.a. Schematické zobrazenie usporiadania umožňujúceho vytvoriť záznam interferenčného poľa objektovej a referenčnej vlny

Teoreticky i prakticky je možné na jednom holograme (t. j. na jedinej fotografickej platni) vytvoriť záznam viacerých optických vĺn. Podľa toho ako sa tento záznam vytvorí, pri rekonštrukcii sa môžu objektové vlny zodpovedajúce jednotlivým objektom vytvoriť naraz, t. j. pri použití jednej rekonštrukčnej vlny, alebo pri vytváraní záznamov sa použijú rôzne referenčné vlny a pri rekonštrukcii sa vytvorí obraz jedného alebo druhého objektu podľa toho, ktorá rekonštrukčná vlna bola použitá. Ak osvetlíme hologram naraz viacerými rôznymi rekonštrukčnými vlnami (samozrejme, že zhodnými s referenčnými vlnami použitými pri vytváraní záznamov) , vytvoria sa obrazy zodpovedajúcich objektov súčasne.

Takýto postup umožňuje vytvoriť i farebný hologram. A to tak, že vytvoríme hologram toho istého objektu, ale osvetleného (tromi) lasermi s rôznymi vlnovými dĺžkami (s rôznymi farbami). Je to ten istý princíp ktorý sa využíva pri tvorbe farebných fotografií, televízneho záznamu a podobne. Ak sa pri rekonštrukcii takýto „farebný" hologram osvetlí rekonštrukčnými vlnami so zodpovedajúcimi vlnovými dĺžkami, dostaneme „farebnú" rekonštrukciu.



Obr. 8.3.b. Usporiadanie pre rekonštrukciu objektovej vlny

Avšak tu už je rozdiel medzi reálnym objektom a jeho holografickou rekonštrukciou. Zatiaľ čo u reálneho objektu pri jeho osvetlení prirodzeným svetlom by sme spektrometrom namerali spojitú zmenu vlnových dĺžok svetla vytvárajúceho vnem, pri farebnom holograme spektrometer zistí len tie vlnové dĺžky, ktoré boli použité pri rekonštrukcii (zázname). Voľným okom je ale rekonštrukcia i farebného hologramu nerozoznateľná od objektu. Vernosť holografického zobrazenia je taká vysoká, že v niektorých múzeách sa vystavujú miesto skriniek s drahými objektmi prázdne skrinky, ktorých steny sú hologramy „vystavovaných“ objektov. (Aj tak nebolo dovolené dotýkať sa vystavovaných predmetov.)

8.5 Objemový, tenký a plošný hologram

Vráťme sa k obr. 8.2., ktorý je ilustráciou takzvaného **objemového hologramu**, t. j. hologramu, ktorý obsahuje záznam interferenčného poľa v značnej časti priestoru. Z tohto obrázku je zrejmé, že nie celý priestor, v ktorom sa vytvára interferenčné pole uvažovanej objektovej a referenčnej vlny, musí byť vyplnený fotografickou emulziou. Postačuje, ak sa na fotografickom zázname vytvoria záznamy „časti“ rekonštrukčných plôch Ψ_n. Ak sú tieto časti dostatočne veľké, pri dopade rekonštrukčnej vlny sa na nich vytvoria rekonštrukcie

„častí“ objektovej vlny. Časti objektovej vlny, vytvorené na rôznych častiach rôznych plôch Ψ_n , na seba nadväzujú a spolu vytvárajú rekonštrukciu objektovej vlny. Vzdialenosť maxím interferenčného poľa je rovná $\lambda/(2.\sin(\alpha))$ a vlnová dĺžka λ je u viditeľného svetla rovná zlomkom mikrometra, takže i v tenkej fotografickej emulzii (s hrúbkou niekoľkých mikrometrov) sa zaznamenajú desiatky interferenčných prúžkov (prakticky všetky vlnoplochy uvedené na obr. 8.2). Z toho dôvodu popis vzniku rekonštrukcie uvedený v predchádzajúcich odstavcoch možno použiť i pre **„tenký hologram“,** vytvorený na fotografických materiáloch s vrstvami bežnej hrúbky.

Zaujímavý a prakticky dôležitý prípad dostaneme, keď vytvoríme teleso, ktorého povrch je zhodný s plochou pozostávajúcou z rôznych úsekov plôch Ψ_n . Pri dopade rekonštrukčnej vlny na takýto povrch sa, podobne ako pri tenkom holograme, na rôznych častiach rôznych plôch Ψ_n vytvoria rôzne úseky objektovej vlny. Ak je dostatočne veľký povrch nejakého telesa tvorený takýmito plôškami, pri jeho osvetlení vlnou zhodnou s referenčnou vlnou sa vytvorí rekonštrukcia objektovej vlny. Výhodou takéhoto **„plošného hologramu“** je, že sa nemusí vytvárať fotografickou cestou. Je mysliteľné takéto povrchy pripravovať lisovaním, podobným lisovaniu gramofónových platní, čím sa výrazne znižuje cena takýchto hologramov (ako urobiť vhodnú matricu, to je iná otázka). Dnes je už technológia prípravy takýchto plošných hologramov natoľko rozvinutá, že sa nimi môžu zdobiť, napríklad obálky kníh.

Pri predchádzajúcom výklade sme sa v istej miere opierali o intuíciu, resp. o fyzikálnu predstavu, ako môžu vyzerať vlny vytvorené odrazom na „častiach“ plôch Ψ_n a o použitie vety o jednoznačnosti riešenia vlnovej rovnice. Jej použitie tu však nie je celkom korektné, pretože plochy o ktorých uvažujeme nerozdeľujú priestor na dva polpriestory, nakoľko nie sú nekonečné a ani nie sú v sebe uzavreté.

Prísne vzaté, v máloktorom prípade je možné vybrať takú plochu Ψ , aby bola uzavretá a teda rozdeľovala priestor na dva polpriestory. Avšak ak sa záznam vytvorí v oblasti prekračujúcej oblasť v ktorej je amplitúda zaznamenávanej vlny rôzna od nuly, môžeme si vybratú časť plochy Ψ doplniť ľubovoľným spôsobom, pretože amplitúda záznamu je v týchto doplňujúcich častiach aj tak nulová.

Podobnú chybu sme urobili i pri výklade „plošného hologramu“, keď sme miesto plochy Ψ použili rôzne úseky plôch Ψ_n. Môže ju odstrániť podobne, a to tak, že doplníme úseky plôch Ψ_n o také plôšky, ktoré ich pospájajú v ucelenú plochu. Avšak táto doplňujúca plocha nie je fyzikálne realizovaná, takže sa na nej dopadajúca vlna neodráža - na tejto doplňujúcej ploche je amplitúda generácie rovná nule. Môžeme to považovať síce tiež za doplnenie, ale zároveň za zaradenie takého tienitka, ktoré v doplnených úsekoch vlnu neprepúšťa. Je to tak, ako by sme zároveň zaradili do cesty práve rekonštruovanej objektovej vlny akési difrakčné tienitko. Ako zaradenie difrakčného tienitka pozmení prechádzajúcu (rekonštruovanú) vlnu, to sme videli v predchádzajúcej kapitole: objektová vlna zostáva neporušená, i keď slabšia, a pridávajú sa difragované vlny. Ak je mriežka dostatočne hustá (má malú mriežkovú konštantu), difragované vlny sú dostatočne odklonené a v podstate neovplyvňujú kvalitu obrazu sprostredkovávaného objektovou vlnou.

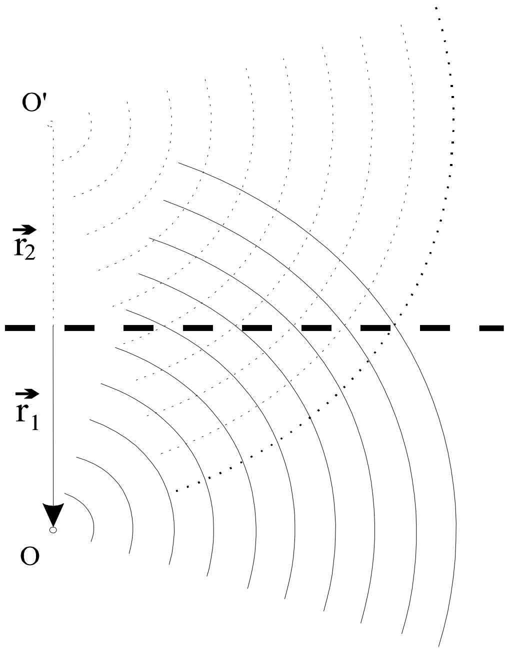
Pri takom zázname, pri ktorom k prechodu z jednej plochy Ψ_n na inú dochádza na malých vzdialenostiach, je mriežková konštanta fiktívnej difrakčnej mriežky malá, a tak rekonštrukcia obrazu nie je narušená. Samozrejme, že keď sú prechody zriedkavé (sú ďaleko od seba), je vplyv toho, že nerekonštruujeme objektovú vlnu na celých plochách Ψ_n ešte menší.

8.6 Difrakčný hologram

Predstavme si, že by sme záznam interferenčného poľa objektovej a referenčnej vlny urobili na fotografickom materiáli, ktorého emulzia by mala hrúbku výrazne menšiu než je vlnová dĺžka zaznamenávaných vĺn. Dostali by sme tak záznam, ktorý možno považovať za rovinný a v ktorom je hustota strieborných zŕn úmerná intenzite zaznamenaného interferenčného poľa v rovine záznamu. Pretože optická priepustnosť fotografického záznamu je závislá od hustoty strieborných zŕn, pri osvetľovaní rekonštrukčnou vlnou sa bude takýto záznam správať ako difrakčné tienitko - bude modulovať amplitúdu prechádzajúcej rekonštrukčnej vlny v zhode s amplitúdou objektovej vlny, ktorá sa podieľala na vytvorení záznamu. Aby sme si urobili predstavu o tom, aká vlna sa vytvorí prechodom cez takéto tienitko, myslime si, že zaznamenaná vlna bola guľová a referenčná vlna bola rovinná vlna šíriaca sa v smere osi x. Pre jednoduchosť si všimnime iba tých bodov, v ktorých má interferenčné pole maximálne hodnoty. Keby svetlo rozptýlené na zázname pochádzalo iba z týchto bodov, budú vytvorené vlny v priestore za záznamom interferovať a to tak, že v niektorých miestach bude táto interferencia konštruktívna, v iných nie. Konštruktívna interferencia (sčitovanie) sa uskutoční v tých miestach, v ktorých sú príspevky od jednotlivých rozptylových centier vo fáze. Z toho, ako sú vybraté uvažované rozptylové centrá je zrejmé, že ku konštruktívnej interferencii dôjde práve tam, kde má byť vytvorená rekonštrukcia objektovej vlny. To znamená, že sa i na takomto „nekonečne“ tenkom holograme vytvorí rekonštrukcia objektovej vlny.

Pretože taký istý výsledok by sme získali pri prechode svetla cez tienitko v ktorom by boli malé otvory práve v tých miestach kde sú uvažované maximá holografického záznamu, hovoríme takémuto záznamu **„difrakčný hologram“** .

Ku konštruktívnej interferencii (ku sčitovaniu) ale nemusí dôjsť iba v miestach zodpovedajúcich objektovej vlne (guľovej vlne so stredom v bode O na obr. 8.4). Všimnime si, že rozloženie amplitúdy interferenčného poľa rovinnej vlny šíriacej sa v smere osi z s guľovou vlnou so stredom v $\vec{r}_1 = +r_0 . \vec{i}$ je v rovine $x = 0$ také isté ako pri interferencii s guľovou vlnou so stredom v $\vec{r}_2 = +r_0 . \vec{i}$ (obr.8.4.). Keby sme teda vytvorili fotografický záznam takýchto interferenčných polí, nemohli by sme rozoznať o interferenciu akej guľovej vlny sa jedná (na fotografickom zázname sa stráca informácia o rozložení fáze zaznamenávaného poľa). Navyše je rozloženie amplitúdy týchto interferenčných polí v rovine $x = 0$ zhodné s rozložením amplitúdy poľa vytvoreného interferenciou všetkých troch uvažovaných vĺn (rovinnej a oboch guľových vĺn, avšak s tým, že amplitúda rovinnej vlny je dvojnásobná než v prvom prípade). Z toho vyplýva, že pri prechode rovinnej vlny cez takýto záznam sa v dôsledku difrakcie vytvorí guľová vlna, ktorá interferenčné pole vytvorila, ale i guľová vlna so symetricky združeným stredom.

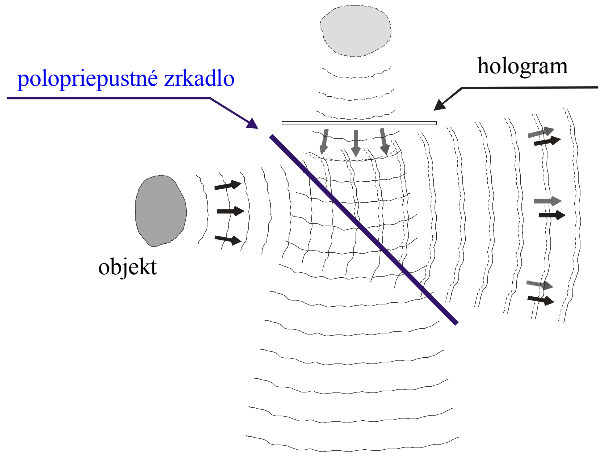


Obr.8.4. Rozloženie amplitúdy interferenčného poľa symetricky združených guľových vĺn s rovinnou vlnou kolmou k záznamu je rovnaké

V spojení s princípom superpozície vĺn je toto konštatovanie veľmi obsažné. Veľké množstvo objektov odráža dopadajúce vlny difúzne (dokonale lesklých predmetov, najmä pre vlny s vlnovými dĺžkami zodpovedajúcimi viditeľným optickým vlnám, je veľmi málo). To znamená, že pri ožiarení takýchto objektov koherentným zdrojom, sa javia ako súbor koherentných, priestorovo oddelených bodových zdrojov. Vlnové pole vytvorené takýmto súborom zdrojov možno vyjadriť ako superpozíciu zodpovedajúcich guľových vĺn. Keď vytvoríme fotografický záznam inter-ferenčného poľa tohoto súboru guľových vĺn s rovinnou vlnou a necháme cez takýto záznam prejsť rovinnú vlnu zhodnú s rovinnou vlnou použitou pri vytváraní záznamu (rekonštrukčná vlna), v dôsledku difrakcie sa vytvorí v rovine $x = 0$ vlnový stav zhodný s poľom vytvoreným príslušnou rovinnou vlnou, súborom "zaznamenaných" guľových vĺn a súborom zbiehavých guľových vĺn so stredmi symetrickými so stredmi pôvodného súboru vĺn[4]. Vytvorí sa teda holografická rekonštrukcia pôvodnej (objektovej) vlny, vytvárajúca zdanlivý obraz objektu a vlna, ktorá vytvára reálny obraz pôvodného objektu, ktorý je umiestnený symetricky voči polohe objektu, ktorý vytvoril objektovú vlnu. Existencia tohto symetricky združeného obrazu je charakteristická pre vznik rekonštrukcie pomocou difrakcie na plošnom (veľmi tenkom) zázname, ktorý, ako sme už uviedli nazývame **difrakčným hologramom** .

[4] Vznik týchto zbiehavých vĺn súvisí s tým, že fáza vlny, ktorá na tienitko dopadá, je na celej rovine $x = 0$ rovnaká, zatiaľ čo fáza interferenčného poľa rovinnej vlny s guľovými rozbiehavými vlnami závisí od súradnice. Až v kombinácii so zbiehavými vlnami sa dosiahne toho, že fáza vlnového stavu je v celej rovine $x = 0$ rovnaká.

8.7 Holografická interferometria



Obr. 8.5. Súčasné sledovanie objektu a jeho obrazu

Optická vernosť objektu a jeho rekonštrukcie sa týka i rozloženia fázy objektovej vlny. V dôsledku toho je možné urobiť interferenčné zrovnanie objektu a holografického obrazu. Ak objekt a jeho hologram osvetlíme koherentnými vlnami, pomocou polopriepustných zrkadiel budeme môcť sledovať objekt a jeho holografický obraz súčasne (obr. 8.5). Môže sa stať, že v niektorých miestach budú objektová a rekonštruovaná vlna vo fáze a v iných miestach v protifáze. To znamená, že budeme rôzne miesta objektu vidieť s rôznymi intenzitami - budeme ho vidieť ako by pokrytý interferenčnými prúžkami. Ak objekt je identický sám so sebou (t. j taký istý ako v čase keď sa vytváral záznam) musí byť, pri správnom nastavení jeho polohy, celý jeho obraz vo fáze s obrazom rekonštruovaným. Ak je ale objekt v niektorom mieste deformovaný - stačí o štvrtinu vlnovej dĺžky - fáza ním vytvorenej vlny je v tomto mieste iná, čo sa prejaví výraznou zmenou amplitúdy v interferenčnom poli týchto vĺn a v konečnom dôsledku interferenčnými prúžkami pri súčasnom sledovaní objektu a jeho holografického obrazu. Rovnaký efekt by sa dostavil, keby sme vytvorili (povedzme i na jednom holograme) záznam objektu pred a po deformácii. Pri rekonštrukcii by sa zmena polohy povrchu objektu tiež prejavila prítomnosťou interferenčných prúžkov. Takýto postup sa dnes používa pri kontrole viacerých výrobkov (pneumatiky, presné strojárenstvo a pod.). Postupy sú natoľko rozpracované, že sa hovorí o disciplíne, ktorá sa nazýva „**holografická interferometria**“.

Poznamenajme, že použitie interferenčných metód je možné vtedy, keď rozdiely fáz zrovnávaných vĺn sa na malých vzdialenostiach líšia iba o niekoľkonásobkov 2π, t. j. sú posunutia povrchu objektu iba niekoľko mikrometrov. Keď sú posunutia povrchu značne väčšie ako vlnová dĺžka, tiež sa vytvoria interferenčné prúžky, ale ich hustota je taká vysoká, že sa iba s ťažkosťami identifikujú. Z toho dôvodu sa v poslednej dobe venuje pozornosť interferometrickým metódam s použitím vĺn s väčšími vlnovými dĺžkami.

Výklad podstaty holografie predložený v tejto kapitole možno označiť ako „pojmový výklad“, ktorý nemôže postihnúť kvantitatívne stránky javu, napríklad: ako odchýlky od podmienok ideálnej rekonštrukcie ovplyvnia rekonštrukciu objektovej vlny. V ostatných aspektoch je ale výklad verným popisom holografie a umožňuje orientovať sa v rozmanitých možnostiach využitia holografie. Tých, ktorí by sa chceli zoznámiť i s bežným kvantitatívnym (matematickým) popisom holografie odkazujeme na nižšie uvedenú literatúru.

Literatúra

[1] MILER, M.: Holografie - teoretické a experimentální základy a její použití, SNTL, Praha 1994.

[2] FRANCON, M.: Holography, Masson et Cie , Paris 1969, ruský preklad Izdateľstvo „MIR“, Moskva 1972.

9. Nelineárna optika

9.1 Vplyv intenzity svetla na idex lomu

Zo základného kurzu fyziky vieme, že vzájomné pôsobenie svetla s prostredím môžeme vysvetľovať ako na základe klasickej, tak aj kvantovej fyziky. Absorpciu a vznik svetla nie je možné vysvetliť bez princípov kvantovej fyziky. Keď budeme mať na mysli šírenie svetla v oblasti normálnej disperzie (pozri kapitolu 1), je rozbor fyzikálnych dejov na základe klasickej fyziky postačujúci aj pre svetlo. Tento postup využijeme v ďalších paragrafoch.

Videli sme, že každé prostredie z hľadiska optických vlastností môžeme charakterizovať **indexom lomu** n (ak máme na mysli svetlo ako harmonickú vlnu) a **koeficientom absorpcie** α , n je potom definované vzťahom:

$$n = \frac{c}{v}, \tag{9.1}$$

kde v je fázová rýchlosť svetla v danom prostredí. Ak svetelná vlna postupuje v smere osi z, jej intenzita sa zmenšuje podľa zákona

$$I = I_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot z), \tag{9.2}$$

kde I_0 je intenzita v bode $z = 0$. Ak tieto veličiny nezávisia od intenzity vlny, potom hovoríme, že optické javy popisujeme v rámci **lineárnej optiky.** Vzájomné pôsobenie svetla a prostredia sa skladá zo vzájomných elementárnych pôsobení svetla s jednotlivými atómami a molekulami. Takéto elementárne vzájomné pôsobenie vzniká v dôsledku toho, že sa atómy a molekuly prostredia **polarizujú** v elektrickom poli svetelnej vlny $\vec{E}$. T. zn. záporne nabité elektróny sa pod vplyvom elektrického poľa posúvajú vzhľadom na kladne nabité jadrá, v dôsledku čoho sa atóm stáva elektrickým dipólom, pričom o posunutí rozhoduje veľkosť a smer intenzity elektrického poľa. Intenzita elektrického poľa sa mení s kruhovou frekvenciou ω a s touto frekvenciou kmitá aj kmitajúci elektrón, na ktorý elektrické pole pôsobí. Avšak kmitajúci elektrón je zdrojom nového elektromagnetického vlnenia, ktoré nazývame **sekundárnym.** Dopadajúce vlnenie nazývame **primárnym.**

Lineárna optika vychádza z predpokladu, že sekundárne vlnenie je takou istou funkciou času, ako harmonické vlnenie, ktoré dopadá na prostredie. Obidve tieto vlnenia sa líšia len fázami a amplitúdami. V dôsledku fázového posunu oboch vlnení je rýchlosť svetla v prostredí iná ako vo vákuu. Preto je aj index lomu v prostredí odlišný od jednotky. Absorpcia svetelnej vlny je spôsobená zase stratami energie, ku ktorým dochádza počas vzájomného pôsobenia svetelnej vlny s atómom. Atómu ako elementárnemu dipólu, prislúcha moment dipólu

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \cdot \chi_0 \cdot \vec{E} \tag{9.3}$$

kde χ_0 je atómová dielektrická susceptibilita. Ak je v jednotkovom objeme N atómov, tak polarizáciu prostredia možno vyjadriť vzťahom

$$\vec{P} = N \cdot \varepsilon_0 \cdot \chi_0 \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E} \tag{9.4}$$

χ je dielektrická susceptibilita, ε_0 permitivita vákua. Vidíme, že vektor polarizácie je vyjadrený lineárnou rovnicou. Je priamoúmerný intenzite elektrického poľa. Koeficient úmernosti χ (polarizovateľnosť) závisí len od vlastností prostredia. Musíme však zdôrazniť, že táto rovnica platí len približne. Pomerne presne platí vtedy, keď intenzita elektrického poľa E svetelnej vlny je malá v porovnaní s intenzitou elektrického poľa E_a vnútroatomárnych polí. Pre porovnanie si všimnime:

Keď uvážime, že rozmer atómu $a \approx 10^{-10}$ m , potom ak $E_a \approx e / 4\pi\varepsilon_0 \cdot a^2$ bude intenzita elektrického poľa v atóme rádu $E_a \approx 10^{10} - 10^{11}$ V / m. Vo zväzkoch svetla od nelaserových zdrojov hodnota intenzity elektrického poľa je rádove $10 - 10^2$ V / m , takže vidíme, že rovnica (9.4) spĺňa uvedenú podmienku pomerne dobre (s veľkou presnosťou).

Položme si otázku, aká bude intenzita elektrického poľa v intenzívnych laserových zväzkoch svetla ? Pre niektoré typy laserov je veľkosť intenzity el. poľa uvedená v tab. 9.1. Vidíme, že v prípade impulzných laserov (pozri 4. a 5. riadok tabuľky) dosahuje intenzita el. poľa už porovnateľnú hodnotu s poľom vo vnútri atómu, dokonca v prípade uvedenom v piatom riadku ju prekračuje. Hodnoty intenzity elektrického poľa vo zväzku boli vypočítané podľa vzťahu (2.27). Doba trvania svetelného impulzu v prípade 4, 5 bola 10 ns. V prípadoch, keď veľkosť el. poľa je porovnateľná s el. poľom atómu model lineárneho harmonického oscilátora pre popis chovania optického elektrónu, ktorý vyžaruje sekundárne vlny je už nepoužiteľný a vektor polarizácie prostredia už nebude lineárnou funkciou intenzity el. poľa svetelnej vlny, ale nelineárnou funkciou. V dôsledku tohto vznikne závislosť indexu lomu a iných charakteristík prostredia od intenzity elektrického poľa svetelnej vlny, čo vedie k principiálne novým optickým javom, ktoré v lineárnej optike nepoznáme.

Tab. 9.1

Typ lasera	Výkon P	Priemer zväzku d	$E[V/m]$
He - Ne	10 mW	3 mm	$7{,}3 .10^2$
Argónový	1 W	3 mm	$7{,}3 .10^3$
Impulzový	1 MW	3 mm	$7{,}3 .10^6$
Impulzový	100 MW (10 ns)	3 mm	$7{,}3 .10^{11}$
Impulzový	100 MW (10 ns)	3.10^{-3} mm	$7{,}3 .10^{14}$

Prvý nelineárny jav bol pozorovaný v r. 1925 S. I. Vavilovom a V. L. Lebedevom. Pozorovali, že v skle, ktoré obsahovalo ióny uranu, klesá s narastajúcou intenzitou svetla koeficient absorpcie až o 1,5 % . Vznik tohto nelineárneho javu nasýtenia dnes môžeme vysvetliť ako dôsledok vyrovnávania obsadenia dvoch energetických hladín, medzi ktorými dochádza ku kvantovým prechodom, t. j. k absorpcii a emisii svetla. Inými slovami atómy, ktoré sú vo vzbudenom stave svetlo neabsorbujú, čo sa prejaví poklesom koeficientu absorpcie pri meraní výkonu.

Búrlivý rozvoj zaznamenala nelineárna optika po skonštruovaní lasera r. 1960. Roku 1961 americký fyzik P. Franken vygeneroval v kremennom skle 2. harmonickú vlnu žiarenia využitím rubínového lasera. Odvtedy sa objavil veľký počet efektov, ktoré sa týkajú najmä mnohofotónových procesov absorpcie. Pri veľkých intenzitách svetelného žiarenia v kvantovej sústave s dvoma enegetickými hladinami s energiou W_1 a W_2 môže dôjsť k pohlteniu dvoch fotónov s frekvenciami ω_1 a ω_2 , pričom platí $\hbar \cdot \omega_1 + \hbar \cdot \omega_2 = W_2 - W_1$. Keď $\omega_1 = \omega_2$ bude platiť: $\omega = \omega_1 = \omega_2 = 1/2 \cdot [(W_2 - W_1)/\hbar]$. Možné je pohltenie troch a viac fotónov. Tento jav našiel uplatnenie v nelineárnej laserovej spektroskopii. Dovoľuje získať informáciu o energetických hladinách kvantových sústav, keď je to nedostupné klasickými spektroskopickými metódami.

Do nelineárnej optiky patria aj javy samofokusácie a samokanalizácie zväzkov v nelineárnom prostredí. Ďalej tiež javy súvisiace s Brillouinovým a Ramanovým rozptylom svetla. Niektorými týmito javmi sa ďalej budeme zaoberať podrobnejšie.

9.2 Jednoduchý model nelineárneho prostredia

Priblížme si teraz predstavu o nelineárnej polarizovateľnosti molekuly. Za tým účelom použime zjednodušený model pôsobenia svetelnej vlny. Ďalej si predstavme, že za dipólový moment atómu je zodpovedný jeden elektrón (jadro je podstatne ťažšie, môžeme ho teda považovať za nehybné). Tiež hovoríme o „**optickom elektróne**“. V súhlase s touto zjednodušenou predstavou, posunutie *x(t)* optického elektrónu z rovnovážnej polohy v elektrickom poli svetelnej vlny *E(t)* ako funkcia času pre jednorozmerný prípad je možné vyjadriť pohybovú rovnicu :

$$m \cdot \ddot{x} = e \cdot E(t) + F \tag{9.5}$$

F je sila, ktorá udržuje elektrón v rovnovážnej polohe. V prvom priblížení, ktoré zodpovedá lineárnej optike, predpokladáme kvázipružný charakter tejto sily, t. zn., že sila je priamo úmerná výchylke elektrónu z rovnovážnej polohy :

$$F = -K \cdot x\,. \tag{9.6}$$

Ako vieme tomuto priblíženiu odpovedá kvadratická závislosť potenciálnej energie elektrónu od jeho výchylky

$$U(x) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2\,. \tag{9.7}$$

Ďalším priblíženiam zodpovedajú členy s vyššími mocninami. Ak teda napíšeme potenciálnu energiu pomocou mocninového radu (rozvoj podľa výchylky z rovnovážnej polohy) :

$$U(x) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot L \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot M \cdot x^4 + \ldots \tag{9.8}$$

Koeficienty $K, L, M \ldots$ budú závisieť od vlastností molekúl a ich medziatómových väzieb. Poznamenajme, že ak sa prostredie vyznačuje stredom symetrie, pri zmene $\vec{E}$ na $-\vec{E}$ je $|\,x\,|$ taká istá. Z toho vyplýva, že koeficienty pri nepárnych členoch musia byť rovné nule. Ináč my majme teraz na mysli systém, v ktorom sme zanedbali tlmenie, a pre ktorý pohybovú rovnicu môžeme písať v tvare :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{e}{m} \cdot E(t) + L \cdot x^2 + M \cdot x^3 + \ldots, \tag{9.9}$$

kde frekvencia vlastných harmonických kmitov sústavy pri nie veľkých amplitúdach je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}\,. \tag{9.10}$$

Pre prípad, že vyššie členy rozvoja (9.9) majú nie veľké hodnoty voči prvému členu, potom je možné pohybovú rovnicu elektrónu (9.9) riešiť metódou postupných priblížení. V nultom priblížení sa vyššie členy zanedbávajú a rovnica prejde na základný tvar

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{e}{m} \cdot E(t), \tag{9.11}$$

ako je to v klasickej teórii disperzie lineárnej optiky. Keď bude elektrické pole dopadajúce na vyššie uvažovaný elektrón monochromatické, t. j. $E(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ riešenie rovnice (9.11) bude v tvare:

$$x_0(t) = \frac{e \cdot E_0}{m \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \cdot \cos(\omega \cdot t), \tag{9.12}$$

čo dáva vzťah pre lineárnu polarizovateľnosť :

$$\chi_0 = \frac{e^2}{m \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \tag{9.13}$$

Ak nulté priblíženie (9.12) dosadíme do (9.9) miesto $x\,(t)$ v anharmonických členoch, dostaneme ďalšie priblíženie, v ktorom budú hrať dôležitú úlohu mocniny funkcie $\cos(\omega \cdot t)$, t. j.:

$$\cos^2(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t)\right) \tag{9.14}$$

a

$$\cos(3\cdot\omega\cdot t)=\frac{3}{4}\cdot\cos(\omega\cdot t)+\frac{1}{4}\cdot\cos(3\cdot\omega\cdot t). \qquad (9.15)$$

Všimnime si, že v týchto sčítancoch sa objavuje dvojnásobok a trojnásobok základnej frekvencie. Preto riešenie nehomogénnej rovnice (9.9), ktorá opisuje vynútené kmity optického elektrónu, obsahuje tiež okrem základného člena s frekvenciou ω ďalšie členy s frekvenciami 2ω, 3ω... atď.:

$$\begin{aligned}x(t)=&\frac{e}{m\cdot\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cdot E_0\cdot\cos(\omega\cdot t)+\frac{L}{2}\cdot\left[\frac{e\cdot E_0}{m\cdot\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right]^2\cdot\left[\frac{1}{\omega_0^2}+\frac{\cos(2\cdot\omega\cdot t)}{\omega_0^2-(2\cdot\omega)^2}\right]+\\&+\frac{M}{4}\cdot\left[\frac{e\cdot E_0}{m\cdot\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right]^3\cdot\left[\frac{3\cdot\cos(\omega\cdot t)}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\cos(3\cdot\omega\cdot t)}{\omega_0^2-(3\cdot\omega)^2}\right]\end{aligned} \qquad (9.16)$$

Ako sme uviedli vyššie, optický elektrón, ktorý koná vynútené kmity, je teda zdrojom sekundárnych vĺn. Vynútené kmity elektrónu, na ktorý dopadá, vedú v optickom prostredí ku vzniku svetelných vĺn (sekundárnych) s dvojnásobnou, trojnásobnou atď. frekvenciou, než má dopadajúca svetelná vlna. Podľa toho je frekvencia určená elementárnymi procesmi v zdroji svetla, (menovite frekvencia kmitov optického elektrónu v žiariacom atóme) a nemení sa pri zmenách podmienok šírenia. Avšak pri splnení podmienok, daných rovnicou (9.16), keď sa začnú uplatňovať anharmonické členy optických elektrónov optického prostredia, dochádza v šíriacej sa vlne svetelným prostredím k násobeniu frekvencie.

Vynútený pohyb elektrónov prostredia v poli svetelnej vlny sa makroskopicky prejavuje tým, že sa prostredie spolarizuje. Toto spolarizovanie je súčtom dipólových momentov jednotlivých molekúl prostredia vyvolaných elektrickým poľom. Anharmonické členy v potenciálnej energii (9.8) spôsobia, že aj v dipólových momentoch sa objavia členy s vyššími mocninami intenzity elektrického poľa svetelnej vlny. Preto v silných svetelných poliach rovnice, ktoré spájajú polarizovateľnosť prostredia s intenzitou elektrického poľa sa stanú nelineárnymi. Pre homogénne anizotrópne prostredie môžeme vo všeobecnom prípade rovnice pre polarizovateľnosť napísať v tvare:

$$P_i=\varepsilon_0\cdot\left[\sum_k\chi_{ik}\cdot E_k+\sum_{k,l}\chi_{ikl}\cdot E_k\cdot E_l+\sum_{k,l,m}\chi_{iklm}\cdot E_k\cdot E_l\cdot E_m+\ldots\right], \qquad (9.17)$$

kde i, k, l, m nadobúdajú hodnoty kartézskych indexov x, y, z. Vzťah (9.17) je sumárny zápis tenzorových rovníc. Tenzor druhého rádu χ_{ik} predstavuje **lineárnu susceptibilitu** prostredia. Tenzory vyšších rádov χ_{ikl} a χ_{iklm} sa nazývajú analogicky **kvadratická** a **kubická susceptibilita.** Ich hodnoty môžu byť vyjadrené cez príslušné charakteristiky prostredia ako je nelineárna polarizácia molekúl a ich koncentrácia. Poznamenajme ešte, že pole E v rovniciach (9.17) považujeme za monochromatické a susceptibility χ_{ik} , χ_{ikl} , χ_{iklm} závisia od jeho frekvencie ω.

Ako je známe, v anizotrópnom prostredí smer vektora elektrickej polarizácie $\vec{P}$ vo všeobecnom prípade nemá smer vektora intenzity elektrického poľa $\vec{E}$. Preto rovnice (9.17) majú tenzorový charakter. V niektorých prípadoch pri kvalitatívnych analýzach nelineárnych javov je možné využiť zjednodušený izotrópny model nelineárneho prostredia, keď budeme polarizáciu $\vec{P}$ považovať za rovnobežnú s vektorom elektrickej intenzity $\vec{E}$ a susceptibility všetkých členov budeme považovať za skalárne veličiny, potom vektor polarizácie vyjadríme :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left(\chi \cdot \vec{E} + \chi_2 \cdot E \cdot \vec{E} + \chi_3 \cdot E^2 \cdot \vec{E} + \ldots \right). \tag{9.18}$$

9.3 Generácia 2. harmonickej

Predpokladajme, že na nelineárne prostredie (dielektrikum) dopadá intenzívna svetelná vlna a pre jednoduchosť nech je určená známym vzťahom :

$$E = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z), \tag{9.19}$$

kde význam jednotlivých symbolov je pôvodný. Ďalej predpokladajme, že uvedené prostredie bude mať vlastnosti tzv. **kvadratického dielektrika** t. zn., že v takomto prostredí vektor polarizácie podľa vzťahu (9.18) bude vyjadrený :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \left(\chi \cdot \vec{E} + \chi_2 \cdot E \cdot \vec{E} \right) = \left(\varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E + \varepsilon_0 \cdot \chi_2 \cdot E^2 \right) \cdot \vec{\tau} = \left(\varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E + a_2 \cdot E^2 \right) \cdot \vec{\tau} \tag{9.20}$$

kde $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor v smere vektora intenzity elektrického poľa $\vec{E}$ a vektora $\vec{P}$ polarizácie $\vec{P}$ a konštanta $a_2 = \varepsilon_0 \cdot \chi_2$. Potom veľkosť vektora polarizácie môžeme vyjadriť:

$$P = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E + a_2 \cdot E^2 . \tag{9.20a}$$

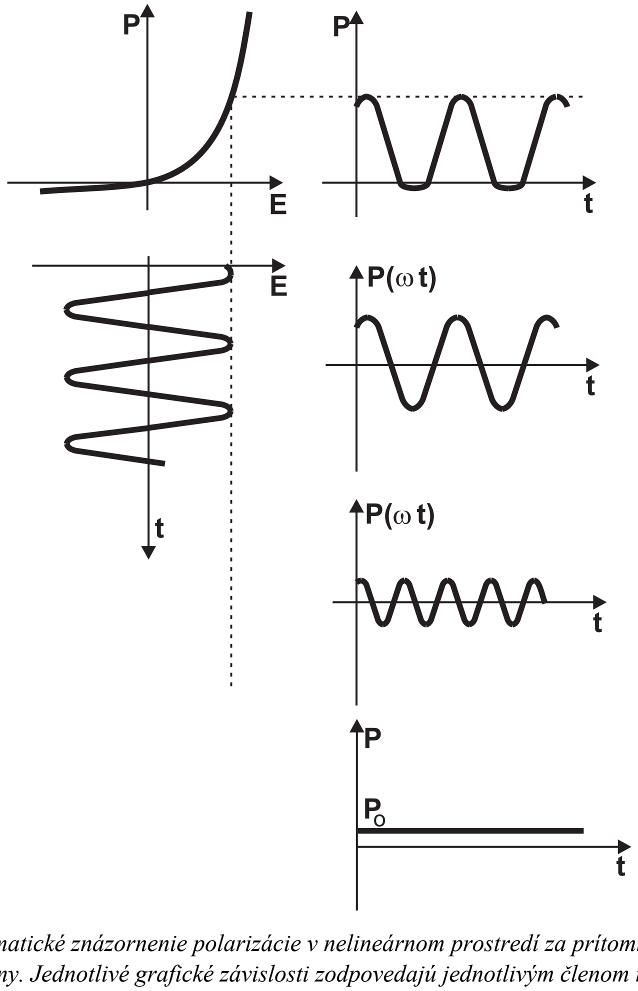
Keď do vzťahu (9.20a) dosadíme vzťah (9.19) po úprave dostaneme vzťah:

$$P = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z) + \frac{a_2 \cdot E_0^2}{2} + \frac{a_2 \cdot E_0^2}{2} \cdot \cos\left[2 \cdot \left(\omega \cdot t - k' \cdot z\right)\right] \tag{9.21}$$

Vidíme, že polarizácia v tomto prípade obsahuje tri členy. Prvý člen v (9.21) zodpovedá polarizácii s tou istou frekvenciou ako má dopadajúca svetelná vlna.

Druhý člen predstavuje jednosmernú polarizáciu a vyjadruje to, že nastalo „usmernenie“ svetelného poľa, inými slovami striedavé svetelné vlnenie spôsobilo jednosmernú polarizáciu poľa v uvažovanom prostredí.

Tretí člen zodpovedá vlne polarizácie s dvojnásobnou uhlovou frekvenciou „ 2.ω“ a s vlnovým číslom k'. Vlnové číslo k´ je funkciou druhej harmonickej frekvencie, t. j. $k' = 2\cdot\omega/(v\cdot 2\cdot\omega)$ (2ω v menovateľovi je argument fázovej rýchlosti vlny druhej harmonickej). Tento nelineárny člen je dôvodom, prečo vzniká vlna s druhou harmonickou frekvenciou. Uvedené tri členy sú schematicky znázornené na obr. 9.1.



Obr. 9.1 Schematické znázornenie polarizácie v nelineárnom prostredí za prítomnosti intenzívnej harmonickej vlny. Jednotlivé grafické závislosti zodpovedajú jednotlivým členom na pravej strane vzťahu (9.21)

Vlna s druhou harmonickou frekvenciou získava svoju energiu zo základného vlnenia . Ukazuje sa, že výmena energie medzi vlnením so základnou frekvenciou a vlnou s druhou harmonickou frekvenciou bude vtedy maximálna, keď bude fázový rozdiel

$\Delta\varphi$ medzi polarizáciou a vlnou s druhou harmonickou frekvenciou konštantný na dosť veľkých vzdialenostiach. V dôsledku disperzie svetla sa bude tento fázový rozdiel neustále meniť. Na vzdialenosti Δz môžeme pre tento fázový rozdiel napísať :

$$\Delta\varphi = \Delta z \cdot \left(k' - 2 \cdot k\right). \tag{9.22}$$

Potom, keď $\Delta\varphi = 0$ len vtedy bude vlnové číslo vlny druhej harmonickej rovné :

$$k = 2 . k \tag{9.23}$$

a vzťah medzi rýchlosťou pôvodnej vlny a vlny s frekvenciou 2.ω bude:

$$v(\omega) = v(2\omega) . \tag{9.24}$$

Vzťah (9.23) a s ním ekvivalentný vzťah (9.24) nazývame **podmienkou vlnovej synchronizácie.** Ak je táto podmienka splnená, je nelineárna polarizácia vo fáze s vlnou s druhou harmonickou frekvenciou, ktorú generuje, a to v ľubovoľnom bode. Je zrejmé, že vzťahy (9.23) a (9.24) môžu byť splnené len pre prostredie bez disperzie. V reálnom prostredí sú fázové rýchlosti vlnení s rôznymi frekvenciami v dôsledku disperzie rôzne. Preto je vlna polarizácie fázovo viazaná s vlnou s druhou harmonickou frekvenciou len do určitej vzdialenosti Δz_M (medzná vzdialenosť), ktorej zodpovedá fázový posun $\Delta\varphi = \pi$. Potom po dosadení do (9.22) pre túto vzdialenosť dostaneme:

$$\Delta z_M = \frac{\pi}{\left(k' - 2k\right)} . \tag{9.25}$$

Táto vzdialenosť je teda maximálna vzdialenosť, na ktorej pri vzájomnom pôsobení monochromatických vĺn rôznej frekvencie môže ešte dôjsť k vzniku nelineárnych javov, aj keď sa vlnenia šíria v prostredí s disperziou.

Experimentálne je možné ukázať, že výkon vlnenia s druhou harmonickou frekvenciou sa v závislosti od vzdialenosti Δz periodicky mení. Úseky dráhy, na ktorých výkon vlny s druhou harmonickou frekvenciou rastie na úkor základnej vlny, sa striedajú s úsekmi, na ktorých dochádza k opačnému deju, t. j. keď výkon vlnenia s druhou harmonickou frekvenciou sa zmenšuje a výkon vlny so základnou frekvenciou rastie. Veľkosť každého takéhoto úseku dráhy zodpovedá medznej vzdialenosti Δz_M , ktorej veľkosť dobre súhlasí s vypočítanou hodnotou podľa vzťahu (9.25). Pre kryštál kremeňa táto vzdialenosť činí cca 10^{-5} m. Poznamenajme ešte, že uvádzané maximá výkonu zodpovedajú nepárnym násobkom medznej vzdialenosti Δz_M .

9.4 Index lomu v nelineárnom dielektriku. Samofokusácia. Samokanalizácia

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali generáciou druhej harmonickej vlny v optickom prostredí, keď vektor polarizácie bol daný vzťahom (9.20) a teda mali sme na mysli tzv. kvadratické dielektrikum. Uvažujme teraz prípad prostredia, keď vektor polarizácie bude daný vzťahom

$$\vec{P} = P \cdot \vec{\tau} = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \cdot \chi_3 \cdot E^2 \cdot \vec{E} = \left(\varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E + \varepsilon_0 \cdot \chi_3 \cdot E^3\right) \cdot \vec{\tau} \qquad (9.26)$$

Keď túto rovnicu prenásobíme skalárne jednotkovým vektorom $\vec{\tau}$ môžeme po malej úprave dospieť k vyjadreniu veľkosti vektora polarizácie v tvare :

$$P = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E + a_3 \cdot E^3 , \qquad (9.26a)$$

kde $a_3 = \varepsilon_0 \cdot \chi_3$ význam jednotkového vektora je rovnaký ako v prípade kvadratického dielektrika. Takémuto prostrediu potom hovoríme **kubické dielektrikum.** Ďalej nás bude zaujímať ako sa mení index lomu v takomto nelineárnom dielektriku za prítomnosti intenzívnej svetelnej vlny, ktorá je popísaná rovnicou (9.19). Keď vzťah (9.19) dosadíme do (9.26a) (a tiež využitím vzťahu z goniometrie, že $\cos^3 x = (1/4) \cdot (\cos(3 \cdot x) + 3 \cdot \cos x)$) po úprave pre veľkosť vektora polarizácie dostaneme :

$$P = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z) + \frac{3}{4} \cdot a_3 \cdot E_0^3 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z) \qquad (9.27)$$

Hľadajme teraz hodnotu indexu lomu. Za tým účelom vyjadrime vektor elektrickej indukcie :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} . \qquad (9.28)$$

Keď teraz súčasne využijeme vzťah (9.27), dosadíme ho do (9.28) a po úprave dostaneme :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \left(1 + \chi + \frac{3}{4} \cdot \frac{a_3}{\varepsilon_0} E_0^2\right) \cdot \vec{E} . \qquad (9.29)$$

Porovnaním pravej strany vzťahu (9.28) so vzťahom (9.29) dostaneme pre index lomu n:

$$\varepsilon_r = n^2 = 1 + \chi + \frac{3}{4} \cdot \frac{a_3}{\varepsilon_0} \cdot E_0^2 . \qquad (9.30)$$

Vzťah medzi indexom lomu a permitivitou prostredia bol uvedený v 2. kapitole. Takže pre index lomu môžeme tiež písať :

$$n^2 = \varepsilon_{0r} + \varepsilon_{2r} \cdot E_0^2 , \tag{9.31}$$

kde $\varepsilon_{0r} = 1 + \chi$ a $\varepsilon_{2r} = 3a_3 / 4\varepsilon_0$. Pretože vo všetkých dielektrikách je ε_{0r} oveľa väčšie než ε_{2r}, môžeme tiež index lomu vyjadriť vzťahom :

$$n = \sqrt{\varepsilon_{0r} + \varepsilon_{2r} \cdot E_0^2} \cong \sqrt{\varepsilon_{0r}} + \frac{\varepsilon_{2r}}{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{0r}}} \cdot E_0^2 . \tag{9.32}$$

Keď zavedieme $n_0 = \sqrt{\varepsilon_{0r}}$ a $n_2 = \varepsilon_{2r} / 2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{0r}}$ môžeme pre index lomu v uvažovanom nelineárnom dielektriku písať:

$$n = n_0 + n_2 \cdot E_0^2 \tag{9.33}$$

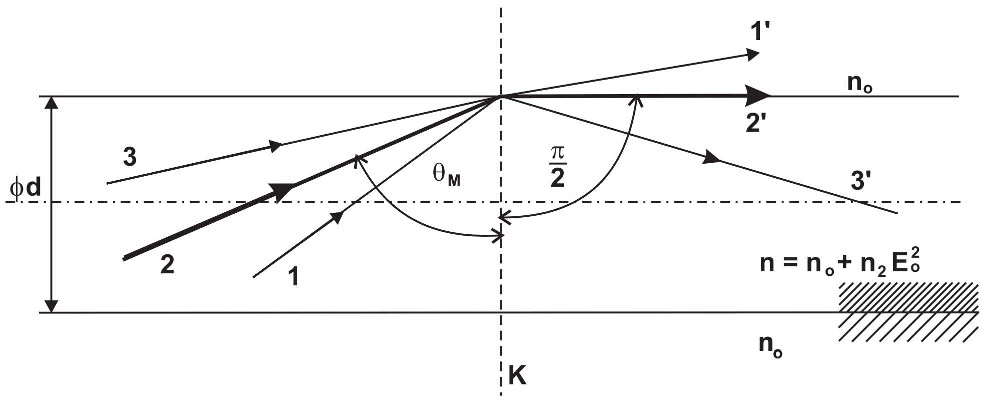
Vzťah (9.33) vyjadruje to, ako v tomto dielektriku závisí index lomu od intenzity elektrického poľa šíriacej sa svetelnej vlny. (Pripomeňme, že E_0 je amplitúda el. poľa.) Táto závislosť má v nelineárnom prostredí zaujímavé dôsledky. Spomeňme, že n_0 je index lomu, ktorý vystupuje v lineárnej optike pri malých intenzitách svetla. Index lomu n_2 (ω) je funkciou kruhovej frekvencie svetelnej vlny. Závisí od vlastností prostredia a je vyjadrený cez kubickú susceptibilitu χ. Z (9.33) súčasne vidíme, že ohraničený svetelný zväzok robí prostredie opticky nehomogénnym. V oblasti zväzku lúčov, kde intenzita elektrického poľa $E_0 \neq 0$, bude index lomu iný ako v oblasti mimo zväzku kde $E_0 = 0$. Schematicky je situácia znázornená na obr. 9.2 . Ako sme ukázali v úvodnej časti kapitoly 3., lúč v nehomogénnom prostredí sa od priameho smeru odkláňa do strany s väčším indexom lomu. V dôsledku toho vzniká jav tzv. **samofokusácie** vtedy keď $n_2 > 0$ a **defokusácie,** keď $n_2 < 0$.

Pozrime sa bližšie, v čom spočíva podstata javu samofokusácie. Za tým účelom si predstavme zväzok lúčov, ktoré majú v celom priereze rovnakú amplitúdu (pozri obr. 9.2) a ďalej, tak ako sme uviedli vyššie, bude mať táto oblasť, ktorá je valcového tvaru s priemerom d pri $n_2 > 0$ väčší index lomu, ako oblasť mimo nej. Pri lúčoch, ktoré sa šíria vo vnútri takéhoto valca pod malým uhlom Θ k jeho osi, bude dochádzať k úplnému odrazu. Pre medzný uhol Θ_M týchto lúčov môžeme podľa zákona lomu písať :

$$\frac{\sin\Theta_M}{\sin\dfrac{\pi}{2}} = \frac{n_0}{n_0 + n_2 \cdot E_0^2} . \tag{9.34}$$

Medznému uhlu zodpovedá rozbiehavý uhol β_M, ktorý je tvorený uvažovaným lúčom a osou valcového svetelného zväzku (pozri obr. 9.2). Pre tento uhol tiež môžeme písať

$$\cos \beta_0 = \frac{n_0}{n_0 + n_2 \cdot E_0^2} \tag{9.35}$$



Obr. 9.2. Šírenie sa zväzku svetelných lúčov v nelineárnom prostredí.

V dôsledku difrakcie (pozri kapit. 6.) na clone, ktorá vymedzuje uvažovaný valcový svetelný zväzok dochádza k rozbiehavosti svetelných lúčov. Najmenšiu rozbiehavosť určuje uhol medzi maximom a prvým ohybovým minimom, ktorý pri kruhovom prieréze je daný vzťahom :

$$\beta_{DIF} = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{d}, \tag{9.36}$$

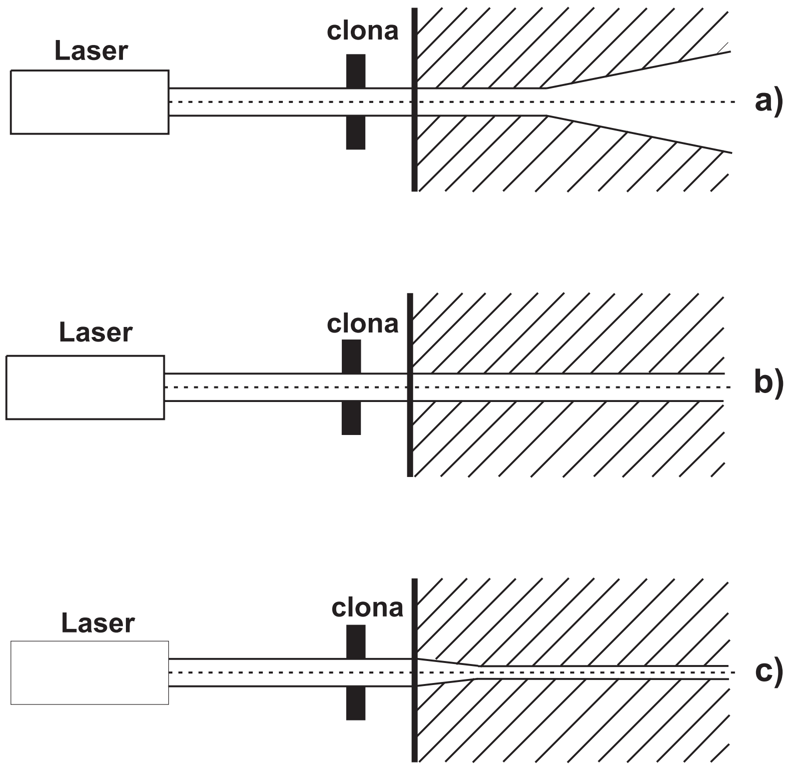
kde λ je vlnová dĺžka svetelnej vlny. Všimnime si, že rozbiehavý uhol β_0 je podľa (9.35) závislý od E_0, preto si všimnime tri prípady :

a) Keď rozbiehavý uhol $\beta_M < \beta_{DIF}$ zostane zväzok rozbiehavý, ale jeho rozbiehavosť bude menšia ako, keby sa lúč šíril v lineárnom prostredí. Hovoríme o **defokusácii.**

b) Keď uhol $\beta_M = \beta_{DIF}$, nelineárny jav kompenzuje difrakčnú rozbiehavosť. V tomto prípade hovoríme o **samokanalizácii.**

c) Keď uhol $\beta_M > \beta_{DIF}$, odchyľuje sa lúč k osi zväzku a nastáva **samofokusácia.** Nelineárne prostredie sa v tomto prípade chová ako spojná šošovka, ktorej ohniskovú vzdialenosť môžeme meniť veľkosťou intenzity elektrického poľa E_0 v svetelnej vlne.

Schematicky sú tieto tri prípady znázornené na obr. 9.3. Experimentálne je možné ukázať, že jav samofokusácie je možné v niektorých sklách pozorovať už pri výkone svetelného (laserového) žiarenia cca 1 Watt.



Obr. 9.3 Schematické znázornenie javu : a) defokusácie, b) samokanalizácie, c) samofokusácie, pri prechode svetelného zväzku nelineárnym prostredím

Literatúra

[1] FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M.: Feynmanove prednášky z fyziky, (Slovenský preklad), Alfa, Bratislava l980-90

[2] GODŽAJEV, N. M.: Optika, Vysšaja skola, Moskva l977

[3] ILKOVIČ, D.: Fyzika II, Alfa Bratislava, SNTL Praha l970 Kvantovaja elektronika, Sovietskaja encyklopedija, Moskva l969, (Slovenský preklad, Alfa, Bratislava l973)

[4] MATVEJEV, A. N.: Optika, Vysšaja škola, Moskva l985

[5] SAVEĽJEV, I. V.: Kurs obščej fiziki, Tom 2, Nauka, Moskva l982

[6] ŠTRBA, A.: Všeobecná fyzika 3 – OPTIKA, ALFA, Bratislava 1979, SNTL, Praha 1979

[7] ŠTRBA, A., MESÁROŠ, V., SENDERÁKOVÁ, D.: Optika s príkladmi I, UK, Bratislava 1996

[8] TURAN, J.: Kvantová elektronika, Alfa, Bratislava l986

10. Rozptyl svetla

10.1 Úvod

Elektrické pole elmg vlny, ktorá sa šíri prostredím (ako sme už uviedli vyššie), pôsobí na elektróny atómov alebo molekúl. Tieto elektróny vyžarujú sekundárne vlny. Inými slovami sú centrami sférických vĺn, ktoré sa šíria do všetkých smerov. Skúsenosť nás učí, že šírenie týchto vĺn je sprevádzané **rozptylom svetla.** Je známe, že v homogénnom prostredí sa rovinná svetelná vlna šíri len v priamom smere, do strán sa teda nerozptyľuje. Takýto výsledok zloženia všetkých sekundárnych vĺn súvisí s ich koherenciou.

Podrobnejším rozborom je možné ukázať, že skladanie sekundárnych vĺn v homogénnom prostredí dáva len priamu vlnu už za podmienky, že všetky sekundárne zdroje (elektróny v elementárnom objeme) sú rovnaké. Táto podmienka je splnená pre **ideálne homogénne prostredie**. V takomto prostredí sa svetlo nerozptyľuje. Z makroskopického hľadiska je rozptyl svetla podmienený len nehomogenitou prostredia. Keď je homogenita prostredia narušená, málo rozptýlené svetlo predstavuje len malú časť pôvodného zväzku. Vo vysokokvalitnom skle, alebo vo veľmi čistej vode zväzok svetla, ktorý sa takýmto prostredím šíri pri pohľade z boku nevidíme. Avšak situácia je opačná, ak sú vo vode malé bublinky vzduchu, alebo sa v nej nachádzajú malé rozptýlené čiastočky. Rozptyl svetla môžeme pozorovať aj vtedy, keď prostredie obsahuje rozptýlené čiastočky menšie než je vlnová dĺžka λ svetla. Vtedy ich okom nevidíme. Takéto prostredie nazývame **matným.**

Pripomeňme si, že keď intenzívny zväzok **bieleho svetla** prechádza cez sklenenú kyvetu naplnenú vodou, do ktorej sme kvapli niekoľko kvapiek mlieka, pri pozeraní z boku bude mať rozptýlené svetlo modrastý odtieň. Svetlo, ktoré prechádza cez kyvetu, má pri určitej hrúbke odtieň červenkastý. Výklad tohto javu bude zrejmý z ďalšieho.

10.2 Rayleighov rozptyl

Zákonitosti rozptylu svetla v matných (kalných) prostrediach prvýkrát experimentálne študoval J. Tyndall už v r. 1869. Teoreticky ich vysvetlil J. W. Rayleigh v r. 1899. Ukázal, že intenzita rozptýleného svetla ako funkcia súradnice r a uhla β t. j. $I(r, \beta)$ je priamoúmerná štvrtej mocnine kruhovej frekvencie svetelnej vlny ω^4. Alebo ináč, intenzita rozptýleného svetla je nepriamoúmerná štvrtej mocnine vlnovej dĺžky λ^4. Tento výsledok je známy ako **Rayleighov zákon**. Môžeme teda povedať, že krátkovlné žiarenie sa rozptyľuje viac, preto pri rozptyle bieleho svetla v matnom prostredí má rozptýlené svetlo modrý odtieň a svetlo, ktoré prejde v takomto prostredí určitú vzdialenosť má nádych dočervená. Keď na rozptyľujúce prostredie dopadá monochromatické svetlo, pričom nedochádza k zmene vlnovej dĺžky λ (alebo kruhovej frekvencie ω) hovoríme o **Rayleighovom rozptyle.**

10.3 Mieov rozptyl

Teória rozptylu svetla na sférických čiastočkách, ktorých rozmery môžu byť rádu vlnovej dĺžky, alebo väčšie než je vlnová dĺžka boli prvýkrát rozpracované G. A. Mieom v r. 1908. Mieov rozptyl je možné uvažovať ako difrakciu rovinnej vlny na rovnakých homogénnych sférach, náhodne rozmiestnených v homogénnom prostredí, a medzi ktorými sú vzdialenosti väčšie než je vlnová dĺžka. V praxi Mieov rozptyl hrá úlohu napr. pri rozptyle na daždi, na kvapôčkach v hmle a v prostrediach aerosólového charakteru. Tiež sa uplatňuje pri rozptyle svetla v oblakoch.

10.4 Brillouinov-Mandelštamov rozptyl

Z teórie tuhých látok je známe, že elmg vlna (svetelná vlna) môže v tuhej látke, v kvapaline alebo v plyne interagovať s inými typmi vĺn, napr. s akustickými vlnami, v magnetickej látke (v magnetikách) so spinovými vlnami a podobne.

Pri pružnej deformácii prostredia, tiež pri zmene hustoty v kvapaline alebo v plyne dochádza k zmene indexu lomu týchto prostredí. Preto deformácia prostredia v priestore a čase spôsobená prítomnosťou akustických vĺn vplýva na šírenie sa elmg vĺn. Fázová rýchlosť akustických vĺn v porovnaní s rýchlosťou svetla je v tuhých látkach rádu $v_A / c \approx 10^{-5}$. Preto na interakciu svetelnej vlny s akustickou vlnou môžeme nazerať ako na difrakciu svetelnej vlny (pozri kapit. 6.) na pomaly sa pohybujúcej mriežke s periodicky sa meniacim indexom lomu „n“ akustickou vlnou. Rozptyl svetelnej vlny na akustickej vlne sa nazýva **Brillouinov - Mandelštamov rozptyl**.

Zatiaľ čo v kapitole 6. je klasický vlnový popis difrakcie, pozrime sa na rozptyl ako na kvantovo-mechanickú interakciu akustickej a optickej vlny. Ako je známe šíriace sa svetlo si predstavujeme ako súbor fotónov - častíc s energiou jedného fotónu :

$$E_F = \hbar \cdot \omega_F \qquad (10.1)$$

a impulzom

$$\vec{p}_F = \hbar \cdot \vec{k}_F \qquad (10.2)$$

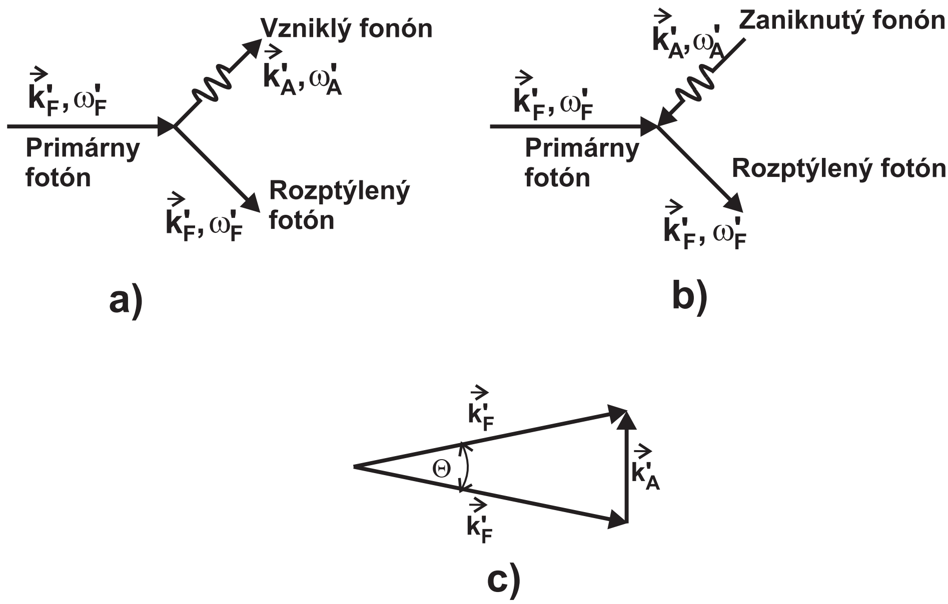
ω_F je kruhová frekvencia svetelnej vlny, $\vec{k}_F$ je jej vlnový vektor, $\hbar = h / 2 \cdot \pi$ je redukovaná Planckova konštanta. Na akustickú vlnu nazeráme ako na súbor fonónov - častíc s energiou

$$E_A = \hbar \cdot \omega_A \qquad (10.3)$$

a impulzom

$$\vec{p}_A = \hbar \cdot \vec{k}_A \, . \qquad (10.4)$$

Presnejšie podľa teórie tuhých látok hovoríme o kvázičasticiach a kváziimpulze. ω_A je kruhová frekvencia akustickej vlny a $\vec{k}_A$ je jej vlnový vektor. Z pohľadu kvantovej mechaniky na interakciu svetelnej vlny s látkou potom nazeráme ako na proces, keď fotón dáva vznik novému fotónu a jednému fonónu, alebo naopak, fotón a fonón dávaju vzniknúť novému fotónu. Schematicky sú tieto dva procesy znázornené na obr. 10.1 a, b.



Obr. 10.1 a) Vznik (kreácia) fotónu, b) zánik (anihilácia) fonónu.
c) Rovnoramenný trojuholník tvorený vlnovými vektormi svetelnej vlny pred rozptylom a po ňom a vlnovým vektorom akustickej vlny

Tak ako vo všetkých iných procesoch i pri týchto procesoch musí byť splnený zákon zachovania energie a zákon zachovania impulzu. T. zn., že súčet energie fotónu a energie fonónu pred „zrážkou“ sa rovná energii vzniknutej častice (rozptýleného fotónu) po zrážke. Podobne to platí pre impulz. Matematicky to vyjadríme :

$$\hbar \cdot \omega_F \pm \hbar \cdot \omega_A = \hbar \cdot \omega_F' \tag{10.5}$$

$$\hbar \cdot \vec{k}_F \pm \hbar \cdot \vec{k}_A = \hbar \cdot \vec{k}_F' \, . \tag{10.6}$$

Znamienko (+) vo vzťahu (10.5) a (10.6) platí pre prípad vzniku a znamienko () pre prípad zániku fonónu. ω_F' je kruhová frekvencia rozptýlenej svetelnej vlny a $\vec{k}_F$ jej vlnový vektor. Keď ďalej uvážime, že $\omega_F = c \cdot k_F, \omega_F' = c \cdot k_F', \omega_A = v_A \cdot k_A$. Vidíme, že pri rozptyle svetla na akustickej vlne musia platiť vzťahy :

$$\vec{k}_F' = \vec{k}_F \pm \vec{k}_A \tag{10.7}$$

a

$$\frac{c \cdot k_F'}{n'} = \frac{c \cdot k_F}{n} \pm v_A \cdot k_A, \tag{10.8}$$

kde $n'(\omega_F')$ a $n(\omega_F)$ sú absolútne indexy lomu prostredia pre rozptýlenú a primárnu svetelnú vlnu. Pretože $v_A \langle\langle c$ vzhľadom na vzťah (10.8) je $k_F' \approx k_F$ (porovnateľné) a teda trojuholník tvorený vektormi $\vec{k}_F', \vec{k}_F, a \vec{k}_A$ môžeme považovať približne za rovnoramenný (pozri obr. 10.1 c). Preto vlnový vektor $\vec{k}$, resp. vlnové číslo akustickej vlny je s uhlom rozptylu zviazaný vzťahom

$$k_A = 2 \cdot k_F \cdot \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \tag{10.9}$$

a frekvencia akustickej vlny bude daná :

$$\omega_A = 2 \cdot \omega_F \cdot n(\omega_F) \cdot \frac{v_F}{c} \cdot \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right). \tag{10.10}$$

K najväčšej zmene frekvencie dôjde vtedy, keď sa rozptýlená vlna šíri späť, t. j. keď $\Theta = \pi$. Vtedy bude frekvencia akustickej vlny ω_A maximálna (cca $10^{10}\,s^{-1}$).

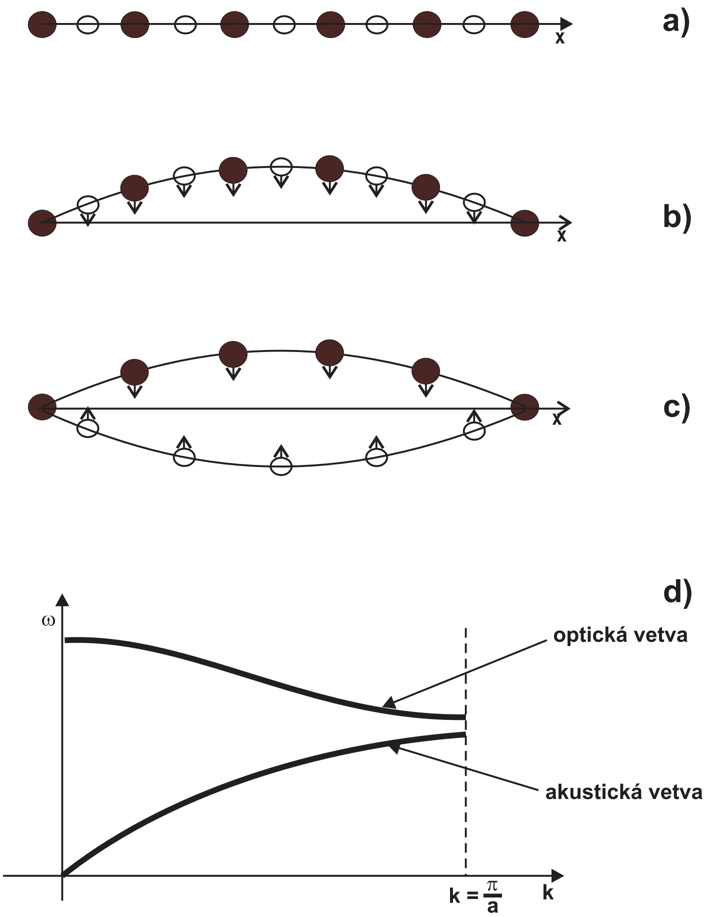
Zo vzťahu (10.6) môžeme určiť frekvenciu rozptýlenej vlny, keď dosadíme za vlnové vektory (vlnové čísla) pomer príslušnej kruhovej frekvencie a rýchlosti šírenia. Potom frekvencia rozptýlenej vlny bude :

$$\omega_F' = \omega_F \pm \omega_A. \tag{10.11}$$

Zo vzťahu (10.11) vidíme, že v rozptýlenom svetle sa môžu objaviť **satelitné čiary** s frekvenciami ($\omega_F + \omega_A$), ktorým hovoríme **antistokesove** (zložky) a ($\omega_F - \omega_A$) **stokesove** (zložky) čiary. Tiež je možné ukázať, že môžu existovať aj zložky vyšších rádov s kruhovými frekvenciami ($\omega_F \pm n \cdot \omega_A$), kde $n = 2, 3, 4...$ Tieto frekvencie sa nachádzajú po obidvoch stranách základnej monochromatickej čiary šírenia sa svetla s frekvenciou ω_F.

Poznamenajme, že prítomná akustická vlna v uvažovanom rozptyľujúcom prostredí môže byť generovaná vonkajším zdrojom, alebo jej pôvod súvisí s prítomnosťou tepelných fonónov ako dôsledok tepelných kmitov kryštalickej mriežky uvažovanej látky. Počet fonónov v rovnovážnom stave je daný Planckovou rozdeľovacou funkciou :

$$N(k_A, T) = \left(\exp\frac{\hbar \cdot v_A \cdot k_A}{T} - 1\right)^{-1}. \tag{10.12}$$



Obr. 10.2 a) Reťazec dvoch typov atómov tuhej látky, b) Akustické kmity. c) Optické kmity, d) Disperzné závislosti

Pripomeňme si ešte niektoré skutočnosti z teórie tuhých látok, kde je zvykom robiť určité úvahy na zjednodušenom modeli. Keď uvažujeme reťazec atómov, ktorý sa skladá z **dvoch druhov atómov** tak, ako je to schematicky znázornené na obr.10.2 a. Atóm jedného druhu má hmotnosť M, ktorá je väčšia než má atóm s homotnosťou m iného druhu v uvažovanom reťazci. Kmity takéhoto reťazca atómov schematicky znázornené na obr. 10.2 b sa neodlišujú od kmitania reťazca atómov, keby mali atómy rovnakú hmotnosť, len v prvom prípade frekvencia vlastých kmitov musí byť určená z priemernej hmotnosti atómov. Takto kmitajúce atómy kmitajú všetky s rovnakou fázou. Potom takýmto kmitom hovoríme **akustické kmity.** Hovoríme tiež, že ide o prípad dlhých vĺn, keď vlnová dĺžka λ je oveľa väčšia ako mriežková konštanta a. Na obr. 10.2 c je znázornené kmitanie, keď hmotnejšie atómy kmitajú s opačnými fázami ako menej hmotné atómy. Je zrejmé, že kmitom menej hmotných atómov bude odpovedať vyššia frekvencia, ako hmotnejším atómom, aj keď vlnová dĺžka je pre obidva druhy rovnaká. Na tieto kmity je možné nazerať ako na samostatné kmity dvoch do seba zabudovaných podmriežok. Potom tiež hovoríme o **optických kmitoch**. V reťazci s dvomi druhma atómov sa disperzná krivka (t. j. závislosť frekvencie od vlnového čísla) rozdelí na dve vetvy. Prvú, ktorá zodpovedá nižším frekvenciám v súhlase s tým čo sme povedali vyššie nazývame **akustickou vetvou** (pretože začiatok tejto vetvy zhrňuje zvukové kmity) a druhú zodpovedajúcu vyšším frekvenciám **optickou vetvou** (pretože pre túto vetvu pre vlnové číslo k = 0 hodnota kruhovej frekvencie je rádu 10^{13} s^{-1}, čo zodpovedá frekvenciám elektromagnetických kmitov z infračervenej oblasti spektra). Optická vetva kmitov vzniká nielen ako dôsledok rozličných hmotností atómov, ale aj vtedy, keď sú hmotnosti rovnaké, ale vzdialenosti medzi molekulami a vo vnútri nich sú rôzne, potom sú rôzne aj sily, ktoré vznikajú pri medzimolekulových a vnútormolekulových kmitoch. Fyzikálna teória v takomto prípade tiež vedie k dvom hodnotám frekvencie pre každú vlnovú dĺžku.

Ďalej poznamenajme, že fonónom, ktoré zodpovedajú optickej vetvy hovoríme **optické fonóny** a akustickej vetve odpovedajú **akustické fonóny**. Takéto zavedenie pojmov je možné využiť pri klasifikácii rozptylu.

Keď v procese interakcie svetla s fonónmi sa budú zúčastňovať optické fonóny, hovoríme o **Ramanovom rozptyle**, ak sa budú zúčastňovať akustické fonóny, hovoríme o **Brillouinovom-Mandelštamovom rozptyle**. O rozptyle prvého rádu hovoríme, keď je sprevádzaný kreáciou alebo anihiláciou jedného fotónu. Keď sa na rozptyle podieľajú dva fonóny, hovoríme o rozptyle 2. rádu. Ak v rozptyle 2. rádu vystupuje súčasne akustický aj optický fonón, triedenie na Ramanov a Brillouinov rozptyl stráca zmysel, zachováva sa len vtedy, keď sú fonóny toho istého typu.

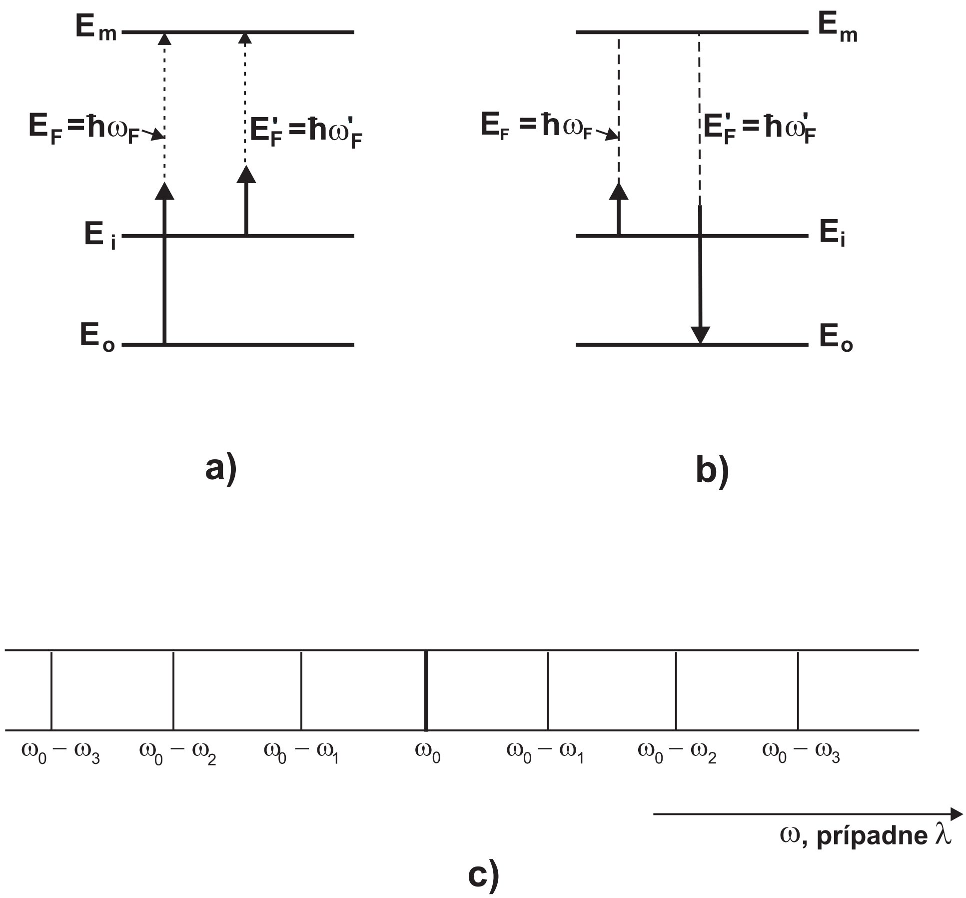
Fonóny môžu byť generované tou istou elmg vlnou, ktorá sa na nich potom rozptyľuje. V takomto prípade hovoríme o **vynútenom Brillouinovom-Mandelštamovom rozptyle**.

Brillouinov-Mandelštamov rozptyl bol teoreticky predpovedaný L. Brillouinom a S. Mandelštamom a experimentálne bol prvýkrát pozorovaný G. S. Landsbergom a S. Mandelštamom v kryštáli kremeňa a E. F. Grossom v kvapalinách. Keď si uvedomíme vyššie uvedené skutočnosti vidíme, že tento rozptyl môže hrať určitú úlohu aj v optických vláknach.

10.5 Ramanov rozptyl

Vyššie sme uviedli, že ak sa prostredie skladá z viac druhov atómov (ale aj viacatómových molekúl) v procese rozptylu sa zúčastňujú fonóny optickej vetvy disperznej závislosti. Týmto zodpovedajú vyššie frekvencie kmitov než fonónom z akustickej vetvy. Keď je v tomto nelineárnom prostredí prítomná veľmi intenzívna svetelná vlna s frekvenciou ω_F , táto sa bude rozptyľovať „na optických fonónoch“ tak, že rozptýlená vlna bude mať frekvenciu ω'_F , ktorá bude menšia o kruhovú frekvenciu kmitajúcich molekúl. Z kvantového hľadiska pri tomto vynútenom kombinovanom rozptyle jeden fotón dopadajúceho svetla s energiou $E_F = \hbar \cdot \omega$ absorbuje molekula, ktorá potom v zápätí vyžiari iný fotón s energiou $E'_F = \hbar \cdot \omega'_F$. Frekvencia ω' sa tiež nazýva Stokesova uhlová frekvencia (alebo Stokesova zložka). Situácia je schematicky znázornená na obr. 10.3. Energia $E_M = \hbar \cdot (\omega - \omega')$, ktorú prostredie absorbovalo, sa spotrebuje na vzbudenie vlastných kmitov molekúl s kruhovou frekvenciou ω_M.

Z hľadiska klasickej fyziky môžeme na vynútený kombinačný rozptyl nazerať ako na **parametrický jav**, pri ktorom na úkor energie dopadajúcej vlny vzniká „vlna“ kmitov molekúl a svetelná vlna so Stokesovou kruhovou frekvenciou. Z experimentálneho vyšetrovania takéhoto rozptylu je možné zistiť, že intenzita satelitnej čiary, ktorá je od základnej spektrálnej čiary posunutá k nižším frekvenciám, t. j. k väčším vlnovým dĺžkam (do infra oblasti spektra) je väčšia než intenzita satelitnej čiary, ktorá je posunutá k väčším frekvenciám, t. j. k nižším vlnovým dĺžkam (t. zn. k modrej časti spektra).



Obr. 10.3 a) Stokesova zložka, b) Antistokesova zložka,
c) rozloženie spektrálnych čiar pri kombinačnom rozptyle

Podľa klasickej teórie intenzity obidvoch postranných satelitných čiar $\omega_F^{`} = (\omega_F \pm \omega_M)$ by mali byť rovnaké. Pozorovanú asymetriu je možné vysvetliť na základe kvantovej teórie. Súvisí to s rôznym obsadením diskrétnych energetických hladín kmitajúcich molekúl.

Pri tomto rozptyle podobne ako v prípade Brillouinovho-Mandelštamovho rozptylu môžu tiež vzniknúť aj vlny s kruhovými frekvenciami vyšších rádov, t. j. $\omega_{Fn}^{`} = (\omega_F \pm n \cdot \omega_M)$ kde (n = 2,3...). Ďalej poznamenajme, že ak je intenzita dopadajúcej vlny malá, vzniká spontány (samovoľný) kombinovaný rozptyl, pri ktorom majú tepelné kmity molekúl chaotický charakter (nie sú koherentné).

Ramnov rozptyl bol objavený v r. l928 S. Mandelštamom a G. S. Landsbergom v kryštáloch a nezávisle Č. V. Ramanom a K. S. Krišnanom v kvapalinách.

Literatúra

[1] FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M.: Feynmanove prednášky z fyziky, (Slovenský preklad), Alfa, Bratislava l980-90

[2] GODŽAJEV, N. M.: Optika, Vyssaja škola, Moskva l977, Kvantovaja elektronika, Sovietskaja encyklopedija, Moskva l969, (Slovenský preklad, Alfa, Bratislava l973)

[3] STIĽBANS, L. S.: Fyzika polupravodnikov, Sovetskoje radio, Moskva l967

[4] TURAN, J.: Kvantová elektronika, Alfa, Bratislava l986

11. Princípy kvantových generátorov

11.1 Úvod

Koncom minulého storočia elektromagnetická teória, doplnená predstavami elektrónovej teórie o interakcii svetla s látkou, dokázala riešiť mnohé problémy. Žiarenie telies, ktoré mali určitú teplotu a jeho kvantitatívne rozdelenie vo (vyžarovanom) spektre táto teória vysvetliť nevedela. Bezúspešné boli aj snahy J. W. Rayleigha, J. H. Jeansa a W. C. W. Wiena, ktorí sa snažili riešiť tieto problémy z hľadiska klasickej fyziky. V r. 1900 Max Planck zavedením predstavy o kvantách energie harmonického oscilátora tento problém úspešne vyriešil. Táto predstava nebola zlučiteľná s predstavami klasickej fyziky, viedla však k vytvoreniu novej teórie - **kvantovej fyziky**.

Procesy žiarenia a pohlcovania svetla reálnymi atómami na základe jednoduchej fenomenologickej teórie rozvinul Albert Einstein v r. 1916. V tejto teórii boli prvýkrát zavedené predstavy **stimulovanej** (vynútenej, indukovanej) a **spontánnej** (samovoľnej) **emisie.** Tieto predstavy našli o niekoľko desaťročí praktické uplatnenie v **kvantovej elektronike,** respektíve v kvantových generátoroch koherentného žiarenia - **laseroch**, a práve tieto problémy chceme stručne prebrať v nasledujúcich častiach.

11.2 Spontánna emisia

Predpokladajme, že osamotený atóm sa môže nachádzať v stacionárnych stavoch s energiami W_1, W_2, W_3 ... tak, ako je to schematicky znázornené energetickým modelom na obr. 11.1 a.

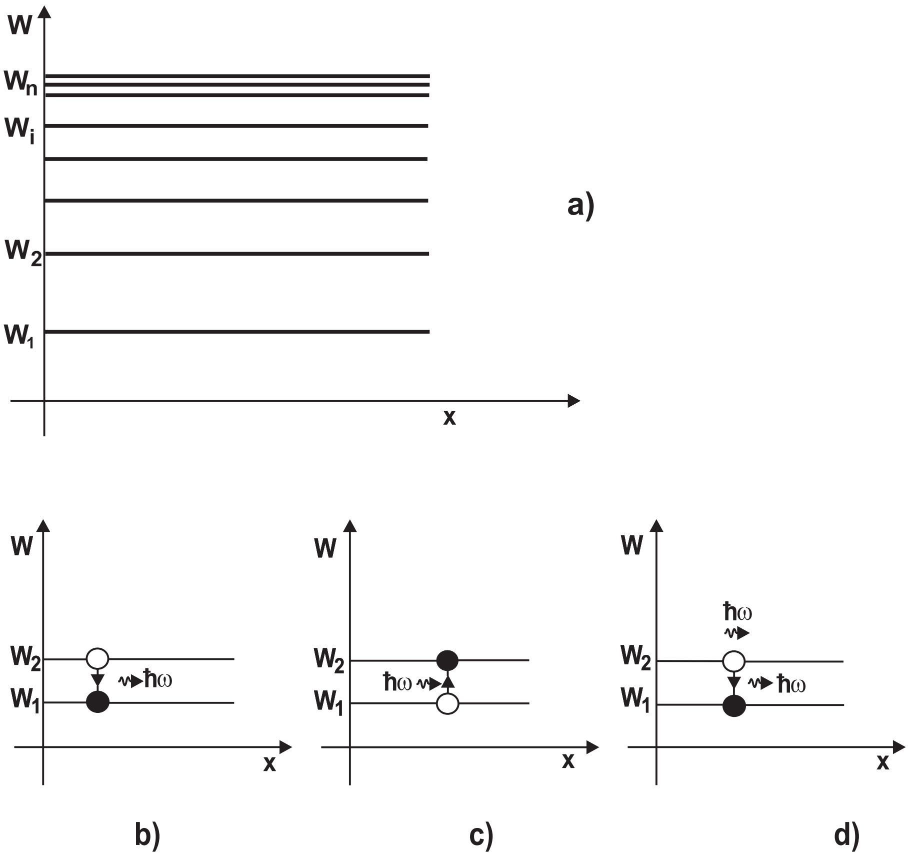
Pripomeňme si, že atóm z jedného stacionárneho stavu daného energiou W_m do iného stavu s energiou W_n prejde skokom, a ak je $W_\mathrm{m} > W_\mathrm{n}$, potom vyžiari jeden fotón. V prípade opačného procesu jeden fotón pohltí. Pre takýto elementárny proces je splnený zákon zachovania energie :

$$W_m - W_n = \hbar \cdot \omega \,. \qquad (11.1)$$

Energia pohlteného alebo vyžiareného fotónu je rovná rozdielu energií zodpovedajúcich stacionárnych stavov atómu.

Nech sa uvažovaný atóm nachádza vo vzbudenom stave W_2 tak, ako je to schematicky znázornené na obr. 11.1 b, a súčasne nech na takýto atóm nepôsobia žiadne vonkajšie vplyvy. Podľa predstáv kvantovej mechaniky samovoľný prechod atómu bez pôsobenia vonkajších vplyvov zo vzbudeného stavu W_2 do základného stavu W_1, je sprevádzaný vyžiarením fotónu s energiou $\hbar \cdot \omega$ (pozri vzťah (11.1)), pričom tento prechod sa realizuje okamžite skokom. Hovoríme tiež, že došlo k **spontánnej**

(samovoľnej) emisii. Okamih vyžiarenia fotónu je náhodná veličina, ktorá má štatistický (náhodný) charakter. Pravdepodobnosť spontánneho prechodu atómu za jednotku času z energetickej hladiny W_2 na energetickú hladinu W_1 označíme koeficientom A_{21} ; hovorí sa mu tiež **Einsteinov koeficient**. Ďalej majme na mysli veľký súbor takýchto atómov, ktorých vzájomnú interakciu môžeme zanedbať (napr. veľmi zriedený plyn).



Obr. 11.1 a) Energetický model atómu, W_1 , W_2 , *...energetické hladiny, b) dvojhladinový model, spontánna emisia fotónu, c) absorpcia fotónu, d) stimulovaná emisia fotónu*

Nech v okamihu „t“ sa v stave s energiou W_2 nachádza N_2 atómov (tiež hovoríme o obsadení hladiny s energiou W_2). V priebehu časového intervalu od t do $t + dt$ časť z nich prejde do základného stavu s energiou W_1. Je zrejmé, že nevieme určiť, ktoré z atómov do základného stavu prejdú, avšak keď poznáme pravdepodobnosť, A_{21} vieme určiť stredný počet takýchto prechodov :

$$dN_{21} = A_{21} \cdot N_2 \cdot dt \qquad (11.2)$$

Vidíme, že tento počet je priamoúmerný počtu atómov N_2 a časovému intervalu dt. Keď nebudú existovať opačné prechody (t. j. prechody z W_1 na W_2), potom zmenu počtu vzbudených atómov N_2 za časový interval od t do $t + dt$ vyjadríme :

$$dN_2 = -A_{21} \cdot N_2 \cdot dt\ . \qquad (11.3)$$

Einsteinov koeficient A_{21} charakterizuje uvažovaný atóm a je od času nezávislý. Ako je známe tento vzťah je diferenciálna rovnica, ktorú môžeme riešiť integráciou. Po integrácii a malej úprave môžeme jej riešenie napísať v tvare :

$$N_2(t) = N_{20} \cdot \exp(-A_{21} \cdot t)\,, \qquad (11.4)$$

alebo

$$N_2(t) = N_{20} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \qquad (11.5)$$

Veličina N_{20} zodpovedá počtu vzbudených atómov v čase $t = 0$. Súčasne sme použili $\tau = -1/A_{21.}$ Tento časový úsek vyjadruje dobu, za ktorú sa počet atómov N_2 zmenší na jednu e-tinu pôvodnej hodnoty a je rovný strednej dobe života atómu vo vzbudenom stave. Inými slovami (11.5) vyjadruje fakt, že ak neexistuje vonkajšie pôsobenie na dvojhladinový kvantový systém, v dôsledku spontánnej emisie počet vzbudených atómov bude ubúdať podľa exponenciálneho zákona s „časovou konštantou“ τ .

Podľa predstáv kvantovej mechaniky atómy, v ktorých dôjde k spontánnej emisii, reprezentujú súbor nezávislých prechodov, t. zn., že jeden atóm zo vzbudených atómov môže prejsť do základného stavu za určitý krátky časový úsek, iný atóm môže zostať vo vzbudenom stave oveľa dlhšie atď., avšak existuje určitá stredná hodnota doby života τ pre daný súbor vzbudených atómov.

Pripomeňme tiež, že podľa kvantovej mechaniky, spontánnemu prechodu zo vzbudeného stavu atómov do základného stavu zodpovedá úzky ale konečný interval frekvencií. Podľa Bohrovej podmienky (11.1) je určená aj frekvencia vyžiareného fotónu, avšak pozorovaný rozptyl frekvencie svedčí o tom, že energetické hladiny W_2 majú síce malú ale konečnú šírku ΔW . Takýto záver je v úplnej zhode s Heisenbergovým princípom neurčitosti, t. j. platí $\Delta W \cdot \tau \geq \hbar$, kde ΔW potom reprezentuje neurčitosť energie a τ neurčitosť času. Ešte poznamenajme, experimentálne je možné ukázať, že napr. červenej čiare vodíka, t. j. λ= 653,2 nm zodpovedá elektrónom na príslušnej energetickej hladine doba života $\tau = 1{,}5.10^{-8}$ s.

Náhodný štatistický charakter procesov spontánnej emisie vedie k tomu, že fáza, smer šírenia, stav polarizácie svetelných vĺn, vyžiarených svetelných vĺn sú rôzne. Inými slovami spontánne žiarenie (spontánna emisia) je **nekoherentné.**

11.3 Stimulovaná emisia

Majme opäť na mysli uvažovaný systém atómov. Je zrejmé, že v prítomnom elektromagnetickom poli bude v tomto systéme okrem spontánnej emisie dochádzať aj k procesom excitácie atómov zo základného stavu do vybudeného stavu ako dôsledok pohltenia fotónov s energiou $\hbar \cdot \omega = W_2 - W_1$. Pravdepodobnosť takéhoto prechodu za jednotku času je priamoúmerná spektrálnej hustote energie elektromagnetického poľa ρ_ω s kruhovou frekvenciou ω (ďalej frekvenciou) a určitému koeficientu B_{21}. Tento koeficient charakterizuje pravdepodobnosť excitácie atómu. Ďalej stredný počet prechodov dN_{12} zo základného do vybudeného stavu za časový úsek od t do $t + dt$ je tiež priamoúmerný počtu atómov N_1 v základnom stave, takže platí :

$$dN_{12} = B_{12} \cdot N_1 \cdot \rho_\omega \cdot dt\,. \tag{11.6}$$

Koeficient B_{12} (Einsteinov koeficient) môže byť určený metódami kvantovej mechaniky a bude závislý od výberu energetických hladín W_1 a W_2 atómu. Pripomeňme, že na základe princípu detailnej rovnováhy počet prechodov s vyžiarením fotónu a počet s pohltením fotónu musia byť rovné. Einstein prvýkrát ukázal, že elmg pole vyvolá nielen prechody zo základného stavu do vzbudeného, ale aj prechody obrátené, t. j. zo vzbudeného stavu do základného, ktoré sú sprevádzané vyžiarením fotónu. Takéto prechody, ktoré vznikli pôsobením vonkajšieho elmg poľa nazývame **stimulovanými (vynútenými, indukovanými) prechodmi.** Počet stimulovaných prechodov dN_{21} za časový úsek od t do $t+dt$ je priamoúmerný spektrálnej hustote elmg poľa ρ_ω, ktorej zodpovedá frekvencia prechodu ω, počtu atómov N_2 vo vzbudenom stave W_2 a koeficientu B_{21}, ktorý určuje pravdepodobnosť takéhoto prechodu v atóme. Ak uvážime súčasne aj spontánne prechody, celkový počet prechodov môžeme vyjadriť:

$$dN_{21} = A_{21} \cdot N_2 \cdot dt + B_{21} \cdot N_2 \cdot \rho_\omega \cdot dt\,. \tag{11.7}$$

Zo štatistickej fyziky vieme, že v stave termodynamickej rovnováhy pre obsadenie hladín W_1 a W_2 bude platiť Boltzmannova funkcia :

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left[-\left(W_2 - W_1\right)/k \cdot T\right] = \exp\left[-\hbar \cdot \omega / k \cdot T\right], \tag{11.8}$$

ktorá vzájomne viaže obsadenie uvažovaných dvoch hladín. Keď si teraz predstavíme, že pri vysokej teplote je spektrálna hustota ρ_ω dostatočne veľká, na pravej strane (11.7) môžeme prvý člen voči druhému zanedbať. Znamená to teda, že pri vysokej teplote v termodynamickej rovnováhe nad spontánnou emisiou prevláda stimulovaná emisia. Ak porovnáme pravé strany (11.6) a (11.7) vidíme, že za takýchto podmienok $B_{12} \cdot N_1 = B_{21} \cdot N_2$. Avšak pri uvažovanej rovnováhe z (11.8) vyplýva, že $N_2 = N_1$, pretože $k \cdot T / (\hbar \cdot \omega) \to \infty$. Potom $B_{12} = B_{21}$. Koeficienty B_{12} a B_{21} teda závisia len od vlastností atómu a nezávisia od vonkajších podmienok, v ktorých dochádza k prechodom.

Preto rovnosť $B_{12} = B_{21}$ získaná pre prípad $T \to \infty$ platí vždy, t. j. aj keď kvantový systém nie je v termodynamickej rovnováhe.

Ak porovnáme pravé strany vzťahov (11.6) a (11.7) a súčasne vezmeme do úvahy vzťah (11.8) a to , že $B_{12} = B_{21}$, môžeme spektrálnu hustotu elmg poľa vyjadriť :

$$\rho_\omega = \frac{A_{21}}{B_{21}} \cdot \frac{1}{\exp[\hbar \cdot \omega / (k \cdot T)] - 1} \tag{11.9}$$

Tento vzťah vyjadruje Planckov vyžarovací zákon, keď $A_{21} / B_{21} = \hbar \cdot \omega^3 / (\pi^2 \cdot c^3)$ (pozri základný kurz fyziky). Súčasne vidíme, ako sú všetky tri Einsteinove koeficienty vzájomne zviazané.

11.4 Makroskopické parametre optického prostredia ako funkcia Einsteinových koeficientov

Nech sa optickým prostredím, reprezentovaným napr. zriedeným atómovým plynom šíri rovnobežný monochromatický svetelný zväzok s frekvenciou ω , ktorá odpovedá prechodu dvoch energetických hladín atómov. Zmena počtu fotónov dN, ktorá je dôsledkom procesov pohltenia a vyžiarenia fotónov pri prechode uvažovaného zväzku vrstvou $dz = c \cdot dt$ pri súčasnom využití vzťahov (11.6) a (11.7) bude :

$$dN = B_{21} \cdot N_2 \cdot \rho_\omega \cdot \frac{dz}{c} - B_{12} \cdot N_1 \cdot \rho_\omega \frac{dz}{c}\,, \tag{11.10}$$

respektíve

$$dN = \rho_\omega \cdot (B_{21} \cdot N_2 - B_{12} \cdot N_1 \cdot) \frac{dz}{c}\,. \tag{11.10 a}$$

Príspevok spontánneho žiarenia do uvažovaného smeru svetelného zväzku je zanedbateľný, pretože toto žiarenie sa šíri do všetkých smerov. Vzťah (11.10 a) nám dovoľuje zistiť, za akých podmienok dochádza k stimulovanej emisii. Pretože $B_{12} = B_{21,}$ môžeme (11.10 a) písať v tvare :

$$dN = \rho_\omega \cdot (N_2 - N_1) \cdot B_{12} \frac{dz}{c}\,. \tag{11.11}$$

Z tohto vzťahu vidíme, že ak je systém v stave termodynamickej rovnováhy, bude dN vždy záporné, lebo $N_2 < N_1$. Počet atómov vo vzbudenom stave je vždy menší. Ak má teda intenzita uvažovaného svetelného zväzku narastať, je treba v optickom prostredí vytvoriť nerovnovážny stav, pri ktorom počet atómov na vyššej energetickej hladine je väčší než na nižšej, t. j. $N_2 > N_1$.

Dovoľme si ešte jednu spresňujúcu poznámku. Ak pôjde o reálny kvantový systém hladín a v uvažovanom optickom prostredí bude prítomná objemová hustota elemg poľa ρ, je výhodnejšie vo vzťahu (11.11) nahradiť ρ_ω súčinom $\rho \cdot g(\omega)$. Funkcia $g(\omega)$ bude predstavovať funkciu normovanú na jednotku a jej tvar bude udávať (vystihovať) tvar spektrálnej čiary daného prechodu z W_2 na W_1. Potom $g(\omega)\cdot d\omega$ reprezentuje tú časť celkového počtu prechodov medzi hladinami W_2 a W_1, pre ktorú frekvencia leží v intervale ω a $\omega + d\omega$. Rovnicu (11.11) budeme teda písať nasledovne :

$$dN = \rho \cdot g(\omega) \cdot (N_2 - N_1) \cdot B_{12} \frac{dz}{c}. \tag{11.12}$$

Ďalej nás bude zaujímať otázka, ako sa mení intenzita svetelného zväzku v závislosti od jeho postupu optickým prostredím, t. j. napr. od súradnice z. Stredná hustota toku energie vlny σ (pozri kapit. 2) je rovná súčinu objemovej hustoty elemg poľa ρ a rýchlosti svetla c, t. j. $\sigma = c \cdot \rho$. Keďže zmena toku fotónov na vzdialenosti dz je rovná $c \cdot dN$, preto zmena toku energie $d\sigma$ na tej istej vzdialenosti dz je rovná $d\sigma = \hbar \cdot \omega \cdot c \cdot dN$. Takže, keď prenásobíme ľavú aj pravú stranu (11.12) veličinou $\hbar \cdot \omega \cdot c$, môžeme zmenu hustoty toku energie vyjadriť :

$$d\sigma = \hbar \cdot \omega \cdot c \cdot (N_2 - N_1) \cdot B_{12} \cdot g(\omega) \cdot \rho \frac{dz}{c}, \tag{11.13}$$

potom

$$\frac{d\sigma}{dz} = -\alpha \cdot \sigma(z). \tag{11.14}$$

(Súčasne sme použili, že $\sigma = c \cdot \rho$), kde

$$\alpha = -\frac{\hbar \cdot \omega}{c} \cdot (N_2 - N_1) \cdot B_{12} \cdot g(\omega). \tag{11.15}$$

Keď bude prostredie homogénne, obsadenie N_1 a N_2 nebude závisieť od súradnice z, potom diferenciálna rovnica (11.14) má riešenie v tvare :

$$\sigma(z) = \sigma_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot z), \tag{11.16}$$

σ_0 je hustota toku energie uvažovaného svetelného zväzku, keď $z = 0$. Pre $\alpha > 0$, keď $N_2 < N_1$, bude hustota toku energie exponenciálne klesať v závislosti od súradnice z. Vzťah (11.16) vyjadruje tzv. **Burgerov zákon.** Vzťah (11.15) určuje **koeficient absorpcie α**, keď poznáme Einsteinov koeficient B_{12} a obsadenie hladín N_1 a N_2.

Ak sú splnené v prostredí také podmienky, že $N_2 > N_1$, hovoríme o **inverznom obsadení**. Podľa (11.15) bude koeficient absorpcie záporný, t. j. $\alpha < 0$ a podľa vzťahu (11.16) bude hustota toku energie exponenciálne narastať v závislosti od súradnice z. To znamená, zosilnenie šíriaceho sa zväzku pri $N_2 > N_1$ sa bude diať na úkor toho, že k stimulovaným prechodom s vyžiarením fotónu bude dochádzať častejšie než k prechodom s absorpciou. Tiež poznamenajme, že vyžiarené fotóny pri stimulovaných prechodoch budú mať rovnaké vlastnosti ako fotóny, ktoré stimulovaný prechod vyvolali, takže koherentné vlastnosti pôvodného svetelného zväzku sa zachovávajú. Toto je **základný princíp kvantového zosilňovača**. Optické prostredie, v ktorom dochádza k inverznému obsadeniu, nazývame **aktívne prostredie.**

Ak chceme, aby prostredie bolo aktívne, je potrebné do prostredia priviesť energiu zvonku, ktorá sa prostredníctvom stimulovanej emisie premení na energiu zosilňovaného svetelného zväzku (žiarenia). Z kvantového zosilňovača môžeme potom realizovať kvantový generátor svetla, keď zavedieme tzv. **kladnú spätnú väzbu**. Aby sme to urobili, časť svetla, ktoré zo zosilňovača vychádza, vrátime naspäť do aktívneho prostredia. Spätnú väzbu je možné realizovať tak, že aktívne prostredie umiestnime do optického rezonátora Fabryho-Perotovho typu, vytvoreného dvoma rovinnými, častejšie však sférickými zrkadlami.

Na záver tejto časti zhrňme základné princípy, na ktorých je založený (skonštruovaný) **optický kvantový generátor - LASER** (LASER je skratka odvodená z iniciálok anglického názvu „Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation“).

Prvý princíp spočíva v myšlienke, ktorá využíva **stimulovanú emisiu** svetla kvantového systému reprezentovaného atómami optického prostredia. Bol objavený A. Einsteinom v r. 1917.

Druhý princíp spočíva v použití **termodynamického nerovnovážneho systému** s inverzným obsadením, v ktorom je možné zosilnenie svetelnej vlny.

Tretí princíp spočíva vo využití **kladnej spätnej väzby**, aby sa zo zosilňovača stal generátor koherentného svetla.

11.5 Dvojhladinová kvantová sústava

V tejto časti si ukážeme, že dvojhladinovú kvantovú sústavu nie je možné využiť pre zosilnenie svetelného zväzku. Nie je v nej totižto možné vytvoriť inverzné obsadenie.

Nech teda N je koncentrácia atómov daného optického prostredia. Z toho N_1 sa nachádza v stave s energiou W_1 a N_2 v stave s energiou W_2. Tiež platí, že $N = N_1 + N_2$. Zmena obsadenia uvažovaných dvoch hladín - ako sme uviedli už vyššie - sa bude diať v dôsledku spontánnych prechodov rýchlosťou $A_{21} \cdot N_2$, kde $A_{21} = 1/\tau$ je Einsteinov koeficient (τ má význam doby života atómu vo vzbudenom stave). Ďalej v dôsledku stimulovaných prechodov, pri ktorých dochádza k absorpcii a emisii fotónov s pravdepodobnosťou úmernou spektrálnej hustote žiarenia svetla ρ. (Pripomeňme, že $\rho = dw/d\omega$, kde w je hustota energie elektromagnetického poľa.) Keď uvážime tieto tri procesy, rýchlosť zmeny obsadenia energetickej hladiny W_1 môžeme vyjadriť kinetickou rovnicou (pozri tiež (11.6) a (11.7)):

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21} \cdot N_2 - \rho \cdot B_{12} \cdot N_1 + \rho \cdot B_{21} \cdot N_2 . \tag{11.17}$$

Alebo keď hustotu toku energie vyjadríme vzťahom $\sigma = c \cdot \rho$, môžeme písať :

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21} \cdot N_2 - \frac{\sigma}{c} \cdot (B_{12} \cdot N_1 - B_{21} \cdot N_2) . \tag{11.18}$$

Vyššie sme uviedli že platí $B_{12} = B_{21} = B$ a $A_{21} = A$, a keď súčasne zavedieme veličinu $K = \sigma \cdot B/c$ vyjadríme kinetickú rovnicu v zjednodušenom tvare :

$$\frac{dN_1}{dt} = A \cdot N_2 - K \cdot (N_1 - N_2) \tag{11.19}$$

Súčasne platí, že

$$N = N_1 + N_2 \tag{11.20}$$

Rovnice (11.19) a (11.20) nám umožňujú nájsť obsadenie N_1 a N_2 uvažovaných dvoch hladín. Keď budeme mať na mysli stacionárny prípad, potom $dN_1 / dt = 0$ riešenie (11.19) a (11.20) dáva :

$$N_1 = \frac{N \cdot (A + K)}{A + 2 \cdot K} \tag{11.21a}$$

$$N_2 = \frac{N \cdot K}{A + 2 \cdot K} . \tag{11.21b}$$

Vyjadríme ďalej absorbovaný výkon P vztiahnutý na jednotku objemu a koeficient absorpcie pomocou týchto vzťahov, respektíve pomocou rozdielu $(N_1 - N_2)$. Potom

$$P = \hbar \cdot \omega \cdot K \cdot (N_1 - N_2) \tag{11.22}$$

$$\alpha = \frac{\hbar \cdot \omega \cdot B \cdot (N_1 - N_2)}{c} . \tag{11.23}$$

Zo vzťahov (11.21a) a (11.21b) vyplýva :

$$N_1 - N_2 = \frac{N \cdot A}{A + 2 \cdot K} . \tag{11.24}$$

Pri malej hustote toku energie šíriaceho sa svetla bude $K = \sigma \cdot B / c \ll A,$ potom $N_2 \approx 0$ a z (11.24) súčasne vidíme, že $N_1 \approx N$. Koeficient absorpcie α nebude závislý od σ a bude rovný:

$$\alpha_0 = \frac{\hbar \cdot \omega \cdot B \cdot N}{c} . \tag{11.25}$$

Ak uvážime prípad, že intenzita svetla bude narastať, a teda aj σ, t. zn. $K \to \infty$ z (11.24) vidíme, že v limitnom prípade $N_1 = N_2$, a pretože súčasne platí (11.20), musí byť

$N_1 = N_2 = N / 2$. Koeficient absorpcie sa potom blíži nule, t. j. $\alpha \to 0$ (pozri vzťah (11.23)). Hovoríme, že optické prostredie je „presvetlené“.

Keď dosadíme do vzťahu pre absorpciu (11.23), vzťahy (11.24) a (11.25), môžeme potom po úpravách absorpciu ako funkciu hustoty toku energie σ vyjadriť :

$$\alpha(\sigma) = \frac{\hbar \cdot \omega \cdot B \cdot N}{c} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{2 \cdot K}{A}} \right) = \frac{\hbar \cdot \omega \cdot B \cdot N}{c} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{2 \cdot \sigma \cdot B \cdot \tau}{c}} \right). \tag{11.26}$$

Všimnime si prípad, keď hustota toku energie narastá nad všetky medze, t. j. $\sigma \to \infty$ potom $\alpha(\sigma) \to 0$, inými slovami tiež hovoríme, že dochádza k „prerušeniu absorpcie“, alebo tiež že došlo k „nasýteniu“. Vzťah (11.26) potom môžeme napísať aj v tvare :

$$\alpha(\sigma) = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\sigma}{\sigma_{NAS}}}, \tag{11.27a}$$

kde α_0 má pôvodný význam a $\sigma_{NAS} = 2 \cdot B \cdot \tau / c$. Ako sme uviedli vyššie (pozri (11.16)) α je v exponente exponenciálnej funkcie, nasýtením budeme preto z praktických dôvodov rozumieť tú hodnotu hustoty toku energie σ_{NAS} , keď $\alpha(\sigma)$ dvakrát zmení svoju hodnotu voči jeho minimálnej hodnote (Minimálnej hodnote zodpovedá prípad, keď $\sigma = 0$, t. j. $\alpha_{MIN} = \hbar \cdot \omega \cdot B \cdot N / c$.) Je zrejmé, že pre nasýtenie potom musí platiť vzťah $2 \cdot \sigma \cdot B \cdot \tau = 1$.

Keď využijeme vzťahy (11. 22) a (11.24), môžeme pohltený výkon tiež vyjadriť :

$$P = \hbar \cdot \omega \cdot \frac{\sigma \cdot B}{c} \cdot \frac{N \cdot A}{A + \frac{2 \cdot \sigma \cdot B}{c}}. \tag{11.27}$$

Pri predchádzajúcej úprave sme opäť využili, že $K = \sigma \cdot B / c$. Je možné ukázať, že ak hustota toku energie bude narastať, pohltený výkon bude zo začiatku rásť lineárne, avšak pre $\sigma \to \infty$ sa bude blížiť ku konečnej hodnote :

$$P_{MAX} = \frac{\hbar \cdot \omega \cdot N \cdot A}{2}. \tag{11.28}$$

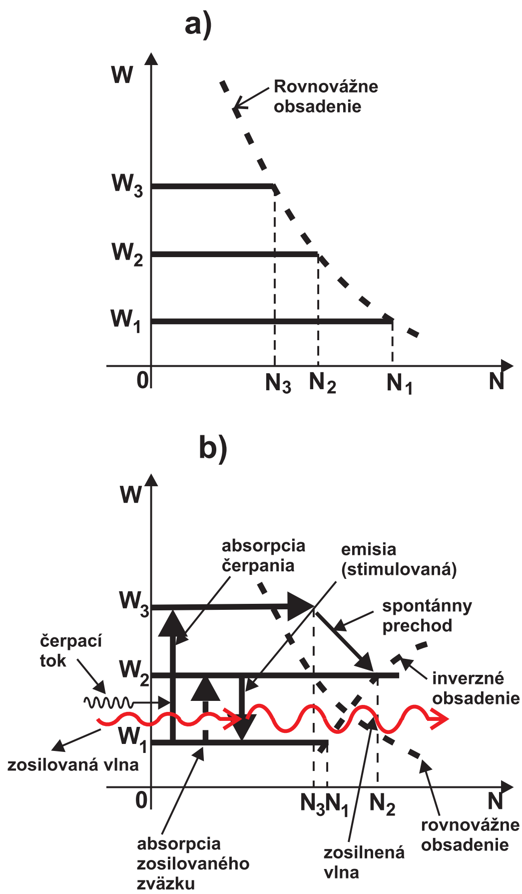
Keď ešte nahradíme $A = 1 / \tau$ dostaneme pre maximálny pohltený výkon vzťah

$$P_{MAX} = \frac{\hbar \cdot \omega \cdot N}{2 \cdot \tau}. \tag{11.29}$$

Vidíme, že pri nasýtení pohltený výkon je určený dobou života τ atómu vo vzbudenom stave. Inými slovami tiež môžeme povedať, že prostredie pohlcuje z dopadajúceho svetla len toľko energie, koľko je schopné spontánnym spôsobom prostredníctvom vzbudených atómov vyžiariť. Z vyššie uvedeného teda súčasne vidíme, že v prípade dvojhladinového modelu nie je možné získať inverzné obsadenie, čo sme chceli ukázať.

11.6 Trojhladinový model

Najjednoduchší možný spôsob ako realizovať inverzné obsadenie je využiť trojhladinovú kvantovú sústavu. Na obr. 11.2 a je schematicky znázornené obsadenie troch uvažovaných hladín s energiami W_1 , W_2 a W_3 keď je kvantová sústava v stave termodynamickej rovnováhy (tzv.rovnovážne obsadenie).

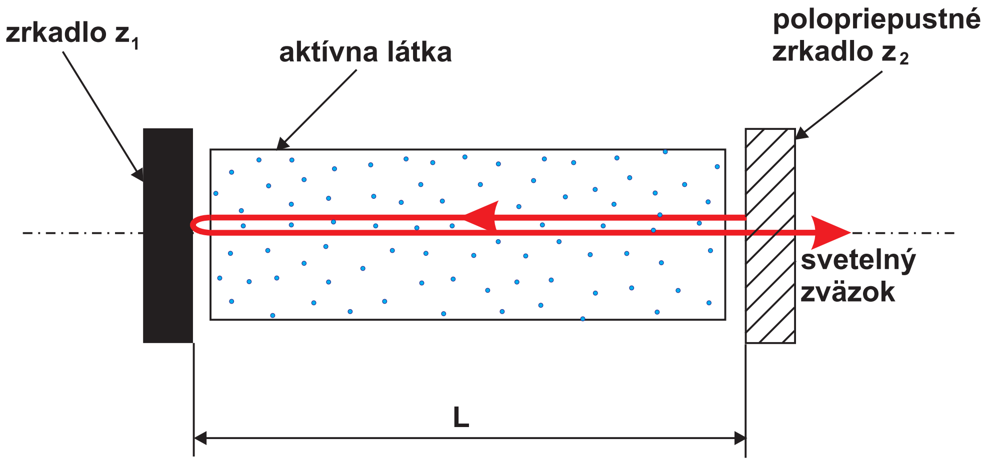


Obr. 11.2. a) Trojhladinový model, keď je sústava v termodynamickej rovnováhe (rovnovážne obsadenie), b) vytvorenie inverzného obsadenia

Keď bude na sústavu atómov aktívneho prostredia dopadať svetlo s frekvenciou $\omega_{13} = (W_3 - W_1)/\hbar$ obsadenia hladín W_1 a W_3 sa prakticky vyrovnajú, t. zn. $N_1 \cong N_3$. Predpokladajme, že doba života na hladine W_3 je relatívne krátka, bude dochádzať k spontánnym prechodom medzi hladinou W_3 a W_2. Ak bude doba života pre atómy s energiou W_2 dosť veľká, budú sa tieto „hromadiť“ na tejto hladine. V dôsledku toho sa vytvorí inverzné obsadenie medzi hladinou W_2 a základnou hladinou W_1 (pozri obr. 11.2 b). Potom prechod $W_2 \rightarrow W_1$ môže byť využitý pre zosilnenie svetla s frekvenciou $\omega_{21} = (W_2 - W_1)/\hbar$. Popísaná situácia je schematicky znázornená na obr. 11.2 b.

11.7 Laser

Vyššie sme uviedli, že svetelný lúč, ktorý sa šíri aktívnym prostredím, vyznačujúcim sa inverzným obsadením bude v takomto prostredí zosilňovaný. Keď takéto prostredie umiestnime medzi dve rovinné zrkadlá tvoriace Fabryho-Perotov rezonátor (pozri obr. 11.3), vytvoríme základné usporiadanie kvantového generátora-laseru. (Zrkadlá zaisťujú kladnú spätnú väzbu.) Pri odraze na zrkadlách sa svetelný lúč čiastočne zoslabí. Jedno zrkadlo je realizované s vysokým koeficientom odrazu a druhé je sčasti priepustné. Cez toto druhé zrkadlo potom časť svetelného zväzku vychádza von zo sústavy ako svetelné žiarenie, ktoré tiež nazývame **laserovým žiarením (laserový lúč).**



Obr. 11.3. Principiálne usporiadanie kvantového generátora - lasera.

Okrem strát energie od zrkadiel sa uplatňujú aj straty súvisiace s rozptylom svetla v aktívnom prostredí a tiež straty súvisiace s difrakčnými javmi.

Elementárnym cyklom práce takéhoto lasera budeme rozumieť dva po sebe idúce prechody svetla aktívnym prostredím a tiež tomu odpovedajúce dva odrazy na zrkadlách Z_1 a Z_2 (pozri obr. 11.3). Straty energie vyjadríme pomocou dvoch efektívnych koeficientov odrazu r_1 a r_2 (každý má inú hodnotu, lebo ako sme uviedli vyššie, každé zrkadlo má iné vlastnosti). Do týchto koeficientov zahrnieme nielen straty na zrkadlách, ale aj ostatné straty, t. j. vyššie spomínaný rozptyl svetla a difrakčné straty. Preto sú efektívne koeficienty r_1 a r_2 menšie než koeficienty odrazu R_1 a R_2 na zrkadlách rezonátora. Za jeden cyklus dôjde k dvom odrazom svetla a zosilnenie hustoty toku energie bude priamoúmerné súčinu $r_1 \cdot r_2$. Svetlo za tento cyklus prejde vzdialenosť $2 \cdot L$. Podľa Burgerovho zákona (Pozri 11.16) zosilnenie bude priamoúmerné exp ($\alpha \cdot 2 \cdot L$), hodnota koeficienta zosilnenia α za jeden cyklus bude daný vzťahom (11.15). Hustotu toku energie potom môžeme vyjadriť

$$\sigma = \sigma_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \exp(2 \cdot \alpha \cdot L) \tag{11.30}$$

σ_0 predstavuje hodnotu toku energie na začiatku cyklu, pritom za počiatok cyklu môžeme uvážiť ľubovoľný časový okamih. Keď pre straty energie zavedieme nové veličinu „f“ vzťahom :

$$2 \cdot f = -\ln(r_1 \cdot r_2), \tag{11.31}$$

môžeme hustotu toku energie vyjadriť :

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp(2 \cdot \alpha \cdot L - 2 \cdot f). \tag{11.32}$$

Z tohto vzťahu vidíme, že ku generácii laserového žiarenia môže dochádzať len vtedy, keď $2 \cdot \alpha \cdot L > 2 \cdot f$, t. j. keď energia svetelného lúča získaná z aktívneho prostredia mechanizmom stimulovanej emisie prevyšuje za jeden cyklus straty energie, vrátane tých strát, ktoré sú reprezentované stratami vyžiareného svetla z kvantovej sústavy. Z exponentu (11.32) súčasne vidíme, že ak teda má dochádzať k zosilneniu musí platiť, že $2 \cdot \alpha \cdot L = 2 \cdot f$, alebo ináč

$$\alpha_0 \cdot L = f\ . \tag{11.33}$$

Takže energia žiarenia získaná z aktívneho prostredia cez mechanizmus vyššie uvedeného budenia atómov (čerpania) z vonkajšieho zdroja musí byť minimálne rovná stratám f. Koeficient zosilnenia α_0 potom nazývame **prahom generácie.** Pri stacionárnom režime generácie, straty energie sú kompenzované na účet energie získanej svetelným zväzkom z aktívneho prostredia. Stacionárny režim generácie je potom určený pri hustotách úmerných toku energie, ktorému zodpovedá určitý koeficient zosilnenia α. Podmienku pre prípad stacionárneho režimu potom napíšeme:

$$\alpha \cdot L = f\ . \tag{11.34}$$

Týmto sme stručne popísali fyzikálny princíp lasera. uveďme na záver ešte niekoľko poznámok. Aktívnym prostredím v laseroch môže byť plyn alebo zmes plynov, potom hovoríme o **plynových laseroch** (napr. Ar laser, He-Ne laser a pod.). Ak je aktívnym prostredím pevná láka, obyčajne kryštál, alebo polovodič, potom hovoríme o **pevnolátkových laseroch** (napr. rubínový laser, polovodičový laser). Naším zámerom nebolo sa ďalej podrobnejšie zaoberať jednotlivými typmi laserov, preto o jednotlivých typoch laserov sa môže čitateľ dozvedieť v príslušnej odbornej literatúre.

Literatúra

[1] FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M.: Feynmanove prednášky z fyziky, (Slovenský preklad), Alfa, Bratislava l980-90

[2] Kvantovaja elektronika, Sovietskaja encyklopedija , Moskva l969, (Slovenský preklad, Alfa, Bratislava l973)

[3] MATVEJEV, A. N.: Optika, Vysšaja škola, Moskva l985

[4] ŠTRBA, A., MESÁROŠ, V., SENDRÁKOVÁ, D.: Optika s príkladmi I, UK, Bratislava 1996

[5] TURAN, J.: Kvantová elektronika, Alfa, Bratislava l986

12. Fotoelektrický jav

Kvantová (korpuskulárna) povaha svetla sa prejavuje tým, že jeho absorpcia alebo generácia sa vždy odohráva tak, že sa absorbuje alebo generuje množstvo energie, ktoré je násobkom akejsi minimálnej energie. Prirodzené vysvetlenie takéhoto správania sa svetla spočíva v predstave, že svetlo „existuje“ vo forme častíc (korpuskúl). Energia týchto „častíc“ svetla, ktoré sa nazývajú **fotóny**, je úmerná jeho frekvencii. Konštanta úmernosti vyjadrujúca súvis energie a frekvencie je Planckova konštanta a je rovná približne $6{,}5\,.10^{-34}$ Js.

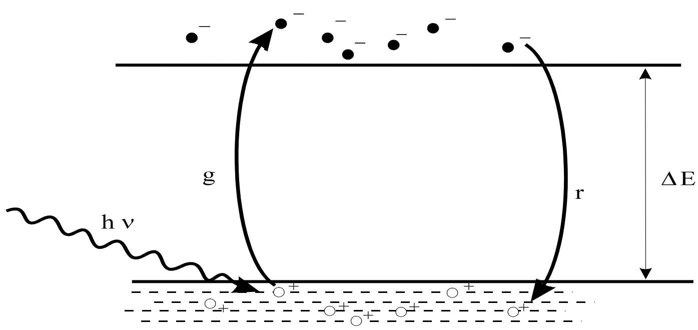
Energia svetla absorbovaného pri dopade na niektoré vodiče alebo polovodiče sa prejaví zmenou ich elektrických vlastností. Tak napríklad: pri dopade svetla na povrch niektorých kovov sa na nich vytvorí kladný elektrický náboj Tento jav sa nazýva **vonkajší fotoelektrický efekt**. Alebo pri dopade svetla na mnohé polovodiče, sa zväčší ich elektrická vodivosť. Vtedy hovoríme o **vnútornom fotoelektrickom jave**. V prvom prípade ide o uvoľnenie elektrónu z kovu v dôsledku dopadu svetla s frekvenciou dostatočne veľkou, aby energia dopadajúcich fotónov (ktorá je rovná $h\nu$, kde ν je frekvencia svetla) bola väčšia ako výstupná práca elektrónov z osvetľovaného kovu. V prípade vnútorného fotoelektrického javu ide o prechod elektrónov zo základného stavu do vodivostného pásu a je preto potrebné, aby energia fotónov bola rovná alebo väčšia ako je istá minimálna energia (napríklad než je rozdiel energií, ktoré majú elektróny vo valenčnom páse a energie ktorú majú vo vodivostnom páse).

Fotoelektrický jav má dôležité technické aplikácie. Možno ho napríklad využiť na premenu svetelnej energie na elektrickú. Pretože veľkosť zmeny elektrických vlastností pri fotoelektrickom jave je v mnohých prípadoch úmerná intenzite svetla, možno fotoelektrický jav použiť i na detekciu svetla. Pre praktické využitie fotoelektrického javu na detekciu svetla je dôležité, v ktorej spektrálnej oblasti k prechodu dochádza, s akou citlivosťou, s akou rýchlosťou sa stav vyvolaný osvetlením dosiahne a s akou rýchlosťou sa po zániku osvetlenia elektrické pomery vracajú k pôvodným hodnotám. Preto sa v nasledujúcich paragrafoch budeme venovať fotoelektrickému javu z hľadiska uvedených vlastností. A keďže pri využití fotoelektrického javu na detekciu optických signálov sa v súčasnosti využívajú takmer výhradne polovodičové detektory, budeme sa venovať popisu (vnútorného) fotoelektrického javu v polovodivom materiáli. V ďalšej kapitole si stručne všimneme vplyv fotovodivosti na činnosť polovodičovej diódy a jav opačný k fotoelektrickému javu - jav elektroluminiscencie, ktorý sa v súčasnosti využíva na konštrukciu dôležitých, dobre ovládateľných zdrojov svetla.

12.1 Fotoelektrický jav vo vlastných polovodičoch

Vlastný polovodič je taký polovodič, u ktorého je koncentrácia nosičov daná tepelnou excitáciou elektrónov z valenčného pásu do vodivostného pásu. Ide teda o polovodič bez donorov a bez akceptorov. Ak pri tom ide o materiál, ktorý má vykazovať významnú fotovodivosť pri osvetlení viditeľným svetlom, musí byť šírka zakázaného pásu ΔE v tomto materiáli zrovnateľná s energiou fotónov viditeľného svetla. Keby bola energia ΔE väčšia ako energia fotónov, nemohlo by k prechodu medzi valenčným a vodivostným pásom dôjsť a pri energii fotónov značne väčšej ako je ΔE by k prechodom dochádzalo s veľmi veľkou pravdepodobnosťou. V dôsledku toho by sa svetelný tok zabsorboval v malej vzdialenosti od osvetleného povrchu. Na povrchu materiálu však dochádza k rýchlej rekombinácii nosičov náboja a ako uvidíme v nasledujúcich odstavcoch, veľkosť fotoelektrického javu závisí od rýchlosti rekombinácie nepriamo. V dôsledku toho je výsledná zmena koncentrácie nosičov vyvolaná silne absorbovaným svetlom pomerne malá.

Fotóny z viditeľnej časti spektra majú energiu v rozpätí približne 1.5 až $3\ \mathrm{eV}$, takže pre detekciu viditeľného svetla sú vhodné polovodiče s orientačne takto širokým zakázaným pásom. To ale znamená, že koncentrácia nosičov v takýchto polovodičoch (bez osvetlenia) je pri izbových teplotách veľmi malá, pretože excitačná tepelná energia rovná $k.T$ (k je tzv. Boltzmanova konštanta, T teplota vyjadrená v Kelvinovej stupnici) je pri izbovej teplote poriadku 25 milielektronvoltov, takže je výrazne menšia ako šírka zakázaného pásu. Za takýchto okolností môžeme prechody elektrónov schematicky znázorniť diagramom uvedeným na obr. 12.1.



Obr.12.1. Schematické znázornenie prechodov v energetickej schéme vlastného polovodiča

Pre koncentráciu nosičov elektrického náboja (t. j. elektrónov a dier) vo vlastnom polovodiči tvaru tenkej platničky, pri osvetlení svetlom s koeficientom absorpcie takým malým, že jeho súčin s koeficientom absorpcie je menší ako jedna, môžeme predpokladať že hustota nosičov je v celom objeme polovodiča (aspoň približne) rovnaká a tak pre súvis koncentrácie nosičov a rýchlosti ich zmien môžeme napísať takzvané kinetické rovnice v tvare, v ktorom nevystupujú priestorové súradnice :

$$\frac{dn}{dt} = g - r \cdot n \cdot p \tag{12.1}$$

$$\frac{dp}{dt} = g - r \cdot n \cdot p\,. \tag{12.2}$$

V týchto rovniciach n a p sú koncentrácia elektrónov a dier, g je rýchlosť generácie (počet elektrónov prenesených použitým osvetlením z valenčného do vodivostného pásu v jednotke objemu za jednotku času) a r je rýchlosť rekombinácie (pravdepodobnosť rekombinácie vybraného elektrónu s vybranou dierou v jednotke času a jednotke objemu). Všimnime si, že pravá strana rovnice (12.1) popisujúcej kinetiku koncentrácie elektrónov je zhodná s pravou stranou rovnice (12.2) popisujúcej kinetiku dier. V dôsledku toho sú časové zmeny koncentrácie elektrónov rovnaké ako časové zmeny koncentrácie dier, takže ak ide o polovodičový materiál, v ktorom bola za tmy koncentrácia elektrónov a dier rovnaká, musia byť ich koncentrácie rovnaké i pri ľubovoľnom osvetlení. V rovnici (12.1) tak môžeme nahradiť p s n, čím prejde do tvaru

$$\frac{dn}{dt} = g - r \cdot n^2\,. \tag{12.3}$$

Pokúsme sa najprv nájsť stacionárne riešenie rovnice (12.3), t. j. riešenie, pri ktorom je derivácia koncentrácie nosičov podľa času rovná nule. Prirodzene, takéto riešenie je možné iba v prípade, že rýchlosť generácie g ako i rýchlosť rekombinácie r nezávisí od času. Pre hodnotu koncentrácie nosičov z rovnice (12.3) pre $dn/dt = 0$ dostávame:

$$n_{st} = \sqrt{g/r}\,. \tag{12.4}$$

Z tohto vzťahu je vidieť, že vodivosť uvedeného polovodiča v ustálenom stave nezávisí od osvetlenia lineárne. Je tomu tak preto, lebo rýchlosť generácie g je spravidla priamoúmerná intenzite osvetlenia, zatiaľ čo pre lineárnu závislosť by bolo potrebné predpokladať, aby rýchlosť generácie g bola úmerná druhej mocnine intenzity osvetlenia polovodiča. Ako vyplýva zo vzťahu (12.4), pri lineárnej závislosti g od intenzity osvetlenia I je koncentrácia nosičov a tým i elektrická vodivosť vlastného polovodiča úmerná odmocnine I.

Aká je kinetika koncentrácie elektrónov za tmy (po vypnutí osvetlenia, t. j. pri $g = 0$) môžeme vidieť z rovnice (12.1), z ktorej po dosadení $g = 0$ a elementárnej úprave dostaneme homogénnu rovnicu

$$\frac{dn}{n^2} = -r \cdot dt\,. \tag{12.3'}$$

Jej priamou integráciou dostávame:

$$n(t) = \frac{1}{r \cdot t + c}\,, \tag{12.4}$$

kde c je integračná konštanta, ktorú môžeme určiť z počiatočných podmienok. Ak časom $t = 0$ rozumieme okamžik v ktorom bolo osvetlenie vypnuté, je koncentrácia $n_0 = n_{t=0}$ v čase $t = 0$ závislá od predchádzajúceho osvetlenia. Z rovnice (12.4) bezprostredne plynie, že $c = 1/n_0$, takže

$$n(t) = \frac{n_0}{1 + r \cdot t \cdot n_0} . \tag{12.5}$$

Pre časovú závislosť koncentrácie nosičov po zapnutí osvetlenia ($n_0 = 0$) je treba riešiť nehomogénnu rovnicu (12.3) .

Pretože rovnica (12.3) nie je lineárna, jej riešenie nie je súčtom všeobecného riešenia homogénnej rovnice (riešenie (12.4)) a partikulárneho riešenia nehomogénnej rovnice ($n = n_{stac}$). Separáciou premenných z rovnice (12.3) dostaneme

$$\frac{dn}{g - r \cdot n^2} = dt \, . \tag{12.3''}$$

Bezprostredným derivovaním sa môžeme presvedčiť, že integrál ľavej strany rovnice (12.3'') je rovný

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{g \cdot r}} \cdot \ln \left(\frac{1 + \frac{n}{n_{st}}}{1 - \frac{n}{n_{st}}} \right) ,$$

kde n_{st} je rovné $n_{st} = \sqrt{g/r}$. Na základe toho môžeme pri hľadaní závislosti n(t) napísať:

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{g \cdot r}} \cdot \ln \left(\frac{1 + \frac{n}{n_{st}}}{1 - \frac{n}{n_{st}}} \right) = t + c \, .$$

Po vynásobení konštantou $2\sqrt{gr}$ a po „odlogaritmovaní“ dostaneme:

$$\frac{1 - n/n_{st}}{1 + n/n_{st}} = K \cdot \exp(-2\sqrt{gr} \cdot t) \, ,$$

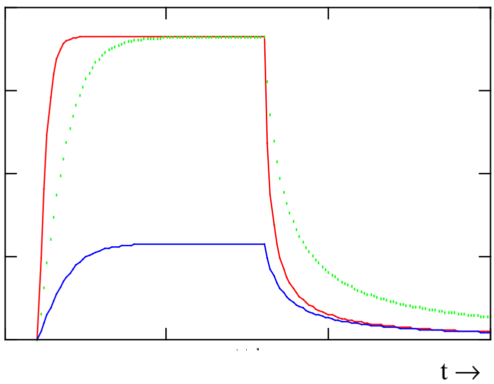
z čoho po vyjadrení n dostaneme:

$$n(t) = n_{st} \frac{1 - K \cdot \exp(-2 \cdot \sqrt{gr} \cdot t)}{1 + K \cdot \exp(-2 \cdot \sqrt{gr} \cdot t)} . \tag{12.4'}$$

Ak v čase $t = 0$ bola koncentrácia nosičov rovná nule (t. j. ak pred časom $t = 0$ bolo osvetlenie vypnuté), rovnica (12.4') poskytuje správne vyjadrenie časovej závislosti koncentrácie nosičov vtedy, ak integračná konštanta K je rovná jednej. V takom prípade pre časovú závislosť koncentrácie nosičov dostávame:

$$n(t) = n_{st} \frac{1 - \exp(-2 \cdot \sqrt{gr} \cdot t)}{1 + \exp(-2 \cdot \sqrt{gr} \cdot t)} . \qquad (12.6)$$

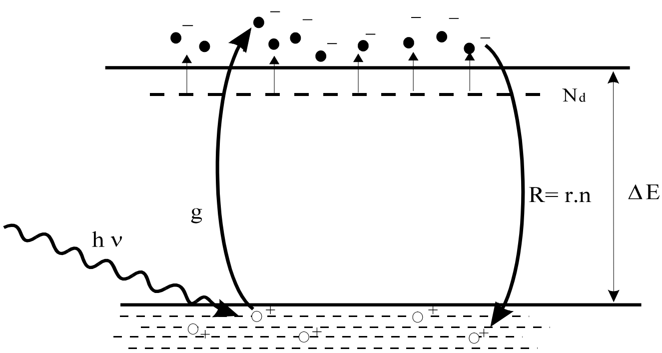
Priebeh časovej závislosti koncentrácie nosičov vyvolaný krátkodobým osvetlením je popísaný výrazom (12.6) pre čas po zapnutí osvetlenia a výrazom (12.5) po vypnutí osvetlenia. Aká je závislosť koncentrácie od času vyplývajúca z uvedených výrazov ilustruje závislosť uvedená na obr.12. 2.



Obr. 12.2.

Priebeh časovej závislosti vodivosti po zapnutí a vypnutí osvetlenia intrinzitného polovodiča pri dvoch rôznych intenzitách osvetlenia.
Pre porovnanie nábehov je bodkovanou čiarou vykreslený priebeh pri slabom osvetlení, ale vynásobený tak, aby bola amplitúda priebehu zhodná s predchádzajúcim

12.2 Vlastná fotovodivosť v prímesových polovodičoch



Obr. 12.3. Energetická schéma prímesového polovodiča typu n

Vlastnou fotovodivosťou sa nazýva fotovodivosť vyvolaná prechodom elektrónov z valenčného pásu do vodivostného pásu. Takéto prechody sú možné ako vo vlastných (čistých) polovodičoch, tak i v prímesových polovodičoch, v ktorých je vodivosť i za tmy rôzna od nuly a je spôsobená cudzorodými atómami (atómami iného druhu než sú atómy základného materiálu). Prímesové atómy totižto môžu v zakázanom páse v blízkosti dna vodivostného pásu vytvoriť elektrónmi obsadené hladiny. Atómom, ktoré vytvoria takéto hladiny hovoríme **donory**. Prímesi iného druhu môžu vytvoriť neobsadené dovolené hladiny v zakázanom páse, ale v blízkosti stropu valenčného pásu. Takýmto prímesiam hovoríme **akceptory**. Základná energetická schéma takéhoto prímesového polovodiča je uvedená na obr.12.3.

Kinetické rovnice v takomto polovodiči sú analogické, avšak nie rovnaké ako vo vlastnom polovodiči. Pre prípad polovodiča typu p (vodivosť je dominantne vyvolaná dierami) tieto rovnice majú tvar:

$$\frac{dn}{dt} = g - r \cdot (p_0 + p) \cdot n \tag{12.7}$$

a

$$\frac{dp}{dt} = g - r \cdot (p_0 + p) \cdot n \,, \tag{12.8}$$

kde p_0 je koncentrácia dier za tmy a p je koncentrácia dier vyvolaná osvetlením.

V ustálenom stave ($dn/dt = 0$) pre koncentráciu elektrónov vo vodivostnom páse vyvolanú slabým osvetlením (takým osvetlením, pri ktorom je $p \ll p_0$) z rovnice (12.7) dostaneme:

$$n_{st} = g/R \quad , \tag{12.9}$$

kde $R = r \,.\, p_0$. Ako je zo vzťahu (12.9) vidieť, závislosť koncentrácie od rýchlosti generácie je lineárna. Pretože rýchlosť generácie je priamoúmerná intenzite osvetlenia, je v prímesovom polovodiči zmena vodivosti vyvolaná osvetlením úmerná intenzite svetla. Aké sú priebehy relaxácie fotovodivosti pri zapnutí a vypnutí osvetlenia určíme analogicky ako v predchádzajúcom prípade. Za tmy, keď je $g = 0$, je rovnica (12.7) homogénna a za uvedeného predpokladu že ide o slabé osvetlenie ($p \ll p_o$) nadobudne tvar:

$$\frac{dn}{dt} = -R \cdot n \,,$$

z čoho po integrácii dostávame :

$$n(t) = n_0 \cdot \exp(-R \cdot t) \,, \tag{12.10}$$

kde n_0 je integračná konštanta a má fyzikálny zmysel koncentrácie v okamžiku $t = 0$, t. j. v čase keď relaxácia koncentrácie začala (okamžik, v ktorom bolo vypnuté osvetlenie)[1]. Vypnutím osvetlenia sa totiž tá koncentrácia, ktorá bola rovnovážna (ustálená) pri zapnutom osvetlení stáva nerovnovážnou a bude sa meniť, až kým sa nedosiahne rovnovážna hodnota za tmy.

[1] Relaxáciou rozumieme svojvoľný, t. j. nevynútený, prechod do rovnovážneho stavu.

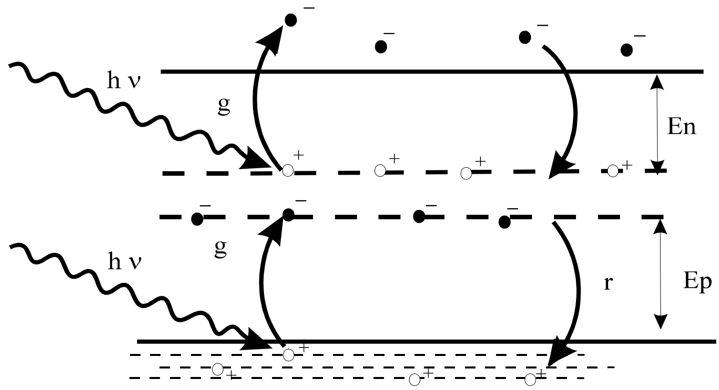
Pretože rovnice popisujúce koncentráciu nosičov v prímesových polovodičoch sú lineárne, relaxačný priebeh pri zapnutí osvetlenia je superpozíciou všeobecného riešenia homogénnej rovnice (riešenie (12.10)) a partikulárneho riešenia (12.9) nehomogénnej rovnice. Dostaneme tak :

$$n(t) = \frac{g}{R} \cdot \left(1 - \exp(-R \cdot t)\right) . \qquad (12.11)$$

Časové závislosti koncentrácie nosičov, a tým i vodivosti pri zapnutí a vypnutí osvetlenia, majú teda rovnaký charakter ako pri vlastných polovodičoch s tým rozdielom, že relaxačné priebehy sú popísané exponenciálnymi a nie hyperbolickými funkciami. V prípade exponenciálnych priebehov sa rýchlosť relaxácie spravidla charakterizuje tzv. časovou konštantou, ktorá je rovná $\tau = 1/R$ a jej fyzikálny zmysel je doba, za ktorú sa pôvodná hodnota relaxujúcej veličiny zmení na jednu e-tinu (1/e násobok) pôvodnej hodnoty.

Úplne rovnaké závislosti relaxačného priebehu ako pri relaxácii vlastnej vodivosti prímesových polovodičov majú i polovodiče u ktorých sa vodivostné elektróny generujú z takzvanej hladiny elektrónovej, alebo dierovej prímesovej fotovodivosti. Elektrónovú prímesovú fotovodivosť vytvárajú také prímesi, ktoré vytvoria vnútri zakázaného pásu elektrónmi obsadené hladiny (obr. 12.4.). Na prenos elektrónov z prímesovej hladiny do vodivostného pásu je potrebné, aby energia fotónov bola rovná, alebo väčšia ako je vzdialenosť prímesovej hladiny od dna vodivostného pásu.

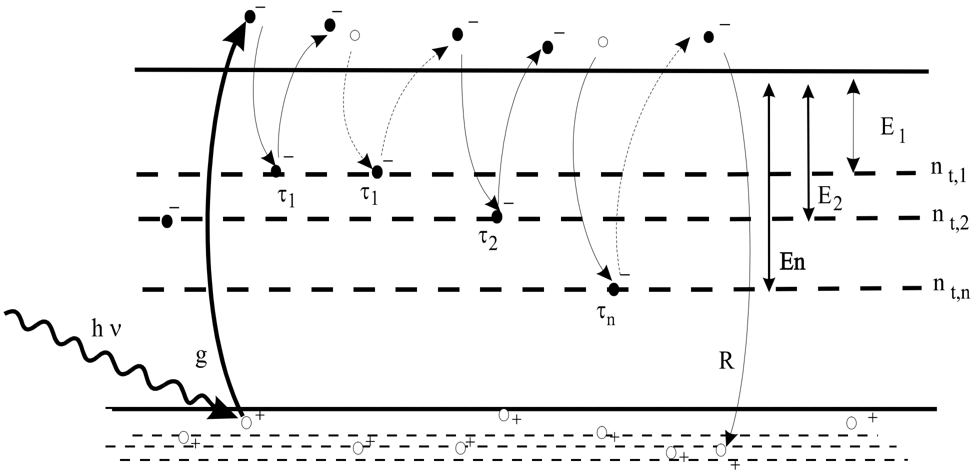
V prípade, že materiál obsahuje prímesi, ktoré vytvárajú v zakázanom páse neobsadené hladiny (a ich energia sa líši od stropu vodivostného pásu, ako i od dna vodivostného pásu o hodnotu značne väčšiu ako $k.T$), máme do činenia s materiálom vykazujúcim **prímesovú fotovodivosť typu** *p*. Na vytvorenie nosičov náboja je v takomto prípade potrebné svetlo s energiou fotónov rovnou alebo väčšou než je vzdialenosť stropu valenčného pásu od takejto hladiny.



Obr. 12.4. Energetická schéma prímesovej (elektrónovej a dierovej) fotovodivosti

12.3 Vplyv záchytných centier na priebeh fotovodivosti

Elektrónovými (dierovými) záchytnými centrami, (často sa nazývajú pascami, anglicky „traps“, rusky „lovušky“) rozumieme centrá, ktoré môžu, ale nemusia byť obsadené elektrónmi (dierami), takže môže dôjsť k prechodu elektrónov (dier) z vodivostného (valenčného) pásu na tieto centrá. Prechody nosičov medzi týmito centrami a pásmi sú ale na rozdiel od rekombinačných centier vratné, čo znamená, že (napríklad tepelnou excitáciou) sa nosiče vracajú do príslušného pásu, ako to schematicky znázorňuje obr.12.5.



Obr. 12.5. Schematické znázornenie prechodov medzi vodivostným pásom a záchytnými hladinami

Kinetické rovnice odpovedajúce takémuto modelu s viacerými druhmi záchytných centier pozostávajú z rovnice vyjadrujúcej prírastok nosičov vo vodivostnom páse

$$\frac{dn}{dt} = g - \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot (N_{t,i} - n_{t,i}) \cdot n + \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot n_{t,i} - R \cdot n\,, \tag{12.12}$$

(c_i a k_i sú rýchlosti záchytu a excitácie na i-tom centre) a z m rovníc popisujúcich prírastok koncentrácie nosičov zachytených na centrách i - tého druhu (celkový počet druhov záchytných centier je rovný m) :

$$\frac{dn}{dt} = c_i \cdot (N_{t,i} - n_{t,i}) \cdot n - k_i \cdot n_{t,i}\,. \tag{12.13,i}$$

Pri slabých osvetleniach, kedy možno predpokladať, že koncentrácia nosičov na i-tom centre ($n_{t,i}$) je malá v zrovnaní s koncentráciou ($N_{t,i}$) týchto centier, t. j. keď $n_{t,i} << N_{t,i}$, sa časové závislosti koncentrácií $n(t)$ a $n_{t,i}(t)$ dajú vyjadriť:

$$n(t) = \sum_{j=1}^{m+1} A_j \cdot \exp(-\alpha_j \cdot t) \tag{12.14}$$

a

$$n_{t,i}(t) = \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} \cdot \exp(-\alpha_j \cdot t)\,. \tag{12.15,i}$$

Po vyjadrení $n_{t,i}$ v i-tej rovnici z rovníc (12.13,i) pomocou (12.15,i), za predpokladu, že $n_{t,i} << N_{t,i}$ a po jednoduchých úpravách, dostaneme:

$$\sum_{j+1}^{m+1}\Big((\alpha_j + k_i)\cdot B_{i,j} \cdot \exp(-\alpha_j t)\Big) = \sum_{j+1}^{m+1}\Big(c_i \cdot N_{t,i} \cdot A_{i,j} \cdot \exp(-\alpha_j t)\Big).$$

Súčet exponenciálnych funkcií s rôznymi časovými konštantami môže byť identicky rovný nule (rovnať sa nule pre všetky hodnoty nezávislej premennej) vtedy, ak súčet amplitúd exponenciálnych funkcií s rovnakou časovou konštantou je rovný nule. Na základe toho z predchádzajúceho vzťahu plynie pre amplitúdy $B_{i,j}$:

$$B_{i,j} = \frac{A_j}{-\alpha_j + k_i} \cdot c_i \cdot N_{t,i}$$

a teda podľa (12.15.i):

$$n_{t,i}(t) = c_i \cdot N_{t,i} \cdot \sum_{j}^{m+1}\left(\frac{A_j}{-\alpha_j + k_i} \cdot \exp(-\alpha_j t)\right). \tag{12.16}$$

V záujme určenia hodnôt α_j spočítajme rovnicu (12.12) a všetky rovnice (12.13,i). Dostaneme tak:

$$\sum_{i}^{m} \frac{dn_{t,i}}{dt} = -R \cdot n - \frac{dn}{dt}\ . \tag{12.17}$$

Po dosadení za n a $n_{t,i}$ podľa (12.14) a (12.16) a následným integrovaním rovnice (12.17) , s využitím toho, že pre $t \to \infty$ sa $n \to 0$ i $n_{t,i} \to 0$, dostaneme rovnicu:

$$\sum_{j}^{m+1}\left(\sum_{i}^{m}\left(\frac{A_j}{-\alpha_j + k_i} \cdot c_i \cdot N_{t,i}\right) \cdot \exp(-\alpha_j t)\right) = \sum_{j}^{m+1}\left(\left(\frac{R}{-\alpha_j} + 1\right) \cdot A_j \cdot \exp(-\alpha_j t)\right). \tag{12.18}$$

Porovnaním amplitúd exponenciálnych členov s rovnakými časovými konštantami na pravej a ľavej strane rovnice (12.18) dostaneme $m+1$ identicky rovnakých rovníc (m+1)-tého rádu, z ktorých môžeme vypočítať hodnoty α_j :

$$\sum_{i}^{m} \frac{c_i \cdot N_{t,i}}{\alpha_j - k_i} = -\frac{R}{\alpha_j} + 1\,. \tag{12.19,j}$$

Zaujímavé je, že rovnice (12.19,j) sú pre všetky j rovnaké a napriek tomu určujú všetky konštanty α_j . Je tomu tak preto, že každá z rovníc (12.19) je rádu $m+1$, takže má $m+1$ koreňov, ktoré odpovedajú jednotlivým hodnotám α_j .

Keby v polovodiči boli záchytné centrá iba jedného druhu ($m = 1$), tak by sme miesto rovníc (12.19,j) mali iba jednu rovnicu:

$$\frac{c \cdot N}{\alpha - k} = -\frac{R}{\alpha} + 1 ,$$

z ktorej po úprave dostaneme:

$$\alpha^2 - (R + c \cdot N + k) + R \cdot k = 0 ,$$

takže, za predpokladu, že $R.k << (R + c.N + k)$, dostaneme:

$$\alpha_1 \cong R + c \cdot N + k \quad \text{pre prvý koreň a:}$$

$$\alpha_2 \cong \frac{R \cdot k}{R + c \cdot N + k} \quad \text{pre druhý koreň.}$$

V takomto prípade teda relaxačný priebeh bude pozostávať z dvoch časových úsekov : v prvom úseku prebehne rýchla relaxácia s exponenciálnym priebehom s časovou konštantou α_1 a potom relaxácia s menšou časovou konštantou α_2 .

Analogicky bude vyzerať relaxačný priebeh v prípade, že materiál obsahuje viacero druhov záchytných centier. Prirodzene, v takom prípade bude relaxačný priebeh pozostávať z viacerých exponenciálnych vetiev. Amplitúdy jednotlivých vetiev závisia od toho, aká bola koncentrácia elektrónov vo vodivostnom páse na počiatku relaxácie a ako boli obsadené jednotlivé záchytné centrá. Pre ilustráciu si ukážme, ako by sme vypočítali amplitúdy jednotlivých vetiev, keby išlo o relaxáciu za tmy (po vypnutí osvetlenia) z ustáleného stavu vytvoreného dlhotrvajúcim osvetlením s konštantnou intenzitou. Z rovníc (12.13) za predpokladu že $n_t << N_{t,i}$, v ustálenom stave (t.j. pre $t >> 1 / \alpha$) plynie, že

$$n_{ust,i} = \frac{c_i \cdot N_{ust,i}}{k_i} \cdot n , \tag{12.20,i}$$

takže z rovnice (12.12) pre koncentráciu nosičov vo vodivostnom páse dostaneme:

$$n_{ust} = \frac{g}{R} . \tag{12.21}$$

Hodnoty určené vzťahmi (12.20,i) a (12.21) sú v okamžiku vypnutia svetla počiatočnými hodnotami riešení n(t) a $n_{t,i}(t)$ určených vzťahmi (12.14) a (12.16). To znamená, že v čase $t = 0$ je ľavá strana výrazov (12.16,i) určená rovnicami (12.20,i), takže z výrazov (12.16,i) dostaneme:

$$\frac{g}{k_1 \cdot R} = \frac{A_1}{\alpha_1 + k_1} + \frac{A_2}{\alpha_1 + k_1} + ... + \frac{A_{m+1}}{\alpha_1 + k_1}$$

$$\frac{g}{k_2 \cdot R} = \frac{A_1}{\alpha_1 + k_2} + \frac{A_2}{\alpha_1 + k_2} + ... + \frac{A_{m+1}}{\alpha_1 + k_2}$$

....

....

$$\frac{g}{k_m \cdot R} = \frac{A_1}{\alpha_1 + k_m} + \frac{A_2}{\alpha_1 + k_m} + ... + \frac{A_{m+1}}{\alpha_1 + k_m} ,$$

čo predstavuje m rovníc pre m+1 hodnôt Aj . Poslednú potrebnú rovnicu poskytuje rovnica (12.21). Z rovníc (12.21) a (12.14) analogicky dostávame:

$$\frac{g}{R} = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{m+1} .$$

Pre úplnosť sa vráťme ešte na chvíľu ku vzťahu (12.21), ktorý je zhodný so vzťahom (12.9) a udáva koncentráciu elektrónov vyvolanú ustáleným osvetlením v prímesovom polovodiči. Táto zhoda znamená, že prítomnosť záchytných centier neovplyvňuje veľkosť zmien vodivosti vyvolanej osvetlením. Prejavuje sa "iba" na veľkosti časovej relaxačnej konštanty. Pre praktické použitie fotoelektrického javu je ale často dôležité, aby fotoelektrické detektory vykazovali čo najvyššiu citlivosť a pri tom aby relaxačná doba bola čo najmenšia (aby mohli reagovať na krátko trvajúce impulzné osvetlenia). Tomu, prirodzene, existencia záchytných centier prekáža.

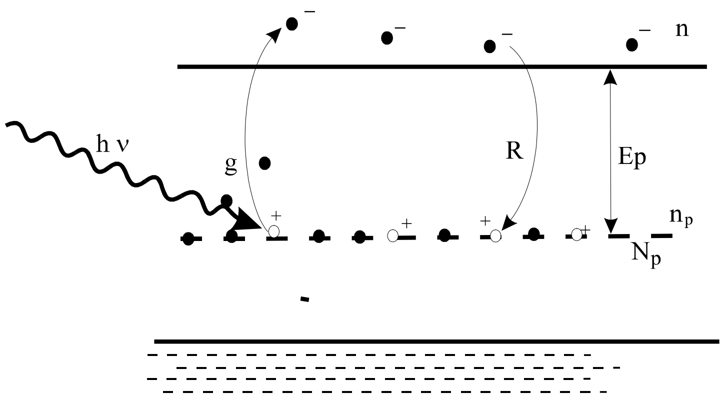
12.4 Linearita fotovodivosti

Mimo citlivosti a rýchlosti odozvy je pre použitie fotoelektrického javu často dôležité, aký je charakter závislosti fotoprúdu (fotovodivosti) od intenzity osvetlenia. Najčastejšie sa požaduje, aby veľkosť odozvy bola v čo najširšom rozsahu intenzity svetla lineárna. Ako sme videli, nie vo všetkých prípadoch je odozva lineárna. Dokonca ani pri veľmi malých osvetleniach nemusí byť linearita zaručená (viď napr. vzťah (12.4) pre n_{st} na začiatku kapitoly). Podľa popisu v predchádzajúcom paragrafe je zmena vodivosti prímesových polovodičov vyvolaná osvetlením úmerná intenzite osvetlenia. Avšak ani pri prímesových polovodičoch nie je linearita zaručená. V predchádzajúcich odsekoch sme spravidla predpokladali, že koncentrácia nosičov zachytených na záchytných hladinách je značne menšia ako koncentrácia záchytných hladín (predpokladali sme $n_{\mathrm{i}} << N_{\mathrm{i}}$). Pri veľkých intenzitách osvetlenia však tento predpoklad nemusí byť splnený. Pri vysokých intenzitách osvetlenia môže dôjsť k tomu, že koncentrácia na prímesových hladinách sa výrazne zmenší, v dôsledku čoho poklesne koeficient absorpcie svetla a výsledná rýchlosť generácie bude nižšia, ako by odpovedalo použitému osvetleniu pri nezmenenej absorpcii svetla.

Súvis rýchlosti generácie g a intenzity osvetlenia možno vyjadriť vzťahom:

$$g = S_p \cdot n_p \cdot I/h \cdot \nu \ ,$$

kde S_p je účinný prierez záchytu fotónu jedného centra prímesovej fotovodivosti, n_p je počet týchto centier obsadených elektrónmi, I je intenzita svetla (hustota toku energie) a $h\nu$ je energia jedného fotónu (h je Planckova konštanta a ν frekvencia svetla). Súvis koncentrácie nosičov a intenzity môžeme nájsť z rovníc popisujúcich prechody uvedené na obrázku 12.6.



Obr. 12.6. Prechody v prímesovom polovodiči

Ak budeme predpokladať, že za tmy nie sú všetky prímesové centrá obsadené, tak pre n a n_p platí:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{S_p \cdot I}{h \cdot \nu} \cdot n_p - r \cdot (N_p - n_p) \cdot n \ , \qquad (12.22)$$

kde $S_p \cdot I/h \cdot \nu = g_0$ a $r = R/(N_p - n_p)$ je pravdepodobnosť záchytu (rekombinácie) elektrónu na jednom centre za jednotku času.. Pretože $n_p = n_{p0} - n$ (n_{p0} je koncentrácia obsadených príme-sových centier za tmy), pre ustálený stav môžeme na základe rovnice (12.22) napísať:

$$n^2 + (N_p - n_p + \frac{g_0}{r}) \cdot n - \frac{g_0 \cdot n_{p0}}{r} = 0 \ .$$

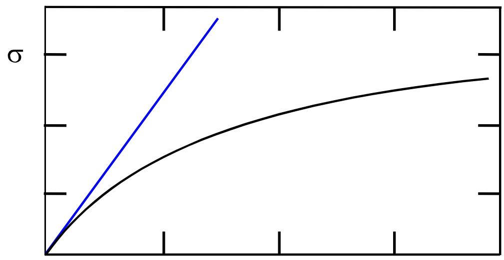
Táto kvadratická rovnica má jeden kladný a jeden záporný koreň, pretože odmocnina jej diskriminantu je väčšia ako jej lineárny člen. Záporná koncentrácia nosičov ale nemá fyzikálny zmysel, takže pre hodnotu koncentrácie dostávame výraz:

$$n = \tfrac{1}{2}(N_p - n_p + \frac{g_0}{r}) + \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(N_p - n_p + \frac{g_0}{r})^2 + \frac{4 \cdot g_0 \cdot n_{p0}}{r}} \ . \qquad (12.23)$$

Pre malé osvetlenia (pre ktoré je $n \ll n_{po}$) je závislosť n od g_o lineárna a je vyjadrená vzťahom

$$n = \frac{n_{p0}}{r} \cdot \frac{S_0}{h \cdot \nu} \cdot I \; . \qquad (12.23')$$

Avšak akonáhle začne byť n zrovnateľné s n_{po} , prejaví sa odklon od linearity. Závislosť koncentrácie nosičov od intenzity v takomto prípade je uvedená na obr.12.7. Je evidentné, že pre veľmi veľké intenzity je koncentrácia nosičov vo vodivostnom páse rovná n_{po}. V takom prípade všetky elektróny, ktoré boli za tmy na prímesových centrách, sú vynesené do vodivostného pásu. Ďalší vzrast koncentrácie už nie je potom možný.



Obr. 12.7.
Porovnanie závislosti fotovodivosti od osvetlenia udanej vzťahom (12.23) s extrapoláciou lineárnej závislosti ktorá popisuje vodivosť pri slabom osvetlení (vzťah (12.23')) .

Literatúra

[1] RYVKIN, S.M.: Fotoelektričeskie javlenia v poluprovodnikach, Fyzmatgiz, Moskva 1963.

[2] TUREK, I.: „The phototransient in semiconductors with several Kinds of Traps“, phys.stat.sol.(a) 62 K45 (1980).

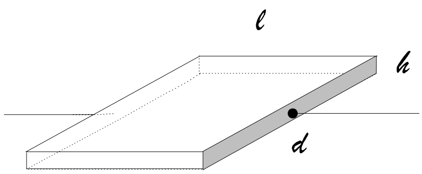
13. Fotodetektory a fotodiódy

13.1 Fotoodpory

Fotovodivosť vyvolanú v malej, kontaktmi opatrenej platničke vhodného polovodiča môžeme využiť na detekciu svetla. V tomto prípade detekciou svetla rozumieme jeho prevod na niektorú z elektrickývh veličín, napríklad na prúd pretekajúci obvodom, v ktorom je takýto detektor zapojený (obr. 13.1.). Ako sme videli v predchádzajúcich odstavcoch, v niektorých polovodivých materiáloch je zmena elektrickej vodivosti vyvolaná osvetlením úmerná intenzite osvetlenia, takže prírastok prúdu vyvolaný osvetlením možno vyjadriť vzťahom

$$\Delta I = \sigma \frac{h \cdot d}{l} \cdot U \,, \tag{13.1}$$

kde U je napätie na uvažovanom prvku, σ je vodivosť vyvolaná osvetlením a h, d a l sú jeho geometrické rozmery. Vodivosť σ môžeme vyjadriť pomocou koncentrácie, pohyblivosti μ a náboja elementárnych nosičov e a koncentráciu podľa vzťahu (12.9) predchádzajúcej kapitoly ako g/R, kde R je rýchlosť rekombinácie. Rýchlosť s akou prebieha rekombinácia sa dá charakterizovať i pomocou doby života nerovnovážnych nosičov vo vodivostnom páse τ, ktorá sa podľa výrazu (12.10) predchádzajúcej kapitoly rovná prevrátenej hodnote rýchlosti rekombinácie R. Použitím uvedených označení dostaneme:



Obr. 13.1. Ilustrácia k popisu fotoodporu

$$\Delta I = \frac{e \cdot \mu \cdot \tau}{l^2} \cdot \frac{\phi}{h \cdot \nu} \cdot U \,, \tag{13.2}$$

kde ϕ je absorbovaný svetelný tok, ν je frekvencia svetla a h je Planckova konštanta. Za predpokladu, že každý absorbovaný fotón znamená vytvorenie elementárneho nosiča elektrického náboja (elektrónu alebo diery, podľa toho o aký typ polovodiča ide), tak $\phi/h.\nu$ predstavuje počet fotónov zabsorbovaných za jednotku času v jednotke objemu fotovodivého materiálu. Ak $U.(e.\mu.\tau) / (l^2. h . \nu)$ označíme ako S (citlivosť detektoru), dostávame:

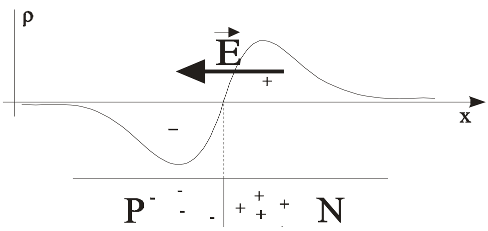
$$\Delta I = S \cdot \phi \,.$$

Pri polovodiči s pohyblivosťou μ rovnou 0.1 m^2/Vs, dobou života τ 10^{-7} s, dĺžky 1 mm a pri naloženom napätí 10 V dostávame pri osvetlení svetlom s vlnovou dĺžkou

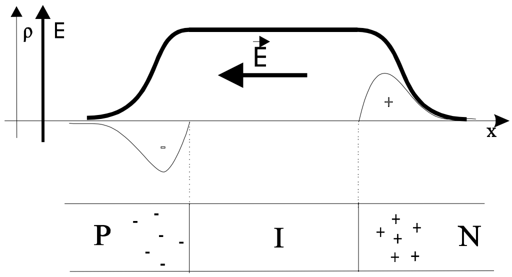
1240 nm (energia fotónov cca 1 eV), že hodnota S sa rovná približne 0.1 A/W. Poznamenajme, že ide o ilustratívnu hodnotu a že pri iných hodnotách pohyblivosti, doby života nosičov, alebo napätia U, by citlivosť detektora mohla byť i rádove odlišná od uvedenej hodnoty.

13.2 Fotodiódy

Častejšie ako fotoodpory sa k detekcii svetla používajú polovodičové fotodiódy. V záujme úplnosti výkladu stručne zopakujme ako sa správa polovodičová dióda, t. j. P-N priechod, pri naložení napätia polarizovaného v závernom smere, to znamená s takou polaritou, aby sa majoritné nosiče náboja v P i N časti diódy v dôsledku naloženého napätia pohybovali smerom od priechodu. V dôsledku takéhoto presúvania sa nábojov sa v okolí priechodu bude vytvárať „ochudobnená vrstva" so zníženou koncentráciou nosičov, v ktorej bude prevládať náboj nepohyblivých elementov prostredia (ióny tvoriace hlboké nabité centrá). Na strane polovodiča typu N sa vytvorí vrstva ochudobnená o ektróny, to znamená vrstva nabitá kladne a na strane polovodiča typu p vrstva nabitá záporne (obr.13.2). Tým vzniká na priechode rozdiel potenciálu, takže spád potenciálu vytváraný zdrojom elektromotorického napätia zapojeného do obvodu sa koncentruje na dióde. Keby bol uvažovaný P-N priechod tvorený polovodičmi, ktoré obsahujú iba nosiče jedného druhu, prúd pretekajúci diódou by sa zastavil vtedy, keď celý rozdiel potenciálu zdroja by bol rovný rozdielu potenciálu vytvoreného nábo-jovou bariérou v okolí priechodu. Vyplýva to z toho, že prúd (elektrónov v N a dier v P časti) by zvýšil vytvorený priestorový náboj a teda i rozdiel potenciálu na priechode, takže by sa rozdiel potenciálu stal väčší ako je elektromotorické napätie zdroja, čo by vyvolalo elektrický prúd opačného smeru, takže by sa vzápätí veľkosť bariéry znížila. Pokiaľ ale použité materiály obsahujú i nosiče opačného náboja než sú ich majoritné nosiče, budú minoritné nosiče priechodom i v ustálenom stave prechádzať, pretože smer rýchlosti, ktorý im elektrické pole v priechode udelí, zodpovedá smeru prúdu pôvodne vytváraného vonkajším zdrojom. Keďže bariérou prejdú, nepodieľajú sa na jej zvyšovaní. Dochádzame tak k výsledku, ktorý - ako uvidíme - je dôležitý pre použitie diód na detekciu svetla: v ustálenom stave prúd ktorý diódou v závernom smere tečie, je sprostredkovaný iba minoritnými nosičmi, ktorých koncentrácia (za tmy a pri nízkej teplote) je relatívne malá, takže i záverný prúd je malý.



Obr. 13.2. Ilustrácia nábojových pomerov v dióde



Obr. 13.3. Ilustrácia rozloženia náboja a poľa v PIN dióde

Analogickým spôsobom sa správa i štruktúra pozostávajúca z polovodiča typu P, vrstvy intrinzického (vlastného) polovodiča a polovodiča typu N (PIN dióda). Priebeh koncentrácie náboja a intenzity poľa na takejto dióde je schematicky zakreslený na obr. 13.3. Intenzita poľa v oblasti vlastného polovodiča je približne rovná $U / \Delta l$, kde Δl je hrúbka intrinzickej vrstvy. Ako je vidieť, pri tenkých vrstvách môže byť intenzita poľa v intrizickej vrstve (v I-vrstve) relatívne vysoká (pri U=10 V a Δl=10 μm až 10^6 V/m). Keď je takáto dióda osvetlená svetlom s vlnovou dĺžkou umožňujúcou prechod elektrónov z valenčného pásu materiálu tvoriaceho I-vrstvu do jeho vodivostného pásu, generujú sa v ňom ako elektróny, tak i diery. V dôsledku prítomnosti poľa v intrinzickej vrstve sa tieto nosiče, spravidla skôr než stihnú rekombinovať, od seba vzdialia na dostatočnú vzdialenosť a prejdú ako minoritné nosiče cez priechod. Počet svetlom generovaných nosičov je úmerný intenzite osvetlenia (počtu fotónov absorbovaných za jednotku času), takže i elektrický prúd vyvolaný osvetlením diódy je úmerný $\Phi / h.\nu$.

Pokiaľ je generácia nosičov dominantným mechanizmom absorpcie svetla, možno povedať, že prúd PIN diódou je $e.\,\Phi_0 / (h\nu)$, kde Φ_0 je svetelný tok absorbovaný za jednotku času v oblasti priechodu. Ako je vidieť, citlivosť takéhoto detektora (pri 100 % premene svetelnej energie na energiu párov elektrón-diera) je teoreticky rovná $e/(h\nu)$. Pre svetlo takej vlnovej dĺžky, že energia jeho fotónov je rovná 1 eV by bola citlivosť približne 1 A / W. V skutočnosti citlivosť diódových detektorov i v oblasti ich maximálnej citlivosti (vtedy, keď $h\nu$ je rovné šírke zakázaného pásu) dosahuje iba asi polovicu uvedenej hodnoty.

Okrem vysokej citlivosti je ďalšou výhodou diódových detektorov rýchlosť ich odozvy. Aby sme si urobili predstavu o procesoch, ktoré ovplyvňujú časovú konštantu s ktorou prúd diódy po vypnutí osvetlenia bude klesať k hodnote prúdu za tmy, napíšme si základné rovnice popisujúce elektrické procesy v oblasti diódy. Tieto rovnice budú zložitejšie než v predchádzajúcich odstavcoch, pretože, na rozdiel od vyšetrovania koncentrácie nosičov vo fotovodivých polovodičoch, problém teraz nie je priestorove homogenný. Už existencia samotného priechodu je významnou nehomogenitou. Pretože elektrický prúd nesený elektrónmi a dierami pri vytváraní bariéry nie je vo všetkých miestach rovnaký, v kinetických rovniciach (rovnici pre časovú zmenu koncentrácie nosičov) sa musí zakalkulovať i zmena koncentrácie nosičov spôsobená nehomogenitou elektrického prúdu. Keď sa obmedzíme na jednorozmerný prípad, v ktorom jednotlivé veličiny závisia iba od súradnice x kolmej k rozhraniu, pre časovú zmenu koncentrácie hustoty elektrónov a dier môžeme napísať:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = g - r \cdot n \cdot p - \frac{1}{e} \cdot div(\vec{i}_n) \quad \text{a} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = g - r \cdot n \cdot p - \frac{1}{e} \cdot div(\vec{i}_p)\,, \tag{13.3}$$

kde hustota elektrického prúdu realizovaného tokom elektrónov a dier je určená výrazmi:

$$\vec{i}_n = e \cdot \mu_n \cdot n \cdot (\vec{E} + \vec{E}_0) + e \cdot D_n \cdot \mathrm{grad}(n) \tag{13.4}$$

a

$$\vec{i}_p = e \cdot \mu_p \cdot p \cdot (\vec{E} + \vec{E}_0) - e \cdot D_p \cdot \mathrm{grad}(p)\,, \tag{13.4'}$$

v ktorých prvé členy na pravej strane predstavujú elektrický prúd vyvolaný elektrickým poľom (ohmický prúd) a druhé členy prúd spôsobený nehomogenitou koncentrácie nosičov (difúzny prúd). V uvedenom vzťahu μ_n a μ_p znamenajú pohyblivosti elektrónov a dier, D_n a D_p sú ich difúzne konštanty, E_0 je intenzita poľa vytvoreného naloženým napätím a E je intenzita poľa vyvolaná prerozdelením náboja vo vyšetrovanej štruktúre a $\vec{x}_0$ je jednotkový vektor v smere osi x. Podľa prvej Maxwellovej rovnice je

$$div(\vec{E}) = \frac{e \cdot (p - n)}{\varepsilon} \tag{13.5}$$

(ε permitivita materiálu a e je absolútna hodnota náboja elektrónu). Rovnice (13.3) až (13.5) predstavujú sústavu parciálnych diferenciálnych rovníc, v ktorých hľadané veličiny i_n, i_p, E, n a p sú funkciami súradnice x a času t. Riešenie takejto sústavy nie je jednoduché ani v prípade, že ide o priestorove jednorozmerný problém. Preto si za účelom odhadu rýchlosti relaxácie prúdu diódou problém zjednodušme.

Budeme sa zaujímať o to, ako rýchlo poklesne fotoprúd diódou po osvetlení diódy krátkym svetelným impulzom, ktorý vytvoril v intrinzickej vrstve elektróny a diery s koncentráciou n a p. Budeme predpokladať, že koncentrácie vyvolané osvetlením sú také malé, že nimi vytvorený náboj iba nepodstane ovplyvní elektrické pole vytvorené nábojovou bariérou v okolí diódy. (Taký predpoklad je prakticky vo všetkých „telekomunikačných aplikáciách“ opodstanený, pretože sa pri prenosoch informácie pomocou optických signálov vždy jedná o malé svetelné výkony.)

Podľa (13.3) je úbytok nosičov v dióde vytvorený dvoma mechanizmami: ich rekombináciou a „odtečením“ (elektrickým prúdom). Všimnime si, ako sa bude meniť fotoprúd po vypnutí osvetlenia v dôsledku odtekania nosičov. Ako je vidieť z rovníc (13.4) difúzny prúd môže spôsobovať zmeny koncentrácie nosičov iba v oblasti, v ktorej koncentrácia závisí od súradnice. Keďže predpokladáme, že koncentrácia nosičov vytvorená osvetlením bola rovnaká v celej oblasti diódy, nebude difúzia nosičov hrať dominantnú úlohu. Po zanedbaní vplyvu difúzneho prúdu, si môžeme predstaviť celý proces úbytku náboja v oblasti PIN diódy ako pohyb homogénnych „oblakov“ elektrónov a dier, ktoré sa pod účinkom elektrického poľa v dióde pohybujú navzájom opačnými smermi k elektródam. Dostávame tak, že za dobu $\tau = v/\Delta l$ opustia oblasť diódy. Keď za hodnotu rýchlosti v dosadíme pre elektróny a diery ich rýchlosti vyvolané eklektrickým poľom v dióde a intenzitu tohto poľa vyjadríme ako $U/\Delta l$, dostávame pre dobu, za ktorú opustia oblasť diódy elektróny :

$$\tau_n = \mu_n \cdot U / \Delta l^2$$

a diery opustia oblasť diódy za dobu

$$\tau_p = \mu_p \cdot U / \Delta l^2 \ .$$

Keďže pohyblivosti elektrónov sú v polovodičoch v rozsahu od 0,01 m^2/V.s po 1 m^2/V.s pri hrúbke aktívnej vrstvy fotodiódy poriadku stotín milimetra dostávame, že doba, za ktorú sa elektróny vytvorené osvetlením prestanú podielať na fotoprúde, je poriadku 10^{-10} s. Pohyblivosť dier je spravidla menšia ako pohyblivosť elektrónov, takže opustia diódu neskôr. Ale práve tie nosiče, ktoré majú vysokú pohyblivosť, sa dominantne podieľajú na fotoprúde, takže aj doba, za ktorú ich príspevok zanikne je rozhodujúca.

Pri uvedenom výklade sme zanedbali vplyv difúzie a vplyv rekombinácie. Aby sme mohli posúdiť, nakoľko je výsledok získaný pri takomto zjednodušení použiteľný, pozrime sa, ako tieto mechanizmy môžu priebeh relaxácie fotoprúdu ovplyvniť.

Ako vieme, rekombinácia nosičov je úmerná súčinu n a p. Pri slabom osvetlení sú teda obe koncentrácie nízke. Takže i úbytok nosičov spôsobený rekombináciou je menší než pri silnejšom osvetlení. Časové konštanty relaxácie fotovodivosti sú spravidla poriadku z okolia mikrosekundy. Pretože táto hodnota je ďaleko väčšia ako doba zániku fotoprúdu v dôsledku „vytečenia“ náboja, neprejaví sa na priebehu prúdu fotodiódou. V prípade, že by bola doba života spôsobená rekombináciou menšia ako doba „vytečenia“, fotovodivosť zanikne skôr ako stačia náboje z oblasti diódy vytiecť. Doba zániku fotoprúdu by teda bola ešte menšia ako sme dostali z odhadu vplyvu „vytečenia“ nosičov. Avšak zrýchľovanie relaxácie zvyšovaním pravdepodobnosti rekombinácie vedie síce ku zrýchleniu odozvy, ale zároveň spôsobuje zníženie koncentrácie nosičov, ktorú svetlo vyvolá, takže by sa znížila citlivosť detektora.

Ako sme už uviedli, vplyv difúzie sa prejaví na „okraji“ elektrónového (dierového) oblaku, pretože tam je gradient koncentrácie nosičov veľký. „Vnútri“ tohto oblaku je difúzny prúd pretekajúci z jednej strany na druhú rovnaký ako prúd v opačnom smere, takže neovplyvní rozloženie koncentrácie. To znamená, že na časovom priebehu relaxácie fotoprúdu diódy sa prejaví tým, že fotoprúd nezanikne „skokom“, ale bude sa meniť spojite - začne zanikať o niečo skôr ako sme zistili na základe rýchlosti driftu nosičov, ale jeho zanikanie sa o niečo predĺži. Či takýto vplyv difúzie je na priebeh relaxácie fotoprúdu rozhodujúci alebo nie, závisí od pomeru takzvanej difúznej dĺžky nosičov (ktorá je určená práve difúznou konštantou) a hrúbky intrinzickej vrstvy.

13.3 Polovodičové zdroje svetla

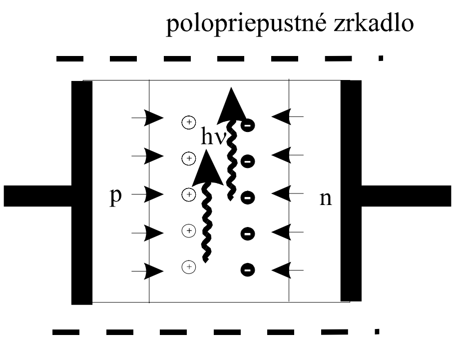
V polovodičových diódach môže prebiehať i efekt, ktorý je v istom zmysle inverzný k vnútornému fotoelektrickému javu. Rekombinácia nosičov môže totižto prebiehať tak, že sa rozdiel energií nosičov pred rekombináciou a po nej (alebo aspoň časť tejto energie) vyžiari v tvare elektromagnetických vĺn. Keďže sa pri takomto prechode vyžiari jeden fotón, zo zákona zachovania energie pre jeho frekvenciu vyplýva

$$h \cdot \nu \leq \Delta E \ , \tag{13.6}$$

kde ν je frekvencia vyžiareného svetla, h je Planckova konštanta a ΔE je rozdiel energií nosičov pred a po rekombinácii.

Pri rekombinácii nosičov musí byť splnený nielen zákon zachovania energie, ale i zákon zachovania hybnosti. Z toho dôvodu pri rekombinácii nepohybujúcich sa nosičov nemôže dôjsť k emisii fotónu ako jedinej "častice". Je tomu tak preto, že fotón má nenulovú hybnosť. Zachovanie hybnosti sa pri týchto prechodoch realizuje tým, že sa mimo fotónov generujú i kvantá akustických vĺn, (ktoré sa nazývajú "fonóny"). Smer ich šírenia sa musí byť taký, aby ich hybnosť kompenzovala hybnosť vyžiarených fotónov. Na ich generáciu je ale potrebná istá energia. A práve to je energia, ktorá predstavuje rozdiel energie ΔE - $h\nu$, vystupujúci vo vzťahu (13.6). Pomerne často sa stáva, že sa pri rekombinácii nosičov celá energia ΔE odnáša fonónmi. V takom prípade hovoríme o nežiarivej rekombinácii. Pretože fonóny sú kvantami akustických (mechanických) vĺn, ich vznik je vlastne príspevkom k energii kmitov prostredia a to, ako je známe, je premena energie ΔE na teplo, takže „nežiarivou" rekombináciou sa prostredie ohrieva. V iných polovodičoch môže byť žiarivá rekombinácia dostatočne pravdepodobná a teda i pozorovateľná, resp. technicky využiteľná. Je tomu tak najmä v takzvaných „priamych polovodičoch". Sú to také polovodiče, v ktorých elektróny vo vodivostnom páse nadobúdajú minimálnu energiu pri nulovej hybnosti. Pri nepriamych polovodičoch, kedy elektróny s minimálnou energiou vo vodivostnom páse majú hybnosť odlišnú od nuly, sa musí rozdiel hybností vyrovnať účasťou mnohých fonónov, čím sa stáva jav málo pravdepodobný, pretože do interakcie musí vstúpiť viac častíc.

Na to, aby došlo k žiarivej rekombinácii s dostatočnou intenzitou, je i v priamom polovodiči potrebné dosiahnuť badateľné obsadenie stavov (hladín) s energiami vyššími než je energia základného stavu (t. j. stavu z ktorého sú nosiče excitované a do ktorého sa budú pri rekombinácii vracať). Významným mechanizmom, ktorým sa dá dosiahnuť obsadenie energeticky vyšších hladín, je excitácia nosičov osvetlením prostredia. Keď dôjde k žiarivej rekombinácii v dôsledku osvetlenia materiálu, hovoríme o luminiscencii, presnejšie o **fotoluminiscencii materiálu**. Za bežných okolnosti takáto generácia nemá veľký technický význam, pretože ide o vyžiarenie svetla, ktoré je vyvolané opäť svetlom, takže sa zmení nanajvýš frekvencia, ale často iba smer a fáza svetla. V špeciálnych prípadoch však môže byť užitočná. Napríklad pri rýchlej chemickej analýze niektorých látok. Prítomnosť hľadanej látky sa totižto môže prejaviť luminiscenciou na určitej vlnovej dĺžke, vyvolanou vhodným, spravidla ultrafialovým osvetlením.



Obr. 13.4. Schéma laserovej diódy

Pri takej rekombinácii, pri ktorej sa realizujú prechody elektrónov z vodivostného pásu na voľné miesta vo valenčnom páse (elektrón - dierová rekombinácia) sa nerovnovážne obsadenie dá dosiahnuť i injekciou oboch druhov nosičov do zóny, v ktorej je dostatočne pravdepodobná žiarivá rekombinácia (obr. 13.4). Schéma uvedená na tomto obrázku je teda principiálna schéma tzv. LED-ky (Light Emitting Diode, t. j. svetlo emitujúcej diódy).

Za istých okolností zariadenie s principiálnou schémou uvedenou na obr. 13.4,. môže pracovať i ako polovodičový laser (laserová dióda). Ako bolo uvedené v kapitole o kvantových generátoroch svetla, pri dostatočne vysokej inverzii obsadenia hladín, môže dôjsť k tomu, že bude stimulovaná emisia svetla prevládať nad emisiou spontánnou. Aby sa tak stalo, musí injekcia nosičov prestúpiť istú hodnotu, t. j. emisnou diódou musí tiecť prúd vyšší než je istá kritická hodnota. Každý polovodičový laser teda, pri prúdoch nižších ako kritický prúd, pracuje ako emisná dióda.

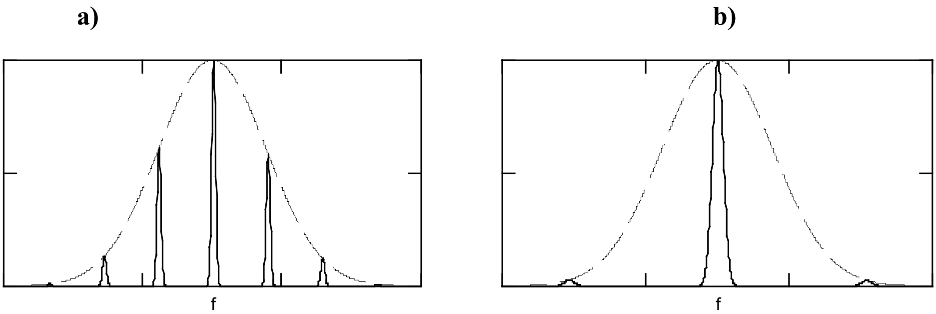
Podiel stimulovanej emisie na celkovej emisii závisí mimo iného aj od intenzity svetla, ktoré emisiu stimuluje. Z toho dôvodu je dôležitou súčasťou laserov ich optický rezonátor (spravidla rezonátor typu Fabryho-Perotovho interferometra). Pre svetelné vlny, ktorých vlnové dĺžky odpovedajú rezonančným frekvenciám rezonátora, sa v rezonátore vytvorí vlnový stav s relatívne vysokou amplitúdou. V dôsledku toho sa prostredníctvom stimulovanej emisie výrazná časť energie nosičov vytvárajúcich inverzné obsadenie prejaví emisiou na frekvenciách blízkych rezonančným frekvenciám rezonátora.

Pri polovodičových laseroch sa ako zrkadlá rezonátora môžu využiť povrchové plochy súčiastky. Aby sa zvýšila kvalita rezonátora, a tým i zmenšila šírka spektra emitovaného svetla, je vhodné upraviť povrch laserovej diódy tak, aby sa zvýšil koeficient odrazu svetla. Úprava týchto plôch v záujme zvýšenia koeficientu odrazu svetla, sa u laserov rôznych výrobcov môže líšiť. V niektorých prípadoch sa namiesto zrkadiel realizovaných povrchovými plochami, i u polovodičových laserov, využíva rezonátor s vonkajšími zrkadlami. Výhodou takéhoto riešenia je možnosť regulácie frekvencie vyžiareného svetla.

Uveďme ešte, aké sú možnosti regulácie frekvencie polovodičových laserov.

V základných rysoch je frekvencia vyžiareného svetla daná šírkou zakázaného pásu polovodiča. Šírka zakázaného pásu závisí od druhu materiálu (chemického zloženia). Avšak vďaka tomu, že existujú "smiešané" polovodiče, ktorých katióny, alebo anióny sú tvorené rôznymi prvkami tej istej skupiny Mendelejevovej tabuľky, je možné pripraviť materiály s rôznymi šírkami zakázaného pásu. Napríklad $(Ga_x\,Al_{1-x})As$, alebo $Ga(As_x\,P_{1-x})$. Veličina $x/(1-x)$ vyjadruje pomer koncentrácií substituovaných a základných prvkov.

I keď šírka zakázaného pásu polovodiča je určená jeho zložením, vyžiarené svetlo nie je úplne monochromatické. Je to spôsobené tepelným "rozmietaním" energie rekombinujúcich nosičov. Stredná odchýlka energie prvkov s teplotou T je rovná (pri troch stupňoch voľnosti) $3/2\ k\ T$, kde k je Boltzmanova konštanta. Pri izbových teplotách je tepelná energia nosičov približne rovná 25 milielektronvoltov. Z toho dôvodu je nemonochromatičnosť svetla vyžiareného diódami poriadku $kT/\Delta E$. Pri diódach na báze arzenidu gália (ktorého šírka zakázaného pásu ΔE je približne 1.5 eV) to dáva hodnotu spektrálnej šírky poriadku desiatok nanometrov. Pri laserových diódach sa spektrálna šírka vyžiareného svetla zúži, pretože emisia je pravdepodobnejšia pri prechode z viac obsadených hladín, a to sú hladiny v blízkosti dna vodivostného pásu (a stropu valenčného pásu). Ako sme už spomenuli, zavedením optického rezonátora sa spektrum vyžiareného svetla obmedzí na rezonančné frekvencie rezonátora, takže šírka spektra bude zodpovedať šírke rezonančných čiar rezonátora. Je pri tom výhodné, aby do oblasti spektra, v ktorej samotná laserová dióda môže emitovať, spadala iba jedna rezonančná frekvencia rezonátora (obr. 13.5.b). V opačnom prípade spektrum lasera pozostáva z niekoľkých rezonančných frekvencií rezonátora (obr. 13.5.a).



Obr. 13.5. Schematické znázornenie spektra laserovej diódy, a) s viacerými vlnovými dĺžkami, b) s jedným výrazným maximom

Zmena teploty materiálu v ktorom prebieha emisia sa na frekvencii vyžiareného svetla nepodieľa len prostredníctvom pravdepodobnosti obsadenia energetických pásov, ale i v dôsledku toho, že šírka zakázaného pásu je vo všeobecnosti funkciou teploty. V dôsledku toho je možné kontrolovať (regulovať) vlnovú dĺžku vyžiareného svetla prostredníctvom zmien teploty materiálu vyžarujúceho svetlo.

Literatúra

[1] RYVKIN, S.M.: Fotoelektričeskie javlenia v poluprovodnikach, Fyzmatgiz, Moskva 1963.

14. Šum detekovaného signálu

V predchádzajúcom paragrafe sme uviedli, že intenzita elektrického prúdu v detektore svetla je úmerná intenzite svetla, ktorá je v detektore absorbovaná. Avšak v dôsledku toho, že svetlo sa absorbuje v kvantách, dochádza k nepravidelnostiam (fluktuáciám) elektrického prúdu vyvolaného jeho absorpciou v detektore. Takéto nepravidelnosti sa spravidla opisujú prostredníctvom akéhosi nepravidelne sa meniaceho signálu - „šumu“ - ktorý sa superponuje na hodnotu prúdu zodpovedajúcu absorbovanej intenzite svetla. Nepravidelnosti fotoelektrického prúdu súvisiace s kvantovou povahou svetla sa dajú opísať štatistickými metódami.

Predstavme si, že fotodióda je osvetlená svetlom takej vlnovej dĺžky, že v aktívnej časti diódy dochádza k absorpcii s pravdepodobnosťou rovnou práve jednej polovici. To znamená, že v strednej hodnote polovica fotónov, ktoré na diódu dopadajú, sa v aktívnej časti diódy zabsorbuje a druhá polovica fotónov cez aktívnu časť prejde bez toho, aby prispela k vzniku fotovodivosti. Keď teda dopadne na diódu jeden fotón, nevieme povedať či k excitácii nosičov elektrického prúdu dôjde, alebo nie. Vieme len, že k nej dôjde s pravdepodobnosťou, ktorá sa rovná 1/2. Ak takouto fotodiódou prechádzajú dva fotóny, tak pravdepodobnosť, že sa v aktívnej časti oba zabsorbujú, je rovná 1/4, pravdepodobnosť, že sa jeden z nich zabsorbuje, je rovná 1/2 (pretože takýto výsledok sa realizuje dvomi „odlišnými“ spôsobmi: prvý fotón sa absorbuje a druhý prejde, alebo prvý fotón prejde bez absorpcie a druhý sa absorbuje). Pravdepodobnosť že sa nezabsorbuje žiadny fotón je tiež rovná 1/4 . Keby sme pokračovali v uvádzaní jednotlivých možností i pri vyššom počte prechádzajúcich fotónov, videli by sme, že pravdepodobnosti absorpcie rôzneho počtu fotónov odpovedajú takzvanému „binomickému“ rozloženiu. Tiež by sme videli, že najväčšiu prevdepodonosť má taký prípad, keď sa absorbuje práve polovica prechádzajúcich fotónov (preto polovica, lebo sme predpokladali absorpciu rovnú 0.5). Ale pravdepodobnosť toho, že sa zabsorbuje **práve** polovica prechádzajúcich fotónov je relatívne malá a so stúpajúcim počtom uvažovaných fotónov sa zmenšuje. Keby sme nechali prechádzať N fotónov cez takúto diódu mnohokrát za sebou, v každom konkrétnom oddelenom prípade by sme namerali odlišné počty zachytených fotónov (generovaných elektrónov). Avšak s veľmi malou pravdepodobnosťou by sa vyskytli prípady, že sa neabsorboval žiadny fotón (rovnako zriedkavé by bolo, že sa absorbovali všetky). Je preto rozumná otázka, aká veľká odchýlka od stredného počtu (t. j. od najpravdepodobnejšieho počtu) sa dá očakávať.

14.1 Šum detektora a opitý námorník

Aby sme si pripravili vhodný pojmový aparát, preberieme si najprv zábavnejší príklad, ktorý je známy ako problém opitého námorníka. Jeho formulácia (pozri napr. R. Feynman, Prednášky z fyziky II) môže byť nasledovná:

Námorník opúšťa hostinec, dokáže sa ešte udržať na nohách, ale jeho krok je už natoľko neistý, že sa nikdy vopred nevie, či urobí krok dopredu alebo dozadu. Naopak, vie sa (možno na základe meraní pri predchádzajúcich pokusoch opustiť krčmu), že pravdepodobnosť výskytu krokov dopredu je rovnaká ako pravdepodobnosť krokov dozadu. (Kroky iných smerov pre jednoduchosť nepredpokladáme). Matematickou rečou by sme mohli povedať, že uvažujeme jednorozmerný prípad. (Fyzikálne to znamená veľmi úzky chodník.) Preto je pravdepodobnosť krokov dopredu i dozadu rovná 1/2.) Keďže pravdepodobnosti krokov dopredu i dozadu sú rovnaké, ich celkový počet sa bude líšiť iba málo (pokiaľ bude pravdepodobnosť krokov dopredu a dozadu rovnaká stále bude blízko krčmy). Je ale málo pravdepodobné, že ich počet bude presne rovnaký. Predchádzajúce vety možno považovať za vymedzenie problému; otázka, na ktorú máme odpovedať je: akú vzdialenosť námorníka od hostinca možno očakávať po vykonaní N krokov.

K riešeniu je vhodné zaviesť pojem stredná kvadratická odchýlka skutočnej vzdialenosti od strednej vzdialenosti po vykonaní N krokov. Začnime od začiatku: po prvom kroku je stredná kvadratická odchýlka rovná jednotke (jeden krok). Je tomu tak preto, lebo po prvom kroku je jeho vzdialenosť rovná 1, alebo -1 (krok dozadu). Stredná hodnota je teda rovná nule. Strednú kvadratickú odchýlku po prvom kroku určíme nasledovne: 1^2 ako i $(-1)^2$ sú rovné jednej, a tak priemerná hodnota je rovná 1. Po ďalšom kroku môže byť námorníkova vzdialenosť rovná 2 kroky (1+1), 0 krokov $(1+(-1)$, alebo $(-1)+1)$ a nakoniec -2 kroky ((-1) + (-1)). Stredná hodnota je opäť rovná nule a vidí-me, že i nulovou ostane. Stredná hodnota štvorcov týchto vzdialeností je rovná 2 (t. j.: $(2^2 + 0 + 0 + (-2)^2) / 4$). Miesto toho, aby sme takto postupovali až k veľkým číslam, radšej si predstavme, že odchýlka po vykonaní (N-1) krokov je D_{N-1} . Stredná hodnota kvadrátu odchýlok po N krokoch je priemer z hodnôt $(D_{N-1} + 1)^2$ a $(D_{N-1} - 1)^2$. To je ale rovné $D_{N-1}{}^2 + 1$. Z toho vidíme, že stredná kvadratická odchýlka sa každým krokom zvyšuje o jednotku. Keďže pri počte krokov $N = 1$ je $\overline{D_N^2}$ rovné 1 a každým ďalším krokom sa zväčšuje o jednotku, môžeme povedať, že

$$\overline{D_N^2} = N\,. \tag{14.1}$$

To znamená, že priemerná hodnota kvadrátu odchýlok $\overline{\mathrm{D}_\mathrm{N}^2}$ od najpravdepodobnejšej hodnoty je rovná počtu vykonaných krokov. Za uvedených okolnosti, po vykonaní sto krokov, možno očakávať námorníka vo vzdialenosti neprekračujúcej $\sqrt{N}$, t. j. vo vzdialenosti neprekračujúcej 10 krokov. Nevieme povedať, či bude vo vzdialenosti 3 kroky, 8 krokov, alebo -10 krokov. Vieme len, že jeho poloha bude od počiatku (od strednej polohy, t .j. od hostinca) so značnou pravdepodobnosťou v rozpätí -10 až +10 krokov (hodnotu pravdepodobnosti toho že sa tak stane určíme v nasledujúcom paragrafe). Po desaťtisících krokoch (stále predpokladáme rovnakú pravdepodobnosť kroku dopredu alebo dozadu), bude jeho poloha s veľkou pravdepodobnosťou v rozpätí (+/-) 100 krokov od strednej hodnoty $\overline{D} = 0$.

Na prvý pohľad je vidieť, že medzi problémom opitého námorníka a šumom fotodiódy sú veľké rozdiely :

- že jednotlivé kroky námorníka sa odohrávajú v časovej následnosti, kým generácia elektrónov rôznymi fotónmi sa môže udiať i súčasne, a že
- vzdialenosť námorníka sa mení v každom kroku o (+/-)1 krok, zatiaľ čo počet vygenerovaných elektrónov sa pridaním ďalšieho fotónu mení o 0, resp. 1.

Rozdiel uvedený ako prvý nemá vplyv na numerickú hodnotu výsledku. Pre matematické vyjadrenie je dôležité, či jednotlivé deje sú alebo nie sú nezávislé a aká je ich pravdepodobnosť. Tieto stránky majú oba javy rovnaké. Druhý rozdiel je z hľadiska numerickej hodnoty výsledku vážnejší. Je ale možné „problém námorníka" modifikovať tak, aby zostala podobnosť s popísaným problémom a zároveň s problémom generácie elektrónov vo fotodióde. Za tým účelom si predstavme „menej opitého" námorníka, ktorý pri každom pokuse urobiť krok urobí polkrok dopredu, ale v zápätí urobí polkrok, ktorý bude s rovnakou pravdepodobnosťou dopredu alebo dozadu. Po každom kroku sa teda jeho vzdialenosť zmení o hodnotu 0, alebo 1 (vyjadrené v dĺžkach kroku), rovnako ako sa mení počet elektrónov pri absorpcii fotónov. Je zrejmé, že stredná vzdialenosť námorníka bude každým krokom vzrastať o 1/2 kroku a na túto vzdialenosť sa bude superponovať vzdialenosť vytvorená náhodilými polkrokmi, ktorá, ako sme videli, je úmerná odmocnine z počtu elementárnych dejov. Keďže náhodilá zmena vzdialenosti pri každom kroku bola rovná 1/2 kroku, stredná hodnota kvadrátov odchýlok vzdialenosti od strednej vzdialenosti sa bude rovnať

$$\overline{\Delta l^2} = D_n^2 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 , \tag{14.2}$$

kde k je dĺžka kroku. Ako sme už uviedli, stredná vzdialenosť bude rovná :

$$\bar{l} = \frac{k}{2} \cdot N ,$$

takže po n krokoch podľa (14.1) a (14.2) pre $\overline{\Delta l^2}$ môžeme napísať

$$\overline{\Delta l^2} = k \cdot \bar{l}/2 .$$

Keďže sme dosiahli formálnu zhodu v popise problému určenia vzdialenosti námorníka po N krokoch a počtu vygenerovaných elektrónov prechodu N fotónov fotodiódou, môžeme získaný výsledok pre vzdialenosť námorníka použiť i pre počet generovaných elektrónov (počet absorbovaných fotónov). Takže:

$$\Delta q^2 = D_n^2 \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 \quad \text{a} \quad \bar{q} = e \cdot \frac{N}{2} . \tag{14.3}$$

Keď D_n^2 podľa vzťahu (14.1) nahradíme *N*, dostaneme:

$$\Delta q^2 = e \cdot \frac{\bar{q}}{2} \quad . \tag{14.4}$$

Treba si ale uvedomiť, že N znamená počet krokov v jednom pokuse s námorníkom. Pokusom teda nie je jeho krok, ale súvislá sada N krokov. Aby sme mohli preveriť obdržaný výsledok, museli by sme pokus veľakrát (za rovnakých podmienok, teda i pre rovnaké N) opakovať. V prípade fotodiódy jeden experiment znamená určiť, koľko elektrónov sa generovalo v dióde v časovom intervale Δt, v ktorom prešlo diódou N fotónov. Predpoklad, že v účinnej časti diódy sa zabsorbuje práve polovica prešlých fotónov znamená, že priemerná hodnota vygenerovaného počtu elektrónov je rovná polovici N - rovnako ako priemerná vzdialenosť námorníka. Keď dĺžku intervalu Δt, v ktorom sledujeme počet vygenerovaných elektrónov zvolíme dostatočne väčšiu ako je doba prechodu nosičov cez aktívnu oblasť fotodiódy, môžeme povedať, že všetky vytvorené nosiče prejdú v dobe Δt cez elektródu diódy. Po vydelení strednej hodnoty kvadrátu odchýlky náboja vygenerovaného v intervale Δt (vygenerovaných pri dopade N fotónov) opísanej vzťahom (14.3) štvorcom intervalu Δt a vyjadrením D_n^2 podľa (14.1) môžeme napísať:

$$\frac{\overline{\Delta q^2}}{\Delta t^2} = \frac{e}{2 \cdot \Delta t} \cdot \frac{e \cdot N}{2 \cdot \Delta t} \quad . \tag{14.5}$$

Keďže

$$\frac{\overline{\Delta q^2}}{\Delta t^2} = i^2 \quad \text{a} \quad \frac{e \cdot N}{2 \cdot \Delta t} = I \ ,$$

kde i_n^2 je fluktuácia prúdu a $\bar{I}$ je stredný prúd detektorom, môžeme tiež napísať:

$$i_n^2 = \frac{e \cdot \bar{I}}{2 \cdot \Delta t} \quad . \tag{14.6}$$

14.2 Šum diódy a šum svetla

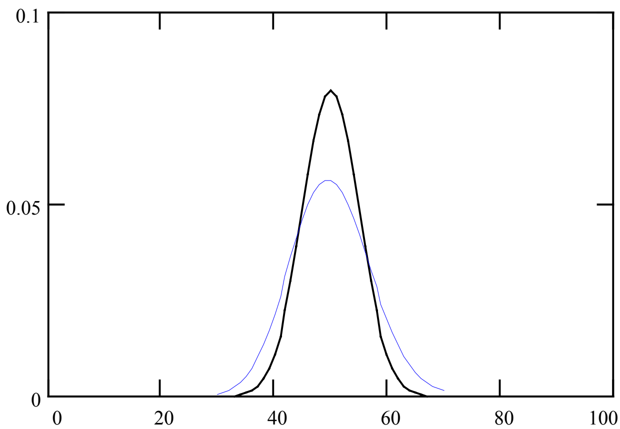
Vráťme sa k otázke šumu diódy a pokúsme sa problém vyšetriť podrobnejšie. Predstavme si, že na fotodiódu dopadá sled svetelných impulzov pozostávajúcich z fotónov, ktorých vlnová dĺžka je taká, aby sa pri ich absorpcii v aktívnej vrstve fotodiódy vytvoril pár elektrón-diera. Hodnotu výrazu $\exp(-\alpha \cdot l)$ vyjadrujúceho optickú priepustnosť aktívnej vrstvy diódy (α je koeficient absorpcie v tejto vrstve a l je jej hrúbka) označme výrazom $(1-\vartheta)$ a predpokladajme, že počet fotónov v každom impulze je rovný *N*. Potom počet fotónov absorbovaných v aktívnej vrstve je $N \cdot \vartheta$ a počet prešlých fotónov je rovný $N \cdot (1-\vartheta)$. Ale i keby počet fotónov bol v každom svetelnom impulze skutočne presne rovný *N*, počet absorbovaných fotónov nebude v každom impulze úplne rovnaký. Môže sa nám to zdať na prvý pohľad odvážne tvrdenie, ale keď si predstavíme svetelný impulz ako sled nezávislých fotónov, z ktorých každý sa s pravdepodobnosťou ϑ v aktívnej vrstve zabsorbuje, stane sa zrejmým, menovite pri impulzoch tvorených malým počtom fotónov, že odozva fotodetektora je v istej miere otázkou štatistiky a predchádzajúce výrazy vyjadrujúce počet absorbovaných a prešlých fotónov musíme chápať ako výrazy vyjadrujúce stredné hodnoty týchto veličín.

Z uvedených dôvodov nemá zmysel otázka „aký **bude** počet absorbovaných fotónov" (počet elektrónov generovaných v aktívnej vrstve), ale „**aká bude pravdepodobnosť** toho, že sa zabsorbuje n fotónov". Z formulácie tohto problému uvedenej v predchádzajúcom odseku je zrejmé, že výpočet je rovnaký ako výpočet pravdepodobnosti „vytiahnutia" n bielych guličiek pri N ťahaní z vreca obsahujúceho biele a čierne guličky v pomere rovnom ϑ / 1- ϑ. Pravdepodobnosť výsledku takýchto pokusov je popísaná takzvaným „**binomickým rozložením**" (distribúciou), ktoré je popísané formulou:

$$p_b(n,N) = \frac{N!}{(N-n)!\, n!} \cdot \vartheta^n \cdot (1-\vartheta)^{N-n} \ , \tag{14.7}$$

kde ϑ je pravdepodobnosť, že nastane očakávaný jav (absorpcia fotónu, vytiahnutie bielej guličky) a N je počet opakovaní vyšetrovaného náhodného procesu (počet opakovaní vyberania guličky, počet dopadajúcich fotónov a pod.).

Graf funkcie $p_b(n,N)$ pre hodnotu $\vartheta = \frac{1}{2}$ a $N = 100$ je uvedený na obr. 14.1. Vidíme, že v zhode s očakávaním, s najväčšou pravdepodobnosťou sa zabsorbuje polovica fotónov (bude vytiahnutých polovica bielych guličiek). Ale pravdepodobnosť, že sa zabsorbuje **práve** polovica je pomerne malá. Pravdepodobnosť že sa zabsorbuje o jeden fotón viac alebo menej, je prakticky taká istá. Pravdepodobnosť výraznejšie klesne až pri n odlišných od $N/2$ o hodnotu zrovnateľnú s $\sqrt{N}$. Zodpovedá to výsledkom predchádzajúceho paragrafu.



Obr.14.1. Porovnanie poissonovského rozdelenia ___ a binomického rozdelenia ____ (s ϑ =1/2 a N = 100) pre rovnaké N_{str} .

Formulu (14.7), popisujúcu binomické rozloženie môžeme odvodiť nasledovne: pravdepodobnosť že vytiahneme n-krát za sebou bielu guličku je ϑ^n. Pravdepodobnosť, že potom vytiahneme N-n krát čiernu guličku je $(1-\vartheta)^{N-n}$. Pretože pravdepodobnosť realizácie nezávislých javov je rovná súčinu ich pravdepodobnosti, pravdepodobnosť, že vytiahneme n-krát bielu a (N-n)-krát čiernu je $\vartheta^n \cdot (1-\vartheta)^{N-n}$. Uvedená pravdepodobnosť je pravdepodobnosť toho, že **najprv** vytiahneme n bielych a potom N-n čiernych. Pri sledovaní veľkosti odozvy fotodetektora nám ale nezáleží na tom, či sa absorbovali fotóny, ktoré boli v detekovanom impulze prvé, alebo posledné. Všebecne povedané nezáleží na poradí, v ktorom sa sledovaný jav uskutočňuje. Záleží iba na násobnosti realizácie pozitívneho výsledku. Z toho dôvodu za pozitívne výsledky považujeme všetky „vytiahnutia N guličiek“, pri ktorých je počet bielych a čiernych n a (N-n). Počet takýchto „pozitívnych ťahaní“ medzi všetkými možnými spôsobmi vytiahnutia N guličiek je daný počtom permutácií n bielych a N-n čiernych. Ten je rovný

$$\frac{N!}{(N-n)! \cdot n!} .$$

Pravdepodobnosť vytiahnutia n bielych a N-n čiernych v ľubovoľnom poradí je teda o tento faktor väčšia ako pravdepodobnosť vytiahnutia n bielych a N-n čiernych v poradí najprv biele a potom čierne. A to práve odpovedá pravej strane vzťahu (14.1).

Ako uvidíme v nasledujúcich odsekoch nie všetky náhodné procesy sú správne popísané uvedenou binomickou distribúciou. Zdôraznime preto, že pri odvodení binomického zákona (14.7) sa vychádza z toho, že jednotlivé elementárne procesy z ktorých jav pozostáva sa N-krát opakujú s rovnakou pravdepodobnosťou a že tieto elementárne procesy sú nezávislé. Binomické rozloženie možno preto použiť iba na také procesy, ktoré sa vyznačujú uvedenými vlastnosťami. Použiť binomické rozloženie na odozvu fotodetektora by sme mohli iba vtedy, keď by bolo zaručené, že veľkosť detekovaného signálu je stabilná (všetky impulzy rovnaké) a navyše, všetky nosiče náboja v dióde sú spôsobené osvetlením (prúd za tmy je rovný nule).

Štatistika takých procesov ako je generácia svetla (generácia fotónov), alebo generácia elektrónov vo vákuovej dióde, ale i generácia elektrónov v polovodičovej dióde v dôsledku tepelnej excitácie, je iná. Uvedené procesy majú spoločné to, že ide o javy pozostávajúce z elementárnych nezávislých procesov, ktorých pravdepodobnosť je vo všetkých (rovnakých) časových intervaloch rovnaká. Z tohto predpokladu vyplýva, že pravdepodobnosť výskytu uvažovaného elementárneho javu v nejakom časovom intervale je priamo úmerná dĺžke tohto časového intervalu. Keď pravdepodobnosť toho, že sa uvažovaný jav, napríklad emisia fotónu v istom objeme svietiaceho plynu, realizuje v časovom intervale dĺžky τ práve jedenkrát označíme výrazom $P(1,\tau)$, potom predchádzajúce tvrdenie môžeme napísať:

$$P(1,\tau) = a \cdot \tau , \tag{14.8}$$

kde a je konštanta nezávislá od času a hodnota 1 v argumente pravdepodobnosti znamená, že vyjadrujeme pravdepodobnosť emisie jedného fotónu (jedného elementárneho deja). Hodnota a súvisí so strednou hodnotou elementárnych javov, ktoré sa uskutočnia v jednotke času a uvidíme, že jej je priamo rovná. Distribúcia pravdepodobnosti sa pri takých procesoch pri ktorých je splnený vzťah (14.8) nazýva „**poissonovská distribúcia**“ a je popísaná formulou:

$$p_p(n,N) = \frac{N^n \cdot \exp(-N)}{n!} \quad , \tag{14.9}$$

kde $p_p(n,N)$ je pravdepodobnosť, že jav sa zopakuje n-krát pri strednej hodnote rovnej N. Druhá premenná v argumente pravdepodobnosti má pri poissonovskom rozložení iný fyzikálny zmysel ako pri rozložení binomickom. Tam znamenala počet opakovaní, alebo inými slovami, najväčší možný počet elementárnych procesov v jednom „pokuse“, zatiaľ čo pri poissonovskej distribúcii znamená strednú hodnotu počtu elementárnych javov.

Pri odvodení vzťahu (14.9) vyjadrujúceho poissonovské rozloženie môžeme postupovať nasledovne: Keď interval τ zvolíme dostatočne malý, môžeme predpokladať, že pravdepodobnosť emisie dvoch, alebo viacerých fotónov v tomto intervale je rovná nule. V tomto intervale teda (s istotou) dôjde k emisii jedného, alebo žiadneho fotónu. Vyjadruje to vzťah:

$$P(0,\tau) + P(1,\tau) = 1 \; . \tag{14.10}$$

Emisia viacerých fotónov, napríklad K-fotónov, v časovom intervale $t + \tau$ sa môže uskutočniť viacerými spôsobmi. Napríklad tak, že v čase t sa emituje K fotónov a v čase τ žiaden. Ale i tak, že v intervale t sa emituje K-1 fotónov a v intervale τ jeden fotón. Pokiaľ je interval τ taký malý, že pravdepodobnosť emisie dvoch fotónov v tomto intervale je nulová, sú uvedené dve možnosti jedinými. Ak pravdepodobnosť emisie K fotónov v intervale t+τ označme výrazom $p(K,t+\tau)$, môžeme to zapísať:

$$P(K,t+\tau) = P(K-1,t)\cdot P(1,\tau) + P(K,t)\cdot P(1,\tau) \tag{14.11}$$

Keď v tomto vzťahu $P(1,\tau)$ vyjadríme pomocou vzťahu (14.7) a $P(0,\tau)$ vyjadríme pomocou vzťahu (14.9) a (14.7) ako 1-a.τ , po jednoduchej úprave dostaneme:

$$\frac{P(K,t+\tau) - P(K-t)}{\tau} + a\cdot P(K,t) = a\cdot P(K-1,t) \quad .$$

Po limitnom prechode $\tau \to 0$ predchádzajúci vzťah môžeme prepísať na:

$$\frac{dP(K,t)}{dt} + a\cdot P(K,t) = a\cdot P(K-1,t) \quad , \tag{14.12}$$

čo je rovnica pre funkciu P vyjadrujúcu ako závisí pravdepodobnosť vyžiarenia K fotónov od dĺžky intervalu v rámci ktorého sa vyžarovanie sleduje. Pretože parameter K vystupujúci vo funkčných hodnotách $P(K,t)$ v rovnici (14.12) nadobúda iba dve hodnoty (K a K-1), môžeme túto rovnicu považovať za diferenciálno-diferenčnú rovnicu. Pretože tento parameter nadobúda iba celočíselné hodnoty, môžeme sa dívať na rovnicu (14.12) i ako na rekurentnú rovnicu. Našťastie sa nemusíme trápiť hľadaním jej riešenia. Z literatúry je známe, že riešenie tejto rovnice je

$$P(K,t) = \frac{(a \cdot t)^K \cdot \exp(-a \cdot t)}{K!} \cdot A \quad . \qquad (14.13)$$

Môžeme sa o tom presvedčiť tak, že vyjadrenie derivácie $P(K,t)$ podľa času, ktorá je podľa (2.13) rovná:

$$\frac{dP(K,t)}{dt} = A \cdot \left(a^K t^{K-1} \cdot \frac{\exp(-at)}{(K-1)!} - a^{K+1} t^K \cdot \frac{\exp(-at)}{K!} \right),$$

dosadíme do rovnice (14.12). Po jednoduchých úpravách uvidíme, že (14.13) je naozaj jej riešením. Dodajme ešte, že hodnota konštanty A v riešení (14.13) musí byť rovná jednotke. Môžeme to tvrdiť na základe toho, že pre K=0 (nevyžaruje sa žiadny fotón) musí byť limita (14.13) pre $\tau \to 0$ rovná jednej (že sa v nulovom čase vyžiari nulový počet fotónov je istotou).

Fyzikálny zmysel parametra a vystupujúceho vo vyjadrení pravdepodobnosti môžeme určiť tak, že vyjadríme strednú hodnotu počtu fotónov emitovaných v ľubovoľnom intervale dĺžky τ. Stredná hodnota veličiny, ktorá nadobúda rozmanité hodnoty u_i so známou pravdepodobnosťou sa vo všeobecnosti dá určiť pomocou vzťahu:

$$u_{str} = \sum_i p(u_i) \cdot u_i \ .$$

Vyplýva to bezprostredne z definície strednej hodnoty ako

$$u_{str} = 1/M \ \sum_k^M u_k$$

a z toho, že pri mnohonásobnom určovaní hodnôt u_i je násobnosť s ktorou sa hodnota u_i vyskytne rovná $p(u_i).M$, kde M vyjadruje, koľkokrát sa určovanie veličiny u uskutočnilo. Na základe toho pre strednú hodnotu počtu fotónov emitovaných v intervale τ môžeme napísať:

$$N_{str}(\tau) = \sum_K^\infty K \cdot P(K,\tau) \ ,$$

z čoho po dosadení $P(K,t)$ podľa vzťahu (14.9) po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$N_{str} = a\tau \cdot \left(1 + \frac{a\tau}{1} + \frac{a\tau}{2!}^2 + ... \frac{a\tau}{i!}^i + ... \right) \cdot \exp\left(-a\tau\right).$$

Pretože zátvorka na pravej strane predchádzajúceho vzťahu je rozvojom funkcie $\exp(a\tau)$ do Taylorovho radu, dostávame, že $N_{str} = a\tau$, takže

$$a = \frac{N_{str}}{\tau} \quad . \qquad (14.13,b)$$

To znamená, že a má fyzikálny zmysel strednej hodnoty hustoty emisie (strednej hodnoty počtu fotónov emitovaných za jednotku času). Po dosadení podľa (14.13,b) do (14.13) dostávame skutočne vzťah (14.9).

Všimnime si teraz, či a ako sa líšia závislosti pravdepodobnosti výskytu jednotlivých hodnôt pri uvedených distribúciách. Tieto rozdiely názorne vidieť z grafov uvedených na obr. 14.1, ktoré predstavujú pravdepodobnosti pri binomickom a poissonovskom rozložení. Vidíme z nich, že obe závislosti majú rovnaký „zvonovitý" charakter, ale líšia sa výškou a šírkou závislosti. Hodnota pravdepodobnosti najpravdepodobnejšieho prípadu je u poissonovského rozloženia väčšia ako u binomického (obr.14.1). Zároveň vidíme, že „šírka maxima" je u poissonovského rozloženia menšia. V skutočnosti uvedené dva charakteristické rozdiely informujú o tej istej skutočnosti. Sú medzi sebou viazané tým, že pravdepodobnosť výskytu ľubovoľnej hodnoty je rovná jednej. To znamená, že integrál oboch závislostí podľa n je rovnaký. V dôsledku toho pri „užšej závislosti" musí byť maximum väčšie.

Ďalším rozdielom medzi uvedenými distribúciami je to, že pri binomickom rozdelení je nezmyselná otázka, aká je pravdepodnosť výskytu javu s $n > N = 2.N_{str}$ (pri $\vartheta = \frac{1}{2}$), zatiaľ čo pri poissonovskom rozložení táto otázka má zmysel pri ľubovoľnom n . Je pravdou, že hodnoty pravdepodobnosti pre takéto n sú spravidla veľmi malé, ale sú nenulové.

Všimnime si uvedené závislosti i kvantitatívne; vypočítame pravdepodobnosti najpravdepodobnejšieho výsledku, a v ďalšom určíme šírku pri binomickom a poissonovskom rozložení.

Binomické rozloženie s $\vartheta = \frac{1}{2}$ má najväčšiu hodnotu pravdepodobnosti pre n rovné $\frac{N}{2}$. Keď pravdepodobnosť pre takéto n vyjadríme pomocou vzťahu (14.7) a faktoriály v tomto výraze vyjadríme pomocou Stirlingovho vzťahu

$$u! = u^u \cdot \exp(-u) \cdot \sqrt{2\pi \cdot u} \ ,$$

dostaneme po jednoduchých úpravách :

$$p_b(N_{str}, N) = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot N_{str}}} \ . \qquad (14.14)$$

Pre pravdepodobnosť výskytu najpravdepodobnejšej hodnoty pri poissonovskej distribúcii zo vzťahu (14.13) po jednoduchých úpravách (opäť s použitím Stirlingovej formule) dostaneme :

$$p_p(N_{str}, N) = \sqrt{\frac{1}{2\pi \cdot N_{str}}} \ . \qquad (14.15)$$

Ako je z uvedených výrazov vidieť, pomer pravdepodobností najpravdepodobnejších javov u binomického a poissonovského rozdelenia je rovný $\sqrt{2}$.

Pokúsme sa teraz nájsť približné výrazy, ktoré aproximujú diskutované distribúcie v okolí ich maxím. Ako nezávislú premennú pri tomto popise vezmime odľahlosť od najpravdepodobnejšej hodnoty, teda pri binomickom rozložení miesto n použime $N_{str} + m$.

Keďže pri binomickom rozdelení s $\vartheta = \frac{1}{2}$ je $N_{str} = \frac{1}{2}N$, pre vyjadrenie $p_p(N_{str}, N)$ podľa (14.7) a vyjadrení faktoriálov pomocou Stirlingovej formule dostaneme:

$$p_b(N_{str} + m, N) = \frac{N^N \cdot \exp(-N) \cdot \sqrt{2\pi \cdot N} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N}{(N-m)^{N-m} \cdot (N+m)^{N+m} \cdot \exp(-\frac{N}{2})^2 \cdot \pi \cdot N} \quad . \tag{14.16}$$

Aby sme mohli tento výraz upraviť, zaveďme funkciu $f(x) = \ln\left(x^x\right)$. Funkciu $f(x)$ vyjadríme v okolí bodu x pomocou prvých troch členov Taylorovho radu :

$$f(x+m) = f(x) + f'(x) \cdot m + f''(x) \cdot m^2 + \ldots ,$$

kde $f'(x) = \ln(x) + 1$ a $f''(x) = 1/x$. Pre hodnotu $f(x+m) + f(x-m)$ tak dostaneme:

$$f(x+m) + f(x-m) = 2f(x) + \frac{m^2}{x} \quad . \tag{14.17}$$

Keďže x^x je rovné $\exp\left(f(x)\right)$, dostávame:

$$\left(x+m\right)^{x+m} + \left(x-m\right)^{x-m} = x^{2x} \cdot \exp\left(\frac{m^2}{x}\right).$$

Keď tento vzťah použijeme na úpravu výrazu $\left(\frac{N}{2}+m\right)^{\frac{N}{2}+m} \cdot \left(\frac{N}{2}-m\right)^{\frac{N}{2}-m}$ v menovateli pravej strany vzťahu (14.16) , dostaneme

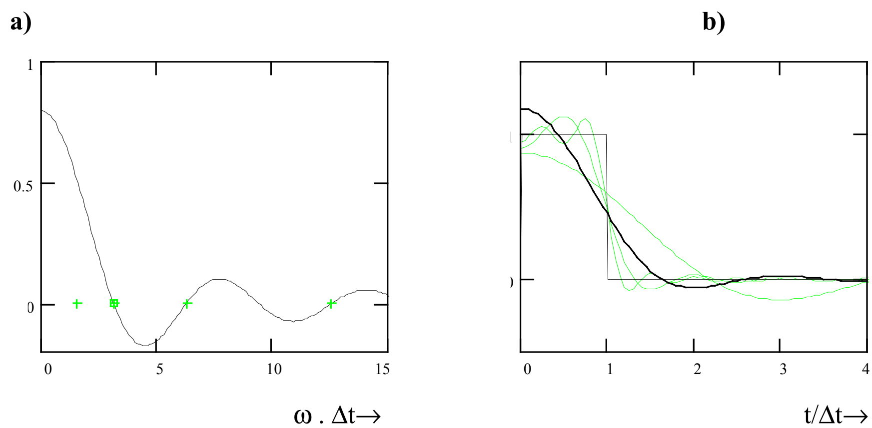
$$p_b(N_{str} + m, N) = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot N_{str}}} \cdot \exp\left(\frac{-m^2}{N_{str}}\right). \tag{14.18}$$

Analogickým spôsobom zo vzťahu (14.9) po vyjadrení $n!$ pomocou Stirlingovho vzťahu pre závislosť pravdepodobnosti v okolí maxima poissonovského rozloženia dostaneme

$$p_b(N_{str} + m, N) = \sqrt{\frac{1}{2\pi \cdot N_{str}}} \cdot \exp\left(\frac{-m^2}{2N_{str}}\right). \tag{14.19}$$

Ako je vidieť zo vzťahov (14.18) a (14.19), šírky závislostí vyjadrujúcich pravdepodobnosti pri binomickom a poissonovskom rozložení sú v pomere $\sqrt{2}$, ako sme to mohli očakávať na základe pomeru maximálnych hodnôt pravdepodobnosti pri uvedených distribúciách.

Na základe uvedených predstáv o príčinách fluktuácií môžeme povedať, že fluktuácia prúdu fotodiódou (šum fotodiódy) je spôsobená viacerými príčinami. Celkový šum je spôsobený jednak fluktuáciami samotného svetelného toku, distribúcia ktorého, ako sme videli, je popísaná poissonovskou formulou. K takýmto fluktuáciám sa pridávajú fluktuácie spôsobené nepravidelnosťami v pomere počtu fotónov, ktoré boli absorbované v aktívnej vrstve fotodiódy a ktoré touto vrstvou prešli. Okrem toho k šumu fotodiódy prispieva ešte existencia prúdu za tmy, o ktorom sme doteraz mlčky predpokladali, že je nulový. V mnohých praktických prípadoch ide o detekciu slabých až veľmi slabých svetelných signálov. V takom prípade však prúd vyvolaný osvetlením môže byť slabší ako prúd za tmy, i keď v moderných fotodiódach je prúd za tmy často menší ako zlomky nanoampérov. Prúd, ktorý fotodiódou preteká bez jej osvetlenia, je dominantne spôsobený tepelnou excitáciou nosičov v jej aktívnej vrstve. Keďže pri takejto excitácii je pravdepodobnosť v každom časovom intervale rovnaká, distribúcia výskytu nosičov je určená poissonovským distribučným zákonom. Videli sme, že stredná kvadratická odchýlka pri poissonovskom rozložení je $\sqrt{2}$ krát väčšia ako pri binomickom rozložení. V dôsledku toho je štvorec šumového prúdu pri fluktuáciách spôsobených poissonovskou distribúciou 2 krát väčší než udáva vzťah (14.6), ktorý bol odvodený pre fluktuácie vyvolané javmi s binomickou distribúciou.



Obr. 14.2. Vplyv šírky spektra na zobrazenie impulzu. Na obr.14.2,a) sú krížikmi vyznačené šírky spektra použité pre jednotlivé rekonštrukcie impulzu, uvedené na obr.14.2,b). Silnou čiarou je zakreslený priebeh impulzu a jeho obraz pri šírke spektra $\Delta f = 1 / 2\Delta t$

Vo vzťahu (14.6) je fluktuácia strednej hodnoty prúdu vyjadrená ako funkcia dĺžky intervalu, v ktorom sa prúd stredujе. Často sa fluktuácie prúdu (šumový prúd) vyjadrujú ako funkcia frekvenčného intervalu použitého na zobrazovanie závislosti prúdu od času. Pretože existuje súvis medzi šírkou frekvenčného intervalu potrebného na zobrazenie charakteristických zmien a dobou, v ktorej sa tieto zmeny odohrávajú, môžeme pomocou vzťahu (14.6) vyjadriť i súvis šumového prúdu a šírky intervalu prenášaných frekvencií. Keď pri zobrazovaní (impulzných) priebehov požadujeme, aby sa zaznamenala existencia impulzu dĺžky Δt (nepožadujeme zachytenie jeho tvaru), vystačíme so šírkou intervalu frekvencií $\Delta f = 1/2\Delta t$. Kvalita zobrazenia impulzného priebehu pri použití prenosu s rozličnými šírkami prenášaného spektra je uvedená na obr. 14.2.

Šumový prúd prislúchajúci prúdu fotodiódy za tmy (pravdepodobná odchýlka prúdu od strednej hodnoty) pri šírke spektra Δf je teda podľa vzťahu (14.6) rovný :

$$i_{s,p} = \sqrt{2 \cdot e \cdot i_{str} \cdot \Delta f} \ ,$$

kde Δf je interval frekvencií, v rámci ktorých sa zmena prúdu uplatňuje v registrovanej hodnote a i_{str} je stredná hodnota prúdu za tmy.

V prípade, že dominantná zložka prúdu pretekajúceho detekčnou fotodiódou je tvorená prúdom vyvolaným osvetlením, pri výpočte fluktuácií prúdu nestačí počítať s fluktuáciami, ktorých distribúcia je popísaná poissonovým rozložením (tmavý prúd a fluktuácia samotného svetelného toku). V takom prípade treba kalkulovať i s fluktuáciami detekcie, ktoré, ako sme videli, sú popísané binomickým distribučným zákonom.

Literatúra

[1] FEYNMAN, R.P., LEIGHTON, R.B., SANDS, M.: Feynmanove prednášky z fyziky 1., Alfa, Bratislava 1980.

[2] DAWENPORT, W.B.Jr., ROOT, W.L.: An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, ruský preklad, Izdatelstvo inostrannoj literatury, Moskva, 1960

15. Iné spôsoby detekcie svetla

Okrem detekcie svetla pomocou fotoelektrického javu, o ktorej sme hovorili v predchádzajúcich kapitolách, existuje celý rad iných užitočných postupov. Môžeme ich rozdeliť do dvoch výrazných skupín:

- detekcia využívajúca tepelné účinky svetla a
- detekcia pomocou fotografických (fotochemických) procesov .

V nasledujúcich paragrafoch uvedieme stručný popis základných princípov uvedených spôsobov detekcie svetla.

15.1 Tepelné detektory

Pri detekcii svetla pomocou tepelných detektorov sa využíva fakt, že svetelná vlna prenáša energiu, takže pri absorpcii svetla sa objekt v dôsledku absorpcie svetla zahrieva. Energia, ktorá sa svetlom prenáša pri bežných intenzitách, je pomerne malá. Svetelné zväzky, ktoré sú spojené s tokom energie jeden miliwat, sa považujú už za pomerne silné zväzky. Z toho vyplýva, že pri absorpcii svetla, dokonca i pri absorpcii svetla na malých objektoch nedôjde k veľkému zvýšeniu teploty absorbujúceho predmetu. Ak by sme napriek tomu chceli ohrev vyvolaný dopadom svetla použiť na jeho detekciu, museli by sme mať dispozícii veľmi citlivé detektory zmien teploty.

I keď sa na základe uvedeného môže na prvý pohľad zdať, že naznačený postup je pre detekciu svetla nevhodný, vďaka existencii veľmi citlivých detektorov teploty, je takýto postup možný a v mnohých prípadoch užitočný. Prednosťou naznačeného postupu detekcie v porovnaní s detekciou pomocou polovodičových detektorov využívajúcich fotoelektrický jav je, že je použiteľný v ľubovoľnom rozsahu vlnových dĺžok elektromagnetických vĺn. Samozrejme, že každá konkrétna realizácia má obmedzenia. Toto obmedzenie je spôsobené spravidla tým, že spektrálna oblasť, v ktorej je koeficient absorpcie použitého „detektora" dostatočne veľký, nemusí prekrývať celé pásmo spektra, v ktorom chceme detektor použiť. Treba si uvedomiť, že koeficient absorpcie môže neočakávane silne závisieť od vlnových dĺžok, takže detektor, ktorý je dostatočne citlivý v jednej oblasti spektra, môže byť nepoužiteľný v inej oblasti. Podobne, ako napríklad sneh, ktorý je často synonymom belosti, je v blízkej infračervenej oblasti čierny (to znamená, že neodráža svetlo). Skutočnosť, že od detektora požadujeme nielen vysokú citlivosť na zmenu teploty, ale zároveň i vysoký koeficient absorpcie vo vybranej oblasti spektra ale neznamená, že je možné ich použitie iba v takej oblasti spektra svetla, v ktorej majú veľký koeficient absorpcie. Pre použitie v inej oblasti stačí, keď sa na ich povrchu vytvorí vhodná povrchová vrstva, ktorá zaručí dostatočnú absorpciu dopadajúceho svetla požadovanej vlnovej dĺžky.

Aby sme videli ako závisí zmena teploty absorbujúceho objektu od absorbovaného výkonu napíšme si základnú „kalorimetrickú“ rovnicu popisujúcu súvis dodaného tepla a teploty objektu:

$$dQ = c \cdot m \cdot dT \ , \tag{15.1}$$

kde dQ je teplo prijaté objektom, c je jeho špecifické (merné) teplo, m jeho hmotnosť a dT prírastok teploty vyvolaný prijatým teplom. Pri písaní rovnice (15.1) sme mlčky predpokladali, že v absorbujúcom objekte sa prijaté teplo dostatočne rýchlo rozvedie po celom objekte, takže jeho teplota je všade rovnaká. Prijaté teplo dQ pozostáva z tepla vytvoreného absorpciou svetla (táto časť je rovná $W.dt$), od ktorého sa odpočíta teplo odovzdané okoliu (je rovné $\Lambda.(T-T_0).dt$). V predchádzajúcich vyjadreniach W označuje absorbovaný výkon, dt dobu, počas ktorej sa výmena energie uskutočňovala, Λ je tepelná vodivosť medzi ohrievaným objektom a okolím a T_0 je teplota okolia. Pri presnom vyjadrení je treba kalkulovať i s teplom, ktoré ohrievaný objekt odovzdá okoliu v dôsledku tepelného vyžarovania. Ako je známe, energia vyžiarená absolútne čiernym telesom je podľa Stefanovho-Boltzmannovho zákonu rovná $\sigma_0.T^4$, kde σ_0 je Stefanova-Boltzmannova konštanta a T teplota telesa v stupňoch Kelvina. Keď budeme predpokladať, že povrch detektora ako i povrch okolia má vlastnosti blízke čiernemu telesu, pre rozdiel energie, ktorú detektor vyžiari do okolia a ktorú od okolia prijme, dostaneme diferencovaním Stefan-Boltzmannovho zákona hodnotu $4.\sigma_0.(T_0)^3.\Delta T.S.dt$, kde ΔT je rozdiel teploty detektora a teploty okolia a S je veľkosť povrchu detektora. Táto „žiarivá“ výmena energie detektora a okolia sa stáva zrovnateľnou alebo väčšou, ako odvod tepla do okolia vedením tepla iba pri detektoroch, ktoré sú veľmi dobre tepelne oddelené od okolia (Λ veľmi malé). Dosadením uvedených položiek príjmu a odvodu tepla do (15.1) dostaneme rovnicu vyjadrujúcu zvýšenie teploty objektu nad teplotu okolia ΔT ako funkciu času t :

$$c \cdot m \cdot d(\Delta \mathrm{T}) = W \cdot dt - \Lambda \cdot \Delta \mathrm{T} \cdot dt - 4\sigma_0 \cdot S \cdot T_0^{\ 3} \cdot \Delta \mathrm{T} \cdot dt \ . \tag{15.2}$$

Keď teplo odvedené vyžarovaním je zanedbateľne malé voči teplu, ktoré sa okoliu odovzdá vedením (konvekciou), po elementárnej úprave (15.2) dostaneme rovnicu, ktorá je formálne zhodná s rovnicou popisujúcou napr. relaxáciu koncentrácie nosičov vo vodivostnom páse, ktorou sme sa zaoberali v kapitole 10 :

$$c \cdot m \cdot \frac{d(\Delta \mathrm{T})}{dt} = W - \Lambda \cdot \Delta \mathrm{T} \ . \tag{15.3}$$

V čase po vypnutí osvetlenia detektora (keď W=0, t. j. keď detektor nie je osvetlený) rovnica (15.3) prejde na homogénnu rovnicu

$$c \cdot m \cdot d(\Delta T) = -\Lambda \cdot \Delta T \cdot dt \ , \tag{15.4}$$

ktorej riešením je :

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \tag{15.5}$$

kde ΔT_0 je teplota v okamžiku vypnutia osvetlenia a τ je časová konštanta detektora rovná $m.c/\Lambda$.

Stacionárne riešenie (t. j. riešenie, pri ktorom je derivácia *T* podľa času rovná nule) rovnice (15.3) je:

$$\Delta T_{st} = W / \Lambda . \tag{15.6}$$

Z výrazov (15.5) a (15.6) vidíme, že citlivosť detektora stúpa so znižovaním tepelného kontaktu s okolím (so znižovaním Λ), ale zároveň sa tým zvyšuje časová konštanta detektora, teda sa „spomaľuje“ jeho odpoveď na zmenu osvetlenia.

Maximálne možné zníženie tepelného kontaktu detektora a okolia je jeho tepelná izolácia (λ=0) . V takom prípade z rovnice (15.2) dostaneme

$$c \cdot m \cdot \frac{d\Delta T}{dt} = W - 4\sigma_0 \cdot S \cdot T_0^{\,3} \cdot \Delta T .$$

Ustálené riešenie v tomto prípade je :

$$\Delta T = \frac{1}{4\sigma_0 \cdot S \cdot T_0^{\,3}} \cdot W \tag{15.7}$$

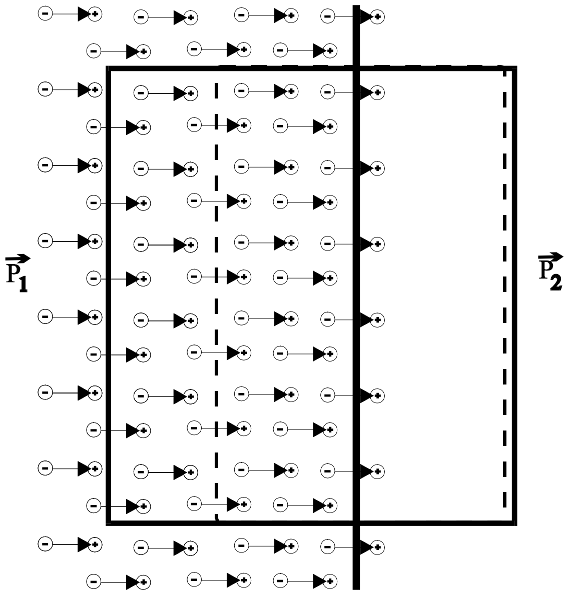
a časová konštanta :

$$\tau = \frac{c \cdot m}{4\sigma_0 \cdot S \cdot T_0^{\,3}} \quad . \tag{15.8}$$

Zo vzťahu (15.7) po dosadení Stefan-Boltzmannovej konštanty dostaneme, že pri dokonalom konvekčnom odizolovaní od okolia, t. j. vtedy, keď výmena tepla medzi okolím a detektorom sa odohráva iba prostredníctvom žiarenia, teliesko s priemerom cca 1 mm pri interakcii s okolím izbovej teploty by sa pri ožiarení výkonom 1 mW zohrialo až o 50 °C. A keby bolo obklopené prostredím s teplotou tekutého dusíka (cca -200 °C), na rovnaké ohriatie by stačil dokonca žiarivý výkon približne 1 μW ! Avšak časová konštanta v uvedených prípadoch by bola rádove 100 sekúnd a pri obklopení tekutým dusíkom dokonca rádove hodinu. Uvedená vysoká hodnota časovej konštanty vysvetľuje, prečo sa pri tepelnej izolácii dá dosiahnuť také vysoké ohriatie detektora i malým žiarivým výkonom. Keby sa podarilo zamedziť výmene energie medzi detektorom a okolím úplne, absorpciou žiarenia by sa detektor ohrieval a jeho teplota by bez obmedzenia stúpala. Pri konštantnom výkone žiarenia (a pri mernom teple nezávislom od teploty) by teplota stúpala rovnomerne s časom.

Nie vždy si môžeme dovoliť pracovať s pomalými detektormi, takže dosahovanie dostatočnej citlivosti detektora nemôžeme vytvárať predlžovaním časovej konštanty, ale použitím dostatočne citlivých snímačov teploty. Takéto dostatočne citlivé snímače teploty nám poskytuje napríklad efekt, ktorý sa nazýva **pyroelektrický** jav.

Aby sme mohli popísať podstatu pyroelektrických detektorov, pripomeňme si elementárne poznatky týkajúce sa polarizácie dielektrika.



Obr. 15.1. K určeniu veľkosti povrchového náboja

Polarizácia dielektrika znamená, že elementy tohto prostredia sa stali elektrickými dipólmi. Ich dipólový moment $\vec{p}$ možno vyjadriť súčinom náboja a vektora posunutia kladného a záporného náboja, ktorý elektrický dipól tvoria. Mierou polarizácie dielektrika je vektor polarizácie $\vec{P}$, ktorý je definovaný ako dipólmoment jednotky objemu, takže

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \ ,$$

pričom sa sumácia vzťahuje na elementárne dipóly obsiahnuté v jednotke objemu prostredia.

V homogénnom prípade (homogénne prostredie i homogénne elektrické pole) vytvorenie elektrických dipólov posunutím elektrických nábojov v dielektriku nenarušuje neutralitu prostredia, pretože do každého miesta sa presunie práve taký veľký elektrický náboj, aký bol z toho miesta odsunutý. Vo všeobecnom (nehomogénnom) prípade s polarizáciou dielektrika vzniká priestorový náboj, ktorého objemová hustota ρ je rovná

$$\rho = \mathrm{div}(\vec{P}) \ . \tag{15.9}$$

Elektrický náboj vytvorený polarizáciou dielektrika je nábojom „viazaným“, nemôže sa v prostredí premiestňovať, ale rovnako ako každý iný náboj vytvára elektrické pole.

Na okraji polarizovaného dielektrika je závislosť vektora polarizácie nespojitá, takže jej derivácia podľa normály k povrchu dielektrika nie je definovaná (voľne povedané je nekonečne veľká). A pritom práve tam sa dejú rozhodujúce pochody: posunutím kladného a záporného náboja sa na povrchu dielektrika vytvára viazaný náboj s konečnou plošnou hustotou (a nekonečnou objemovou hustotou). V záujme vyjadrenia veľkosti tohto náboja integrujme (15.9) vo vnútri rovnobežnostenu obklopujúceho malý úsek povrchu dielektrika (obr. 15.1) dostaneme tak, že náboj vo vnútri tohto rovnobežnostenu je rovný

$$q = \vec{P}_1 \cdot \vec{S} - \vec{P}_2 \cdot \vec{S} \ .$$

kde S je plocha povrchu obsiahnutá vo vybranom rovnobežnostene. Ak $P_2 = 0$, dostaneme

$$q = P_n \cdot S \ ,$$

kde $\vec{P}_n = \vec{P}_1 \cdot \vec{S}$ je zložka vektora polarizácie kolmá k povrchu dielektrika v mieste povrchu vybraného rovnobežnostenu. Keď je dielektrikum v dostatočne veľkej oblasti homogénne, P_n nezávisí od „hrúbky“ rovnobežnostenu a rovnako od nej nezávisí q , pretože ρ je mimo povrchu dielektrika rovné nule (homogénna polarizácia vo vnútri dielektrika). Znamená to, že náboj q je tvorený iba povrchovým nábojom . Pre jeho plošnú hustotu η tak podľa (15.9) dostávame:

$$\eta = P_n \,. \tag{15.10}$$

Z hľadiska merania teploty je dôležité, že u pyroelektrických materiálov vektor polarizácie za inak rovnakých podmienok prudko závisí od teploty. V dôsledku toho sa s teplotou významne mení i viazaný povrchový náboj s plošnou hustotou udanou vzťahom (15.10). Ak teda malú platničku pyroelektrického materiálu opatríme elektródami, máme kondenzátor, ktorého vlastnosti prudko závisia od jeho teploty a môžeme ich zmenu využiť na indikáciu zmien teploty. Napríklad: ak pripojíme takýto kondenzátor k zdroju konštantného napätia, pri zmene teploty sa zmení veľkosť viazaného a v dôsledku toho i voľného náboja na jeho elektródach. To znamená, že obvodom tohto kondenzátora pretečie náboj, ktorého veľkosť je závislá od zmeny teploty. Pri malých zmenách teploty môžeme zmenu náboja považovať za úmernú zmene teploty, takže:

$$dq = S \cdot \frac{\partial P}{\partial T} \cdot dT \,.$$

Ak by sme mali elektródy tohto kondenzátora elektricky oddelené (izolované), voľný náboj na elektródach by ostával nemenný. V dôsledku zmeny teploty sa však mení viazaný náboj, takže zmena teploty takéhoto kondenzátora sa prejaví ako zmena napätia medzi jeho doskami. Polarizácia niektorých pyroelektrických materiálov môže od teploty závisieť tak silno, že ohriatím (ochladením) o niekoľko desiatok stupňov celzia sa vytvorí potenciálová zmena na úrovni stoviek voltov. Z toho je vidieť, že pomocou pyroelektrického javu sa dajú detekovať zmeny teploty menšie ako desaťtisícina stupňa Celzia.

V súčasnosti pyroelektrické detektory sú schopné rozlíšiť také zmeny teploty, ktoré sú vyvolané dopadom svetelného toku s intenzitou 10^{-8} W (pri použití zosilňovačov elektrického signálu so šírkou spektra 1 Hz). Táto hodnota žiarivého toku, pri ktorom je signál rovný ekvivalentnému šumovému výkonu (anglicky: equivalent nois power, v skratke NEP), je síce približne o 5 rádov väčšia ako majú v súčasnosti dostupné detekčné polovodičové fotodiódy, ale napriek tomu je dostatočná, aby sa pomocou pyroelektrických detektorov dali realizovať napríklad i „termovízne kamery“, ktoré dokážu zobraziť objekty pomocou infračerveného svetla vyžiareného objektmi, ktorých teplota je iba málo vyššia ako izbová teplota. Tieto zariadenia sú také citlivé, že umožňujú v získanom infračervenom obraze rozoznať objekty, ktorých teploty sa líšia o desatiny stupňa Celzia a pritom sú dostatočne rýchle, aby umožnili zobrazovanie objektov s obrazovou frekvenciou orientačne niekoľko obrazov za sekundu.

Poznamenajme ešte, že vyžarovanie elektromagnetických vĺn sa riadi Planckovým vyžarovacím zákonom (a v dôsledku toho Stefan-Boltzmannovým zákonom) prísne vzaté iba vtedy, ak sa jedná o dokonale čierne teleso. Teda ak sa jedná o teleso, ktorého koeficient odrazu R je rovný nule pre všetky vlnové dĺžky. V skutočnosti všetky telesá viac či menej svetlo odrážajú (ich $R \in (0,1)$), avšak existujú telesá, ktoré majú v rozhodujúcej spektrálnej oblasti koeficient odrazu blízky nule (čierne telesá). Táto skutočnosť sa prejaví i na ich vyžarovaní (emisii).

Aby sme videli prečo a ako súvisí odraz a emisia telies, uvažujme v dutine tvaru rotačného elipsoidu s dokonale odrážajúcim povrchom dve telesá rovnakej teploty. Jedno z nich nech je absolútne čierne teleso ($R_1 = 0$) a druhé nie ($R_2 > 0$). Svetlo vyžiarené jedným z týchto telies dopadá na druhé z nich (sú uložené v ohniskách elipsoidu). Napriek tomu, že majú odlišné koeficienty odrazivosti, pre začiatok predpokladajme, že pri rovnakých teplotách vyžarujú rovnako. Keby tento predpoklad bol splniteľný, tak teleso, ktoré svetlo odráža ($R_2 > 0$), by sa začalo ochladzovať a druhé ohrievať. Bolo by tomu tak preto, že síce vyžarujú rovnako, ale jedno z nich prijíma všetko teplo, ktoré to druhé vyžiari, zatiaľ čo teleso s koeficientom odrazu $R_2 > 0$ prijme iba časť svetla vyžiareného druhým telesom (absolútne čiernym). Takéto správanie sa je ale v rozpore s druhou vetou termodynamickou, pretože teplo nemôže svojvoľne prechádzať z telesa chladnejšieho na teplejšie. Z toho vyplýva, že predpoklad o rovnosti ich emisivity nebol oprávnený. Z toho, že telesá, ktoré sú vo vzájomnom tepelnom kontakte prostredníctvom vyžiarenej energie, zostávajú v tepelnej rovnováhe vtedy, keď majú rovnakú teplotu vyplýva, že ich emisivity musia byť v rovnakom pomere ako ich absorpcie (absorpciou tu rozumieme veličinu A rovnú $1 - R$).

Uvedomenie si súvislosti emisivity a reflektivity je dôležité pri „čítaní" termovíznych záznamov: to, že niektorá časť termovízneho obrazu je tmavšia (t. j. že príslušná časť menej vyžarovala), ešte nemusí znamenať, že sa jedná o chladnejšiu časť objektu. Môže to byť spôsobené i tým, že má menšiu emisivitu. Ako sme videli, stane sa tak vtedy, keď má väčší koeficient odrazu. V skutočnosti je teda práve táto časť obrazu „belšia" (viac odráža), lenže jej belosť sa prejaví iba pri pozorovaní v odrazenom svetle, nie pri pozorovaní vo svetle, ktoré vyžarujú samotné objekty. V prípade, že by bola zobrazovaná scéna silne osvetlená (osvetlená tak, že energia objektmi odrazeného svetla je väčšia ako energia, ktorú v dôsledku tepelného žiarenia samé vyšlú), tak „belšie objekty" (objekty s väčším R) budú na termovíznom zázname belšie. Z termovízneho obrazu **osvetlenej scény** teda nemôžeme súdiť na ich teplotu, ale na ich odrazivosť, podobne ako tomu je pri bežnom zobrazovaní. Uvedená skutočnosť sa dá využiť na bezkontaktné určovanie emisivity jednotlivých častí zobrazovanej scény.

Ako môže byť z uvedeného zrejmé, pre zobrazovanie objektov pomocou svetla vyžiareného samotnými objektmi nie je rozhodujúce použitie pyroelektrických detektorov. Analogickým spôsobom by bolo možné pre detekciu intenzity svetelného toku použiť i iné detektory teploty, napríklad termočlánky alebo termistory. Keďže popis termoelektrického javu, ako i popis závislosti vodivosti polovodičov od teploty, na ktorých sú uvedené detektory založené, je často uvádzaný v základnej literatúre, nebudeme sa nimi podrobnejšie zaoberať. Uveďme iba, že ich citlivosť býva menšia ako citlivosť pyroelektrických detektorov.

15.2 Fotografický proces

Fotografický proces, čiže záznam optického poľa je založený na tom, že svetlo pri jeho absorpcii môže vyvolať chemické zmeny absorbujúceho materiálu a že tieto zmeny sa môžu prejaviť zmenou optických vlastností materiálu, napríklad zmenou koeficientu odrazu, zmenou priepustnosti, alebo zmenou jeho indexu lomu. Tieto zmeny materiálov sú dobre známe. Napríklad: žltnutie novinového papiera, blednutie farieb na slnku a podobne. Avšak technické uplatnenie majú iba také procesy, pri ktorých sa dostatočne badateľné zmeny vyvolajú dostatočne rýchlo (nízkymi „expozíciami“).

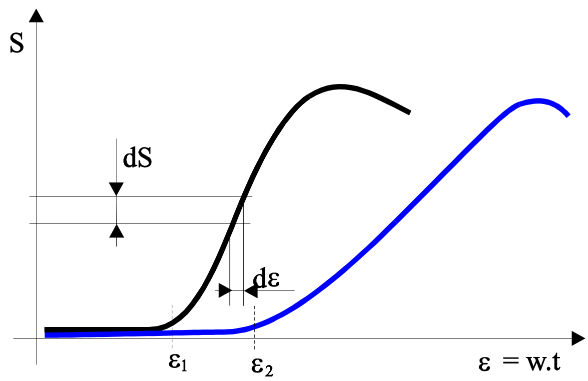
Pre chemické procesy vyvolané svetlom je charakteristické, že sa dostavujú spravidla pri ožiarení krátkovlným svetlom (obyčajne je účinná hlavne ultrafialová zložka svetla) a že sú (aspoň v istom rozmedzí intenzít) úmerné „**expozícii**“, t. j. súčinu intenzity, ktorá bola absorbovaná a doby, počas ktorej bola látka osvetleniu vystavená. Je tomu tak i pri dnes štandardných fotografických materiáloch, ktoré využívajú halogenidy striebra ako svetlocitlivého materiálu. Podstata chemických zmien v halogenidoch striebra spočíva v tom, že vhodným osvetlením dochádza k ich chemickej redukcii, pri ktorej vznikajú zrná kovového striebra. Tieto, na rozdiel od pôvodného halogenidu, nie sú opticky priehľadné. Navyše, ako sa už v počiatku využitia halogenidov striebra pre fotografiu ukázalo, pri malých osvetleniach v kryštalkoch halogenidov striebra vznikajú akési zárodočné centrá, ktoré síce bezprostredne nie je vidieť, ale pod účinkom vhodných chemických substancií umožňujú redukciu halogenidu na striebro. Proces dodatočnej chemickej redukcie halogenidových zŕn je známy ako „**vyvolávanie** “ tzv. „**latentného**“ obrazu, ktorý sa v záznamovom materiáli vytvorí počas pôsobenia svetla.

Vyvolaním latentného obrazu ešte nedostaneme konečný záznam. Fotografická emulzia (t. j. vrstva želatíny, ktorá obsahuje drobné kryštalky halogenidov striebra) nie je úplne priehľadná ani vtedy, keď k žiadnej redukcii striebra nedošlo. (Keby bola úplne priehľadná, nemohlo by sa v nej svetlo absorbovať a latentný obraz by nemohol vzniknúť.) Preto sa po vyvolaní materiálu zrná halogenidu, ktoré neboli vývojkou premenené na kovové striebro, musia rozpustiť vo vhodnom rozpustidle (najčastejšie sa na to používa sírnatan sodný). Tým sa stane materiál v neosvetlených miestach priehľadný a navyše nie je už citlivý na ďalšie osvetlenie. Preto sa tento proces nazýva „**ustaľovanie**“ obrazu a príslušné rozpustidlo sa nazýva „ustaľovač“. Až po takomto „ustálení“ a vysušení považujeme záznam za hotový.

Pre vytvorenie záznamu optického poľa je dôležité, ako závisí „sčernanie“ fotografického materiálu od expozície, t. j. ako sa zníži priepustnosť fotografickej emulzie v dôsledku vzniku strieborných zŕn (zrná striebra sú na povrchu čierne). Inými slovami : dôležitá je „citlivosť“ fotografického materiálu. Ako sme už povedali, expozíciou rozumieme súčin intenzity svetla, ktoré dopadá na povrch záznamového materiálu a doby, na ktorú je materiál svetlu vystavený.

Sčernaním rozumieme záporne vzatý logaritmus priepustnosti záznamu. Ak intenzitu svetla dopadajúcu na záznam označíme w_1 a intenzitu svetla po prechode záznamom označíme w_2 , zčernanie môžeme vyjadriť ako

$$S = -\ln(w_2/w_1) = \ln(w_1/w_2) .$$



Obr. 15.2. Závislosť zčernania S od expozície $\varepsilon = w.t$ pre dva materiály s odlišnou citlivosťou a odlišnou strmosťou

Typická závislosť sčernania fotografického materiálu od expozície je uvedená na obr. 15.2. Z uvedených závislostí zčernania od expozície je zrejmé, že sčernanie sa vplyvom osvetlenia začne meniť, až keď expozícia nadobudne hodnotu ε_1. Práve na základe tejto hodnoty sa určuje citlivosť materiálu. Zároveň je zrejmé, že citlivosť nie je jedinou veličinou, ktorá charakterizuje priebeh sčernania v závislosti od expozície. Existujú materiály, ktorých závislosť sčernania od expozície má v lineárnej časti prudší sklon ako u iných. Tento sklon, presnejšie derivácia $dS/d\varepsilon$, sa nazýva **strmosť** (gradácia) materiálu.

Ďalším dôležitým parametrom záznamového materiálu je jeho „**rozlišovacia schopnosť**“. Rozumie sa tým počet detailov, ktoré sa na jednotkovom úseku záznamu dajú ešte rozlíšiť. Udáva sa spravidla „počtom čiar na milimeter“. Je zrejmé, že rozlišovacia schopnosť je limitovaná veľkosťou zŕn striebra, ktoré sa v materiáli vytvoria. Je preto výhodné aby zrná halogenidov boli čo najmenšie. Na druhej strane na to, aby sa dosiahlo rovnaké sčernanie je pri malých zrnách potrebné vyššie osvetlenie, takže požiadavka vysokej citlivosti a vysokej rozlišovacej schopnosti sú v protiklade. V mnohých prípadoch je veľká rozlišovacia schopnosť prvoradou podmienkou kladenou na materiál. Napríklad pri vytváraní holografického záznamu. Na základe toho, čo sme povedali v predchádzajúcich kapitolách vieme, že v interferenčnom poli objektovej a referenčnej vlny sú plochy, v ktorých dochádza k maximu interferencie vzdialené od seba o $d = \lambda / \sin(\alpha)$, kde α je uhol, ktorý tieto vlny zvierajú. Pri uhloch cca 10° a vlnových dĺžkach zodpovedajúcich viditeľnej oblasti spektra je vzdialenosť maxím interferenčného poľa približne $1\ \mu m$. To znamená, že pre vytvorenie dobrého záznamu potrebujeme záznamové prostredie s rozlišovacou schopnosťou niekoľko tisíc čiar na milimeter! Takáto rozlišovacia schopnosť sa dosahuje iba v špeciálnych materiáloch. Pre menej náročné použitie sa používajú fotografické materiály s rozlišovacou schopnosťou rádove sto čiar na milimeter.

Citlivosť halogenidov striebra na osvetlenie nie je v celej oblasti spektra rovnaká. Chemicky čisté halogenidy sú citlivé najmä na ultrafialovú a modrú zložku spektra. V zázname urobenom na takýto materiál sú všetky objekty inej farby ako modrá zaznamenané ako čierne (ultrafialová zložka spektra sa v značnej miere absorbuje v skle objektívu fotografického prístroja, pretože bežné sklo je pre ultrafialovú zložku spektra nepriehľadné). V priebehu vývoja fotografickej techniky sa našli vhodné prímesi (takzvané senzibilizátory), ktoré pri zabudovaní do kryštálikov halogenidov výrazne zvýšili citlivosť materiálov i na ostatné farby. Keď sa vyvinuli materiály citlivé i na zelenú a žltú časť spektra, pomenovali sa ako „**ortochromatické**“ (čo znamená „správne farebné“) i keď na červené svetlo citlivé neboli. (V niektorých starých filmoch sa dajú vidieť zástavy, ktoré vyzerajú akoby mali miesto červeného pruhu pruh čierny.) Súčasné materiály sú už citlivé i na červené svetlo (**panchromatické filmy**). Dokonca už existujú i materiály citlivé i na blízku infračervenú oblasť. (Ale skutočne iba na blízku oblasť, asi do 1μm).

Pre úplnosť uveďme, že záznam vytvorený popísaným postupom je **negatívny** - to znamená, že v miestach, v ktorých bol záznamový materiál osvetlený, bude záznam tmavý a naopak. Keď však urobíme ďalší záznam takéhoto záznamu, dostávame **pozitívny** obraz, teda priehľadný (biely) tam, kde bola vyššia intenzita svetla.

Tak ako sme to práve popísali vzniká čierno-biela fotografia. Podstata farebnej fotografie je analogická, len záznamový materiál pozostáva z troch vrstiev, z ktorých každá je citlivá na rôzne časti viditeľného spektra a po vyvolaní sa musia miesto zŕn striebra vytvoriť zlúčeniny, ktoré majú požadovanú farbu.

V niektorých špeciálnych prípadoch sú technicky dôležité i iné fotografické materiály než halogenidy striebra. Sú to rôzne polyméry a želatíny, u ktorých sa osvetlením mení spravidla ich index lomu. V poslednej dobe je pri spracovaní signálov prenášaných optickými vláknami niekedy dôležité vytvoriť priestorovú moduláciu indexu lomu vlákna. Takáto modulácia sa dá dosiahnuť pomocou interferenčného poľa vysokointenzívnych zväzkov argónového lasera (modrá, prípadne zelená čiara argónu). Pod účinkom takéhoto svetla dochádza v materiáli vlákna ku zmene zabudovania hydroxylových iónov, ktoré sú prítomné v skle, z ktorého sú vlákna vytvorené. Tieto zmeny sú také, že ovplyvňujú index lomu skla. Takéto zmeny, pri ktorých pod účinkom svetla dochádza k zmenám indexu lomu tiež môžeme považovať za „fotografický proces“. Ale v tomto použití má termín „fotografický proces“ fyzikálne širší obsah, ako sa v bežnej reči používa.

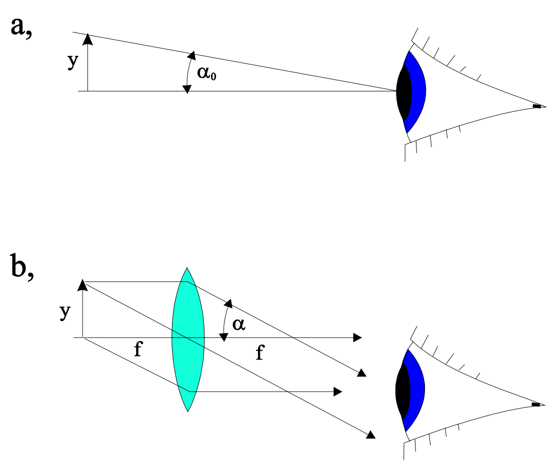
Literatúra

[1] NAY, J.: Fyzičeskie svojstva kristallov (ruský preklad anglického originálu), Izdateľstvo inostrannoj literatury, Moskva 1960.

16. Jednoduché optické prístroje

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zoznámili so základnými vlastnosťami optických vĺn a jednoduchých optických prvkov. Pomocou týchto znalostí môžeme popísať niektoré jednoduché optické zariadenia, ktoré majú veľký praktický význam v technike, ale i pre osobné použitie.

Lupa je spravidla tvorená jednoduchou tenkou šošovkou s ohniskovou vzdialenosťou od jedného do desať centimetrov, prípadne i menej, uloženou vo vhodnom držiaku tak, aby sa dal pozorovaný objekt pohodlne uložiť do jej ohniskovej roviny. Keď je objekt umiestnený v ohniskovej rovine, svetelné lúče vychádzajúce z jeho jednotlivých bodov po prechode šošovkou vytvárajú rovnobežný zväzok. To znamená, že ich vnímame rovnako ako body v nekonečne. A teda i celý objekt vidíme v nekonečnej vzdialenosti. Napriek tomu vidíme objekt zväčšený - to znamená, že uhol, ktorý zvierajú smery pod ktorými vidíme objekt pri pozorovaní cez lupu (obr.16.1.b.) je väčší ako uhol, ktorý zvierajú okrajové lúče pri pozorovaní objektu voľným okom (obr.16.1.a.). Ak veľkosť objektu označíme y, konvenčnú optickú vzdialenosť, t. j. vzdialenosť pri ktorej môžeme bez námahy oka objekt dlhodobo sledovať, napr. čítať, označíme l_0 [1], ohniskovú vzdialenosť šošovky f a uhlové veľkosti objektu pri pozorovaní bez lupy a s lupou α_0 a α,



Obr. 16.1. K uhlovému zväčšeniu lupy

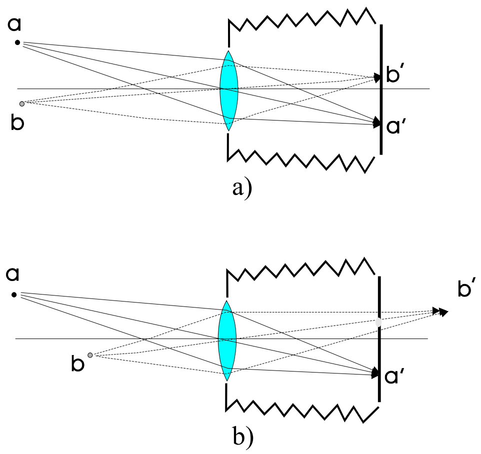
$$\alpha_0 = y / l_0 \qquad \alpha = y / f \ ,$$

pre zväčšenie lupy z dostaneme:

$$z = l_0 / f \ .$$

Fotografický prístroj je v podstate tmavá skrinka, ktorá má v prednej strane uloženú spojnú šošovku (objektív) a na protiľahlej strane umiestnený fotografický záznamový materiál (film). Jeho použitie je založené na tom, že spojná šošovka vytvára v obrazovom priestore reálny (skutočný) obraz svetelných zdrojov uložených pred šošovkou vo vzdialenosti väčšej ako je jej ohnisková vzdialenosť. Skutočný obraz, to znamená,

[1] Spravidla sa berie $l_0 = 0.25$ m

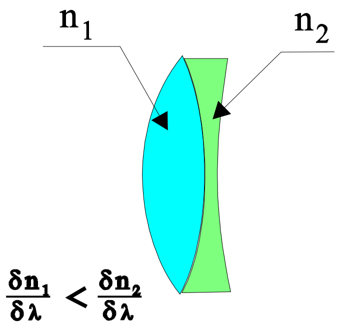


Obr. 16.2. K činnosti fotografického prístroja.
a) objekt je v rovine kolmej k optickej osi,
b) objekt neleží v rovine kolmej k osi

že lúče sa tam skutočne (nie len v ich predĺžení) pretínajú. Keďže objekt si môžeme predstaviť ako súbor svietiacich bodov, šošovkou sa vytvorí (prevrátený) obraz ako súbor osvetlených bodov za šošovkou, vo vzdialenosti závisiacej od polohy objektu a ohniskovej vzdialenosti šošovky (obr. 16.2.a). Ak do tohto miesta uložíme fotografický záznamový materiál, máme fotografický prístroj. To znamená, že fotografický prístroj musí byť opatrený zariadením, pomocou ktorého sa dá meniť vzdialenosť objektívu a záznamového materiálu tak, aby sa nastavil do miesta, kde sa vytvoria bodové obrazy (a, b,) jednotlivých bodov zobrazovaného objektu, t. j. ostrý obraz objektu (body a′, b′). Ak ale v predmetovom priestore objektívu sú bodové zdroje v rôznych vzdialenostiach od objektívu (obr. 16.2.b), nemôžu byť všetky zaznamenané ako bodové obrazy, pretože ich ostré obrazy sú v rôznych vzdialenostiach od šošovky (objektívu). Miesto bodového záznamu sa vytvorí záznam tvaru krúžku. Na zázname objektu sa to prejaví stratou detailov a difúznymi okrajmi obrazu objektu, čo je charakteristické pre „rozostrený obraz".

Poznamenajme, že ani pri ideálnom „zaostrení", t. j. pri nastavení záznamového materiálu presne do optimálnej polohy nedostaneme dokonale ostrý obraz (záznam bodového zdroja nebude bod). Stane sa tak z niekoľkých dôvodov. Jedným z nich je difrakcia svetla (priemer objektívu je konečný), ďalší dôvod rozostrenia je v tom, že záznamový materiál má konečnú hrúbku, takže ak by bol záznam koncentrovaný do nekonečne malej oblasti na prednej strane záznamového materiálu, na zadnej strane už bude „rozostrený" na hodnotu $\beta . h$, kde $\beta = \dfrac{D}{\Delta z}$, D je clonou vymedzený priemer objektívu, Δz vzdialenosť obrazu od šošovky a h hrúbka emulzie.

Okrem uvedených „fyzikálnych" dôvodov dochádza k rozostreniu obrazu i v dôsledku nedokonalostí zobrazovania. Príčin týchto nedokonalostí je tiež niekoľko. Jenou z nich je disperzia svetla (závislosť indexu lomu od vlnovej dĺžky). V dôsledku toho je ohnisková dĺžka šošovky rôzna pre rôzne vlnové dĺžky svetla (chromatická chyba). Pri farebnom objekte (fotografovanie v bielom svetle) sa to prejaví tým, že obraz môže byť ostrý iba pri niektorej vlnovej dĺžke. Pri ostatných je neostrý. Takže výsledný obraz pozostávajúci z mnohých vlnových dĺžok nemôže byť ostrý. Chromatická chyba šošoviek sa dá korigovať. Predstavme si sústavu pozostávajúcu z dvoch šošoviek s rovnakou optickou mohutnosťou, ale z rôznych skiel. Jedna z bežného skla s normálnou disperziou (disperzia je hodnota $\partial n/\partial\lambda$) a druhá nech je zo skla, ktorého disperzia je rovnako veľká, ale má opačnú hodnotu. Pretože na jednej strane spektra je optická mohutnosť prvej šošovky väčšia práve o toľko, o koľko je mohutnosť druhej menšia, mohutnosť takejto sústavy je v celej oblasti vlnových dĺžok rovnako veľká. Uvedená úvaha je však len modelová - nemáme k dispozícii sklá s opačnými hodnotami disperzie. Preto pri praktickej kompenzácii chromatickej chyby sa postupuje nasledovne. Vytvorí sa sústava pozostávajúca zo spojky s veľkou optickou mohutnosťou zo skla s malou disperziou a z rozptylky s malou mohutnosťou, ale vyrobenej zo skla s veľkou disperziou (obr.16.3). Výsledná mohutnosť takejto sústavy zostane kladná (bude spojkou), avšak pri vhodnej voľbe pomeru ich mohutností[2] bude výsledná disperzia nulová. Presnejšie: nulová v istej oblasti spektra. Ak sa návrh urobí tak, aby bola disperzia kompenzovaná približne v strede intervalu viditeľného spektra, výrazne sa tým zníži chromatická vada sústavy. Preto sa takýto objektív nazýva „**achromát**“.



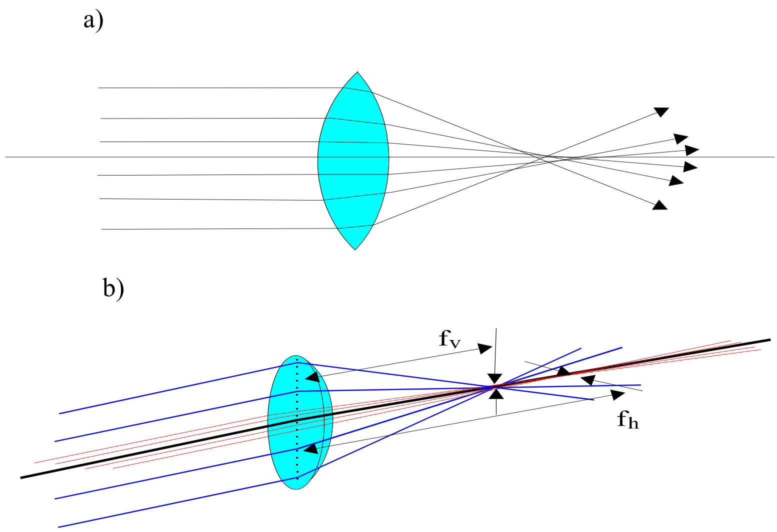
Obr. 16.3. Princíp achromátu

Ďalšia príčina neostrosti obrazu súvisí s tým, že svetelné lúče prechádzajúce šošovkou v miestach viac vzdialených od osi šošovky sa pretínajú bližšie k šošovke, než lúče „stredové“ (obr.16.4.a). Táto chyba sa nazýva otvorová, alebo sférická chyba. V dôsledku takejto chyby je možné pre náročnejšie úlohy použiť sférické šošovky iba s relatívne malým priemerom (malou svetelnosťou). Podobné obmedzenie vyplýva z ďalšej chyby sférických šošoviek (astigmatizmus), ktorou je skutočnosť, že pri zobrazovaní bodov ležiacich mimo optickej osi je poloha priesečníku lúčov prechádzajúcich šošovkou v rovine určenej stredovým lúčom a optickou osou v inom mieste ako priesečník lúčov prčechádzajúcich šošovkou v rovine určenej stredovým lúčom a kolmicou na optickú os (obr. 16.4.b). Obe chyby, sférická chyba i astigmatizmus sa dajú vhodnou kombináciou tenkých sférických šošoviek[3] kompenzovať. Výsledný objektív s odstráneným (potlačeným) astigmatizmom sa nazýva **anastigmát**. (Na možnosť kompenzovať astigmatizmus kombináciou tenkých šošoviek prišiel rodák zo Spišskej Belej, fyzik, inžinier, zememerač a matematik Jozef Petzval.) Zavedenie Petzvalovho anastigmátu umožnilo používať fotografické objektívy s výrazne väčším pomerom priemeru a ohniskovej dĺžky (s väčšou svetelnosťou). To umožnilo výrazné skrátenie expozičnej doby. Z minúty na sekundy (a v spojení s citlivejšími materiálmi až zlomky sekúnd). Pri súčasných vysokocitlivých fotografických materiáloch sú expozičné doby stotiny, dokonca pri dostatočnom osvetlení až tisíciny sekundy. Preto dnes nerobí ťažkosti fotografovanie ani pomerne rýchlo sa pohybujúcich objektov.

---

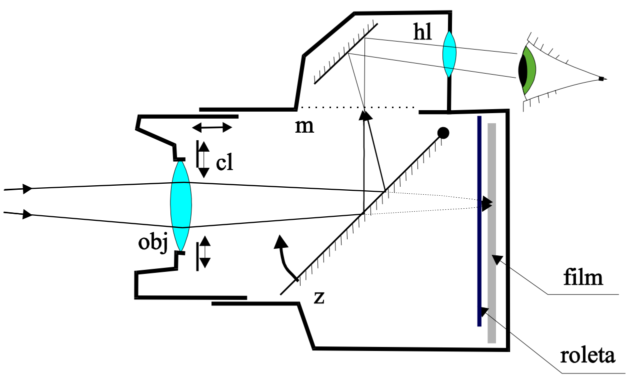
[2] Pomer ich optických mohutností sa má rovnať obrátenému pomeru ich disperzií.

[3] Výroba iných šošoviek než sférických je veľmi prácna, a teda i nákladná.



Obr. 16.4. Chyby sférických šošoviek
a) sférická chyba; b) astigmatizmus

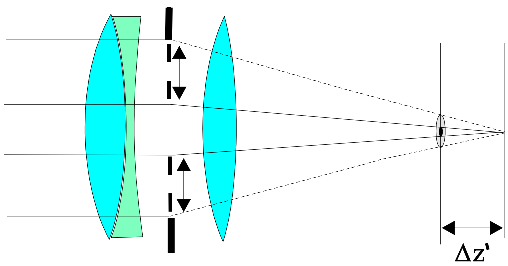
S použitím krátkych expozícií súvisí ďalšia dôležitá časť fotografického prístroja - jeho **uzávierka**, t. j. zariadenie, ktoré umožňuje, aby záznamový materiál bol vystavený účinku svetla iba na požadovaný „expozičný“ čas. K ich činnosti uveďme iba toľko, že existujú rôzne typy uzávierok a v zásade sa líšia podľa toho, kde sú umiestnené. Pri takzvaných „zrkadlových“ fotografických prístrojoch (obr. 16.5.a) je používaná „roletová“, nazývaná tiež „štrbinová“ uzávierka. Je konštruovaná ako roleta so štrbinou, ktorá pri expozícii prebehne pred filmom. Expozičná doba sa reguluje rýchlosťou prebehnutia štrbiny a jej šírkou. Pri iných typoch fotografických prístrojov sa používa „centrálna“ uzávierka, umiestnená medzi šošovkami objektívu, alebo bezprostredne za objektívom. Je tvorená niekoľkými lamelami, ktoré sa pri expozícii centrálne rozostúpia, a po požadovanom čase opäť uzatvoria objektív. Oba uvedené typy majú svoje



Obr. 16.5.a Schéma zrkadlového fotografického prístroja.
cl - regulovateľná clona, Z - sklápacie zrkadlo,
m - matnica hľadáčika hl, roleta - štrbinová uzávierka

nedostatky - pri použití štrbinovej uzávierky jednotlivé časti záznamu nie sú vytvorené v tom istom čase (štrbina je pri kratších expozíciách užšia než šírka záznamu). Pri rýchlo sa pohybujúcich objektoch tak môže dôjsť k vytvoreniu záznamu so skresleným tvarom. Chybou centrálnej uzávierky je, že pri jej použití vlastne nie je využitá celá svetelnosť objektívu. Je tomu tak najmä pri krátkych expozíciách, keď doba otvárania a zatvárania uzávierky je už zrovnateľná s expozičnou dobou.

Ďalšou dôležitou časťou fotografického prístroja je **clona**. Je to zariadenie, pozostávajúce spravidla z niekoľkých lamiel, ktoré pri rôznych polohách vytvárajú približne kruhový otvor s regulovateľným priemerom. Podobne ako centrálna uzávierka býva i clona umiestnená medzi šošovkami objektívu, alebo bezprostredne za ním. Účel clony je regulovať „svetelnosť" zobrazovacej sústavy a tým množstvo svetla použitého na vytváranie záznamu. Zároveň sa tým ovplyvňuje „hĺbka ostrosti" zobrazenia (obr.16.5.b). Kvantitatívne sa svetelnosť objektívu udáva pomerom priemeru použitej časti objektívu a jeho ohniskovej vzdialenosti, t. j. $D = d / f$. Pre upozornenie uveďme typickú hodnotu svetelnosti D = 1 : 2.8, ktorá sa často chybne označuje ako 2.8. Hodnota menovateľa (v uvedenom príklade 2.8) sa niekedy nazýva clonovým číslom. Poznamenajme ešte, že množstvo svetla ktoré prejde objektívom, závisí od plochy účinného otvoru. Je teda úmerné štvorcu svetelnosti. (To znamená, že napríklad pri zmene svetelnosti z 1:4 na 1:2 sa má skrátiť expozičná doba 4 x.)



Obr. 16.5.b Vplyv clony na hĺbku ostrosti

Spomenuté prvky fotografického prístroja sú v podstate jeho nutné prvky. V tej či inej podobe ho obsahovali i prístroje z počiatku tohto storočia. Súčasné fotografické prístroje okrem uvedenej výbavy majú zabudované ďalšie zariadenia, napríklad blesky, expozimetre spriahnuté s nastavovaním expozičných časov, dokonca tak, že automaticky evidujú aká clona je nastavená a korigujú expozíciu podľa jej hodnoty. Niektoré drahšie prístroje sú vybavené i automatickým diaľkomerom, spojeným so zaostrovaním. Objektívy tiež zaznamenali zmeny, a to nielen kvantitatívne, ale i kvalitatívne - dnes sa často používajú také optické sústavy, ktoré umožňujú meniť ich ohniskovú vzdialenosť otáčaním krúžku na objektíve rovnako jednoducho, ako sa na klasických objektívoch mení svetelnosť, alebo rovina zaostrenia. Tým sa môže (bez výmeny objektívu a navyše spojite) meniť veľkosť obrazu. V poslednej dobe sa dostávajú na trh prístroje vybavené dokonca stabilizátormi obrazu, ktoré znižujú pravdepodobnosť posunutia („rozmazania") obrazu pohybom prístroja v priebehu expozície.

Oko sa svojou principiálnou optickou „konštrukciou" veľmi podobá fotografickému prístroju: očná šošovka vytvára obraz objektu na zadnej strane očnej gule, ktorá je tvorená svetlocitlivou vrstvou nazvanou „**sietnica**". Významný rozdiel v konštrukcii oka a fotografického prístroja spočíva v tom, že zaostrovanie sa v oku dosahuje zmenou optickej mohutnosti (ohniskovej vzdialenosti) šošovky a nie zmenou vzdialenosti sietnice a šošovky. Sietnica je opatrená zvláštnymi svetlocitlivými bunkami. Sú nimi takzvané „tyčinky“, ktoré dávajú informáciu o množstve svetla, ktoré na ne dopadá a „čapíky“, ktoré informujú o farbe svetla. Vnímanie farieb sa dá vysvetliť tým, že existujú tri druhy farbocitlivých elementov, ktoré sú citlivé na tri odlišné spektrálne oblasti. Vďaka tomu je možné reprodukovať celú škálu farieb vnímaných okom pomocou troch základných farieb. Založená je na tom farebná fotografia, tlač i televízia.

Množstvo svetla použitého na vytvorenie obrazu, ako i hĺbka ostrosti obrazu je regulovaná dúhovkou, ktorá pracuje ako clona u fotografického prístroja. To je príčina toho, že ľudia s poruchami zraku súvisiacimi s geometriou očnej šošovky lepšie vidia pri silnejšom osvetlení - pri zmenšenej zorničke je väčšia hĺbka ostrosti a nevhodné dioptrie nespôsobia také rozostrenie obrazu ako pri široko roztvorenej zorničke. Avšak rozsah zmien citlivosti oka pri pozeraní sa v plnom svetle a „za tmy“ je oveľa väčší než zodpovedá zmene priemeru vstupnej pupily oka (zorničky). Je to spôsobené tým, že pri slabom osvetlení je zrakový vnem dominantne vytváraný tyčinkami[4], ktorých citlivosť je značne väčšia ako citlivosť čapíkov, zatiaľ čo pri dobrom osvetlení dominuje vplyv čapíkov.

Rozlišovacia schopnosť oka je veľmi vysoká (približne jedna oblúková minuta) a takmer dosahuje teoretickú hodnotu vyplývajúcu z ohybu na kruhovom otvore zorničky. Svedčí to o kvalitnom zobrazení optikou oka[5] a o vysokej hustote tyčiniek. Hustota čapíkov je nižšia. Z toho dôvodu farby rozoznávame iba u objektov, ktorých uhlová veľkosť je pozorovateľne väčšia ako uvedená rozlišovacia schopnosť oka. U niektorých ľudí je hustota čapíkov pre odlišné farby rôzna a dokonca niekedy niektoré úplne chýbajú. Prejaví sa to zníženým „farbocitom“, alebo i úplnou necitlivosťou k niektorým farbám (farboslepost’). Najčastejšie sa vyskytuje necitlivosť k červenej farbe.

Všimnime si ešte jednej dôležitej stránky registrácie objektov zrakom - priestorové vnímanie. Teoreticky by vnímanie priestoru (vzdialenosti zobrazených objektov) mohlo byť založené na tom, ako musí byť zakrivená šošovka, aby sa objekt ostro zobrazil na sietnicu. Mohlo by to tak byť, ale nie je. Stačí zatvoriť jedno oko a zistíte, že priestorový vnem sa takmer úplne vytráca[6]. Priestorový vnem je založený na tom, že obraz priestorovej scény závisí od miesta z ktorého ju pozorujeme. Obrazy vytvorené pravým a ľavým okom sa teda líšia a to tak, že najbližšie predmety sú voči najvzdialenejším stranovo posunuté najviac.

---

[4] Z toho dôvodu za šera nerozoznávame farby.

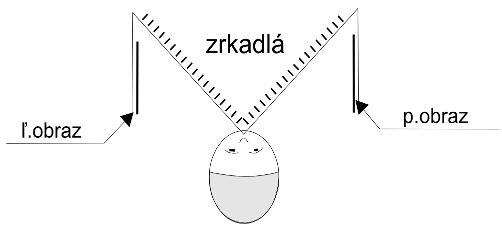
[5] Niektoré chyby zobrazovania jednoduchou šošovkou sú kompenzované tým, že sietnica nie je rovinná a má vhodný polomer krivosti.

[6] Ak sa vám zdá opak, je to tým, že váš mozog už vie v akej vzdialenosti sú vnímané objekty. Pozrite sa preto jedným okom na scénu ktorej vzdialenosti predmetov nepoznáte a potom otvorte druhé oko. Uvidíte aký je v tom rozdiel.

O tom, že vnem priestoru súvisí s vnímaním dvoma očami svedčí experiment s pozorovaním scény ktorá obsahuje horizontálne uložené dlhé a tenké predmety bez badateľných detailov, napríklad drôty (predmety musia byť také dlhé, aby vychádzali zo zorného poľa očí). Za takejto situácie sa vôbec nedá zrakom určiť ich vzájomná poloha[7]. Stačí ale ich „homogenitu“ narušiť, napríklad tým, že na ne niečo zavesíme a priestorový vnem sa okamžite vytvorí.

Na uvedenom výklade priestorového vnímania je založené stereografické zobrazovanie. Je to vlastne zobrazenie scény z dvoch odlišných, horizontálne položených miest. Pri rekonštrukcii (pri „prezeraní“ stereogramu) musíme dosiahnuť toho, aby sme jeden obraz vnímali iba jedným okom a druhý obraz druhým okom. Dosahuje sa to buď vhodným optickým zariadením (v podstate dve lupy vo vzdialenosti očí, pričom každá z nich má v ohniskovej rovine jeden z obrazov), alebo tým, že použijeme „okuliare“ s farebnými filtrami v doplnkových farbách a sledujeme obraz, na ktorom je nakreslený objekt v tých istých farbách - jednou farbou tak ako ho vidíme jedným okom a druhou farbou z pohľadu druhého oka. Pretože napríklad červenú čiaru nakreslenú na bielom papieri cez červené okuliare nevidíme a zelenú čiaru vidíme ako čiernu (svetlo zelenej farby cez červený filter neprejde), pravým i ľavým okom vidíme nakreslenú scénu tak, ako by bola priestorová.

Pre oživenie spomeňme ešte priestorové obrazy Salvatora Daliho. Oddelenie vnemov očí, potrebné pre priestorový vnem dosiahol pomocou zrkadlového klinu. No a „stačilo už iba“ namaľovať obrazy zodpovedajúce pohľadu z dvoch miest, vzdialených o rozostup očí. Samozrejme, že rovnako dobre poslúžia i dve fotografie urobené z odlišných miestmiest.

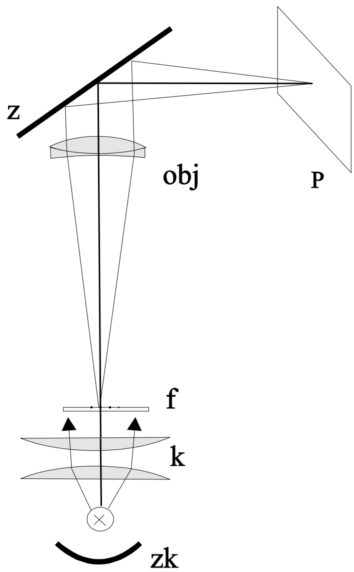


Obr. 16.6. Vytvorenie priestorového vnemu pomocou dvoch fotografií

Podstatu priestorového vnímania je vhodné uvedomiť si nielen preto, aby sme vedeli kedy (a kto) vníma priestor, ale na analogickom princípe sú založené i technicky dôležité postupy (pozri napr. kapitolu 18. o použití optiky v geodézii).

Projektory. Principiálna optická schéma projektora je zhodná so schémou fotografického prístroja. Len smer chodu lúčov je obrátený a , samozrejme, nemôže byť konštruovaný ako čierna skrinka. Naopak, tam kde vo fotografickom prístroji je záznamový materiál chránený pred dopadom iného svetla než svetla ktoré prešlo objektívom a vytvára obraz objektu, v projektore musí byť „predmet“ uložený v zadnej časti „skrinky“ dobre osvetlený, aby jeho obraz, ktorý premietame na projekčnú plochu, bol dostatočne svetlý.

[7] Na určenie polohy takýchto objektov by sme potrebovali tretie oko, ktoré by bolo uložené mimo spojnice existujúcich očí, napríklad uprostred čela.



Obr. 16.7. Schéma spätného projektora k- kondenzor, zk- zrkadlo kondenzora, f- premietaná fólia, z- spätné zrkadlo, P-projekčná plocha

Aby bolo obraz dobre vidieť, projekčná plocha musí svetlo pochádzajúce zo zobrazovaného objektu čo najviac odrážať, ale nesmie to byť zrkadlový odraz. Svetlo sa musí rozptýliť, aby sa obraz dal vidieť z rôznych strán. Už z toho vyplýva, že zobrazovaný objekt musí byť veľmi dobre osvetlený. Navyše obraz na projekčnej ploche je spravidla mnohonásobne väčší než objekt samotný (diasnímky majú rozmer 24 x 36 mm). Tým nároky na osvetlenie objektu stúpajú. Z toho dôvodu sa pre premietanie pomocou projektorov najčastejšie užívajú priehľadné objekty („transparenty“) a dostatočne výkonný zdroj svetla býva súčasťou projektoru. Je pri tom žiaduce, aby svetlo ktoré premietaným transparentným objektom prejde, bolo v čo najvyššej miere použité na vytvorenie obrazu. Z toho dôvodu sa chod lúčov zdroja svetla upravuje pomocou ďalšej optickej sústavy, tzv. „kondenzora“.

Optické parametre kondenzora závisia od toho, o akú projekciu sa jedná. Ako príklad uveďme schému takzvaného „spätného projektora“ určeného na premietanie záznamov na priehľadných fóliách (obr. 16.7). Kondenzor v podstate vytvára obraz žiarovky v mieste objektívu projektora. Takým spôsobom všetko svetlo, ktoré prejde zobrazovanou fóliou sa využije na vytvorenie obrazu. Predpokladá sa pri tom, že fólia svetlo nerozptyľuje. Ak by to v niektorom mieste nebola pravda a fólia by svetlo rozptyľovala, toto miesto sa zobrazí ako tmavé miesto. (Z toho dôvodu sa nedá na fóliách „vyškrabávať“ chybne napísané písmeno.)

V zdrojoch svetla pre projektory sa používajú žiarovky s výkonom stovky wattov až kilowatt, čo spôsobuje silný ohrev fólií (diasnímkov). Príkon žiaroviek sa ale iba v malej miere vyžiari vo viditeľnom svetle. Zvyšok je infračervené svetlo, ktoré neprispieva k vytvoreniu okom vnímateľného obrazu, ale diapozitív ohrieva. Tomuto zbytočnému ohrevu sa zabraňuje pomocou infračervených absorpčných filtrov, ktoré bývajú súčasťou osvetľovacej sústavy projektoru. I guľové zrkadlá, ktoré vracajú svetlo žiarovky vyžiarené „dozadu“, sa niekedy konštruujú tak, že odrážajú iba viditeľné svetlo. Infračervenú zložku svetla neodrážajú (pozri paragraf o interferenčných filtroch).

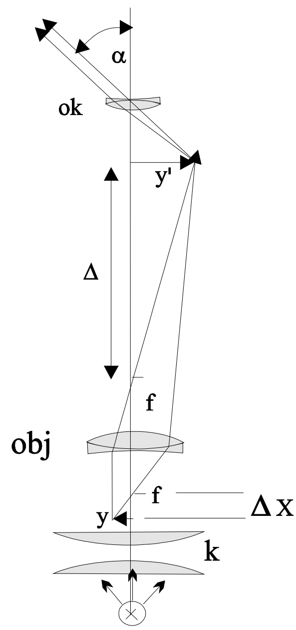
Mikroskop. Zväčšenie bežných lúp býva v rozsahu 5 až 20. Viac iba zriedkavo. V mnohých prípadoch je ale potrebné výrazne väčšie zväčšenie. Optické zariadenia, ktoré majú poskytovať väčšie zväčšenia s dostatočne kvalitným zobrazením nevystačia s jednošošovkovým zobrazovaním. Preto bol skonštruovaný „mikroskop“, ktorý vychádza zo zobrazovania pomocou **objektívu** a následného zobrazenia obrazu vytvoreného objektívom pomocou **okuláru** (obr. 16.8).

Ako je z obr. 16.8. vidieť, objektív vytvára obraz objektu v mieste vzdialenom od jeho obrazovej ohniskovej roviny o hodnotu Δ, ktorá sa nazýva „**optický interval mikroskopu**“. Táto rovina je zhodná s objektovou ohniskovou rovinou okulára. Obraz vytvorený objektívom sa teda pozoruje okulárom, ktorý je použitý ako lupa.

Pre zväčšenie obrazu vytvoreného objektívom (t. j. pre pomer veľkosti obrazu a veľkosti objektu) môžeme napísať:

$$z_{obj} = \frac{\Delta}{f_{obj}} \quad ,$$

kde x je súradnica v predmetovom priestore objektívu, v ktorej musí byť uložený objekt, aby sa jeho obraz vytvoril v obrazovom priestore práve v mieste so súradnicou Δ, t. j. v ohniskovej rovine okuláru. Podľa šošovkovej rovnice je $x = f_{obj}^2 / \Delta$. Pre zväčšenie mikroskopu, ktoré je definované ako pomer uhlovej veľkosti pod ktorou vidíme objekt cez mikroskop k uhlovej veľkosti pri jeho pozorovaní voľným okom z konvenčnej optickej vzdialenosti (25 cm) dostávame:



Obr. 16.8. Schéma mikroskopu. y- veľkosť objektu, y'- veľkosť obrazu vytvoreného objektívom, K- kondenzor, Δ- optický interval mikroskopu

$$z = \frac{\Delta}{f_{obj}} \cdot \frac{l_0}{f_{ok}} = z_{obj} \cdot z_{ok} \quad , \qquad \text{kde} \quad z_{ok} = \frac{l_0}{f_{ok}} \, .$$

Ako je z uvedených vzťahov vidieť, zväčšenie objektívu závisí od jeho ohniskovej dĺžky a optického intervalu mikroskopu, zväčšenie okulára od jeho ohniskovej dĺžky a výsledné zväčšenie je ich súčinom. Z toho dôvodu sú na okulároch a objektívoch dodávaných k mikroskopu udávané hodnoty zväčšení, ktoré poskytujú a zväčšenie pri použitej kombinácii objektívu a okuláru sa ľahko vypočíta.

Aby sa uľahčila výmena objektívu, mávajú mikroskopy sústavu objektívov uložených na karuseli, otáčaním ktorého sa objektívy jednoducho vymenia.

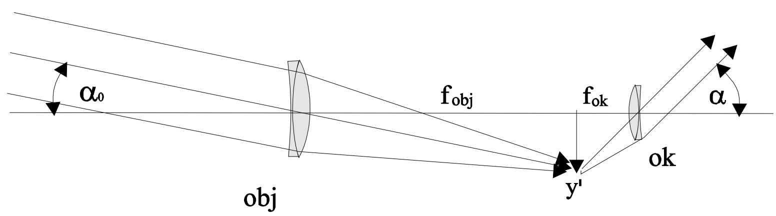
Jednoduchým a užitočným doplnkom mikroskopu býva „**mikrometrický okulár**“. Je to okulár, ktorý má v ohniskovej rovine sklenenú platničku s vyrytou milimetrovou stupnicou (spravidla s krokom desatinu milimetra) a navyše táto platnička sa dá v smere stupnice pohybovať prostredníctvom mikrometrickej skrutky. Pretože pri zaostrenom mikroskope obraz objektu sa vytvorí práve v ohniskovej rovine okulára, naraz vidíme obraz vytvorený objektívom i mikrometrickú stupnicu. Môžeme tak premeriavať rozmery objektu na jeho zväčšenom obraze. (Pri premeriavaní objektu pomocou mikrometrického okulára nezabudnite nameranú hodnotu vydeliť zväčšením objektívu!)

Pre úplnosť ešte dodajme, že zaostrenie mikroskopu sa realizuje tým, že celou optickou sústavou mikroskopu pohybujeme tak, aby sa objekt dostal do polohy, pri ktorej sa vytvára jeho obraz vo vzdialenosti Δ od obrazového ohniska objektívu. Je pri tom treba dávať pozor (najmä pri objektívoch s veľkým zväčšením), aby sme objektívom nenarazili na zobrazovaný predmet. Mnohé mikroskopy majú skrutku, ktorou sa poloha mikroskopu pri zaostrovaní nastavuje, kalibrovanú. Umožňuje to okrem iného odčitovať hrúbku zobrazovaného predmetu, pretože pri preostrení z dolných na horné partie objektu musíme mikroskopom posunúť práve o jeho hrúbku.

Ďalekohľady. Z optického hľadiska sú tvorené dvomi zobrazovacími prvkami so spoločnou optickou osou a uložené tak, že obrazová rovina objektívu je zhodná s predmetovou ohniskovou rovinou okuláru (obr.16.9.). Ako už bolo uvedené v kapitole 3 uhlové zväčšenie teleskopickej sústavy je rovné

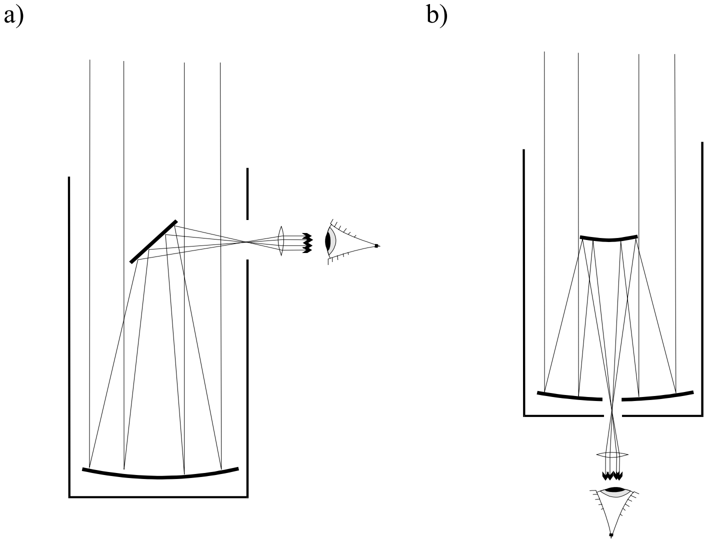
$$z_t = f_{obj} / f_{ok} \ ,$$

z čoho vyplýva, že ďalekohľad so zväčšením väčším ako jedna musí mať ohniskovú dĺžku objektívu väčšiu ako je ohnisková dĺžka jeho okulára.



Obr. 16.9. Schéma ďalekohľadu

Činnosť ďalekohľadu môžeme popísať podobne ako sme to urobili pri popise mikroskopu: objektív vytvára obraz objektu a tento obraz sa pozoruje okulárom použitým ako lupa. Ak je pozorovaný predmet v nekonečne, obraz objektu leží v spoločnej ohniskovej rovine objektívu a okulára a výsledný obraz vidíme opäť v nekonečne ale s uhlovým zväčšením udaným uvedeným vzorcom. Keď pozorujeme ďalekohľadom objekt , ktorý nie je v nekonečne, na to, aby sme objektívom vytvorený obraz mali v ohniskovej rovine okulára, musíme okulár posunúť trochu dozadu (zväčšiť jeho vzdialenosť od objektívu). K tomu účelu sú ďalekohľady opatrené „zaostrovacím mechanizmom“. Jeho umiestnenie a realizácia závisí od konštrukcie ďalekohľadu. Pri klasickom „námorníckom“ ďalekohľade sa to deje vysúvaním a zasúvaním tubusu ďalekohľadu. Pri binokulárnych triédroch spravidla pomocou skrutky medzi jeho vetvami.



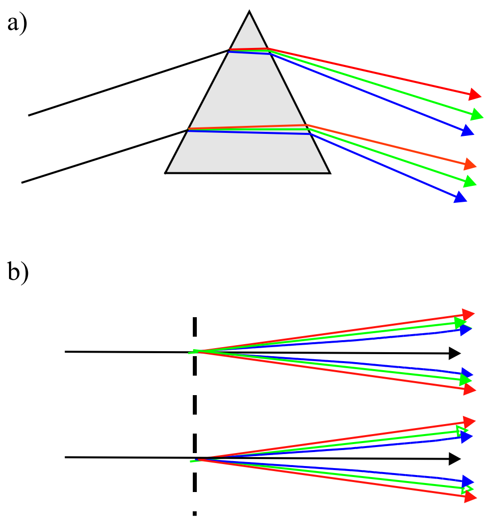
Obr. 16.10. Schéma a) Newtonovho a b) Cassegrainovho ďalekohľadu

Pre zaujímavosť uveďme, že ďalekohľady nemusia byť tvorené šošovkami. V astronómii sa častejšie než šošovkové ďalekohľady používajú ďalekohľady zrkadlové. Ich konštrukcie môžu byť rozmanité a na ilustráciu uvádzame dve z nich (obr. 16.10.).

Uveďme ešte, že pre ďalekohľady nie je dôležité iba ich zväčšenie. Menovite v súvislosti s astronómiou je zrejmé, že rovnako dôležitým parametrom ďalekohľadu je jeho svetelnosť, resp. priemer jeho objektívu, pretože od neho bude závisieť množstvo svetla ktorým sa vytvorí obraz. Z toho dôvodu sa konštruujú zrkadlá i s priemerom niekoľko metrov (ďalekohľad s najväčším priemerom zrkadla je na Mt. Palomarskej hvezdárni a má priemer 5 m). Rovnaký význam má priemer objektívu i pri triédroch (pre nočné pozorovanie), takže sa charakterizujú priemerom objektívu a zväčšením.

Monochromátory a spektrografy. V mnohých prípadoch potrebujeme vedieť, aké je spektrum svetla, s ktorým narábame, alebo zaručiť, aby jeho spektrum bolo obmedzené na čo najužšiu oblasť. K tomu slúžia spektrografy a monochromátory. I keď je ich činnosť na prvý pohľad významne odlišná, ich principiálna optická schéma je veľmi blízka.

Ich činnosť je založená na tom, že existujú prvky, ktoré odkláňajú svetelný lúč o uhol, ktorého veľkosť závisí od vlnovej dĺžky svetla. Ak dopadajúci svetelný zväzok nebol monochromatický, prechodom cez takýto prvok sa rozdelí na súbor zväzkov šíriacich sa v rôznych smeroch, avšak tak, že v každom smere sa šíria vlny s odlišnými vlnovými dĺžkami. Ako sme videli v predchádzajúcich kapitolách, takto sa správajú svetelné zväzky po prechode cez rozhranie dvoch reálnych prostredí, ktorých index lomu závisí od vlnovej dĺžky. Aby sa efekt „rozdelenia“ lúčov podľa vlnovej dĺžky zosilnil, spravidla sa svetlo nechá prechádzať takýmto rozhraním dvakrát a to tak, aby lúče s odlišnými vlnovými



Obr. 16.11. Rozklad svetla hranolom a mriežkou

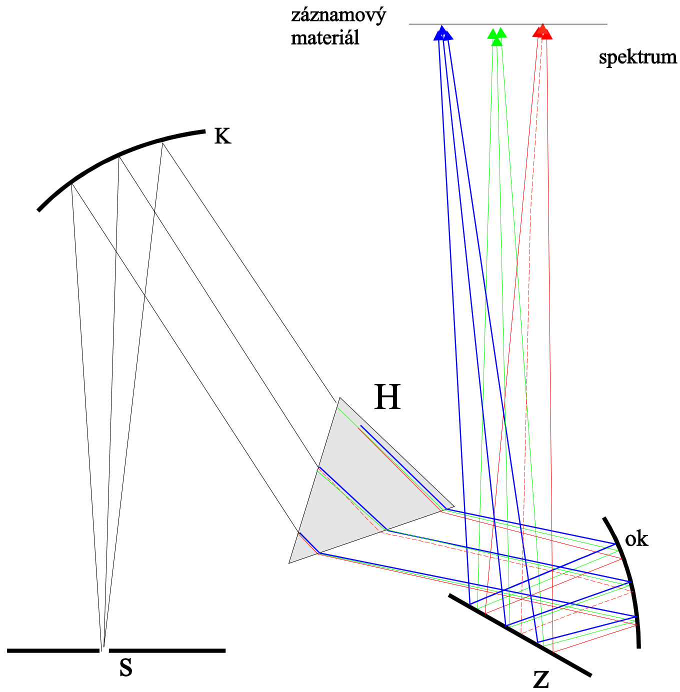
dĺžkami neboli po prechode navzájom rovnobežné. V praxi to znamená, že sa nechá svetelný zväzok prejsť **hranolom** vytvoreným z materiálu, ktorého index lomu výrazne závisí od vlnovej dĺžky v tej oblasti spektra, ktorú chceme analyzovať (obr. 16.16.a). Pre viditeľnú a blízku infračervenú oblasť sú vhodné sklenené hranoly, avšak ultrafialová a vzdialená infračervená oblasť spektra je v skle silne absorbovaná. Preto je treba pre ultrafialovú oblasť použiť hranol z taveného kremeňa a pre ďalekú infračervenú oblasť hranol z NaCl , alebo KBr pre vzdialenú infračervenú oblasť.

Podobné rozdelenie svetelného zväzku ako pri prechode hranolom dostaneme pri jeho prechode cez **difrakčnú mriežku** (obr. 16.11.b).

Samotný hranol alebo mriežka na dosiahnutie uvedeného cieľa ale nestačia. K rozdeleniu spektra na nich síce dochádza, ale až po prechode veľmi veľkej vzdialenosti by bolo oddelenie jednotlivých spektrálnych zložiek také, aby sme mohli povedať, že sa jedná o monochromatické svetlo. Navyše zväzky by museli byť rovnobežné, aby k oddeleniu vôbec došlo. Z toho dôvodu je optická schéma spektrografu zložitejšia (obr. 16.12.). Najprv sa v „kolimátori“ vytvorí rovnobežný zväzok. Tento kolimátor pozostáva z úzkej **štrbiny** a dioptrickej sústavy (spojnej šošovky, alebo dutého zrkadla) uloženej tak, že štrbina je v ohnisku **kolimačnej sústavy**. Vytvorený rovnobežný zväzok sa nechá prejsť hranolom alebo mriežkou a potom sa ďalšou dioptrickou sústavou takzvaným objektívom kamery po odraze na rovinnom zrkadle z fokusuje. V jej ohniskovej rovine sa vytvoria obrazy vstupnej štrbiny, ale v dôsledku disperzie hranolu (mriežky) svetlá s rôznymi farbami (rôznymi vlnovými dĺžkami) vytvoria obrazy štrbiny v rôznych miestach.

Keby vstupná štrbina bola nekonečne úzka (a zobrazenie dokonalé), v každom mieste ohniskovej roviny objektívu kamery by sa vytvoril obraz inou vlnovou dĺžkou. Pri konečnej šírke vstupnej štrbiny obrazy vytvorené rôznymi vlnovými dĺžkami sa prekrývajú, takže svetlo v jednotlivých miestach nie je prísne monochromatické. Je zrejmé, že „nemonochromatičnosť“ v každom mieste závisí od šírky obrazu vstupnej štrbiny a od disperzie použitého disperzného prvku, pretože čím je disperzia väčšia, tým sú od seba ďalej obrazy vytvorené svetlom s rôznymi vlnovými dĺžkami.

Pri osvetlení vstupnej štrbiny spektrografu svetlom s diskrétnym spektrom (s čiarovým spektrom), by sme v ohniskovej rovine objektívu kamery dostali ostré oddelené obrazy vstupnej štrbiny - jednotlivé obrazy by boli vytvorené príslušnými čiarami použitého svetla. (Práve preto sa spektrálne čiary nazývajú „čiary“, lebo v spektrografe sa ako čiary prejavia - v skutočnosti to sú obrazy „čiarovej“ vstupnej štrbiny. Keby štrbina monochromátoru mala tvar povedzme krúžku, spektrum by bolo tvorené rôznofarebnými krúžkami. Je zrejmé, že by to bolo nevýhodné, pretože pri väčšom počte „farieb“ v spektre, by sa krúžky prekrývali).



Obr. 16.12. Principiálna schéma spektrografu. s- vstupná štrbina, K- kolimátor, H- disperzný prvok (hranol), OK- objektív kamery, z- (otočné) zrkadlo

Keď do miesta v ktorom sa vytvorí spektrálne rozložený obraz vstupnej štrbiny uložíme fotografický záznamový materiál, dostaneme záznam (graf) spektra svetla dopadajúceho na vstupnú štrbinu. Preto sa takéto zariadenie nazýva „spektrograf“.

Ak by sme miesto držiaka fotografickej platne v spektrografe nechali priezor, ktorým by sa spektrum bezprostredne (okom, alebo lupou) dalo pozorovať, hovorili by sme o „spektroskope“. (Keby ste niekde čítali, že spektroskop má na výstupe ďalekohľad, nedajte sa mýliť, je to tak, objektív kamery v spojení s lupou je totižto ďalekohľad.)

Monochromátor je v podstate rovnaké zariadenie ako spektrograf, ale miesto držiaka fotografických platní je opatrené druhou, „výstupnou“ štrbinou. Táto štrbina je teda umiestnená v ohniskovej rovine objektívu kamery a musí byť rovnobežná so vstupnou štrbinou (s jej obrazom). Výstupnou štrbinou za takýchto okolnosti prechádza iba veľmi obmedzená časť spektra z toho svetla, ktoré do vstupnej štrbiny dopadá. Je zrejmé, že šírka spektra, ktoré výstupnou štrbinou prejde, závisí od jej šírky, od šírky vstupnej štrbiny a od disperzie použitého disperzného prvku. Pretože by bolo nepraktické meniť vlnové dĺžky, ktoré prejdú výstupnou štrbinou tak, že by sa štrbina v ohniskovej rovine objektívu kamery posúvala, „ladenie“ monochromátora sa realizuje posunovaním spektra. Robí sa tak pomocou zmeny náklonu zrkadla zaradeného do optickej zostavy. Sklon tohto zrkadla a tým i vlnová dĺžka svetla, ktoré monochromátorom prejde, sa dá zvonku ovládať. Niekedy sa funkcia disperzného hranolu a otočného zrkadla spojuje do jedného prvku.

Na monochromátore sa dá nastavovať nielen vlnová dĺžka prechádzajúceho svetla, ale môžu sa (spravidla) regulovať i šírky štrbín, čím sa reguluje „monochromatičnosť“ prešlého svetla. Zväčšením šírky štrbín sa zníži monochromatičnosť, ale zároveň sa zvýši množstvo svetla, ktoré prejde. Množstvo prešlého svetla závisí od šírky štrbín dokonca kvadraticky (závisí od súčinu ich šírok). Je dôležité uvedomiť si to, pretože až potom môžeme voliť vhodnú šírku štrbín ako kompromis medzi dostatočnou monochromatičnosťou a dostatočnou intenzitou svetla.

Keby sme vyjadrili závislosť spektrálnej hustoty svetla vystupujúceho z monochromátoru od vlnovej dĺžky pri istých hodnotách šírok štrbín, videli by sme, že v tomto vyjadrení vystupuje konvolúcia tvaru priepustnosti vstupnej a výstupnej štrbiny [8]. To znamená, že optimálne rozloženie spektra (minimálnu šírku spektra pri rovnakej integrálnej intenzite prešlého spektra) dostaneme vtedy, keď šírky oboch štrbín budú rovnaké. Z toho dôvodu sa (často) konštruujú monochromátory tak, že sa šírky oboch štrbín nastavujú jedným ovládacím prvkom.

Na záver tohto paragrafu o spektrografoch a monochromátoroch poznamenajme, že pomocou monochromátorov sa dajú robiť tie isté merania ako pomocou spektrografu: prelaďovaním monochromátora a priebežným meraním intenzity prešlého svetla dostávame graf spektra rovnako ako pri premeraní fotografického záznamu spektra vytvoreného spektrografom. Z toho dôvodu sa dnes v laboratóriách častejšie stretávame s monochromátormi než so spektrografmi.

Literatúra

[1] ILKOVIČ, D.: Fyzika, SNTL, Bratislava, Praha, 1958.

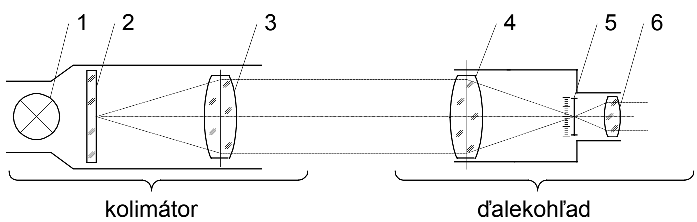
[8] V uvažovanom prípade závislosť priepustnosti štrbín má tvar obdĺžnika s výškou 1 a šírkou zhodnou so šírkou štrbiny.

17. Niektoré aplikácie optických metód v strojárenstve

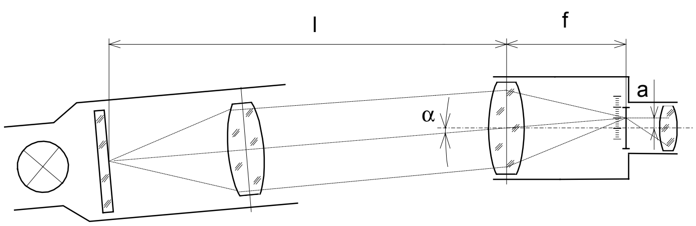
Mnohé optické procesy možno s výhodou použiť na meranie rozmanitých veličín. Ich aplikácia v strojárenskej praxi je spojená s tým, že umožňujú bezkontaktné a teda spravidla rýchle merania, navyše sa jedná o merania, s vysokou presnosťou, ktorú je obtiažne dosiahnuť inými spôsobmi. Niektoré možné aplikácie optických metód sme uviedli v kapitolách pojednávajúcich o difrakcii a interferencii, resp. v kapitole pojednávajúcej o holografii. V tejto kapitole uvedieme niektoré ďalšie možnosti použitia optických metód na meracie účely v strojárenstve a spomenieme niektoré možnosti použitia výkonných svetelných zväzkov pre účely obrábania.

17.1 Kolimátory

Pri meraní rovinnosti, rovnobežnosti povrchov, priamosti vedení a pod. sa používa **kolimátor a ďalekohľad** (obr. 17.1). Kolimátor sa skladá z trubice, v ktorej je objektív (3). V jeho ohniskovej rovine je umiestnená doštička (2) s dvoma vzájomne kolmými stupnicami pomocou ktorých sa určí sklon jeho optickej osi vzhľadom na optickú os ďalekohľadu v obidvoch smeroch. Doštička je osvetlená žiarovkou (1). Oproti kolimátoru je umiestnený ďalekohľad, zostavený z objektívu (4), zameriavacej doštičky (5) a okulára (6).

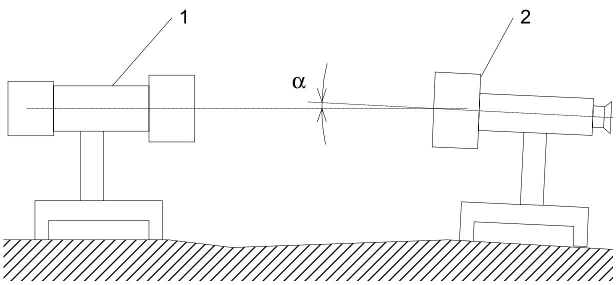


Obr. 17.1. Kolimátor a ďalekohľad

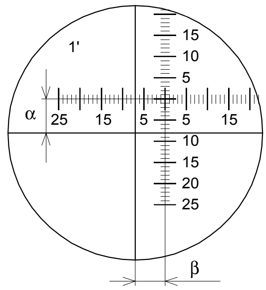


Obr. 17.2. Meranie sklonu

Ak je kolimátor naklonený (obr. 17.2), prichádzajú lúče do ďalekohľadu šikmo a obraz stupnice kolimátora sa posunie zo stredu nitkového kríža ďalekohľadu o hodnoty α a β, ktoré môžeme priamo na obraze stupnice kolimátora odčítať.



Obr. 17.3. Kolimátor (1) a ďalekohľad (2) na nerovnej ploche

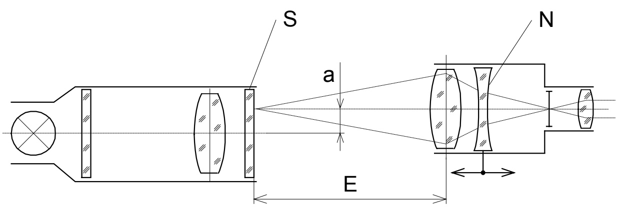


Obr. 17.4. Zorné pole ďalekohľadu s krížovou uhlovou stupnicou

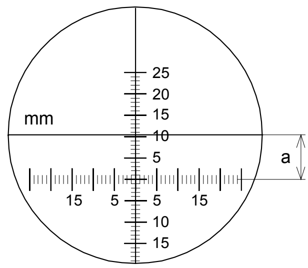
V zornom poli ďalekohľadu tak môžeme odčítať veľkosť α a β (obr. 17.4). Hodnota odchýlky *a* a *b* v dĺžkovej miere sa vypočíta podľa vzťahov

$$a = f\,tg\alpha, \qquad b = f\,tg\beta, \tag{17.1.}$$

kde f je ohnisková dĺžka objektívu ďalekohľadu, α a β sú uhlové odchýlky.

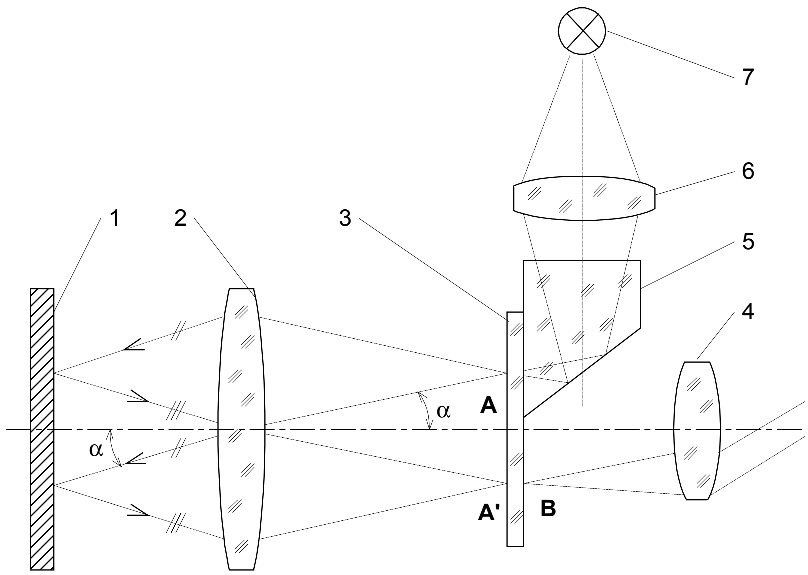


Obr.17.5. Kontrola priamosti veľkých plôch

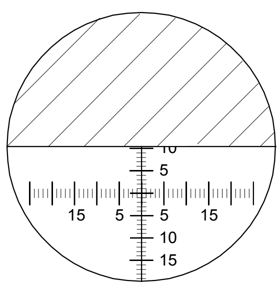


Obr. 17.6. Obraz v zornom poli ďalekohľadu s milimetrovou krížovou stupnicou

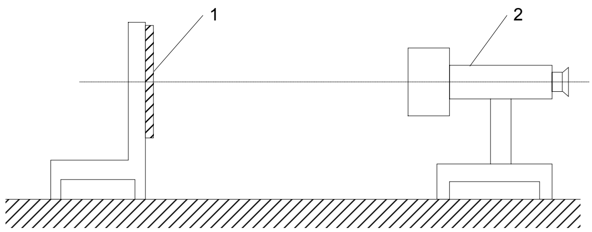
Hodnotu posunutia je možné merať tiež upraveným kolimátorom a ďalekohľadom podľa obr. 17.5. Pred objektív kolimátora umiestnime platničku *S,* na ktorej je vyrytá milimetrová krížová stupnica (obr. 17.6). Ďalekohľad je zaostrený buď do nekonečna a umožní odčítať sklon osi kolimátora, alebo na platničku S , ktorá je vo vzdialenosti E a umožní odčítať vzájomné posunutie. Zaostrenie sa vykonáva zmenou polohy šošovky s negatívnou optickou mohutnosťou N (rozptylkou). Ak nás nezaujíma veľkosť posunutia a potrebujeme len porovnanie, či ležia príslušné prvky v jednej osi, používa sa miesto stupnice cieľová značka.



Obr. 17.7. Schéma autokolimátora



Obr. 17.8. Obraz v zornom poli autokolimátora pri nekolmosti zrkadla



Obr. 17.9. Umiestnenie zrkadla a autokolimátora pri meraní

Ďalším prístrojom, ktorý sa používa na meranie priamosti je autokolimátor. Je to ďalekohľad zaostrený do nekonečna. V jeho ohniskovej rovine je umiestnená zameriavacia platnička (3) s vyrytým krížom a stupnicami (obr. 17.7). Polovica platničky, na ktorej je vyrytý kríž, je zakrytá pravouhlým hranolom (5), ktorý ju presvetľuje svetlom žiarovky (7). Ako je vidieť na obr. 17.7, vychádza zo stredu kríža *A* platničky (3) zväzok lúčov, ktorý sa po prechode objektívom (2) mení na zväzok rovnobežných lúčov zvierajúcich s optickou osou malý uhol α. Ak postavíme pred objektív ďalekohľadu rovinné zrkadlo (1) tak, aby jeho odrazová plocha bola kolmá na optickú os, odrazí sa tento zväzok naspäť do objektívu a zobrazí bod *A* v bode *A'*, ktorý je totožný s bodom *B* zhodným so stredom stupnice na platničke (3).

Ak nebude zrkadlo (1) stáť kolmo k optickej osi ďalekohľadu, padne obraz A' mimo stred B stupnice (obr. 17.8). Vodorovný alebo zvislý sklon zrkadla je možné jednoducho odčítať na odpovedajúcich stupniciach.

V praxi býva zrkadlo (1) upevnené na vozíku, ktorým posúvame po meranej ploche pred objektívom autokolimátora (2) (obr. 17.9). Pretože sa odrazený zväzok lúčov pri vychýlení zrkadla o uhol φ vychýli o uhol 2φ, je meranie autokolimátorom presnejšie ako meranie ďalekohľadom a kolimátorom.

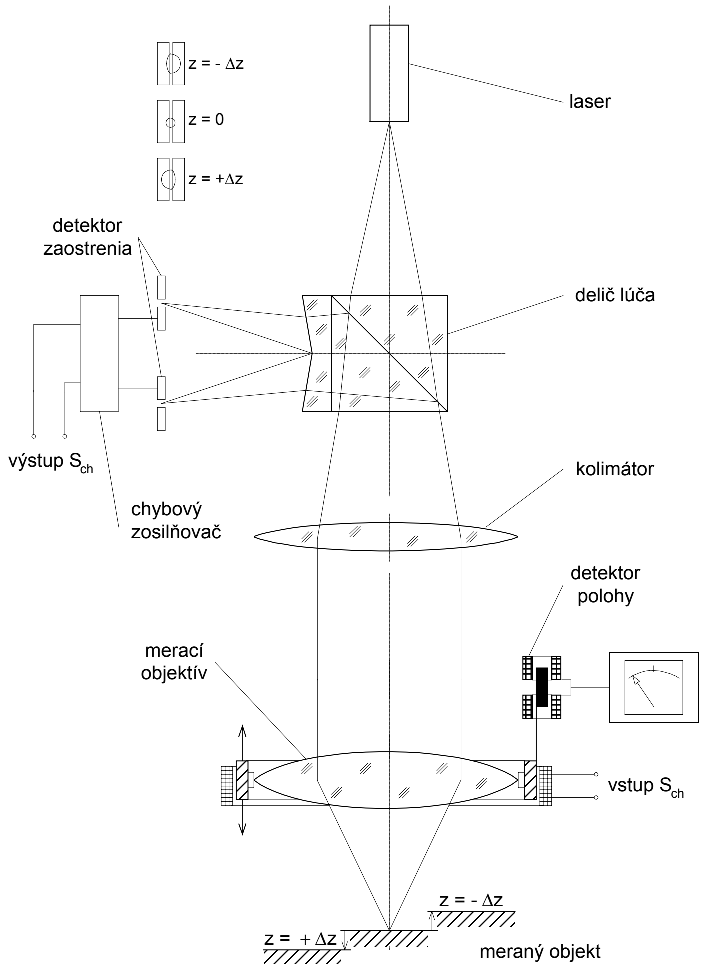
17. 2 Bezdotykové meranie dĺžok

Bezdotykové optické meracie prístroje na meranie dĺžok umožňujú kontrolovať rozmery súčiastok vyrobených z materiálov u ktorých by mohlo dôjsť pri dotyku meracieho hrotu k deformácii povrchu pripadne poškodeniu, a tým aj skresleniu nameranej hodnoty. Sú to napr. diamantom sústružené optické súčiastky, šošovky z plastu, alebo všeobecne mäkké tvarové súčiastky.

Bezdotykové meranie je tiež potrebné v hromadnej výrobe, pri ktorej sa vykonáva 100% kontrola pri vysokej rýchlosti merania. Vývoj optických meracích prístrojov v posledných rokoch rýchle napreduje aj vďaka výpočtovej technike a jej aplikacií v tejto oblasti. Jedným z predstaviteľov tejto skupiny prístrojov je ďalej uvedený dynamický merací systém (používaný aj na čítanie kompaktných diskov).

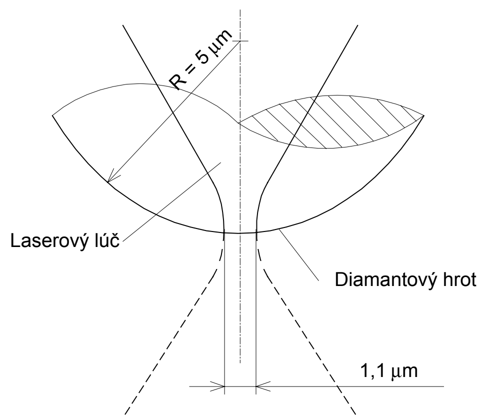
Princíp merania

Schéma meracej hlavice je uvedená na obr. 17.10. Divergentný zväzok lúčov laserovej diódy je kolimátorom usmernený rovnobežne a meracím objektívom sústredený do jeho ohniska. Od povrchu meraného objektu odrazené svetlo sa vracia späť. Deličom lúčov je odklonený a dopadá na dva páry fotodiód. Dvojprizma rozdeľuje zväzok lúčov na dve polovice, a tak na každý pár fotodiód dopadá polovica. V prípade, že $z = 0$ je povrch meraného objektu v ohnisku a na diódy dopadá svetlo o rovnakej intenzite. Ak sa vertikálne posunie povrch meraného objektu o $+\Delta z$ alebo $-\Delta z$ zmení sa aj ťažisko lúčov na fotodiódach. Z výsledného rozdielu intenzity dopadajúcich lúčov sa odvodí chybový signál S_{ch}, pomocou ktorého sa koriguje poloha meracieho objektívu tak, aby povrch meraného objektu bol v ohnisku.



Obr. 17.10. Schéma dynamického optického meracieho systému

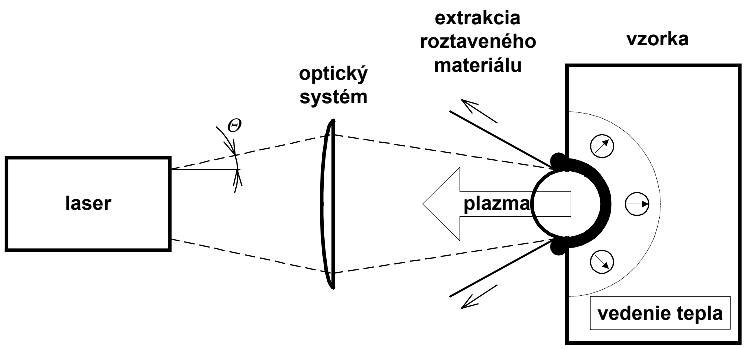
Ak použitá optika zobrazuje dostatočne presne, dá sa nastaviť poloha objektu do ohniska až na niekoľko nanometrov. Pre ohniskovú vzdialenosť meracieho objektívu 1mm sa dá dosiahnuť priemer laserového lúča v ohnisku až 1,1μm a pri ohniskovej vzdialenosti meracieho objektívu 4,5 mm je priemer lúča v ohnisku 2,2 μm. Porovnanie veľkosti stopy laserového lúča s diamantovým dotykom používaným na meranie drsnosti povrchu ja na obr. 17.11. Ak povrch objektu je mimo ohniskovej roviny, veľkosť svetelnej stopy je závilá od svetelnosti objektívu a polohy objektu. Pri vzdialenosti 0,01 mm od ohniskovej roviny a svetelnosti 1:1 je priemer osvetlenej stopy približne 10 μm! Zmena polohy meracieho objektívu je vykonávaná servopohonom ovládaným chybovým signálom. S meracím objektívom je spojený detektor polohy, ktorý je zostavený z indukčného snímača a vyhodnocovacej jednotky vybavenej buď analógovym alebo číslicovým ukazovacím prístrojom a tiež výstupom s analógovým elektrickým signálom vhodným na ďalšie spracovanie.



Obr. 17.11. Schématické porovnanie veľkosti diamantového hrotu a laseroveho lúča v ohnisku

17. 3 Základné princípy pôsobenia laserového lúča na materiál

Laser je možno použiť ako významný nekonvenčný intenzívny zdroj lokálneho ohrevu takej intenzity, že jeho využitie zasahuje aj oblasť strojárenských technológií, najmä obrábania, zvárania a povrchovej úpravy.



Obr. 17.12. Schéma interakcie laserový lúč - materiál

Bežné usporiadanie pri obrábaní materiálu je na obr. 17.12. Žiarenie lasera je fokusačnou optikou sústredené na povrch materiálu, aby bola dosiahnutá potrebná hustota výkonu I potrebného na jeho spracovanie. Žiarenie laserového zväzku charakterizované výkonom P a divergenciou Θ je fokusované optickým systémom do kruhovej stopy o polomere w_f na povrchu materiálu s hustotou výkonu

$$I = P / \pi w_f^2 , \tag{17.2.}$$

kde $w_f = \Theta f$ (f je ohnisková vzdialenosť).

Energia lasera absorbovaná materiálom je

$$W_A = \int_{t_L} \int_{S_f} A\big(I(w,t), \lambda_0\big).I(w,t) dS\, dt , \tag{17.3.}$$

kde A je absorbcia materiálu, ktorá môže závisieť od hustoty výkonu I a tým aj od polohy a času, dS je element plochy, $S_f = \pi w_f^2$ je osvetlená plocha a t_L doba trvania osvetlenia.

Podľa hustoty výkonu a spôsobu zužitkovania vzniknutého tepla je možné technologické procesy zásadne zaradiť do dvoch skupín rozlíšených tzv. kritickou hustotou výkonu I_v, definovanou ako prahová hustota výkonu vyparovania.

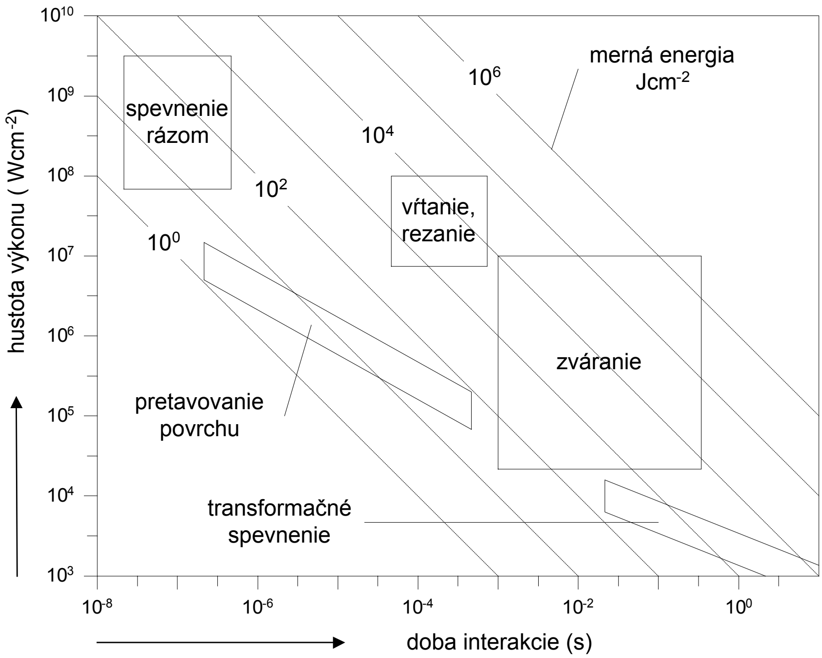
Pri hustotách výkonu nižších ako je prahová hustota ($I<I_v$), dochádza k význačnému odvodu vzniknutého tepla do vzorky. Nedochádza k zásadným zmenám geometrického tvaru povrchu spracovávaného telesa, ale skôr ku zmenám vlastnosti materiálu v jeho povrchovej vrstve. Bežné technologické aplikácie sú povrchové žíhanie, transformačné spevnenie v tuhom stave, legovanie povrchu a zváranie. Charakteristickým rysom týchto technológií je v ideálnom prípade neprítomnosť plazmy indukovanej laserom a absorpcia nezávislá od hustoty výkonu lasera.

Pri hustotách výkonu značne väčších ako je prahová hustota ($I>>I_v$), sa značná časť vzniknutého teplo využije na prevod materiálu do plynného stavu alebo plazmy. Medzi bežné technologické aplikácie patria obrábanie a delenie materiálu, vŕtanie a procesy spojené s tavením ako zváranie a iné. Charakteristikou tejto oblasti hustôt výkonu je vznik čiastočne ionizovanej plazmy a závislosť absorpcie od hustoty výkonu.

Parametre charakterizujúce spracovateľské vlastnosti laserového zväzku sú:

- vlnová dĺžka λ,
- hustota výkonu $I(w,t)$, meraná na povrchu materiálu.

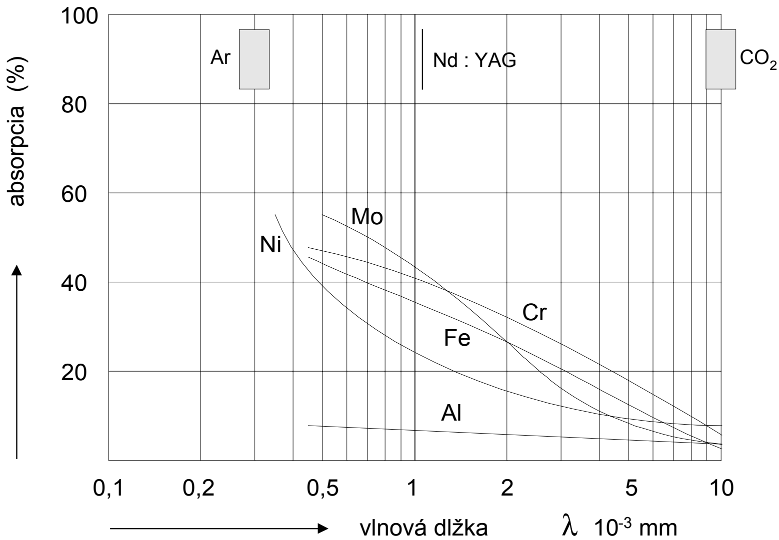
Časové a priestorové rozloženie hustoty výkonu na povrchu materiálu je funkciou módovej štruktúry, prípadne vonkajšej modulácie alebo ich kombináciou.



Obr. 17.13. Oblasti technologického využitia lasera

Hustota výkonu I je najvýznamnejší spracovateľský parameter lasera. Určuje optimálnu rýchlosť vzájomného pohybu lasera a materiálu a účinnosť daného typu spracovania a má teda významný vplyv na výslednú akosť spracovania. Hustoty výkonu a doby interakcie potrebné pri jednotlivých technologických aplikáciach sú na obr. 17.13.

Dôležité materiálové spracovateľské parametre sú absorpcia $A_\lambda(T,I)$, tepelná vodivosť K_{mat} a charakteristické parametre pre dané technologické spracovanie (teplota tavenia, vyparovania a pod.). Absorbcia za normálnych podmienok (s výnimkou malých hustôt výkonu) závisí od vlnovej dĺžky a hustoty výkonu laserového žiarenia a od teploty materiálu v mieste dopadu laserového zväzku. Odraz a tepelná vodivosť sú prevažujúce mechanizmy strát pri optickom spracovaní materiálu. Zníženie týchto strát na najnižšiu možnú mieru je jedno z kritérií pri stanovení zodpovedajúcej hustoty výkonu. Energia lasera absorbovaná materiálom a výsledná účinnosť spracovania sú úmerné A_λ. Absorpčná schopnosť väčšiny kovov je však malá, ako ukazuje graf závislosti absorpcie od vlnovej dĺžky žiarenia na obr. 17.14.



Obr. 17.14. Závislosť absorpcie niektorých kovov od vlnovej dĺžky žiarenia lasera

Vybrané technologické aplikácie laserov

Prednosti lasera v priemyselných aplikáciách pri porovnaní s klasickými technológiami je možné charakterizovať nasledujúcim spôsobom:

- použitie lasera pre obrábanie je adaptabilné. Pri zmene technológie sa nevyžaduje zmena „nástroja“,
- prevádzka lasera je čistá. Pri spracovaní materiálu laserom nie je potrebné ani mazivo, ani chladiaca kvapalina. Technológia je v podstate bezodpadová – nevznikajú triesky. Splodiny interakcie laserového zväzku s materiálom sa dajú pomerne dobre a účinne odsávať,
- laser je „bezkontaktný“ nástroj, a preto u neho odpadá pojem priameho opotrebovania, ktoré sa presúva na prvky optického systému s menším dopadom na akosť výroby,
- prevádzka lasera je tichá, hlboko pod hranicou hluku odpovedajúcich konvenčných technológií,
- laserový zväzok je možné deliť. Z jedného zdroja je možné súčasne priviesť na rôzne pracovné miesta sústavou špeciálnych zrkadiel čiastkové zväzky, čím sa podstatne zvyšuje jeho využitie,
- bežne sa dosahuje veľkej presnosti oblasti ožiarenej laserom,
- tepelne ovplyvnená oblasť je malá,

- technologický proces je možno automatizovať a výrobné operácie robotizovať. Laser sa dá s výhodou zaradiť do automatizovaných pružných výrobných systémov,
- prípravné práce a nastavovanie sú časovo pomerne málo náročné.

Z nevýhod je možno uviesť:

- pomerne vysoká zavádzacia cena,
- potreba dovozu náhradných dielov, predovšetkým optického systému,
- požiadavka vysoko kvalifikovanej údržby,
- prísne bezpečnostné opatrenia.

Metódy laserového delenia materiálov

Delenie materiálu je možné troma rôznymi spôsobmi. Pri laserovom pretavovaní dochádza absorbciou energie laserového zväzku fokusovaného do ohniska priemeru 0,05 až 0,25 mm k ohrevu materiálu nad teplotou tavenia. Roztavený materiál sa z medzery odstraňuje prúdom inertného plynu vedeného dýzou koaxiálne s laserovým zväzkom. U nekovových materiálov, ktoré dobre horia, (napr. plexisklo, polypropylén, PVC atď.) sa používa inertných plynov, napr. argónu alebo dusíka, ako ochrany proti vznieteniu alebo opáleniu rezaných hrán. Táto metóda je charakteristická veľkou rýchlosťou rezania a malou spotrebou energie na jednotku dĺžky rezu. Na reze je vidieť stopy po odbere materiálu a v niektorých prípadoch kvapky rozstrieknutého kovu na spodnej strane.

Variant laserového pretavovania je laserové sublimačné rezanie, pri ktorom fokusovaný laserový zväzok ohrieva materiál na teplotu odparenia. Vznikajúce pary sa z rezanej medzery odstraňujú prúdom inertného plynu z dýzy. Charakteristickými rysmi tejto metódy je úzka rezná medzera a veľmi dobrá akosť rezu. V porovnaní s laserovým pretavovaním je však spotreba energie na jednotku dĺžky rezu väčšia.

Pri laserovom pálení sa materiál v mieste dopadu laserového zväzku ohreje na zápalnú teplotu a spáli v prúde aktívneho plynu – najčastejšie kyslíka. Oxidačný účinok sa prejavuje jednak počiatočnou oxidáciou povrchu, a tým zvýšením schopnosti materiálu absorbovať energiu lasera (znížením koeficientu odrazivosti), jednak vznikom prídavného exotermického reakčného tepla horenia, ktoré sa prejavuje podstatným zväčšením rýchlosti rezania. Vlastný proces rezania je potom dôsledkom exotermickej reakcie materiálu s kyslíkom.

CO_2 lasery sú najhospodárnejšie pre rezanie ocele do hrúbky cca 6 až 7 mm. Technicky je však možno rezať oceľ do hrúbky cca 17 mm. Rezať možno i plechy povrchovo upravené, napr. pozinkované. Laserom je možno rezať aj plastické hmoty, gumu, textil, papier, kompozitné materiály a drevo.

Tabuľka 17.1.

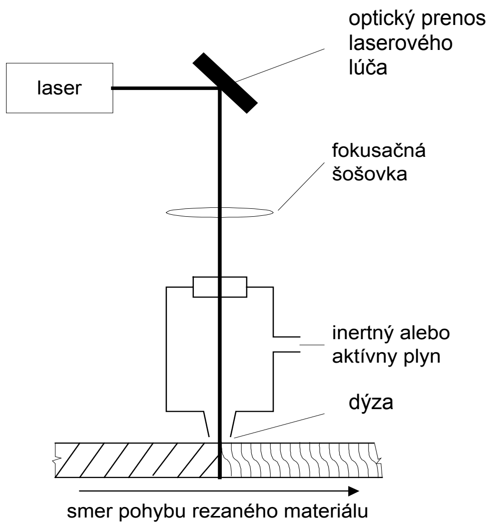
Rýchlosť rezania materiálov CO_2 laserom o výkone 2 kW s ochraným plynom

Materiál	Hrúbka [mm]	Rýchlosť rezania [m/min]
Mäkké drevo	25	2,0
Tvrdé drevo	25	1
Koža (6 vrstiev)	12	1,1
Pertinax	9	12
Prírodná pryž	25	0,7
Mäkká oceľ	0,9	8
Mäkká oceľ	4,2	4,5
Korozivzdorná oceľ18/8	2	4
Korozivzdorná oceľ18/8	6,3	2,1
Nástrojová oceľ	2	7,8
Nástrojová oceľ	6,5	2,0
Hliník	1,6	2,4
Hliník	4	0,5
Dural	3,5	0,6
Oceľ Cr-Mo	0,25	30
Titan	3,5	0,4
Pozn.: Uvedené údaje zodpovedajú maximálnej akosti rezu skôr než maximálnej rýchlosti rezu.		

Hlavné prednosti lasera pri rezaní sú:

- veľké rezné rýchlosti (tab.17.1),
- rezané hrany majú veľmi dobrú akosť povrchu a obyčajne nevyžadujú ďalšie úpravy,
- tvarové rezy vyžadujú len veľmi malé zaoblenie (závisí od priemeru zväzku),
- okrajová oblasť ocele tepelne ovplyvnená laserom je veľmi úzka, t. j. približne asi o 75 % užšia ako okrajová zóna ovplyvnená mechanickým spevnením, napr. pri strihaní mechanickými nožnicami.

Rezanie laserom je možné použiť v plno automatizovaných pružných výrobných linkách, kde je možné využiť všetky jeho prednosti. Uplatnenie však nájde i pri výrobe prototypov s veľmi zložitými tvarmi rezaných plôch i priestorových. Presnosť tvaru rezu a jeho reprodukovateľnosť je limitovaná presnosťou zariadenia pre vedenie laserovej rezacej hlavy, príp. číslicovo riadeného súradnicového stola. Schéma funkcie zariadenia na delenie materiálu laserom je na obr. 17.15.



Obr. 17.15. Schéma zariadenia na delenie materiálu laserom

Odhad rýchlosti rezania

Pri laserovom rezaní je možný odhad maximálnej rýchlosti rezania nasledujúcim spôsobom. Predpokladajme, že na čele rezu sa dosiahne teploty sublimácie, materiál sa vyparuje a bezo zvyšku reaguje s kyslíkom prúdiacim súbežne s laserovým zväzkom z dýzy. Pri zanedbaní tepelných strát vedením tepla do rezaného dielu, vyžarovaním tepla a ochladzovaním plynom (pri veľkých rezných rýchlostiach, úzkej medzere a nízkom tlaku plynu sú malé) je energetická bilancia tohto kvázisublimačného procesu daná vzťahom:

$$P_L + P_R = P_S + P_K \,, \tag{17.4}$$

kde P_L – absorbovaný výkon lasera, P_R – teplo uvoľnené chemickou reakciou za jednotku času, P_S – spotreba energie za jednotku času potrebnej pre ohrev a odparenie materiálu odstraňovaného z reznej medzery a P_K – odvedené teplo za jednotku času.

Ak je ohrev dostatočne intenzívny, dôjde k zmene skupenstva povrchovej vrstvy za takú krátku dobu, že množstvo tepla odvedeného do materiálu je voči celkovému príkonu možné zanedbať. Potom z rovnice (17.4) dostaneme pre rýchlosť:

$$v_s = \frac{P_L}{\rho.h.s\left(\Delta G_S - \Delta G_R\right)}, \tag{17.5}$$

kde ρ - hustota materiálu, h - hrúbka materiálu, s - šírka medzery, ΔG_S - kvázisublimačná energia na jednotku hmoty a ΔG_R - reakčné teplo na jednotku hmoty.

Povrchové úpravy

Z praktického hľadiska je možno povrchové úpravy kovových materiálov rozdeliť do dvoch kategorii podľa toho, či dochádza alebo nedochádza k nataveniu povrchu materiálu.

Do kategorie pri ktorej nedochádza k nataveniu povrchu patrí také spracovanie, ktorého podstatou sú metalurgické fázové premeny. Hlavným predstaviteľom tejto kategórie sú transformačné spevnenia v tuhom stave ocele a liatin a žíhanie zliatin neželezných kovov. Druhú kategóriu tvorí tepelné spracovanie povrchu s natavením, a to ako samotného substrátu, t. j. bez modifikácie chemického zloženia povrchovej vrstvy, tak tiež s dolegovanim v rôznych formách.

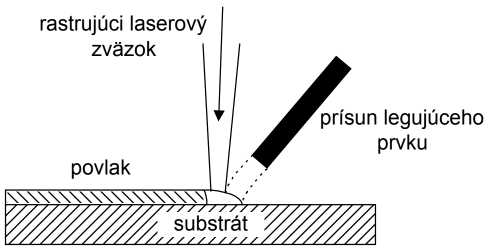
Transformačné spevnenie v tuhom stave

Transformačné spevnenie v tuhom stave je proces, ktorým sa lokalizovaným zdrojom tepla laserom – zvýši teplota vybranej oblasti povrchu spracovaného materiálu nad transformačnú teplotu, ale pod bod topenia materiálu. Pri dostatočnej hmotnosti dielu dôjde k veľmi rýchlemu odvodu tepla z povrchovej oblasti ožiarenej laserom do jeho masívnej časti a k vytvoreniu tvrdej metastabilnej transformačnej štruktúry v tejto povrchovej vrstve súčastí.

U materiálov na báze železa (ocele a liatin) sa perlitická povrchová vrstva ohreje laserom nad austenitizačnú teplotu a potom prudko ochladí samokaliacou schopnosťou odvodom tepla do vnútra spracovaného dielu za vzniku martenzitickej štruktúry.

Pri klasickom objemovom kalení je rýchlosť ohrevu povrchu materiálu malá v porovnaní s rýchlosťou odvodu tepla do materiálu. Pri takomto spôsobe kalenia sa súčiastka ohrieva v celom objeme a následné rýchle ochladenie spôsobuje vnútorné pnutie a obvykle vyžaduje ďalšie tepelné spracovanie. K tomu pristupujú objemové zmeny najmä u súčiastok, u ktorých prevláda jeden rozmer a ktoré vyžadujú ďalšie technologické spracovanie, napr. rovnanie.

Pri transformačnom spevnení laserom je rýchlosť ohrevu povrchu materiálu veľká v porovnaní s rýchlosťou odvodu tepla do masívnej časti materiálu po dobu ožiarenia. Materiál v krátkom čase interakcie s laserovým zväzkom nedokáže odviesť teplo rýchlejšie, než sa povrchová vrstva dostane bezpečne nad teplotu premeny. Po skončení interakcie s laserovým zväzkom chladnejší základný materiál rýchle odvedie teplo z povrchu a v tenkej povrchovej vrstve dochádza k transformačnému spevneniu.



Obr. 17.16. Schematické znázornenie procesu laserového povlakovania

Kovy majú značnú odrazivosť (malú schopnosť absorbcie) pre žiarenie vlnovej dĺžky 10,6 μm (CO_2 laser). Zo závislosti koeficientu obsorbcie na hustote výkonu vyplýva, že pre transformačné spevnenie laserom (hustoty výkonu 104 až 106 Wcm^{-2}), kde nedochádza k nataveniu povrchu, je koeficient absorbcie menší než 10 %. Takéto tepelné spracovanie by bolo veľmi neefektívné, pretože 90 % energie by sa stratilo odrazom od povrchu materiálu. Problém zvýšenia koeficientu absorbcie sa prakticky rieši pokrytím pôvodného kovového povrchu látkou s veľkým koeficientom absorbcie. Vhodnými materiálmi sú rôzne typy oxydov kovov, Mn alebo Zn-fosfát, koloidný grafit a v niektorých menej náročných prípadoch aj matná čierna farba.

Obrábanie

Účelom laserového obrábania, známeho tiež ako fotónové obrábanie, je úber presne definovaného objemu materiálu obrobku fotónovou eróziou. Laser pritom plní funkciu intenzívneho zdroja tepla. Využíva sa ho doposiaľ najmä na obrábanie ťažko obrobiteľných alebo klasickými spôsobmi neobrobiteľných materiálov (napr. keramiky), k zvýšeniu obrábacích výkonov pri optimálnych hodnotách reznej sily, príp. k získaniu špeciálnych vlastností obrobenej plochy.

V súčasnej dobe sa experimentálne overujú tri základné metódy obrábania využitím laseru:

1. **Sústruženie s predhrevom pomocou laseru** (LAM – Laser-Assisted Machining), pri ktorom sa trieska odoberá klasickým rezným nástrojom po lokálnom predhreve odoberaného materiálu laserom.
2. **Sústruženie laserom** (LM – Laser Machining), pri ktorom dochádza k odberu materiálu obrobku v kvapalnej alebo plynnej fáze pôsobením laserového zväzku.
3. **Sústruženie laserom s lokálnym nastavením** (LMLM – Laser Machining by Localized Melting), pri ktorom funkciu chrbta klasického bezbritového nástroja preberá tavný účinok laserového zväzku.

Pri sústružení s predohrevom (LAM) je laserový zväzok z CO_2 lasera o výkone nad 1 kW pracujúceho v kontinuálnom režime vedený sústavou zrkadiel a fokusovaný šošovkou na miesto s konštantnou vzdialenosťou δ pred ostrím sústružníckeho noža. Laser vo funkcii intenzívneho zdroja tepla ohrieva materiál v strihovej rovine, v ktorej sa formuje trieska. Ohrev materiálu v strihovej rovine má významný vplyv na zväčšenie množstva odoberaného materiálu, predĺženie životnosti rezného nástroja a zlepšenie drsnosti povrchu obrobku, príp. rozloženia ostatkových pnutí či obmedzenie alebo elimináciu vznikajúcich trhliniek.

Jedným z najvýznamnejších dôvodov pre zavádzanie metódy LM je zmenšovanie reznej sily. Napr. pri obrábaní precipitačne vytvrdzovanej zliatiny INCONEL 718 bolo možné pri konštantnej reznej sile zvýšiť reznú rýchlosť využitím lokálneho ohrevu laserom s výkonom 2, 5, 10 a 16 kW o 25, 50, 75 a 100 %.

Rozdiel oproti metóde LAM je v tom, že laserový zväzok je pre obrábanie valcových plôch vedený radiálne k obrobku a pre čelné obrábanie v smere axiálnom. Sústruženie metódou LM je založené na vytváraní drážok (rýh) na povrchu obrobku odparením materiálu po jeho interakcii s laserovým zväzkom, pričom stopa laserového zväzku vytvára na povrchu obrobku skrutkovice. Reguláciu posuvu je možné meniť prekrývaním závitov skrutkovice a odoberať celé vrstvy materiálu.

Technolgické využitie laserov patrí k najprogresívnejším inovačným prvkom v súčasnosti. So zlepšujúcimi sa technicko-ekonomickými parametrami, prevádzkovými vlastnosťami, spoľahlivosťou a účinnosťou laserových zdrojov sa neustále rozširuje rozsah v strojárskych technologických aplikáciách.

Literatúra

[1] JOZA, J.: Měření tvaru a rozměrů velkých součástí. SNTL/ALFA Praha 1982. 400s.
[2] SADOWSKI A., KREHLLÍK R.: Lasery v obrábění a metrológii. SNTL Praha, 1977, 120s.
[3] MLČOCH, L., SLIMÁK, I.: Řízení kvality a strojírenská metrológie. SNTL/ALFA 1987. 336s.
[4] ŠIMAN, I.: Využití laserů ve strojírenských technologických aplikacích. Strojírenství, č. 5, 1989, s. 285 - 300.

18. Niektoré aplikácie optiky v geodézii

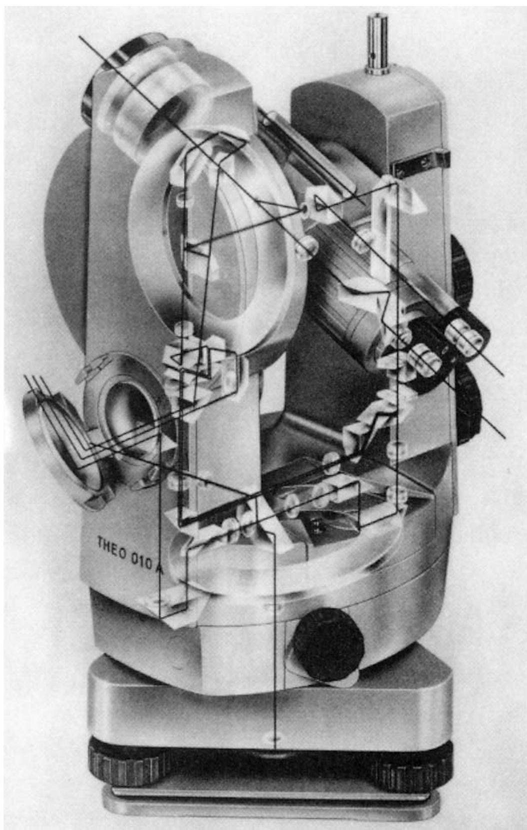
Optika a elektronika spolu s mechanickými časťami tvoria základ všetkých geodetických, fotogrametrických a astronomických prístrojov. Prístroje využívajú pasívny a aktívny svetelný lúč. Pasívny lúč vníma merač v strede zámerného kríža meracieho prístroja, aktívny predstavuje stopa laserového lúča.

Optiku v geodetických prístrojoch predstavujú celky: ďalekohľad, mikroskop, stereoskop, objektív fotokamery a pod. Optické časti využívané v geodetických prístrojoch sú napr.: delené uhlomerné kruhy, hranoly, planparalelné dosky, lupy, zrkadlá. Súčasťou geodetických prístrojov sú lasery, či už priamo zabudované do konštrukcie telesa prístroja alebo ako ich nasadzovacie časti. Vlastnosti svetla sa využívajú na meranie dĺžok, elektronické čítanie vodorovných a zvislých uhlov, vytyčovanie, stereoskopické videnie. Stav optického prostredia sa zohľadňuje pri eliminácii terestrickej a astronomickej refrakcie. Praktické využitie interferencie lúčov je v testovaní rovinnosti fotogrametrických platní a pri kalibrácii meračských pomôcok.

V tejto kapitole sú uvedené niektoré aplikácie optiky v konštrukcii základných geodetických prístrojov a v metódach merania a vytyčovania.

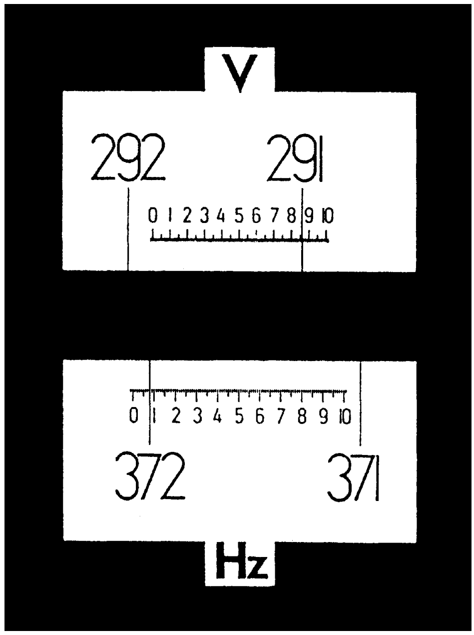
18.1 Teodolit

Teodolit je univerzálny optický prístroj na meranie a vytyčovanie uhlov (vodorovných a zvislých) a dĺžok (obr. 18.1). Doplňujúce časti na prístroji ho špecializujú na určité druhy výkonov a vytvárajú z neho optický alebo elektronický diaľkomer, laserový teodolit, buzolový teodolit. Zhrnutie vlastností všetkých prístrojov do jedného celku z neho vytvára univerzálny merací prístroj.



Obr. 18.1. Teodolit

Základnou optickou časťou teodolitu je otočne upevnenený ďalekohľad a delené kruhy, na ktorých sa číta postavenie osi ďalekohľadu. Kvalita a použiteľnosť ďalekohľadu pre špecializované meračské výkony sa posudzuje podľa zväčšenia, veľkosti zorného poľa, jasnosti a rozlišovacej schopnosti. Všetky tieto faktory sa podieľajú na chybe zo zacielenia na meraný bod. Podpornou časťou čítacieho zariadenia je mikroskop. U jednotlivých typov prístrojov sa používa mikroskop so stupnicou (stupnicový mikroskop obr. 18.2), mikroskop s jednou alebo dvoma planparalelnými doskami. Osvetlenie vodorovného a výškového kruhu zaisťuje zrkadielko. Systém hranolov zobrazuje kruhy v predmetovej rovine čítacieho mikroskopu. Optický systém na čítanie uhlových hodnôt u presných teodolitov je doplnený optickým mikrometrom (mikrometrickým okulárom). Uhly sa udávajú spravidla v grádoch (gónoch)[1]



Obr. 18.2. Stupnicový mikroskop. (Čítanie na verikálnom kruhu $V = 291{,}86^g$, čítanie na horizontálnom kruhu $Hz = 372{,}08^g$). Uhlové údaje sú v grádoch (gónoch)

18.2 Optický diaľkomer

Optické meranie dĺžok je založené na princípe riešenia pravouhlého alebo rovnoramenného trojuholníka (obr. 18.3), v ktorom sa neznáma dĺžka s určí z dvoch známych veličín: základnice l a paralaktického (diaľkomerného) uhla δ:

$$s = l \operatorname{cotg} \delta, \tag{18.1}$$

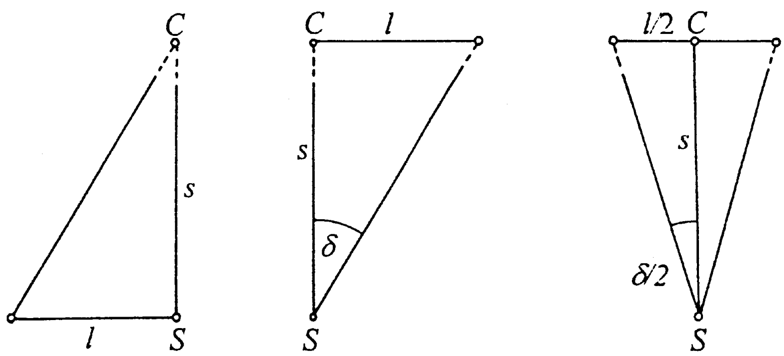
alebo

$$s = \frac{l}{2} \operatorname{cotg} \delta / 2 \,. \tag{18.2}$$

Základnica l môže byť umiestnená buď priamo v prístroji na stanovisku S (obr. 18.3 a), alebo na konci meranej dĺžky v cieli C a tvorí samostatnú meračskú pomôcku -

[1] Jeden grád je stotina pravého uhla.

meraciu latu (obr. 18.3 b, c). Základnica sa podľa konštrukcie diaľkomera umiestňuje do vodorovnej alebo zvislej polohy.



Obr. 18.3. Metódy optického merania dĺžok

Nitkový diaľkomer. Ďalekohľad nitkového diaľkomera v ohniskovej rovine okulára má umiestnenú planparalelnú sklenenú doštičku, do ktorej je vyrytý zámerný kríž a dve diaľkomerné rysky, symetricky umiestnené k zámernému krížu. Známu vzájomnú vzdialenosť rysiek y je možné v spojení s meracou latou použiť na meranie vzdialenosti. Pre vodorovnú zámeru určíme dĺžku s podľa rovnice (obr. 18.4):

$$s = s' + \Delta + f \,. \tag{18.3}$$

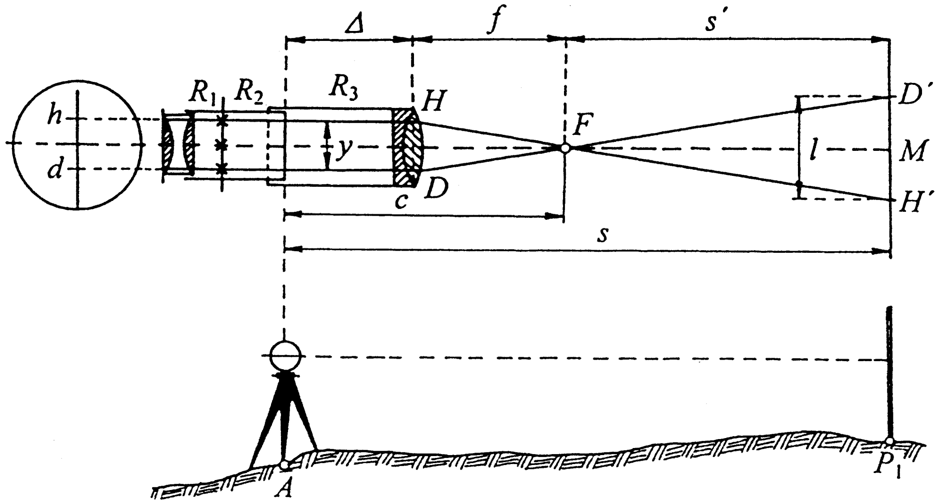
Z podobných trojuholníkov ΔFDH a $\Delta FD'H'$ určíme vzťah pre vzdialenosť s':

$$s' = \frac{f}{y} l = Kl \,, \tag{18.4}$$

v ktorom f je ohnisková vzdialenosť objektívu,
y je vzdialenosť medzi diaľkomernými ryskami,
l predstavuje dĺžku latového úseku, vymedzenú diaľkomernými ryskami y,
$K = f / y$ a označuje násobnú konštantu, ktorá sa volí v hodnote $K = 100$,
Δ je vzdialenosť od vstupnej pupily objektívu po vertikálnu os teodolitu.

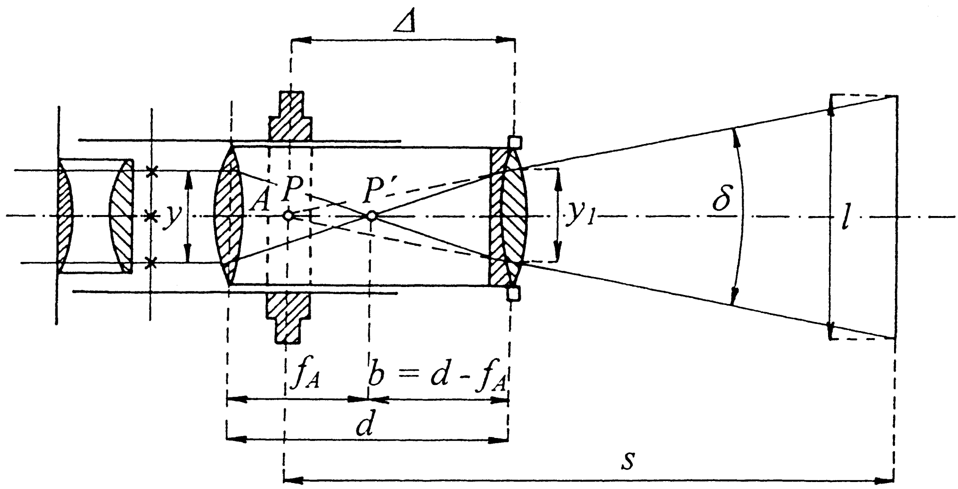
Ak vyjadríme vzdialenosť od predného ohniska objektívu po vertikálnu os teodolitu c, ktorá predstavuje súčtovú (adičnú) konštantu ($c = \Delta + f$), potom pre vzdialenosť platí:

$$s = Kl + c \,. \tag{18.5}$$



Obr. 18.4. Nitkový diaľkomer

Všetky teodolity novšej konštrukcie majú upravenú optickú schému ďalekohľadu tak, aby bol vrchol diaľkomerného uhla posunutý do otočnej osi ďalekohľadu, čím sa odstráni súčtová konštanta (c = 0). Táto úprava spočíva v doplnení ďalekohľadu takzvanou „analaktickou šošovkou" (obr. 18.5). Je to spojná šošovka umiestnená medzi objektívom a jeho ohniskom. Jej použitím sa obraz vytvorený objektívom posúva bližšie k objektívu, takže i ohnisková rovina okulára je pri zaostrenom ďalekohľade objektívu pozmenená. Postup pri určovaní vzdialenosti laty od teodolitu je zhodný s postupom pri obyčajnom ďalekohľade - čítame úsek medzi diaľkomernými ryskami na lati l a analogicky k vzťahu (18.2) určíme s.



Obr. 18.5. Analaktický ďalekohľad

Podobne, ako na schéme uvedenej na obr. 18.4, vyberme z lúčov vytvárajúcich obraz laty také, ktoré sú v mieste rysiek rovnobežné s optickou osou. Tieto lúče pred dopadom na analaktickú šošovku museli prechádzať jej ohniskom. Vtedy keď prechádzali objektívom boli od optickej osi vzdialené o hodnotu, ktorá predstavuje údaj $y_1/2$. Podľa obr. 18.5 platí

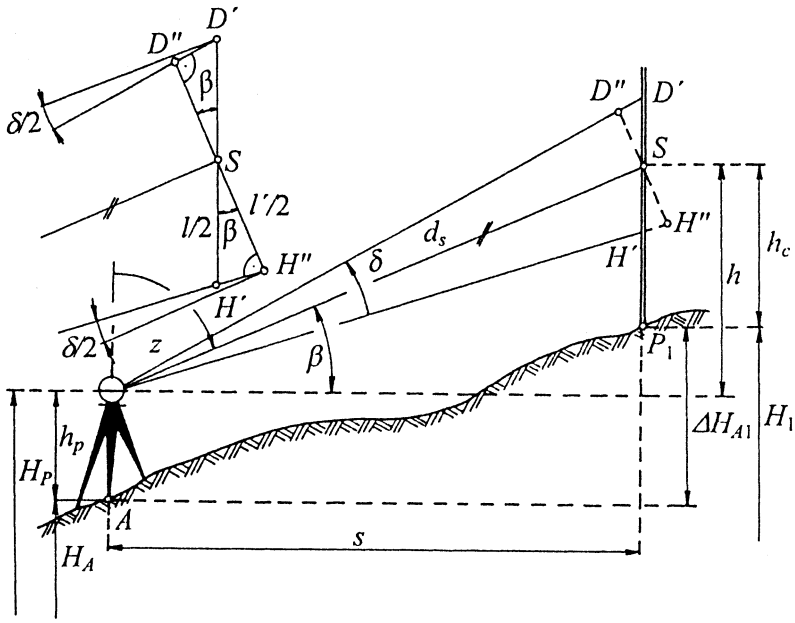
$$y_1 = y\frac{d - f_a}{f_a} , \tag{18.6}$$

kde y je vzdialenosť rysiek a d je vzdialenosť analaktickej šošovky od objektívu. Voľbou ohniskovej vzdialenosti a polohy analaktickej šošovky môžeme ovplyvňovať vzdialenosť y_1 a tým i uhol, ktorý zviera vybraný lúč s optickou osou v úseku medzi latou a objektívom. Voľbu d a f_a môžeme urobiť tak, aby sa lúče zodpovedajúce krajným bodom vybraného úseku laty pretínali práve vo vertikálnej osi teodolitu, teda tak, aby

$$\frac{s}{l} = \frac{\Delta}{y_1} \tag{18.7}$$

kde Δ je vzdialenosť vertikálnej osi teodolitu od objektívu. Keď zo vzťahu (18.7) vyjadríme s a y_1 vyjadríme podľa (18.6), dostaneme:

$$s = \frac{\Delta f_a}{y(d - f_a)} l . \tag{18.8}$$



Obr. 18.6. Určenie dĺžky pri sklonenej zámere

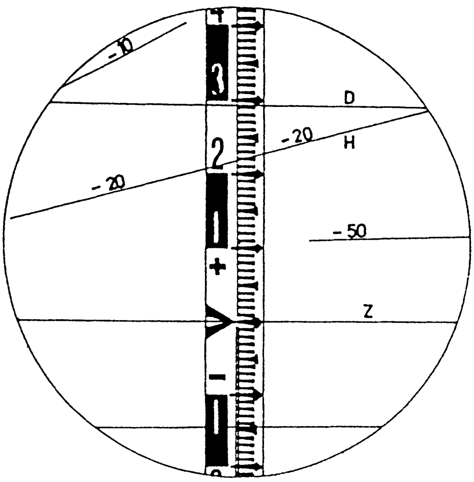
Ako je vidieť, vzdialenosť laty od vertikálnej osi teodolitu je úmerná latovému úseku l, ktorý sa zobrazil medzi diaľkomernými ryskami. Navyše parametre diaľkomera y, f_a, d a Δ môžeme voliť tak, aby konštanta $K = \dfrac{\Delta f_a}{y(d - f_a)}$ mala požadovanú hodnotu, najčastejšie $K = 100$.

Keď meriame v členitom teréne ďalekohľadom skloneným pod uhlom β (zenitovým uhlom z) a cielime na zvisle postavenú latu, odmeriame latový úsek l (obr. 18.6).

Z odmeraných hodnôt l a β (z) môžeme vypočítať vodorovnú vzdialenosť a prevýšenie h bodu S nad horizontom prístroja:

$$s = Kl\cos^2\beta = Kl\sin^2 z \ . \tag{18.9}$$

$$h = s\ tg\beta = Kl\cos^2\beta tg\beta = \frac{1}{2}Kl\sin 2\beta = \frac{1}{2}Kl\sin 2z\,. \tag{18.10}$$



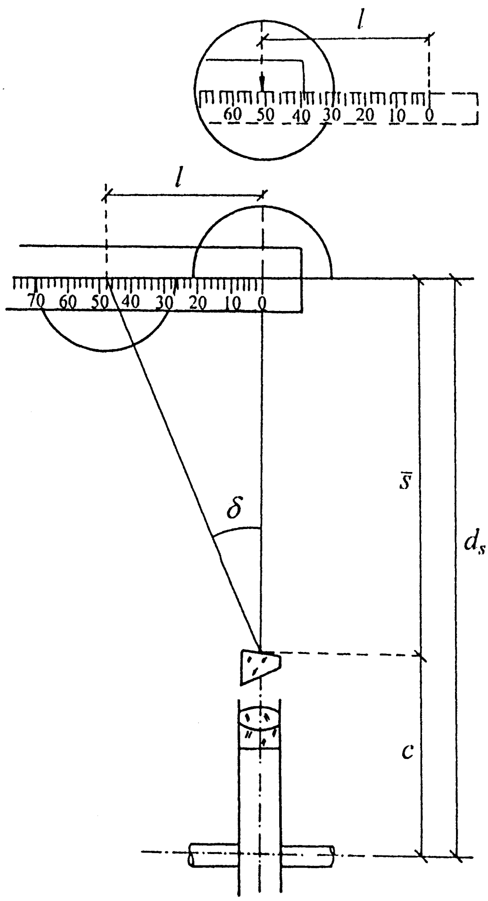
Obr. 18.7. Zorné pole diagramového diaľkomera DAHLTA 010 A Zeiss Čítanie: s = 29,1 m, h = -4,38 m

Pokrokový vývoj nitkových diaľkomerov predstavujú diagramové diaľkomery (obr. 18.7). Redukcia šikmej dĺžky na vodorovnú a určenie prevýšenia sa uskutočňuje pomocou dvojice kriviek diagramu o spojitej premennej odľahlosti, ktorá je závislá od sklonu ďalekohľadu.

Ak vodorovná vzdialenosť s a prevýšenie h má byť v jednoduchom vzťahu k meranému latovému úseku l pri akomkoľvek výškovom uhle β ($s = K_s\, l$ a $h = K_h\, l$), hodnoty násobných konštánt pre analaktický ďalekohľad budú vyjadrené výrazmi:

$$K_s = \frac{\Delta}{y_{1s}}\cos^2\beta \quad \text{a} \quad \mathrm{K_h} = \frac{\Delta}{2y_{1h}}\sin 2\beta\,, \tag{18.11}$$

v ktorých sú dve premenné: rozostup rysiek (y_{1s}, y_{1h}) a výškový uhol (β), Δ je vzdialenosť od vstupnej pupily objektívu ďalekohľadu po vertikálnu os.



Obr. 18.8. *Princíp dvojobrazového diaľkomera*

Násobné konštanty majú hodnoty K_s = 50, 100, 200; K_h = ±10, ±20, ±50, ±100 a využívajú sa v závislosti od meranej dĺžky a prevýšenia (obr. 18.7).

Teodolity doplnené klinovým hranolom (deviačným klinom), ktorý je predsadený pred objektív, sú tzv. **dvojobrazové diaľkomery**. Klinový hranol prekrýva polovicu zorného poľa ďalekohľadu. Lúče vstupujúce do objektívu jeho zakrytou a nezakrytou časťou, vytvárajú v rovine zámerného kríža vzájomne oproti sebe posunuté obrazy o uhol δ. Poloha indexu určuje latový úsek. Z dĺžky latového úseku l a uhla δ určíme vzdialenosť laty od vrcholu diaľkomerného uhla (obr. 18.8):

$$s = l \operatorname{cotg}\delta = K l\,, \qquad (18.12)$$

kde cotg δ = K = 100, pričom δ= 0,6366^{g} .

18.3 Elektronické diaľkomery

Fyzikálne spôsoby merania dĺžok sú založené na využití vlnových procesov. Rozdeľujú sa na zvukové, interferenčné a elektronické. Pre geodetické účely je najvhodnejšie elektronické meranie dĺžok.

Podstata merania dĺžok elektronickými diaľkomermi (elektrooptické a elektroakustické diaľkomery) je v tom, že zo známej rýchlosti šírenia elektromagnetických vĺn v a tranzitného času t, ktorý spotrebuje vlna na prebehnutie meranej dĺžky od vysielača po odrazové médium (reflektor) a späť do prijímača, sa určí dvojnásobok meranej dĺžky:

$$2\,s = v\,t. \qquad (18.13)$$

Ako reflektory sa používajú optické hranoly (zrkadlá), schopné odrazu svetla. Presnosť meranej dĺžky pri známej rýchlosti šírenia elektromagnetických vĺn závisí od presnosti merania času t, ktorý sa určuje pomocou vysielaných impulzov a ich príjmu po odrazení, alebo pomocou fázového rozdielu amplitúdovo modulovaných vysielaných a prijímaných vĺn. Impulzné (radiolokačné) diaľkomery majú menšiu presnosť, používajú sa na meranie veľmi dlhých vzdialeností $s > 100$ km.

Fázové elektrooptické diaľkomery. Na meranie dĺžok sa používa viditeľné svetlo $\lambda = 760$ až 390 nm, alebo infračervené svetlo $\lambda > 800$ nm. Tranzitný čas t môžeme vyjadriť ako celočíselný násobok periód vlnenia T a určitého zlomku periódy ΔT:

$$2\,s = v\,t = (n\,T + \Delta T) = v\,T\left(n + \frac{\Delta T}{T}\right), \tag{18.14}$$

kde $v\,T = \lambda$ je vlnová dĺžka,

$\frac{\Delta T}{T}$ je zlomok periódy, a keď sa vyjadrí v uhlovej miere nazýva sa fázový uhol.

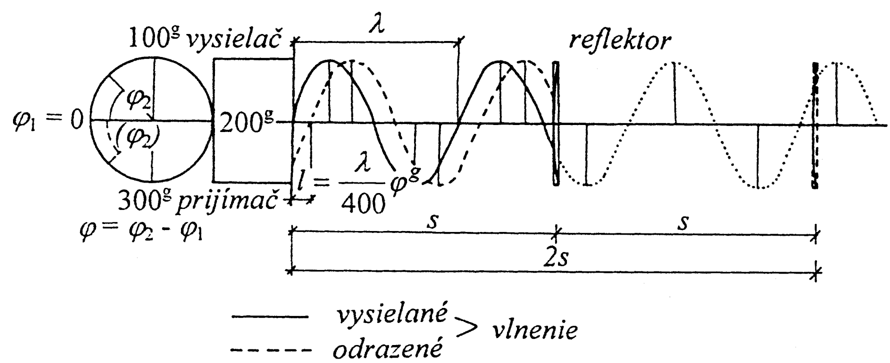
Dĺžka $2\,s$ sa vyjadrí:

$$2\,s = n\,\lambda + \frac{\lambda}{400}\varphi^g = n\,\lambda + l\,, \tag{18.15}$$

kde $n\,\lambda$ je celistvý počet vlnových dĺžok (násobok vĺn),

$\frac{\lambda}{400}\varphi^g = l$ je zlomok jednej vlny (domierka),

φ^g je fáza meraná v grádoch (obr. 18.9).



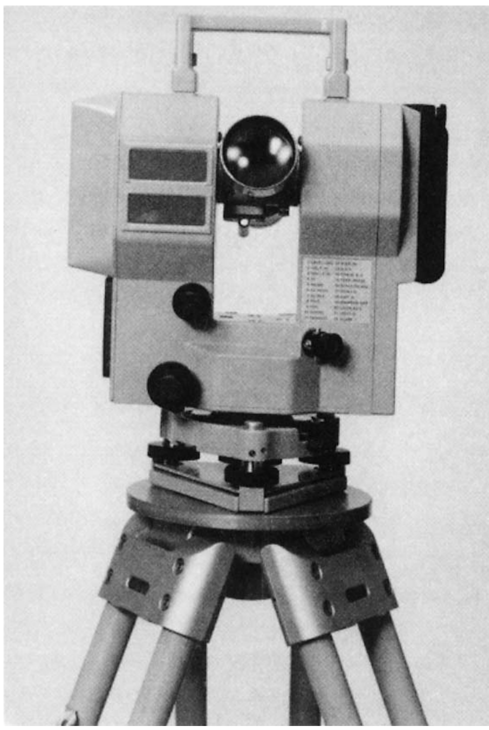
Obr. 18.9. Princíp elektrooptického merania dĺžok

Pretože vlnová dĺžka svetla je pre geodetické merania veľmi krátka, na určovanie vzdialenosti sa používa amplitúdovo modulované svetlo. Ak vlnovú dĺžku modulačného signálu, t. j. vzdialenosť dvoch susedných miest v ktorých modulovaná vlna nadobúda maximálnu hodnotu označíme L a prevrátenú hodnotu modulačnej frekvencie f označíme T, pre L a T budú platiť vzťahy (18.14) a (18.15) s tým, že v nich namiesto λ bude vystupovať L. To znamená, že fázový rozdiel signálu získaného demoduláciou vyslaného a prijatého lúča je v čase nepremenný a je funkciou meranej dĺžky (vzdialenosti miesta odrazu).

Modulačnú frekvenciu môžeme zvoliť tak, aby celá meraná vzdialenosť bola v rámci domierky a potom opakujeme meranie s postupne zmenšovanou vlnovou dĺžkou modulačného signálu L (zväčšujúcou sa modulačnou frekvenciou). Ako príklad uveďme názorne meranie vzdialenosti, pri ktorom boli hodnoty L_3=1000 m, L_2=100 m a L_1=10 m vytvorené moduláciou s frekvenciami f_3, f_2, f_1. Meraním tak dostaneme „zvyškové“ hodnoty pri jednotlivých vlnových dĺžkach modulačného signálu L :

s_3 =	**8**63 m		pri L_3 =	1000 m,		
s_2 =	**6**59 m		L_2 =	100 m,		
s_1 =	**602** m		L_1 =	10 m.		
2 s =	**866.02** m	=>	s =	433,01 m.		(18.16)

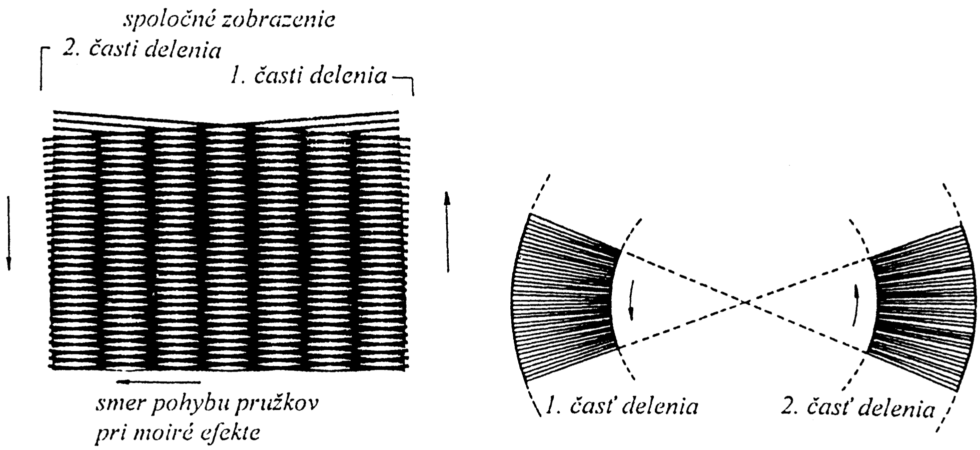
Ako je vidieť, druhé miesto prvého údaja je prvým miestom druhého údaja potvrdené. Podobne to je s druhým miestom druhého údaja. Meranie pri najmenšom L sa niekoľkokrát preveruje a priemeruje sa nameraná hodnota, aby sa zväčšila jeho presnosť. Výsledná hodnota vzdialenosti $2\,s$ nie je algebrickým súčtom nameraných zvyškových údajov, ale je vytvorená z (tučne vyznačených) číslic, ktoré sme pri jednotlivých L získali. Získa sa tak meranie, ktorého presnosť je niekoľko milimetrov (2 až 5 mm), a to i pri meraní vzdialeností niekoľko sto metrov. Uvedený postup merania bol aplikovaný u starších typov prístrojov. Súčasné elektronické diaľkomery zobrazujú odmeranú dĺžku na displeji automaticky. Údaj dĺžky sa zobrazí na displeji za 3 až 7 sek.



Obr. 18.10. Univerzálny merací prístroj Elta 3

Elektrooptický diaľkomer zabudovaný do teodolitu vytvára univerzálny merací prístroj (obr. 18.10). Základnými meracími prvkami sú vodorovný a zvislý uhol a dĺžka, ktoré vstupujú do voliteľných meracích programov.

Jeden z princípov elektronického merania vodorovných a zvislých uhlov je založený na vytvorení tzv. **moiré efektu**. Tento efekt znázorňuje obr. 18.11a, ktorý vznikol prekrytím dvoch sústav rovnobežiek, pričom jedna sústava voči druhej je pootočená o malý uhol. Šírka čiar je rovnaká ako sú vzdialenosti medzi nimi.



Obr. 18.11. Princíp vytvorenia moiré efektu

Vodorovný a výškový kruh má 25 000 rysiek, ktorých šírka je rovnako veľká ako sú medzi nimi medzery. Jedna časť výseče delenia je zväčšená 1,01-krát a diametrálne sa zobrazuje na protiľahlo ležiacu výseč. Otáčaním ďalekohľadu vzniká moiré efekt s tmavými a svetlými prúžkami (minimami a maximami jasu), ktoré sa pohybujú cez výseč delenia (obr. 18.11 b). Posun jedného svetlého prúžku na miesto predchádzajúceho zodpovedá pootočeniu alidády (hornej otočnej časti teodolitu), alebo ďalekohľadu o $0{,}8^{mg}$. Elektronické delenie umožňuje spresniť čítania na 1^{mg} .

18.4 Použitie lasera pri vytyčovacích prácach

V kapitole 10. bol vysvetlený význam rezonátora lasera. Vyplýva z neho, že k významnému zosilneniu svetelného zväzku dochádza práve pre tie lúče, ktoré mnohonásobne prešli aktívnou zónou lasera, t. j. pre lúče kolmé k zrkadlám rezonátora. V dôsledku toho je laserový zväzok tvorený rovnobežnými lúčmi. To robí laserový zväzok vhodným na optické „vytyčovanie“ priamok. Avšak ani opticky vytýčená priamka nie je dokonalá, pretože laserové lúče, tak ako každé iné, sú ovplyvňované atmosferickými podmienkami ako je hmla, vibrácia vzduchu, refrakcia a rozptýlený prach v ovzduší.

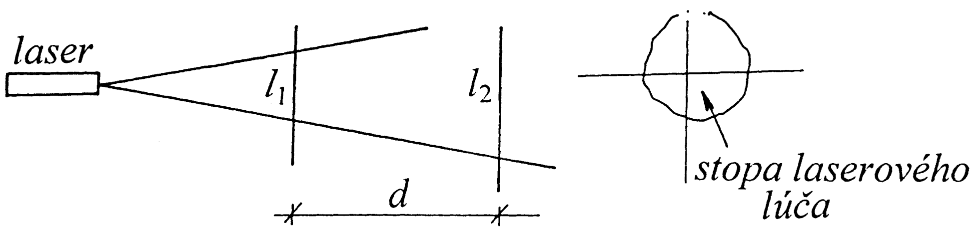
V geodetickej praxi sa najčastejšie používajú prístroje na báze plynových laserov (HeNe laser).

Z hľadiska využitia v geodézii sa u laserov skúmajú charekteristiky:

1. **Divergencia výstupného žiarenia**, ktorá je u každého prístroja iná. Mení sa podľa kvality vybrúsenia odrazových plôch rezonátora (zrkadiel). Hodnotu divergencie experimentálne určíme pomocou vzťahu (obr. 18.12):

$$\delta = \frac{l_2 - l_1}{2\,d}, \tag{18.17}$$

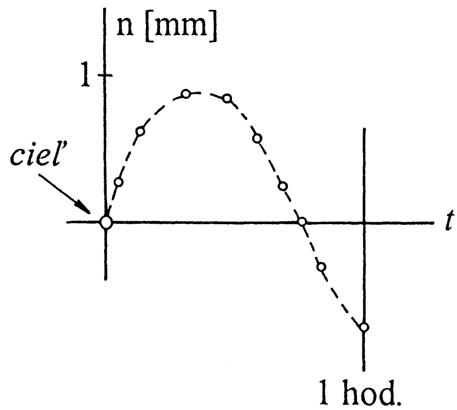
kde l_1 a l_2 sú odmerané priemery stopy lúča v miestach vzdialených od seba o dĺžku d. Správne určenie divergencie lasera závisí hlavne od presnosti určenia priemeru stopy zväzku laserových lúčov. Symetria stopy závisí od kvality vybrúsenia a nastavenia zrkadiel. Poznamenajme, že nastavenie zrkadiel sa môže v dôsledku zmien teploty a vnútorných pnutí samovoľne meniť.



Obr. 18.12. Určenie divergencie laserového lúča

2. **Stabilita zväzku lúčov** podmieňuje nemennosť rozmeru a polohy stopy laserových lúčov (obr. 18.13). U kvalitných prístrojov sa rozmer a poloha stopy lúčov prakticky nemení.

3. **Fokusácia zväzku lúčov** znamená zmenu divergencie na konvergenciu. Pri geodetických meraniach nie je potrebné zaostrovať na bod. Na cieľovej ploche sa stopa rozostruje na priemer niekoľko milimetrov až centimetrov. V takýchto prípadoch sa stred odhaduje najlepšie.



Obr. 18.13. Stabilita zväzku lúčov lasera

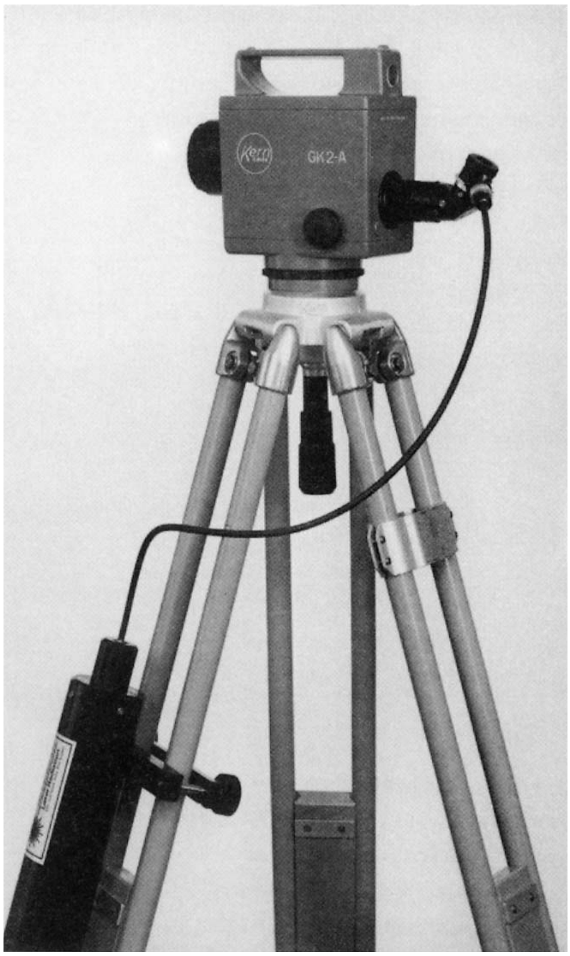
Lasery v geodézii používame v spojení s teodolitom alebo nivelačným prístrojom a tiež aj ako samostatné prístroje. Spojenie s geodetickým prístrojom môžeme docieliť dvoma spôsobmi, a to nasadením laserovej jednotky na tubus ďalekohľadu (staršie využitie laserov), alebo pripevnením laserového okulára k teodolitu alebo k nivelačnému prístroju (obr. 18.14). Pripevnenie môže byť trvalé, alebo odnímateľné.

Samostatné laserové prístroje využívame v geodézii na vytyčovanie smeru vo vodorovnej úrovni alebo v určitom sklone.

Laserové prístroje sa v geodézii využívajú hlavne pri týchto vytyčovacích prácach:

1. **výškové stavby** - pri montáži stien a skeletu stavby, montáži koľajníc mostových žeriavov,
2. **inžinierske stavby** - pri stavbe kanálov a potrubí, mostov, tunelov, bagrovaní riek a ka-nálov, pri meraní posunov a pretvorení stavieb v priebehu zaťažovacích skúšok,
3. **tunelovanie** - vedenie raziacich strojov,
4. **železničné staviteľstvo** – vedenie smerovacích a podbíjacích mechanizmov, úprava terénu,
5. **meliorácie** - vedenie bagrovacích mechanizmov, kladenie drenážnych potrubí atď.

Laserové prístroje vo všeobecnosti sa využívajú tak, že technik pri prístroji, ako aj jeho pomocník pri cieľovej značke sú v priamom kontakte s aktívnym svetelným lúčom. Pri vedení stavebných strojov laserovým prístrojom vytýčime vyžadovaný smer, ktorý na cieľovej značke sleduje operátor v priebehu činnosti stroja. Prevedenie laserového lúča na cieľovú značku môže byť priame, alebo pomocou zalomenej sústavy zrkadiel.



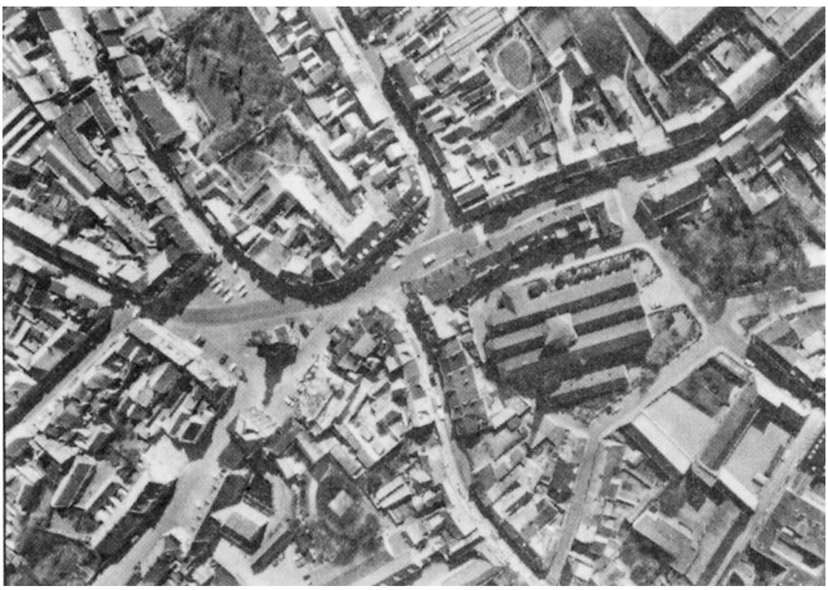
Obr. 18.14. Nivelačný prístroj s laserovým okulárom

18.5 Optika vo fotogrametrii a v diaľkovom prieskume Zeme

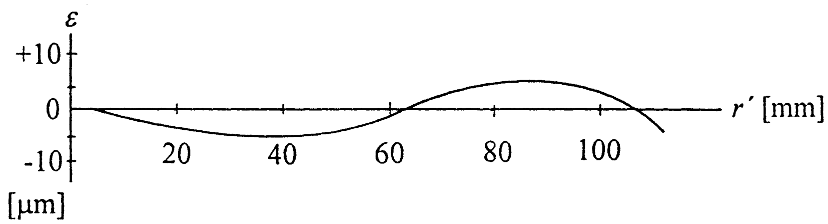
Fotogrametria je špeciálny odbor geodézie, zaoberajúci sa rekonštrukciou tvaru, veľkosti a polohy predmetov zobrazených na meračských fotogrametrických snímkach (obr. 18.15). Základom fotogrametrie ako meracej a mapovacej techniky je meračská snímka, ktorá je prostriedkom na najvernejšie a najrýchlejšie zobrazenie prirodzených a umelých predmetov na zemskom povrchu. Meračská snímka je za určitých predpokladov exaktnou centrálnou projekciou fotografovaného obrazu.

Úlohou fotogrametrie je previesť informácie z centrálnej projekcie snímky na ortogonálnu projekciu (napr. pôdorys, nárys, profily atď.). Môžeme to docieliť rôznymi metódami alebo rôznymi grafickými, optickými alebo mechanickými prostriedkami. Takýmto spôsobom môžeme priame meranie v teréne alebo na objektoch nahradiť meraním na snímkach, resp. optických modeloch, vytvorených z dvojíc vzájomne závislých (stereoskopických) snímok.

Vzťah medzi predmetom a jeho fotogrametrickou snímkou v čase expozície definuje fotogrametrický zväzok lúčov prechádzajúci objektívom (stredom premietania). Fotogrametrický objektív má zobraziť objekt s minimálnym skreslením. O jeho kvalite svedčí krivka, ktorá vyjadruje rotačnú chybu skreslenia objektívu. Takáto krivka je pre objektív Orthoprotar vo fotokamere Photheo 19/1318 Zeiss uvedená na obr. 18.16 a dokumentuje, že zobrazovacia chyba tohto objektívu bola v medziach ± 5 µm. Chyba zobrazenia závisí od centrovania optických elementov a odchýlok v indexoch lomov jednotlivých šošoviek. S ohľadom na presnosť merania na meračských snímkach považujeme skreslenia objektívov menšie ako 10 µm za zanedbateľné.



Obr. 18.15. Letecká meračská snímka (časť)

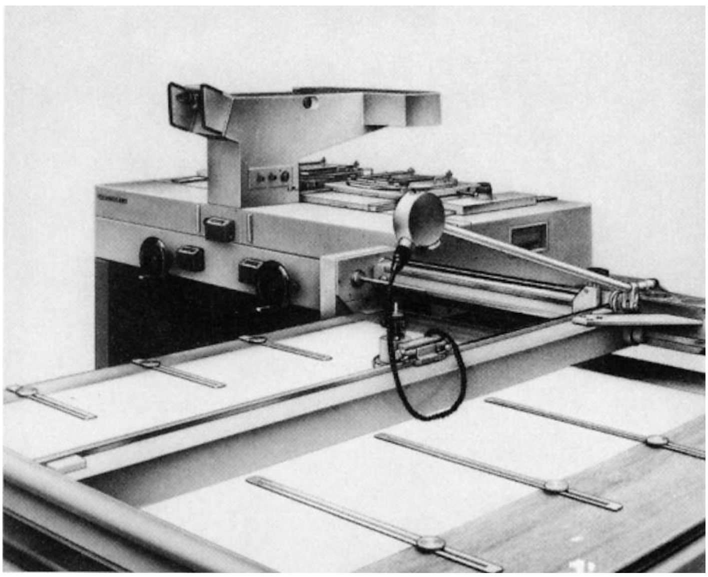


Obr. 18.16. Krivka skreslenia objektívu orthoprotar

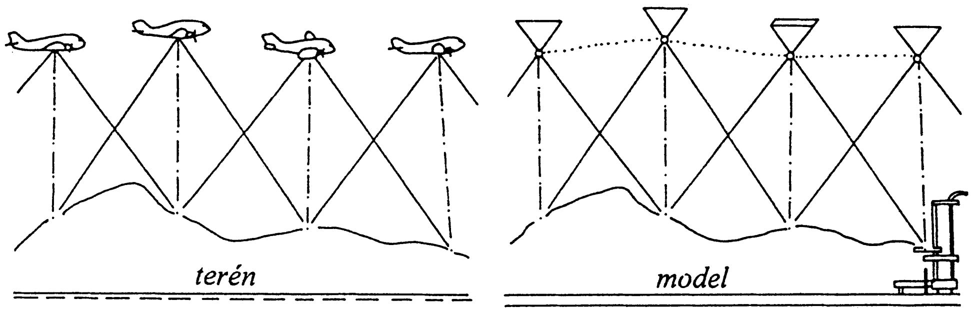
Prevod obrazu meračskej snímky z centrálnej projekcie do ortogonálnej projekcie nazývame vyhodnotenie. Podľa toho, či výsledok vyhodnotenia obsahuje len rovinné súradnice objektu alebo ho vyjadruje priestorovo, delíme vyhodnotenie na jednosnímkové a dvojsnímkové.

Jednosnímkové vyhodnotenie využíva optickú projekciu meračskej snímky prekreslením. Prekresľovanie meračských snímok rovinatého územia sa vykonáva prekresľovačmi (špecializovaný zväčšovací prístroj), prekresľovanie členitého územia diferenciálnymi prekresľovačmi (prekresľovanie snímky po častiach - pruhoch).

Priestorové vyhodnotenie sa vykonáva optickými alebo opticko-mechanickými vyhodnocovacími prístrojmi (obr. 18.17).



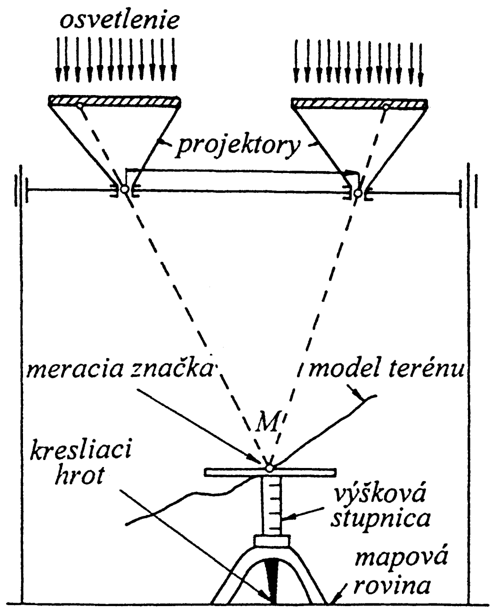
Obr. 18.17. Opticko-mechanický vyhodnocovací prístroj TECHNOCART



Obr. 18.18. Geometrická analógia medzi snímkovacím a vyhodnocovacím procesom

Vyhodnotenie je založené na exaktnej analógii fotografovacieho procesu (obr. 18.18). Vo vyhodnocovacom prístroji rekonštruujeme orientáciu snímkovej dvojice, t. j. dvom susedným meračským snímkam priraďujeme takú polohu v projektoroch, akú mali snímky v kamerách pri ich expozícii. Vtedy sa určujúce lúče priestorovo pretínajú a vytvárajú geometricky podobný a mierkovo zmenšený model zobrazeného územia. Priestorové vyhodnotenie leteckých snímok je ťažiskom fotogrametrických prác a na ňom sa najvýraznejšie prejavuje mechanizácia a automatizácia mapovacích prác.

Vyhodnotenie snímok je založené na princípe dvojitej projekcie, ktorá je analógiou priestorového videnia (obr. 18.19). Fotografovací proces napodobníme tak, že meračskú snímku (negatív alebo pozitív) vložíme do projektora s rovnakou vnútornou orientáciou, akú mala fotokamera, ktorou sa vyhotovili snímky. Snímky osvetlíme odzadu a zväzok lúčov vystupujúci objektívom je potom rovnaký, aký bol zväzok, ktorý vstúpil do fotokamery a vytvoril obraz. Rovnakým postupom sa premieta druhým projektorom aj susedná stereoskopicky sa prekrývajúca meračská snímka.



Obr. 18.19. Princíp dvojitej projekcie

V nasledujúcom pracovnom postupe vykonáme **vzájomnú orientáciu snímok**, pri ktorej projektory, resp. fotogrametrické zväzky lúčov privedieme do takej vzájomnej polohy, že združené určovacie lúče sa pretínajú v priestore a vytvárajú optický model terénu.

Vyhodnotenie vykonáme pomocou meračskej značky M, ktorú môžeme premiestňovať v smere osi X, Y, Z a tak sa „dotýkať“ optického modelu na ľubovoľných jeho bodoch. „Dotyk“ sa prejaví tým, že obrazy príslušného detailu (v mieste meracej značky) vytvorené oboma projektormi splynú do jedného obrazu.

Diaľkový prieskum Zeme. Súčasťou vedeckého programu kozmického výskumu je vyhotovenie družicových snímok fotografickou cestou a inými nekonvenčnými spôsobmi zobrazenia, ktoré umožňujú tiež riadkový rozklad snímok z oblasti ultrafialového, infračerveného a mikrovlnného žiarenia.

V súčasnom období existuje samostatné odvetvie kozmického výskumu, ktoré sa zaoberá spracovaním a využitím snímok alebo obrazových záznamov. Nazýva sa **"diaľkový prieskum"** (remote sensing). Pod týmto pojmom sa rozumie pozorovanie a me-ranie intenzity vyžarovaného (infračerveného) alebo odrážaného (viditeľného) svetla, vykonávané za účelom určovania fyzikálnych vlastností objektov. Rozhodujúce je, že pozorovanie a meranie sa uskutočňuje bez priameho fyzického kontaktu so študovaným predmetom alebo javom. Meraním môžeme zisťovať viac vlastností, predmetov alebo javov. Je to priestorový tvar, spektrálna charakteristika, odrazivosť, rozptyl a luminescencia a ich časové zmeny. Bolo zistené, že jednotlivé menované vlastnosti sledovaných objektov nemôžeme od seba oddeľovať. Sú obyčajne registrované vo forme dvojrozmerných snímok alebo záznamov.

Do diaľkového prieskumu Zeme sa zahŕňa zhotovovanie a spracovanie snímok a obrazových záznamov zemského povrchu z družíc a kozmických lodí, vyhotovenie snímok z lietadlových laboratórií (s dostupnosťou okolo 10 km), z lietadiel snímkujúcich pre fotogrametrické účely z normálnych výšok, niekedy i pozemné fotogrametrické snímky. V popredí záujmu diaľkového prieskumu sú hlavne družicové snímky.

Dôležitými prvkami snímok a záznamov je ich mierka, spektrálne pásmo a rozlišovacia schopnosť. Mierku ovplyvňuje typ fotokamery alebo zariadenia na snímanie a výška letu. Rozsah snímaného spektrálneho pásma je určený použitými snímacími zariadeniami, filtrami a fotografickým materiálom. Rozlišovacia schopnosť pri použití fotografickej komory závisí v najväčšej miere od fotografického materiálu, pri použiti nekonvenčných spôsobov zobrazenia je ovplyvnená veľkosťou snímačov týchto zariadení.

Literatúra

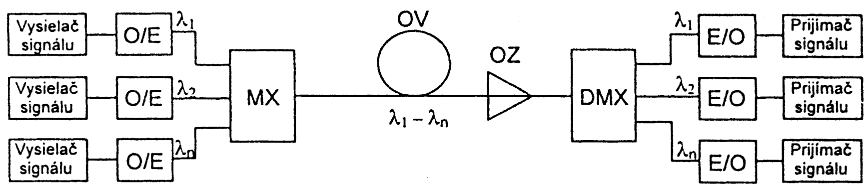
[1] BITTERER, L.: Základy fotogrametrie pri projektovaní dopravných stavieb. 1. VŠD Žilina, 1965, s. 105.

[2] BITTERER, L.: Geodézia 3, ALFA VTEL Bratislava, 1990, s. 433.

19. Využitie optických vĺn pre prenos signálov v telekomunikáciách

19.1 Úvod

V šesťdesiatych rokoch po vynájdení lasera sa venovala obrovská pozornosť skúmaniu možností prenosu elektrických signálov na vlnových dĺžkach v optickom pásme. Ako sa však predpokladalo a neskoršie aj potvrdilo, atmosféra nie je vhodným médiom pre prenos signálov na optických vlnových dĺžkach, najmä z dôvodu jej absorbčných a rozptylových vlastností. Je to spôsobené tým, že jej nehomogenity sú často rozmerovo porovnateľné s vlnovou dĺžkou optického žiarenia. Atmosféra má pre vlnové dĺžky v pásme blízkej infračervenej oblasti vysoké tlmenie a priepustnosť, pre účely prenosu signálov na vzdialenosti väčšie ako niekoľko desiatok až stoviek metrov, je nedostačujúca. Preto sa hľadali iné médiá pre prenos signálov v oblasti optických vlnových dĺžok. Výsledkom bola štúdia, v ktorej K. C. Kao a G. A. Hockhan [19.1] poukazovali na možnosť využiť sklenené vlákno pre prenos optických signálov. V tomto momente sa koleso dejín optických komunikácií začalo otáčať iným smerom.



Obr. 19.1. Základná štruktúra optického prenosového systému

Základná štruktúra optického prenosového systému je znázornená na obr. 19.1. Ide o systém, ktorý pomocou optických vĺn s viacerými vlnovými dĺžkami prenáša signály, realizované ako modulácia príslušných optických vĺn. Signály môžu byť analógové alebo digitálne. Je treba používať optické vlny z vlnového pásma, v ktorom je optické vlákno dostatočne transparentné. Vygenerované optické vlny sa vo vlnovom multiplexore (MX) spoja a zavedú do optického vlákna tak, aby sa mohli všetky optické signály rôznych vlnových dĺžok $\lambda_1 .... \lambda_n$ optickým vláknom (OV) prenášať súčasne. V trase optického vlákna môže byť zaradený optický zosilňovač na báze polovodičov GaAs alebo na báze vlákien dopovaných prvkami vzácnych zemín (Er, Pd). Na výstupe takéhoto optického systému musí byť zaradený vhodný prvok, takzvaný demultiplexor (DMX), napríklad spektrálny filter, ktorý je schopný vlnovo oddeliť jednotlivé optické vlny s vlnovými dĺžkami $\lambda_1 .... \lambda_n$. Optické signály na vlnových dĺžkach $\lambda_1 .... \lambda_n$ sa po optoelektronickom prevode ďalej spracúvajú v prijímačoch elektrických signálov. O optoelektronických prevodníkoch sa v tejto knihe pojednáva v kapitole 10 až 12, o ektrooptických prevodníkoch sa pojednáva v kapitole 9 a o prvkoch, ktoré môžu slúžiť na multiplexovanie a demultiplexovanie signálov sa pojednáva v kapitolách 4 a 7, princípy zosilňovania optických signálov sú opísané v kapitole 9. Teória optických vlnovodov je v kapitole 6.

19.2 Druhy optických vlákien

Vývoj optických vlákien bol podmienený požiadavkou minimalizovať počet typov vlákien, ktoré sa používajú a budú používať vo verejných telekomunikačných sieťach s cieľom redukovať výrobné náklady, podporovať jednoduchosť inštalácie, zjednodušovať údržbové procesy a v neposlednom rade zabezpečiť kompatibilitu vlákien od rôznych výrobcov. Okrem využívania optických vlákien pre prenos signálov na veľké vzdialenosti, čo má byť ich hlavná oblasť použitia, sa optické vlákna využívajú aj pre prenos na krátke vzdialenosti. Zatiaľ čo v prípade prenosu na veľké vzdialenosti sa využíva najmä ich prenosová kapacita a nízke tlmenie, v prípade použitia na krátke vzdialenosti sú výhodné najmä z hľadiska jednoduchosti spojenia a kompatibility s lacnými terminálovými zariadeniami. Široká škála vlákien bola vyvíjaná pre mnoho špeciálnych aplikácií.

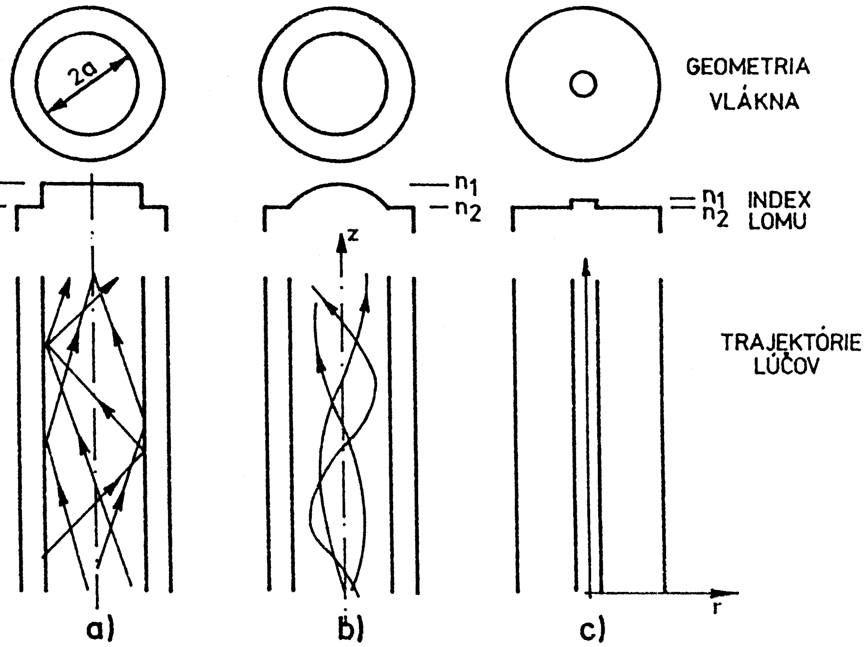
Venujme sa teraz opisu typov optických vlákien. Optické vlákno býva obyčajne kruhového prierezu a skladá sa z jadra a obalu, pričom priemer jadra je niekoľko jednotiek, až stovky vlnových dĺžok prenášaných optických vĺn. Ak je priemer jadra vlákna porovnateľný s vlnovou dĺžkou prenášaného optického žiarenia, jedná sa o jedno (mono) alebo **málovidové vlákna**. Ak priemer jadra vlákna je rádovo 10 až 100 násobok vlnovej dĺžky prenášaného optického žiarenia, ide o **mnohovidové vlákna**.

Z vlnovej teórie cylindrických optických vlákien, ktorá je uvedená v 6. kapitole vyplýva, že optické vlákno je jednovidové, ak normovaná frekvencia daná vzťahom

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{19.1}$$

je menšia ako 2,405, kde a je polomer jadra vlákna, n_1 je index lomu jadra a n_2 index lomu plášťa vlákna.

Dôležitým parametrom optických vlákien je ich index lomu ako z hľadiska veľkosti tak aj z hľadiska charakteru jeho zmeny v radiálnom smere. Najväčšie rozšírenie majú vlákna so skokovou zmenou indexu lomu v prípade jednovidových vlákien a skokovou a parabolickou zmenou indexu lomu v prípade mnohovidových vlákien. Pre tvarovanie disperzných charakteristík jednovidových vlákien sa však používajú aj vlákna s iným profilom indexu lomu, napr. trojuholníkovým alebo profilom v tvare W. Základné typy vlákien sú znázornené na obr. 19.2.



Obr. 19.2 a) mnohovidové vlákno so skokovou zmenou indexu lomu,
b) mnohovidové vlákno s parabolickou zmenou indexu lomu,
c) jednovidové vlákno so skokovou zmenou indexu lomu

Profil indexu lomu optických vlákien kruhového prierezu je spravidla cylindricky symetrický (nezávislý od φ a z) , pričom platí

$$n^2(r) = n_1^2(0)\,[1 - 2\Delta g(r/a)] \qquad \text{ak } r < a \qquad (19.2)$$

$$n^2(r) = n_1^2(0)\,[1 - 2\Delta] = n_2^2 \qquad \text{ak } r \geq a \qquad (19.3)$$

kde $$\Delta = \frac{n_1^2(0) - n_2^2}{2n_1^2(0)} \doteq \frac{n_1(0) - n_2}{n_1(0)},$$

čo sa obyčajne aproximatívne píše v tvare

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \doteq \frac{n_1 - n_2}{n_1} \tag{19.4}$$

a $g(r/a)$ je funkcia, charakterizujúca profil indexu lomu jadra optického vlákna, n_1 je index lomu na osi vlákna, n_2 je index lomu plášťa vlákna a $r = a$ je polomer hranice jadro-plášť. Platí teda $n(r) = n_1(r)$ pre $r < a$ a $n(r) = n_2(r) = n_2$ pre $r \geq a$. Najdôležitejšou triedou funkcií charakterizujúcich profil vlákna $g(r/a)$ je trieda α - profilov, pre ktoré platí

$$g(r/a) = (r/a)^{\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq \infty \tag{19.5}$$

pre $\alpha \to \infty$ sa dostane už spomínaný profil so skokovou zmenou indexu lomu.

Mnohovidové vlákna so skokovou zmenou indexu lomu patria k historicky najstarším typom vlákien. Jadro má priemer 50 až 100 násobok vlnovej dĺžky optického žiarenia. Optické žiarenie sa šíri vláknom v dôsledku totálnych odrazov na hranici jadro plášť. Je zrejmé, že pre uhol dopadu lúčov musí platiť

$$\Theta < \arccos \frac{n_2}{n_1}. \tag{19.6}$$

V opačnom prípade lúče z jadra vystupujú.

Vlákna, v ktorých sa index lomu s polomerom jadra mení spojite sa nazývajú gradientné vlákna. U vlákien triedy α sa exponent môže voliť z rôznych hľadísk, obyčajne je to požiadavka minimálnej vidovej disperzie, kedy $\alpha \doteq 2$. V jednovidových vláknach sa používajú rôzne hodnoty exponenta indexu lomu, čím sa ovplyvňuje priebeh disperzie v závislosti od vlnovej dĺžky. Keď $\alpha = 2$ ide o parabolickú zmenu indexu lomu. Na obr. 19.2 je znázornené mnohovidové vlákno s parabolickou zmenou indexu lomu. Rozmery vlákna sú porovnateľné s mnohovidovým vláknom so skokovou zmenou indexu lomu. Parabolická, alebo všeobecnejšie, gradientná zmena indexu lomu - ako bude ďalej ukázané - spôsobuje, že vo vlákne nedochádza k odrazom, ale k zakriveniu lúčov optického žiarenia. Vlákno sa prejavuje „samoostriacim“ efektom, ktorý spočíva v tom, že lúče, ktoré sú viac vybočené sa šíria väčšou rýchlosťou, pretože prechádzajú určitú časť dráhy prostredím s menšou hodnotou indexu lomu ako lúče, ktoré sa šíria blízko osi vlákna. Šírenie optického žiarenia v mnohovidových vláknach je možné opisovať metódami geometrickej optiky.

Na obr. 19.2c je znázornené vlákno so skokovou zmenou indexu lomu, s priemerom jadra vlákna porovnateľným s vlnovou dĺžkou optického žiarenia. Prenosové vlastnosti takýchto vlákien vysoko prevyšujú možnosti mnohovidových vlákien znázornených na obr. 19.2a a 19.2b. Ak normovaná frekvencia $V = \frac{2\pi a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \leq 2{,}405$, potom ide o vlákna jednovidové. Pre opis šírenia optického žiarenia je vhodné používať metódy riešenia elektromagnetického poľa vychádzajúce z Maxwellovej teórie elektromagnetického poľa, tak ako je to urobené v 6. kapitole.

Prvé optické nízkostratové vlákna vyvinuté a študované na začiatku sedemdesiatych rokov boli jednovidové vlákna, pretože sa očakávalo, že prenosové charakteristiky týchto budú najvhodnejšie pre telekomunikácie. Avšak vývojové úsilie bolo potom smerované na vlákna s väčším priemerom jadra - mnohovidové vlákna, pretože vznikali problémy pri navdäzovaní optického žiarenia z jednovidových vlákien s priemerom jadra len niekoľko málo mikrometrov. Problémy boli tiež so spájaním a konektorovaním týchto vlákien a samozrejme bol aj nedostatok vhodných zdrojov optického žiarenia pre takéto vlákna. Od polovice osemdesiatych rokov, kedy boli ťažkosti preklenuté, sa v telekomunikáciách však temer zásadne používajú jednovidové optické vlákna.

Z historického pohľadu možno povedať, že v prvých telekomunikačných prenosových systémoch (v optoelektronických systémoch prvej generácie) sa používali mnohovidové vlákna s približne parabolickým profilom indexu lomu, pracujúce na vlnových dĺžkach okolo 800 - 850 nm. Druhá generácia systémov pracovala v oblasti vlnových dĺžok 1300 nm, kde majú optické vlákna menšie tlmenie a minimálnu materiálovú disperziu. Rastúce požiadavky na prenos na väčšie vzdialenosti a väčšie šírky pásma viedli k návratu k monovidovým vláknam a k tretej generácii optoelektronických systémov, pracujúcich v oblasti vlnových dĺžok 1300 nm. Štvrtou generáciou sú systémy s monovidovými vláknami, pracujúce v oblasti najmenších strát v okolí vlnových dĺžok 1550 nm, kde sa v spojitosti s koherentnými prenosovými systémami často hovorí o piatej generácii systémov.

19.3. Materiálové vlastnosti skla pre výrobu optických vlákien

19.3.1 Index lomu

Ako materiál pre vlákna vysokej kvality s malým tlmením a veľkou šírkou prenášaného pásma sa používa - vzhľadom na malý koeficient absorbcie - kremenné sklo, ktorého index lomu možno meniť dotáciou vhodných prímesí. Závislosť indexu lomu od vlnovej dĺžky je daná Sellmeierovou rovnicou [19.2]

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^{3} \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - l_i^2} \qquad (19.7)$$

Koeficienty A_i a l_i sú závislé od zloženia prímesí, od ich koncentrácie a spôsobu výroby optického vlákna. Rovnica (19.7) je vhodná na prepočet indexu lomu na vlnovej dĺžke vo vlnovom rozsahu 400 nm až 1800 nm. Pre rozsah vlnových dĺžok 700 nm až 1800 nm, s chybou menšou ako 5.10^{-4}, možno vzťah (19.7) pre čisté kremenné sklo prepísať do tvaru

$$n(\lambda) = a_0 - a_1 x - a_3 x^3 (1 - 2x) \tag{19.8}$$

pričom

$$x = \frac{(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_0},$$

kde $\lambda_0 = 1{,}273 \mu m$, $a_0 = 1{,}4471$, $a_1 = 1{,}4396.10^{-2}$, $a_3 = 8{,}0995.10^{-3}$

19.3.2 Straty v optických sklách pre výrobu optických vlákien

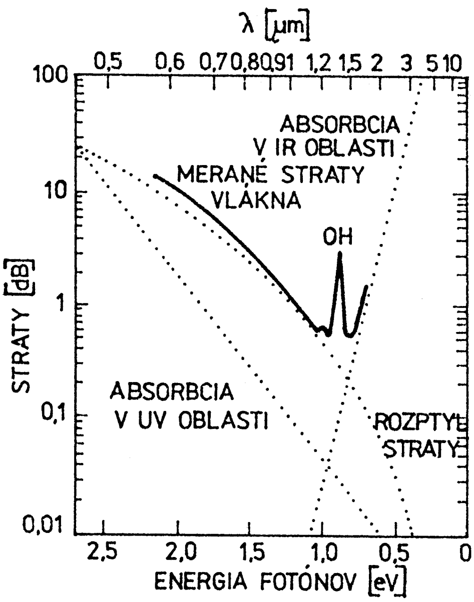
Straty v optickom vlákne možno v princípe rozdeliť na dva základné druhy

a) straty v dôsledku absorbcie,
b) straty v dôsledku rozptylu.

Ich priebeh v závislosti od vlnovej dĺžky je znázornený na obr. 19.3.

Straty v dôsledku absorbcie

Prvý druh absorbčných strát v oblasti krátkych vlnových dĺžok (a) je spôsobený v dôsledku vybudenia elektrónov z valenčného do vodivostného pásma (odstup pásiem u kremenného skla je 8,9 eV). Tento druh absorbčných strát sa nazýva **absorbcia v ultrafialovej oblasti**. Pri väčších vlnových dĺžkach vznikajú straty v dôsledku vybudenia molekulových kmitov v oxide kremičitom - táto absorbcia sa nazýva **absorbcia v infračervenej oblasti**. Ďalšie absorbcie vznikajú na nečistotách. Kovové ióny Cu, Fe, Ni, Cr spôsobujú absorbciu v oblasti vlnových dĺžok od 0,8 do 1,0 μm a už pri koncentráciách



Obr. 19.3. Spektrálna charakteristika tlmenia mnohovidového vlákna dotovaného GeO_2

1 ppm [1] je koeficient absorbsopcie až 10^3 dB/km. V súčasnosti sa však sklo pre výrobu optických vlákien bežne vyrába s koncentráciou kovových iónov 10^{-3} ppm a dosahuje sa ab-sorbcia na úrovni desatín dB/km. Znečistenie OH iónmi spôsobuje v dôsledku absorbcie tlmenie v oblasti vlnových dĺžok 0,95 μm, 1,24 μm a 1,39 μm.

Straty v dôsledku rozptylu

Rozptylové straty vznikajú hlavne v dôsledku Rayleighovho rozptylu (pozri kapitolu 9) na nehomogenitách menších ako je vlnová dĺžka optického žiarenia. Pre čisté kremenné sklo je tlmenie v dôsledku Rayleighovho rozptylu podľa [2] dané vzťahom

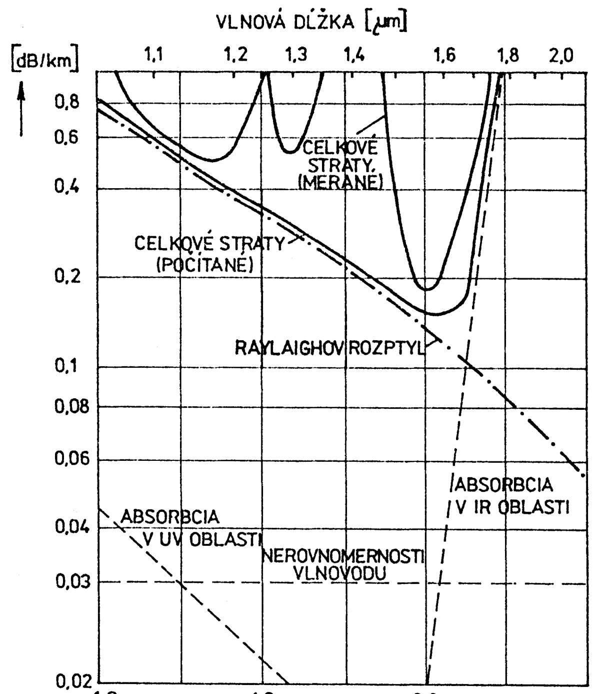
$$\alpha = 0{,}622 \frac{n^2}{(2{,}123\lambda)^4} \quad [dB/km; \mu m] \tag{19.9}$$

Táto hodnota sa zvyšuje pri dotovaní čistého kremenného skla inými zlúčeninami. Napr. pre zvýšenie indexu lomu o 1 %, dotovaním oxidom germaničitým (GeO_2), sa hodnota daná predchádzajúcim výrazom zdvojnásobuje.

Okrem spomínaných stratových mechanizmov pôsobia ešte rôzne nerovnomernosti, ktoré vznikajú vo vláknach pri ich ťahaní.

Na obr. 19.3 sú znázornené priebehy absorbčných a rozptylových mechanizmov tlmenia ako aj výsledný priebeh tlmenia mnohovidového vlákna dotovaného GeO_2. Na obr. 19.4 je znázornený priebeh tlmenia pre monovidové vlákno.

Špička tlmenia okolo vlnovej dĺžky 1,4 µm na obr. 19.3 vzniká v dôsledku ab-sorbcií na OH iónoch. Nárast tlmenia pri vlnovej dĺžke 1 µm na obr. 19.4 vzniká v dôsledku vybudenia vyšších vidov pri kratších vlnových dĺžkach. Toto nepatrí do kategórie materiálových vlastností, ale pre komplexnosť informácie ho tu uvádzame. Všetky ostatné maximá sú podmienené absorbciou na OH iónoch.



Obr. 19.4. Spektrálna charakteristika tlmenia monovidového vlákna

[1] ppm znamená „partes per milion“

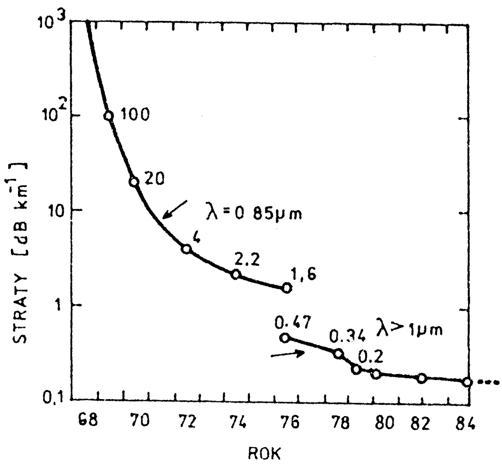
Na krivke tlmenia optických vlákien vznikajú minimá pri vlnových dĺžkach 0,85, μm, 1,3 μm a 1,55 μm. Podľa súčasného stavu techniky v tejto oblasti, je možné dosiahnuť pri týchto vlnových dĺžkach tlmenie 2 dB/km, 0,35 dB/km a 0,2 dB/km. Najnovšími metódami výroby optických vlákien (Vapor Axial Deposition), možno dosiahnuť koncentráciu OH iónov menšiu ako 10^{-9}, pri ktorej je tlmenie v dôsledku iónov na vlnovej dĺžke 1,39 μm len stotiny dB/km nad tlmením uvedeným na obr. 19.4. Takto sa dosahuje v celom rozsahu vlnových dĺžok 1,1 - 1,7 μm tlmenie podstatne menšie ako 0,5 dB/km.

19.3.3 Ovplyvňovanie hodnoty indexu lomu

Pre ovplyvňovanie hodnoty indexu lomu sa sklo dotuje prímesami GeO_2, P_2O_5 a B_2O_3. Prvé dve prímesi zvyšujú index lomu. Bór index lomu znižuje. Zvýšenie indexu lomu n je lineárne s nárastom 0,07 % na jedno molárne percento GeO_2. V dôsledku dotácie GeO_2 sa zvyšuje Rayleighov rozptyl. Prímesami P_2O_5 ($\approx$ 1%) ho možno podstatne redukovať. Pri výrobe optických vlákien sa naskytujú teda dve možnosti. Prvá je vyrobiť plášť z čistého kremenného skla a index lomu jadra zvyšovať dotovaním, alebo - čo je druhá možnosť - jadro vyrobiť z čistého skla a vhodným dotovaním znižovať index lomu plášťa. Prímesi bóru a fosforu posúvajú absorpčnú hranicu v infračervenej oblasti smerom ku kratším vlnovým dĺžkam, takže sa môže stať, že pásma s minimálnym tlmením medzi 1,4 a 1,7 μm sa stanú nevýrazné.

19.3.4 Vývoj znižovania tlmenia vlákien

Od roku 1966, keď K. C. Kao a G. A. Hockham navrhli využitie optických vlákien pre prenos informácií, smerovali snahy výrobcov optických vlákien ku znižovaniu ich tlmenia. To, akým spôsobom sa darilo znižovať tlmenie vlákien je znázornené na obr. 19.5. Možno konštatovať, že od polovice osemdesiatych rokov sa vyrábajú monovidové optické vlákna s tlmením na hranici fyzikálnych možností, a teda k ďalšiemu vylepšovaniu tlmenia prakticky nedochádza.



Obr. 19.5. Vývoj znižovania tlmenia vlákien

19.4 Opis šírenia optického žiarenia v optických vláknach

19.4.1 Opis šírenia optického žiarenia v jednovidových vláknach

Z rozboru v 6. kapitole vyplýva, že pre monovidové vlákna so skokovou zmenou indexu lomu musí byť splnená podmienka

$$V < 2{,}405\,,$$

kde V je normovaná frekvencia daná rovnicou

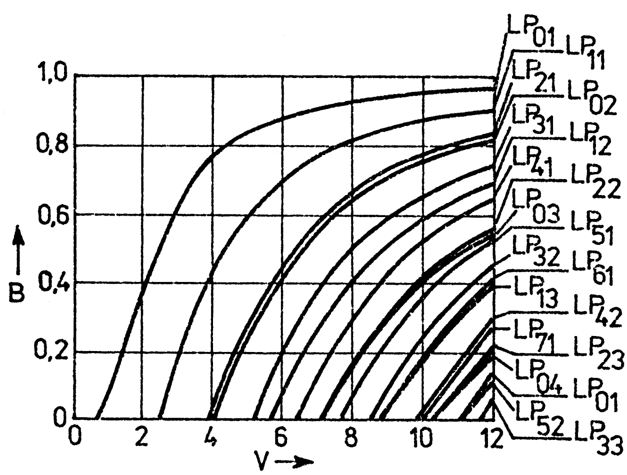
$$V = \frac{2\pi a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\,. \tag{19.10}$$

Pre určitú vlnovú dĺžku, pri ktorej chceme zaručiť jednovidové šírenie optického žiarenia sa musí teda správne voliť polomer jadra vlákna a a hodnota $n_1^2 - n_2^2$ tak, aby bola táto podmienka splnená.

Základným výsledkom analýz v 6. kapitole je charakteristika závislosti fázovej konštanty šírenia od frekvencie optického žiarenia, ktorá je znázornená na obr. 19.6, kde V je opäť normovaná frekvencia daná vzťahom a B je normovaná fázová konštanta šírenia, ktorá sa určuje podľa výrazu (6.24)

$$B = \frac{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}{n_1^2 k_0^2 - n_2^2 k_0^2}\,, \tag{19.11}$$

kde β je fázová konštanta šírenia jednotlivých vidov, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ a tak ako v predchádzajúcom vzťahu n_1 je index lomu jadra na osi vlákna, n_2 je index lomu plášťa.



Obr. 19.6. Normované konštanty šírenia B niektorých vidov $LP_{\nu\mu}$ ako funkcie normovanej frekvencie V

19.4.2 Opis šírenia optického žiarenia v mnohovidových vláknach metódami geometrickej optiky

Ako už bolo spomenuté, mnohovidové vlákno znázornené na obr. 2.a,b je charakteristické predovšetkým tým, že jeho priemer je mnohonásobne väčší ako je vlnová dĺžka prenášaného optického signálu. Výsledný tvar impulzu na výstupe takéhoto vlákna je daný kompozíciou až niekoľko tisíc vidov elektromagnetického poľa. V prípade takýchto vlákien opis prenosu na základe teórie elektromagnetického poľa podľa predchádzajúcej kapitoly je výpočtovo náročné a s ohľadom na citlivosť matematického vyjadrenia na zmenu okrajových podmienok a fluktuáciu týchto podmienok spôsobenú výrobou aj zbytočné. Riešenie prenosu signálu sa preto v tomto prípade najčastejšie robí pomocou metód geometrickej optiky. Predpokladom pre použitie týchto metód je:

- priemer jadra vlákna $2a$ je mnohonásobne väčší ako je vlnová dĺžka λ použitého optického žiarenia,
- budenie je osovo-symetrické a možno teda pre výpočty predpokladať, že energia sa prenáša len meridiánovými lúčmi, ktoré sa šíria v rovinách, v ktorých leží os vlákna.

Metódy geometrickej optiky neuvažujú teda pri riešení lúče, ktoré ležia mimo meridiánových rovín aj napriek tomu, že väčšina lúčov sa šíri mimo týchto rovín. Uvážením extrémnych hodnôt uhlov šírenia v meridiánovej rovine je však definovaný maximálny rozdiel vo vzájomnom oneskorení jednotlivých lúčov. Metódy geometrickej optiky nesledujú tiež osobitosti procesu na hranici jadro-plášť. Toto by bolo zaujímavé vtedy, ak by bolo treba poznať skutočný obraz šírenia energie v mnohovidovom vlnovode. Aj v tomto prípade je však dôležité určenie strát na tejto hranici.

Ako vyplýva z paragrafu 19.2, jednou zo základných charakteristických parametrov optických prenosových médií znázornených na obr. 19.2 je relatívny rozdiel indexov lomu, ktorý sa definuje vzťahom

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}\,. \tag{19.12}$$

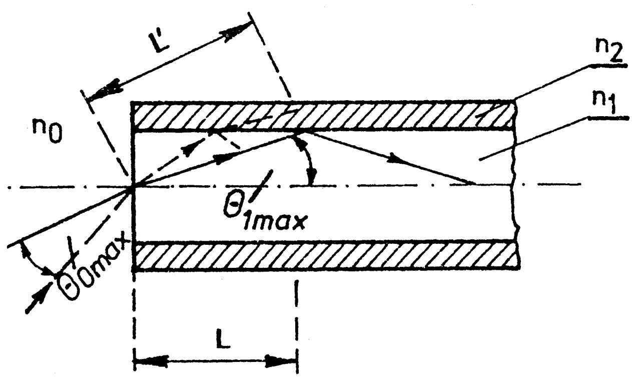
Vzhľadom na to, že $\Delta << 1$, alebo lepšie povedané n_1 je približne rovné n_2, možno predchádzajúci vzťah upraviť do tvaru

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}\,. \tag{19.13}$$

Čím menšia je hodnota Δ, tým menší je rozdiel indexov lomu medzi jadrom a plášťom optického vlákna. Hodnota Δ, ako bude ukázané v ďalšom, podstatnou mierou ovplyvňuje prenosové vlastnosti vlákna.

Mnohovidové vlákna so skokovou zmenou indexu lomu

Vlákno tohto typu je znázornené na obr. 19.7. Vedenie optického žiarenia vo vlákne vzniká na základe totálnej reflexie na hranici jadro-plášť. Pre vlákno tohto typu je vhodné poznať maximálny uhol dopadu optického lúča, pri ktorom je ešte možné šírenie lúča v dôsledku totálneho odrazu na hranici jadro-plášť.



Obr. 19.7. Mnohovidové vlákno so skokovou zmenou indexu lomu

Vzťah pre výpočet maximálneho uhla dopadu možno určiť na základe Snellovho zákona

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{\sin\Theta_{1\max}}{\sin\Theta_{0\max}}, \tag{19.14}$$

kde $\Theta_{1\max}$ je uhol šírenia lúča v jadre vlákna, $\Theta_{0\max}$ je uhol, pod ktorým vstupuje žiarenie do vlákna, n_0 je index lomu vstupného prostredia a n_1 je index lomu jadra vlákna.

Z predchádzajúceho vzťahu sa definuje jeden z najzákladnejších parametrov optických vlákien - **číselná alebo numerická apertúra**. Číselná apertúra vyjadruje schopnosť vlákna prijímať žiarenie zo široko žiariacich zdrojov. Je definovaná vzťahom

$$NA = \sin\Theta_{0\max}. \tag{19.15}$$

Vzhľadom na to, že

$$\sin\Theta_{0\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1\sqrt{2\Delta} \tag{19.16}$$

možno číselnú apertúru počítať podľa vzťahu

$$NA = n_1\sqrt{2\Delta} \tag{19.17}$$

a vidieť, že je závislá od veľkosti rozdielu indexov lomu jadra a plášťa vlákna.

Najkratšia cesta optického lúča prechádzajúceho rovným vláknom je daná dĺžkou osi optického vlákna L. Ak uhol $\Theta_{1\max}$ je uhol, pri ktorom ešte dochádza k totálnej reflexii na hranici jadro-plášť, potom maximálnu dráhu lúča možno vypočítať podľa vzťahu

$$L' = \frac{L}{\cos\Theta_{1\max}} \tag{19.18}$$

pre tento uhol $\Theta_{1\max}$ platí

$$\cos\Theta_{1\max} = \frac{n_2}{n_1} \tag{19.19}$$

Maximálny rozdiel dôb šírenia sa optického žiarenia je daný rozdielom maximálnej a minimálnej doby šírenia

$$\Delta\tau_{\max} = \tau_{\max} - \tau_{\min}, \tag{19.20}$$

kde $\tau_{\max}$ zodpovedá dobe šírenia po dráhe L', $\tau_{\min}$ po dráhe L.

Po dosadení rýchlosti šírenia v jadre optického vlákna

$$v = \frac{c}{n_1} \tag{19.21}$$

dostávame

$$\Delta\tau = \frac{L'}{v} - \frac{L}{v} = \frac{L}{v}\left(\frac{1}{\cos\Theta_{1\max}} - 1\right) = L\frac{n_1}{c}\left(\frac{1}{\cos\Theta_{1\max}} - 1\right) \tag{19.22}$$

a teda

$$\Delta\tau = L\frac{n_1}{c}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) = \frac{n_1.L}{c}\left(\frac{n_1 - n_2}{n_2}\right) \tag{19.23}$$

výraz $\frac{n_1 - n_2}{n_2}$ sa približne rovná hodnote Δ podľa vzťahu (19.13).

Pre $\Delta\tau$ možno teda písať

$$\Delta\tau = \frac{n.L}{c}.\Delta\,. \tag{19.24}$$

Rozdiel dôb šírenia na jednotku dĺžky je potom rovný

$$\Delta\tau' = \frac{\Delta\tau}{L} = \frac{n.\Delta}{c}. \tag{19.25}$$

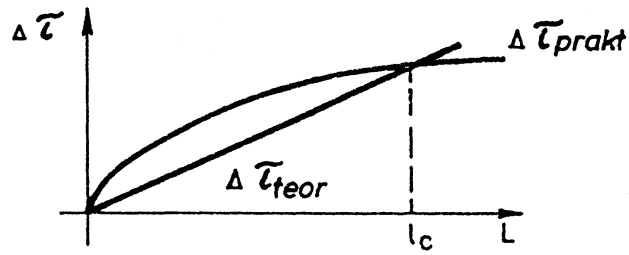
V praxi, v dôsledku menšieho podielu vidov vyšších rádov, vzniká pri dlhších trasách menšie rozšírenie impulzov, ako je teoreticky vypočítaná hodnota. Miesto lineárnej závislosti

$$\Delta\tau_{teor}(L) = \Delta\tau'.L \tag{19.26}$$

platí

$$\Delta\tau_{prakt}(L) = \Delta\tau'.\sqrt{L.L_c} \tag{19.27}$$

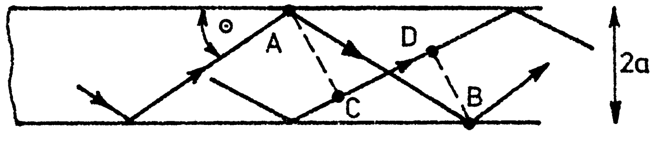
kde L_c je vzdialenosť, pri ktorej sa teoreticky vypočítaná hodnota podľa vzťahu (19.26) a prakticky nameraná hodnota podľa vzťahu (19.27) rovnajú. Táto vzdialenosť je závislá od ohybov vlákna, nehomogenít na hranici jadro-plášť, homogénnosti jadra vlákna a podobne, takže je veľmi komplikované a temer nemožné určiť ju presne.



Obr. 19.8. Teoretická a praktická závislosť rozdielu dôb šírenia lúčov v závislosti od dĺžky vlákna

Pre vedenie optického žiarenia vo vlákne so skokovou zmenou indexu lomu musia byť splnené nasledovné podmienky:

- uhol dopadu optického žiarenia na hranicu jadro-plášť musí byť menší, ako uhol $\Theta_{1\max}$ určený rovnicou (19.16),
- fázové posunutie v rámci úseku AB a úseku CD na obr.19.9 musí byť rovnaké alebo rozdielne o $2k\pi$, kde k je celé číslo. Možno tiež povedať, že fázové posunutie na hranici jadro-plášť musí byť nezávislé od miesta, t.zn., že sa môžu šíriť len diskrétne hodnoty uhla Θ. Čím menší je pomer $\frac{a}{\lambda}$, tým menej diskrétnych hodnôt sa môže šíriť, to znamená, že sa šíri menej vidov.



Obr. 19.9. K definícii podmienok šírenia sa lúčov

Mnohovidové vlákna s parabolickou zmenou indexu lomu

Vlákno s parabolickou zmenou indexu lomu je znázornené na obr. 19.2.b. Ak vo vzťahu

$$n_1^2(r) = n_1^2\left[1 - 2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \tag{19.28}$$

predpokladáme, že $\Delta \langle\langle 1$, potom na vyjadrenie zmeny indexu lomu v jadre a v plášti vlákna možno použiť vzťah

$$n_1(r) = n_1\left[1 - \Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \quad \text{ak} \quad r \le a \tag{19.29}$$

$$n_2 = n_2(r) = n_1(1 - \Delta) \quad \text{ak} \quad r > a \tag{19.30}$$

Chod lúčov v gradientnom vlákne

V kapitole 3. (Geometrický opis šírenia sa vĺn) sme odvodili rovnicu eikonalu (3.6 b), ktorá nám umožnila nájsť diferenciálnu rovnicu lúča (3.9) v nehomogénnom prostredí, keď index lomu je funkciou polohy, t. j. $n = n(\vec{r})$. Ak zderivujme výraz na ľavej strane rovnice (3.9), potom dostaneme:

$$\frac{dn}{dl}\cdot\frac{d\vec{r}}{dl} + n\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dl^2} = \nabla n \tag{19.31 a}$$

Ak budeme mať ďalej na mysli paraxiálne lúče, to znamená, že sa šíria iba v okolí osi vlákna a uhol α, ktorý zvierajú s osou je taký malý, že

$$\mathrm{tg}\,\alpha \doteq \sin\alpha \doteq \alpha \quad \text{a teda} \quad \cos\alpha \cong 1 \tag{19.32}$$

bude dl = dz, kde z je súradnica meraná v smere osi optického vlákna. Pretože v uvažovanom prípade sa index lomu n v smere l, respektíve v smere z nemení, bude v prvom člene predchádzajúcej rovnice $\mathrm{d}n/\mathrm{d}l = 0$. Potom rovnicu (3.9) môžeme prepísať do tvaru:

$$n(r)\cdot\frac{d^2 r}{dz^2} = \nabla n(r). \tag{19.31 b}$$

Vyjadrime polohový vektor $\vec{r}$ a tiež gradient indexu lomu ∇n v kartézskom systéme súradníc. Potom rovnicu (19.31 b) môžeme napísať :

$$n\cdot\frac{\partial^2\left(x(z)\cdot\vec{i} + y(z)\cdot\vec{j} + z(z)\cdot\vec{k}\right)}{\partial \quad z^2} = \frac{\partial n(x,y)}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial n(x,y)}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial n(x,y)}{\partial z}.\vec{k}\,, \tag{19.33}$$

alebo tiež

$$n \cdot \frac{\partial^2 \left(x(z) \cdot \vec{i} + y(z) \cdot \vec{j} \right)}{\partial \quad z^2} = \frac{\partial n(x,y)}{\partial x} . \vec{i} + \frac{\partial n(x,y)}{\partial y} . \vec{j} \,, \tag{19.34}$$

pretože druhá derivácia z-tovej zložky na ľavej strane diferenciálnej rovnice (19.34) je rovná nule. Podobne je rovná nule aj na pravej strane, pretože predpokladáme, že index lomu nie je funkciou súradnice z. Ak budeme mať ďalej na mysli meridiánové lúče, takže platí $y = 0$ a $x = r$, potom môžeme rovnicu (19.31 b) prepísať do tvaru

$$n(r) \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{\partial n(r)}{\partial r} \,. \tag{19.35}$$

Keď index lomu bude daný napr. funkciou $n_1(r) = n_1 \left[1 - \Delta \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$

$$n(r) = n_1 \cdot \left(1 - \frac{\Delta}{a^2} \cdot (x^2 + y^2) \right) = n_1 \left(1 - \Delta \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \quad \text{a} \quad \frac{\Delta}{a^2} \cdot (x^2 + y^2) \langle\langle 1 \tag{19.36}$$

môžeme po dosadení do rovnice (19.34) túto rovnicu prepísať do tvaru

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{2 \cdot \Delta}{a^2} \cdot r \,, \tag{19.37}$$

čo je známa „harmonická“ rovnica (opisujúca napríklad harmonický pohyb kyvadla). Jej riešenie, ako je známe, je opísané funkciou

$$r = r_0 \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{2 \cdot \Delta}}{a} \cdot z + \xi \right) , \tag{19.38}$$

kde r_0 je maximálne vychýlenie uvažovaného lúča od osi (amplitúda), ξ je konštanta, závislá od toho, v ktorom mieste a pod akým uhlom lúč do vlákna vstupuje a z je súradnica meraná od počiatku vlákna.

Rozšírenie impulzov vo vlákne s parabolickou závislosťou indexu lomu

Podobne ako sme v step-indexovom vlákne porovnali optickú dráhu (optické oneskorenie) pre lúč šíriaci sa pod hraničným uhlom a šíriacim sa v optickej osi vlákna, porovnajme optické dráhy osového a hraničného lúča v gradientnom vlákne. Obmedzíme sa pri tom na prípad paraxiálnych lúčov (znamená to, že predpokladáme malý rozdiel indexu lomu v strede vlákna a v jeho plášti).

Element dráhy lúča ds na úseku vlákna dĺžky dx je rovný

$$ds = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot dx\,, \tag{19.39}$$

kde uhol α je smer dotyčnice k lúču v príslušnom bode, takže (pre meridiánové lúče) je určený deriváciou funkcie (19.38) opisujúcej tvar lúča. Amplitúda $r_{0,\max}$ závislosti (19.38) pri najväčšom odklone lúča sa musí rovnať polomeru jadra a , takže

$$ds = \sqrt{1 + 2\Delta\cos^2\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}z\right)} \cdot dz\,. \tag{19.40}$$

Pre element optickej dráhy (ktorý sa rovná súčinu indexu lomu v danom mieste a elementu ds dostávame:

$$dl = \left(n_1 - \frac{n_1 \cdot \Delta}{a^2} \cdot r^2\right) \cdot \sqrt{1 + 2\Delta\cos^2\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}z\right)} \cdot dz\,. \tag{19.41}$$

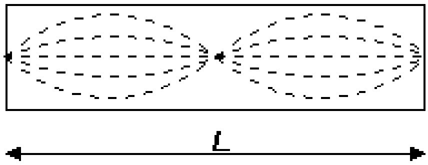
Integráciou dl cez celú dĺžku vlákna Δz dostaneme optickú dĺžku najviac „vychýleného“ vlákna l_{max} . Integráciu môžeme rozdeliť na úsek rovný celistvému násobku dráhy $L\frac{2\pi a}{\sqrt{2\Delta}}$ a zvyšok dĺžky vlákna. Dostaneme tak po elementárnych úpravách

$$l_{\max} = n_1\Delta z + n_1 \cdot \Delta \int_0^{kL}\left(\cos^2\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}z\right) - \sin^2\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}z\right)\right)dz +$$

$$+ n_1 \cdot \Delta \int_{kL}^{\Delta z}\left(\cos^2\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}z\right) - \sin^2\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}z\right)\right)dz \tag{19.42}$$

Pretože integrál štvorca funkcie sínus a kosínus sú na dĺžke rovnej násobku periódy rovnaké, je prvý z integrálov predchádzajúceho vzťahu rovný nule. A keďže dĺžka L je rádovo milimetre, je druhý integrál prakticky zanedbateľný voči $n_1\Delta z$ a optická dráha l_{max} je zhodná s optickou dráhou stredového lúča. Analogický výsledok dostaneme pre všetky ostatné paraxiálne lúče. Môžeme teda povedať, že za uvedených podmienok doba prechodu optického signálu nezávisí od uhla, pod ktorým lúč do vlákna vchádza, inými slovami: apertúrny uhol neovplyvňuje skreslenie tvaru prenášaného signálu (neovplyvňuje zmenu šírky impulzu).

Všimnime si ešte jednu zaujímavú vlastnosť vlákien s parabolickou závislosťou indexu lomu. Perióda ohybov nezávisí (pre paraxiálne lúče) od amplitúdy r_0 . To znamená, že všetky lúče, ktoré prechádzajú jedným miestom ľubovoľného rezu vlákna, prechádzajú rovnako položeným bodom i vo vzdialenosti L (resp. $n.L$), alebo, že prechádzajú symetricky uloženým bodom vo vzdialenost $L/2$ (resp. vo vzdialenosti $(n+1/2).L$).



Obr. 19.10. „Zobrazovanie" v gradientnom vlákne

Rovnakým spôsobom sa správajú i „mimo-meridiánové" lúče. Vyplýva to z rovnice (19.35), z ktorej je vidieť, že rovnice analogické rovnici (19.37) platia pre x-ovú i y-ovú zložku vektora $\vec{r}$. Periodičnosť riešenia sa teda týka i lúčov, ktorých y-ová súradnica nie je obmedzená na meridiánovú rovinu, napríklad lúčov ktoré sa šíria vo vlákne po skrutkovici a podobne. Vlákno s kvadratickým profilom indexu lomu teda (pomocou paraxiálnych lúčov) „zobrazuje" rozloženie intenzity na jeho „vstupe" do miesta vo vzdialenosti L a teda sa javí ako „priestorovo rozložená" šošovka. Už na základe tohto faktu by sme mohli tvrdiť, že optické dráhy všetkých lúčov ktoré obraz vytvárajú, musia byť rovnaké. Tak, ako tomu je i pri zobrazovaní pomocou lámavých plôch (šošoviek). V opačnom prípade by rôzne lúče vychádzajúce z jedného bodu „prenášali" do miesta obrazu tohto bodu vlny s odlišnými fázami, a tak by sa ich príspevky interferenčne „rušili".

Poznamenajme ešte, že použiť pri prenose signálu optickým vláknom len paraxiálne lúče by bolo z hľadiska intenzity preneseného svetelného žiarenia veľmi nevýhodné. V praxi sa preto používajú značne vyššie apertúry, takže tvrdenie o bezdisperznosti gradientných vlákien je pre praktické použitie vlákien príliš silné a prísne vzaté nepravdivé. Avšak na základe uvedeného je vidieť, že z principiálnych dôvodov musí byť signál prenášaný gradientným vláknom menej zaťažený vplyvom apertúrneho uhla na dobu oneskorenia, než tomu je u vlákien step-indexových.

V úvahách o prenosových vlastnostiach mnohovidových vlákien sa konštatuje, že rozšírenie impulzov vo vlákne s parabolickým indexom lomu je Δ krát menšie ako vo vlákne so skokovou zmenou indexu lomu, čo možno vyjadriť vzťahom

$$\Delta\tau_{GI} \approx \Delta\tau_{SI}.\Delta\,, \tag{19.43}$$

kde $\Delta\tau_{SI}$ je rozšírenie impulzov pre vlákno so skokovou zmenou indexu lomu podľa rovnice (19.24) a Δ je pomerný index lomu daný vzťahom (19.12).

19.5. Disperzie optických vlákien

Rýchlosť šírenia harmonického signálu vo vedení alebo inom prenosovom prostredí, ktorého fázová konštanta je $\beta(\omega)$, je daná vzťahom

$$v = \frac{\omega}{\beta(\omega)}, \tag{19.44}$$

V homogénnom optickom prostredí sa rýchlosť šírenia vypočíta podľa vzťahu

$$v = \frac{c}{n}, \tag{19.45}$$

takže

$$\beta = n.\frac{\omega}{c}. \tag{19.46}$$

V prípade šírenia impulzného signálu - alebo všeobecnejšie signálu pozostávajúceho zo skupiny vĺn s rôznymi frekvenciami - sa hovorí o skupinovej (grupovej) rýchlosti šírenia sa. O tejto problematike pojednáva podrobnejšie 1. kapitola tejto knihy.

$$v_{sk} = \left.\frac{\partial \omega}{\partial \beta}\right|_{\omega_0} \tag{19.47}$$

kde ω_0 je nosná frekvencia. Potom možno definovať skupinovú dobu oneskorenia, ktorá je daná vzťahom

$$\tau_{sk} = \frac{1}{v_{sk}}.L = \frac{\partial \beta(n_1, n_2, \lambda, vid, polarizacia)}{\partial \omega}.L \tag{19.48}$$

Skupinová doba oneskorenia podľa prechádzajúceho vzťahu je funkciou indexov lomu jadra a plášťa optického vlákna, vlnovej dĺžky a treba ju definovať pre každý vid samostatne.

Disperzné efekty v jednovidových vláknach vyplývajú z frekvenčnej závislosti fázovej konštanty šírenia $\beta(\omega)$. Ako vidieť zo vzťahov (pozri 6. kapitolu)

$$U = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \qquad \text{a} \qquad V = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} \tag{19.49}$$

táto frekvenčná závislosť je spôsobená nielen frekvenčnou závislosťou indexu lomu jadra vlákna a plášťa ale aj frekvenčnou závislosťou *U* a *V*.

Rozširovanie optických impulzov pri prenose optickým vláknom je zapríčinené štyrmi nezávislými mechanizmami:

a) **materiálovou disperziou**, ktorá je zapríčinená tým, že index lomu materiálu vlákna je závislý od vlnovej dĺžky optického žiarenia,

b) **vlnovodovou disperziou**, ktorá je spôsobená tým, že prenosová funkcia jednotlivých vidov je závislá od vlnovej dĺžky optického žiarenia,

c) **vidovou disperziou**, ktorá je spôsobená tým, že prenosové charakteristiky jednotlivých vidov v mnohovidovom vlákne sú navzájom odlišné,

d) **polarizačnou disperziou**, ktorá je spôsobená tým, že základný vid LP_{01} jednovidového vlákna sa skladá z dvoch ortogonálne polarizovaných vidov, ktoré v prípade anizotropie alebo nekruhovitosti v optickom vlákne nemajú rovnaké fázové konštanty šírenia.

V jednovidových vláknach sa musí uvažovať materiálová disperzia, vlnovodová a polarizačná disperzia. V mnohovidových vláknach sa musí uvažovať s materiálovou a vidovou disperziou.

19.5.1 Materiálová disperzia

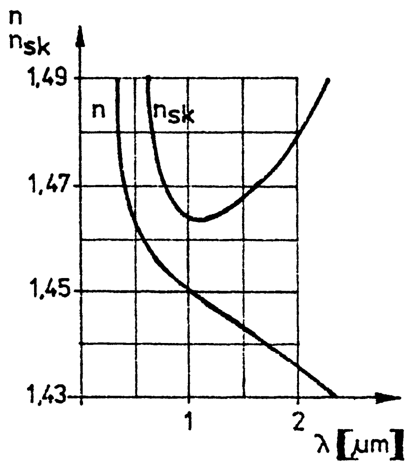
Pre rovinnú vlnu v homogénnom prostredí s konštantou šírenia $\beta = k_0 . n$, možno pre skupinovú dobu šírenia sa na jednotku dĺžky písať

$$\tau'_{sk} = \frac{\tau_{sk}}{L} = \frac{1}{v_{sk}} = \frac{n_{sk}}{c} = \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \tag{19.50}$$

pričom

$$n_{sk} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} = n + \frac{dn}{d\omega}\omega , \tag{19.51}$$

vyjadruje skupinový index lomu. Závislosť indexu lomu od vlnovej dĺžky je daná Sellmeierovou rovnicou (19.50). Priebeh n a n_{sk} pre čisté kremičité sklo je znázornený na obr. 19.11. Rozdiel skupinových oneskorení dvoch signálov, ktoré sa prenášajú na rovnakom vide, ale na rôznych vlnových dĺžkach, navzájom vzdialených o $\Delta\lambda$ je daný rozvojom do radu v tvare



Obr. 19.11. Závislosť indexu lomu n a skupinového indexu lomu n_{sk} od vlnovej dĺžky optického žiarenia

$$\Delta\tau_{sk}' = \frac{d\tau_{sk}}{d\lambda}\Delta\lambda + \frac{1}{2}\frac{d^2\tau_{sk}}{d\lambda^2}(\Delta\lambda)^2 + ..., \tag{19.52}$$

Pre rovinnú vlnu v nekonečnom médiu, v ktorom platí $\beta = k_0 n$ je

$$\tau_{sk} = L\frac{n}{c}, \tag{19.53}$$

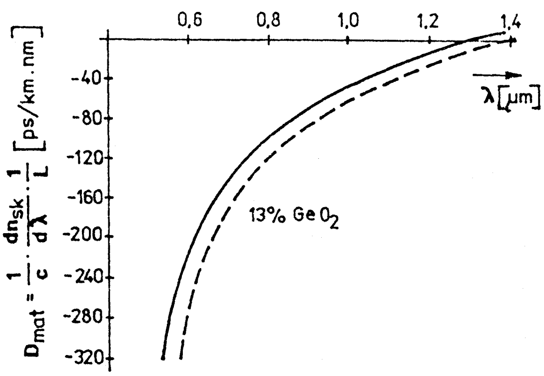
a teda $\Delta\tau_{sk} = 0$.

Skupinové oneskorenie rovinnej vlny je teda dané aj materiálovými vlastnosťami skla, ktoré sú charakteristické zmenou indexu lomu na vlnovej dĺžke optického žiarenia.

Pri predpoklade, že $\beta = k_0 n$ na základe rovnice (19.52) a (19.53) platí

$$\frac{\Delta\tau_{sk}}{L} = -\frac{\lambda}{c}\frac{d^2n}{d\lambda^2}\Delta\lambda - \frac{1}{2c}\left(\frac{d^2n}{d\lambda^2} + \lambda\frac{d^3n}{d\lambda^3}\right)(\Delta\lambda)^2 . \qquad (19.54)$$

Pre čisté kremenné sklo je $\frac{d^2n}{d\lambda^2}$ rovná nule pri $\lambda_0 = 1270nm$. Materiálová disperzia je v tejto oblasti úmerná $\Delta\lambda^2$ a je rovná rádovo 10^{-2}ps.km^{-1}.nm^{-2}. Z hľadiska materiálovej disperzie je teda výhodné pracovať v oblasti vlnových dĺžok okolo 1270 nm. Na vlnových dĺžkach okolo 850 nm má prvý člen pri $\Delta\lambda^2$ hodnotu približne –80 ps.km^{-1}.nm^{-1}. Aj na základe tejto krátkej analýzy vidieť ako výrazne závisí materiálová disperzia od vlnovej dĺžky optického žiarenia.



Obr. 19.12. Závislosť materiálovej disperzie od vlnovej dĺžky pre čisté kremenné sklo a pre kremičité sklo dopované 13 percentami oxidu germaničitého

Na obr. 19.12 je znázornená závislosť materiálovej disperzie od vlnovej dĺžky pre čisté kremenné sklo a pre kremenné sklo dopované 13 percentami oxidu germaničitého. Aj z tohto grafického vyjadrenia vidieť, že materiálová disperzia je nulová okolo vlnovej dĺžky 1300 nm.

Efekt materiálovej disperzie sa charakterizuje druhou deriváciou indexu lomu *n* podľa kruhovej frekvencie ω alebo disperzným koeficientom $D(\lambda)$, definovaným podľa nasledovného vzťahu

$$D(\lambda) = -\frac{\lambda}{c}.\frac{d^2n}{d\lambda^2} \qquad (19.55)$$

$D(\lambda)$ sa vyjadruje v $ps/km.nm$. Napríklad $D(\lambda) = 20 ps/km.nm$ znamená, že optický impulz, ktorý má spektrálnu šírku 1 *nm,* sa na každom kilometri rozšíri o 20 *ps*.

19.5.2 Vlnovodová disperzia

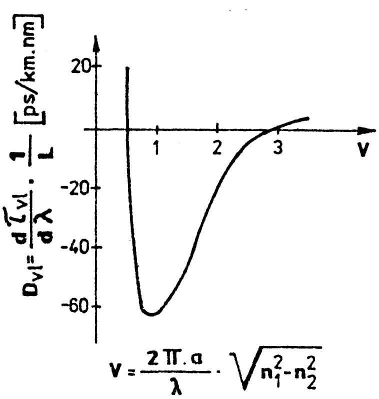
Ak sa vo vlákne šíri len jeden vid, pri prenose signálov s konečnou šírkou spektra, má na skreslení signálu veľký podiel nelineárna závislosť fázovej konštanty $\beta(\omega)$ od frekvencie prenášaného signálu. Takéto podmienky šírenia sa dosiahnu ak sa dodržia vhodné podmienky z hľadiska pomerného indexu lomu Δ, polomeru jadra vlákna a a prevádzkovej vlnovej dĺžky λ. Ak napríklad požadujeme, aby sa vlákno prejavovalo ako jednovidové na vlnovej dĺžke 1300 nm, potom pre index lomu jadra vlákna rovný 1,46 a $\Delta = 0{,}002$ musí byť priemer jadra menší ako

$$2a \leq \frac{2.405\lambda}{\pi\left(n_1^2 - n_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cong 5\mu m \tag{19.56}$$

Aj keď priemer jadra vlákna musí byť pre jednovidovú prevádzku menší ako rádovo niekoľko μm, priemer plášťa býva $125\mu m$.

Vlnovodová disperzia je závislá od profilu indexu lomu optického jednovidového vlákna. Frekvenčná závislosť vlnovodovej disperzie má dve nasledovné príčiny:

- indexy lomu rôznych typov optických skiel, ktoré sa používajú pre vytvorenie profilu indexu lomu jadra vlákna a plášťa nezávisia od ω tým istým spôsobom,
- na základe $U = a\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}$ a $V = a\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}$ možno ukázať, že radiálna zmena amplitúdy módu je tiež vlnovo závislá. Pre jednovidové vlákno platí, že koncentrácia energie v jadre vlákna závisí od toho v akej vzdialenosti od hraničnej vlnovej dĺžky sa pracuje. Táto vlastnosť sa využíva napríklad pre posunutie vlnovej dĺžky s nulovou disperziou do okolia $1550nm$. Môže sa to dosiahnuť použitím step-indexového vlákna s vysokým pomerným indexom lomu jadra a plášťa vlákna, tak ako je to naznačené v kapitole 7.



Obr. 19.13. Závislosť vlnovodovej disperzie pre vid LP₀₁ $(\lambda = 1\mu m, \Delta = 0{,}001)$ *od normovanej frekvencie V*

Použitím toho istého princípu je tiež možné navrhovať disperzne ploché vlákna, ktoré majú v širokom rozsahu vlnových dĺžok nízku disperziu. To sa dosahuje viacnásobnými plášťovými vrstvami. Na obr. 7.1 v kapitole 7 sú znázornené profily indexu lomu a disperzné charakteristiky rôznych druhov vlákien.

Vlnovodová disperzia vzniká v dôsledku závislosti prenosovej charakteristiky vidu od vlnovej dĺžky optického žiarenia. Počíta a vyjadruje sa pre monovidové vlákna. Príklad vlnovodovej disperzie pre vid LP_{01} $(\lambda = 1\mu m, \Delta = 0{,}001)$ v závislosti od normovanej frekvencie V je znázornený na obr. 6.3 [19.3]

Z uvedeného grafu vyplýva, že napríklad pre vlnovú dĺžku $\lambda = 1\mu m,$ pre $\Delta\lambda = 1nm$ a $V = 2$ vychádza hodnota vlnovodovej disperzie $\frac{\partial\tau_v}{L}$ = -20.10^{-12} s.km^{-1}.nm^{-1}.

Pre šírku pásma $\Delta\lambda = 1nm$ je celková hodnota vlnovodovej disperzie $\frac{\partial\tau_v}{L} = -0{,}02 ns/km$. Materiálová a vlnovodová disperzia sa môžu pri vhodne zvolenej vlnovej dĺžke a profile indexu lomu vzájomne kompenzovať. Bližšie bude o tejto problematike pojednané v časti 19.7.

19.5.3 Dvojlom a polarizačná disperzia

Základný vid optického vlnovodu HE_{11}, ako bolo ukázané v kapitole 6, je lineárne polarizovaný v smere osi x alebo v smere osi y (zložka v smere osi z je približne $100x$ menšia). V skutočnosti jednovidové vlákno nie je v plnom slova zmysle jednovidové, pretože vedie dva ortogonálne polarizované vidy. Ak sú zachované ideálne podmienky šírenia sa, čo znamená, že vlákno je perfektne cylindricky symetrické a je z izotropného materiálu, potom vid s polarizáciou v smere osi x a vid s polarizáciou v smere osi y majú rovnakú rýchlosť šírenia.

V praxi však čiastočná anizotropia vlákna a jeho nedokonalá kruhovitosť spôsobujú premiešavanie týchto dvoch ortogonálne polarizovaných vidov. Ku premiešavaniu dochádza náhodne, náhodnosťou nehomogenít v anizoótropii a v kruhovitosti. Na základe toho, optické žiarenie privedené do vlákna s lineárnou polarizáciou rýchlo mení so vzdialenosťou náhodne svoj polarizačný stav.

Stupeň rozdielnosti rýchlosti šírenia vidov sa definuje vidovým dvojlomom B

$$B = \frac{|\beta_x - \beta_y|}{k_0} = |n_x - n_y| \tag{19.57}$$

kde β_x a β_y sú konštanty šírenia sa vidov polarizované v smere osi x a y a n_x a n_y sú efektívne indexy lomu dvoch ortogonálne polarizovaných vidov. Hodnotu B možno vyjadriť ako súčet dvoch vplyvov ako B_{ng} - vplyv geometrických efektov a B_{nm} - vplyv materiálu

$$B_n = B_{ng} + B_{nm} \tag{19.58}$$

V práci [19.4] je ukázané, že pre danú hodnotu B sa výkon medzi týmito dvomi vidmi vymieňa periodicky s periódou L_B

$$L_B = \frac{2\pi}{\left|\beta_x - \beta_y\right|} = \frac{\lambda}{B} \tag{19.59}$$

Typické hodnoty pre L_B v štandardných konvenčných jednovidových vláknach sú od jedného do niekoľkých metrov. V niektorých aplikáciách ako napr. v koherentných optických komunikáciách je dôležité, aby optické vlákno prenášalo signál bez polarizačných zmien. Takéto **vlákna** sa nazývajú **polarizáciu „zachovávajúce**" a navrhujú sa tak, aby mali veľký dvojlom, čo znamená, že je snaha, aby bola u nich úmyselne hodnota B vo vzťahu (19.57) čo najväčšia, takže náhodné fluktuácie budú nevýrazne pôsobiť na polarizáciu svetla pri šírení sa vláknom. V tzv. „PANDA" vláknach bola dosiahnutá hodnota $B = 2.10^{-4}$, čo zodpovedá dĺžke $L_B \approx 1cm$.

Vo väčšine aplikácií optických vlákien sa modálny dvojlom považuje za chybu alebo nekvalitu vlákna (aj keď je vlákno „relatívne" dokonalé, vzniká dvojlom). Hodnota $B = 10^{-10}$ sa už považuje za hodnotu, vyjadrujúcu, že ide o kvalitné vlákno. Vidový dvojlom spôsobuje disperziu vidovou polarizáciou (Polarization Mode Dispersion - PMD). Tento vplyv sa rozličným spôsobom prejavuje na rôzne modulácie.

V intenzitne modulovaných systémoch s priamou detekciou sa môže polarizácia hodnotiť diferenciou oneskorenia τ_{skx} a τ_{sky} na jednotku dĺžky, spôsobované dvoma polarizáciami. Takýto rozdiel

$$\tau_{skx} - \tau_{sky} = \Delta\tau_{sk} \tag{19.60}$$

sa môže vyjadriť

$$\Delta\tau_k = \frac{1}{c}\left(B_n + k_0 \frac{dB_n}{dk_0}\right) \tag{19.61}$$

Typické hodnoty $\Delta\tau_{sk}$ sú rádovo okolo 1 *ps/km*.

Na rozdiel od materiálovej a vlnovodovej disperzie je polarizačná disperzia nezávislá alebo len veľmi málo závislá od šírky pásma prenášaného optického signálu a má výrazne náhodný charakter, tak náhodný, ako náhodne sa menia materiálové a geometrické vlastnosti vlákna.

Polarizačná disperzia sa výrazne neprejavuje v systémoch, ktoré prenášajú informáciu s prenosovou rýchlosťou rádu Gbit/s s nekoherentným prenosom. Úlohu hrá v systémoch pracujúcich s rýchlosťami prenosu 10-ky Gbit/s, kedy sa obyčajne používajú síce ešta nekoherentné, ale úzkopásmové laserové diódy. Výrazný vplyv má v systémoch s koherentnými prenosmi.

19.5.4 Vidová disperzia

Vidová disperzia v optickom vlákne vzniká v dôsledku rôznych prenosových vlastností jednotlivých prenášaných vidov. Vzniká teda aj vtedy, ak generátor generuje optické žiarenie so šírkou pásma blížiacou sa k nule. Čím viac vidov sa optickým vláknom prenáša, tým je väčšia hodnota vidovej disperzie. Typické hodnoty sú :

- pre vlákno so skokovou zmenou indexu lomu $\Delta\tau_{vid} = 50$ ns/km,
- pre vlákno s parabolickou zmenou indexu lomu $\Delta\tau_{vid} = 1$ ns/km.

V monovidových vláknach vidová disperzia samozrejme nevzniká.

Z predchádzajúceho rozboru vyplýva, že šírka pásma optických vlákien v dôsledku disperzie je závislá od vlnovej dĺžky prenášaného optického žiarenia, jeho šírky pásma, počtu šíriacich sa vidov a v neposlednom rade aj typu vlákna.

19.6 Optické solitony

Vzdialenosť, ktorá môže byť, preklenutá optickým vláknom bez opakovania (regenerácie) signálu je určená stratami vo vlákne a jeho disperziou. Straty vo vlákne boli redukované na hodnotu okolo 0,2 *dB/km* na vlnovej dĺžke 1,55 μm. Ak teda prijímač detekuje signál, ktorý je 20 *dB* pod úrovňou vstupného signálu, môže byť preklenutá bez potreby zosilňovania alebo regenerácie signálu vzdialenosť 100 *km*. Vzdialenosť opakovačov je samozrejme určená aj veľkosťou prenosovej rýchlosti, ktorá je závislá od disperzie optického vlákna.

Vložením optického zosilňovača možno zväčšiť vzdialenosť medzi vysielačom a prijímačom. Ak je požiadavka prenášať údaje vysokými rýchlosťami, disperzia bude aj naďalej hrať obmedzujúcu úlohu.

Všeobecne sa zaužívalo považovať optické vlákno za lineárne prenosové médium. Optické vlákna v skutočnosti nie sú úplne lineárne vlnovody. Malá hodnota nelinearity a na strane druhej lineárna disperzia, spôsobujú vznik špeciálnych impulzných tvarov, ktoré sa môžu šíriť v bezstratovom, ale disperznom vlákne ľubovoľnou dĺžkou bez zmeny tvaru. Tieto **špeciálne tvary vĺn**, ktoré **nazývame solitony**, musia niesť danú hodnotu optickej energie, ktorá závisí od dĺžky trvania impulzov, vláknových nelinearitách a disperzii [19.5]. Solitony neriešia problém optických strát, ale umožňujú podstatne riešiť otázku disperzií vlákien. Pre šírenie solitonov sa musí používať niektorý z druhov optických zosilňovačov, aby sa pozdĺž vlákna udržiavala potrebná energia impulzov. Solitony môžu prenášať svetlo na veľké vzdialenosti až niekoľko stotisíc kilometrov. Práve pre tieto možnosti sa záujem výskumu vo svete výrazne koncentruje na otázky využitia solitonov.

Diferenciálnu rovnicu pre solitony budeme riešiť v dvoch etapách. Po prvé zanedbáme disperziu a koncentrujeme sa na nelinearity vláknových materiálov. Potom zanedbáme nelinearity a budeme riešiť diferenciálnu rovnicu pre obálku impulzov v disperznom médiu. Na záver budeme kombinovať tieto dva efekty do jednej rovnice. Riešenie je jednoduché, ak uvažujeme vláknové vidy v tvare konštantnej intenzity v určitom priemere, ktorý sa definuje zavedením efektívnej oblasti pre vidové pole. Takýto predpoklad nie je nevyhnutný, ale zjednodušuje riešenie solitonovej rovnice.

Šírenie takejto rovinnej vlny v smere osi z pozdĺž vlákna môže byť vyjadrené podľa kapitoly 9. ako riešenie vlnovej rovnice

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left(n^2 E\right)}{\partial t^2}, \tag{19.62}$$

kde c vyjadruje rýchlosť šírenia svetla vo vákuu. Predpokladá sa, že index lomu n nie je lineárny a závisí nepatrne od druhej mocniny amplitúdy elektrického poľa, tak ako to bolo vyjadrené v kapitole 9, teda:

$$n = n_0 + n_2|E|^2 . \tag{19.63}$$

Elektrické pole sa mení v závislosti od dĺžky vlákna s konštantou šírenia β_0 a v závislosti od času s uhlovou frekvenciou ω_0. Pre opis amplitúdových zmien zavedieme „pomaly" sa meniacu obálkovú funkciu impulzu $\Phi(z,t)$

$$E = \Phi(z,t)e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} . \tag{19.64}$$

Keď urobíme druhú deriváciu E podľa z a t, môžeme zanedbať druhé derivácie funkcie Φ, pretože v dôsledku pomalých zmien tejto funkcie sú tieto omnoho menšie ako členy $\omega_0^2\Phi$ a $\beta_0^2\Phi$. Použitím $\beta_0 = n_0\omega_0 / c$ možno rovnicu (19.62) upraviť do tvaru

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \dot{\beta}_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -i\frac{n_2}{n_0}\beta_0|\Phi|^2\Phi . \tag{19.65}$$

Prechod z rovnice (19.62) na rovnicu (19.65) zahŕňa v sebe dve dodatočné priblíženia. Pretože n_2 je veľmi malé, kvadratická hodnota tejto veličiny sa môže zanedbať. Z toho istého dôvodu ponecháme len prvý člen, $-\omega^2 |\Phi|^2 \Phi$, druhej derivácie času $\partial^2 \left[(\phi)^2 \phi\right] / \partial t^2$, pretože všetky ďalšie členy obsahujúce n_2 sú zanedbateľné malé. V rovnici (19.65) sme použili označenie $n/c = \dot{\beta}_0$, kde bodka vyjadruje deriváciu β_0 podľa na frekvencie ω_0. Tento posledný krok je správny pretože sa predpokladalo, že n_0 je nezávislé od ω_0. Rovnica (19.65) opisuje obálku šírenia impulzu v nelineárnom nedisperznom médiu, ale táto rovnica neposkytuje solitonové riešenie. Solitony môžu existovať len vtedy, ak sa disperzia sčítava (spolu pôsobí) s nelinearitou vlákna. Aby bolo možné počítať ako disperzia pôsobí na obálku impulzov, budeme riešiť zodpovedajúcu diferenciálnu rovnicu pre lineárne ale disperzné médium. Rovinná vlna s uhlovou frekvenciou ω môže byť v tomto prípade v tvare

$$E_p = A e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{19.66}$$

Optický impulz sa získa ako superpozícia nekonečného množstva vĺn rôznych frekvencií

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i(\omega t - \beta z)} d\omega \tag{19.67}$$

pretože médium je disperzívne, konštanta šírenia β je nelineárnou funkciou ω. Aproximácia závislosti β na ω sa môže urobiť rozvojom do radu

$$\beta = \beta_0 + \dot{\beta}_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\ddot{\beta}_0(\omega - \omega_0)^2 \tag{19.68}$$

Bodky znázorňujú deriváciu β na nosnej frekvencii ω_0. Ak použijeme (19.68) môžeme rovnicu (19.67) prepísať do tvaru (použila sa aj rovnica (19.64))

$$\Phi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(u) \exp\left\{ i \left[\left(t - \dot{\beta}_0 z \right) u - \frac{1}{2} \ddot{\beta}_0 z u^2 \right] \right\} du \tag{19.69}$$

Integračná premerná u je rovná $\omega - \omega_o$. Substitúciou (19.69) môžeme ľahko ukázať, že obálka impulzov zodpovedá diferenciálnej rovnici

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \dot{\beta}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{i}{2} \ddot{\beta}_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{19.70}$$

Diferenciálna rovnica pre obálku impulzov poskytuje vyjadrenie šírenia impulzov v médiu, ktoré sa prejavuje len disperziou prvého rádu ako je vyjadrené v (19.68)

Ľavé strany (19.65) a (19.70) sú identické. Každá opisuje šírenie impulzov ľubovoľného tvaru

$$\Phi = f\left(t - \dot{\beta}_0\, z\right). \tag{19.71}$$

Pravá strana (19.65) vyjadruje šírenie vĺn pri počítaní vplyvu nelinearít v médiu, zatiaľ čo pravá strana (19.69) berie do úvahy disperzie. Ak sú obidva efekty slabé, ako je to v typických komunikačných vláknach, obidva efekty sa môžu uvažovať spoločne, čím obdržíme solitonovú rovnicu pre vlny v nelineárnom a disperznom médiu.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \dot{\beta}_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{i}{2}\ddot{\beta}_0 \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - i\frac{n_2}{n_0}\beta_0 \left|\Phi\right|^2 \Phi\,. \tag{19.72}$$

Aj keď táto rovnica dáva riešenie len pre slabé nelinearity a malú disperziu, je vhodná pre opis solitonov v bežných optických vláknach. Solitonovú rovnicu (19.72) je vhodné transformovať do normalizovaného tvaru zavedením

$$t' = \frac{1}{\tau}\left(t - \dot{\beta}_0\, z\right) \quad \text{a} \quad z' = \frac{\left|\ddot{\beta}_0\right|}{\tau^2} z \tag{19.73}$$

a novou funkciou opisujúcou obálku

$$u(z', t') = \tau \left[\frac{n_2 \beta_0}{n_o \left|\ddot{\beta}_0\right|}\right]^{1/2} \Phi\,. \tag{19.74}$$

Pomocou tejto transformácie prechádza rovnica (19.72) na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial z'} = \frac{i}{2}\frac{\ddot{\beta}_0}{\left|\ddot{\beta}_0\right|}\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} - i\left|u\right|^2 u\,. \tag{19.75}$$

Budeme vidieť, že τ v rovnici (19.73) vyjadruje šírku impulzu. Najjednoduchšie riešenie solitonovej rovnice (19.72) je známe ako soliton 1. rádu

$$\Phi(z,t) = \Phi_0 \frac{e^{iaz}}{\cosh\left(\dfrac{t - \dot{\beta} z}{\tau}\right)}\,. \tag{19.76}$$

Predchádzajúca rovnica je riešením (19.72) za predpokladu, že

$$a = \frac{\ddot{\beta}_o}{2\tau^2}\,, \tag{19.77}$$

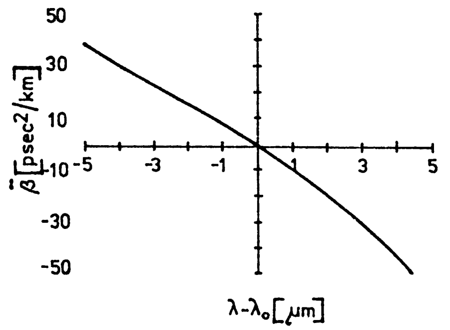
a ak amplitúda solitonov je daná

$$\left|\Phi_o\right|^2 = -\frac{n_o}{n_2}\frac{\ddot{\beta}_o}{\beta_o \tau^2}. \tag{19.78}$$

Soliton (19.76) znázorňuje, že šírka τ kvadrátu amplitúdy solitonového impulzu je nezávislá od z. To vyjadruje, že soliton sa šíri v disperznom vlákne bez zmeny šírky impulzu.

Amplitúdová rovnica (19.78) je zaujímavá z dvoch dôvodov.

Po prvé znázorňuje, že amplitúdy solitonov solitonovej rovnice nemôžu byť ľubovoľné. To je všeobecná vlastnosť nelineárnych diferenciálnych rovníc. Ak teda soliton prvého rádu existuje, nie je jeho amplitúda jednoznačne špecifikovaná nelinearitami média, reprezentovanými hodnotou n_2, ale aj časťou disperzie, ktorá je vyjadrená v hodnote τ $\ddot{\beta}_0$ a šírkou impulzu, ktorá je špecifikovaná v hodnote τ.



Obr. 19.14. Druhá derivácia fázovej konštanty v závislosti od vlnovej dĺžky

Rovnakú dôležitosť má aj druhá vlastnosť. Solitony môžu existovať len v tom prípade, ak $\ddot{\beta}_0 / n_2 \le \tau$. Teda nelinearity a disperzia musia spolupôsobiť v správnej miere. Pretože n_2 taveného kremeňa je pozitívny, ak chceme vybudiť solitony, vlákno musí pracovať na vlnových dĺžkach, ktoré sú dlhšie ako vlnová dĺžka s nulovou disperziou, pretože tam je druhá derivácia fázovej konštanty záporná, pozri obr. 19.14.

Šírka solitonu Δτ na polovici maxima výkonu solitonového impulzu úmerná $|\Phi|^2$ a je vzhľadom na τ definovaná vzťahom

$$\Delta t = 1{,}76\tau. \tag{19.79}$$

Energia nesená solitonom je

$$W_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} A_{eff} \frac{n_o^2 \left|\ddot{\beta}\right|}{n_2 \beta_0 \tau}} \tag{19.80}$$

a špičkový výkon impulzu je

$$P_{\max} = \frac{W_e}{2\tau} \tag{19.81}$$

Vo výraze (19.80) je A_{eff} aktívna plocha vidu vo vlákne.

Rovnica (19.80) vyjadruje, že pre danú disperziu a nelinearity je súčin energie impulzu a šírky impulzu konštantný a teda kratšie solitonové impulzy potrebujú viac energie ako impulzy dlhšie. Môže sa to zdať paradoxné, ale dá sa to vysvetliť tým, že pre danú veľkosť disperzie sa krátky impulz rozširuje viac ako impulz dlhší. Brať do úvahy tieto tendencie znamená väčší príspevok nelinearity, čo je možné zväčšením intenzity poľa.

Solitonové rovnice (19.72) a (19.75), majú nekonečné množstvo riešení, ktoré opisujú solitony vyšších rádov. Každý má definovanú amplitúdu. Solitony vyšších rádov však nie sú tak jednoduché ako solitony prvého rádu (19.76). Všetky solitony vyšších rádov menia periodicky tvar impulzu. Sú to teda impulzy, ktoré sa v dôsledku disperzie nerozširujú spojito, ale ich šírka pulzuje. Tvary týchto impulzov sú veľmi komplikované. Aj napriek tomu solitony vyšších rádov sa budú v budúcnosti pravdepodobne tiež využívať pre prenos dát na veľké vzdialenosti.

Keďže sme vysvetlili teóriu solitonov, nebude teraz zložité dať kvalitatívne vysvetlenie, prečo sa tieto tvary optických vĺn (impulzov) v dôsledku disperzie vlákna nerozširujú.

Je všeobecne známe, že impulzy sa rozširujú vždy pri prechode disperzným médiom. Napríklad, ak impulzy nie sú vysielané do vlákna počas celej dĺžky trvania impulzu na tej istej vlnovej dĺžke, čo môže vzniknúť, ak sa optická nosná frekvencia mení tak, že je nižšia na jednom konci impulzu a vyššia na druhom konci impulzu, impulzy sa môžu oproti normálu buď výraznejšie rozširovať alebo zužovať. To, či sa impulz rozširuje alebo zužuje, závisí od toho, v akom zmysle sa mení frekvencia optickej nosnej a aké znamienko má disperzia $\ddot{\beta}_0$. Zužovanie šírky impulzu na základe predchádzajúceho mechanizmu sa využíva pre generovanie extrémne úzkych svetelných impulzov.

V ďalšom ukážeme, že vláknové nelinearity spôsobujú rozširovanie a zužovanie impulzov. Tento jav sa nazýva vlastná fázová modulácia (v anglickej literatúre Self-Phase Modulation). Rovnica

$$\Phi = f \exp\left\{-i \frac{n_2}{n_0} \beta_0 f^2 z\right\} \tag{19.82}$$

je riešenie rovnice (19.65) kde f je ľubovoľná reálna funkcia $f = f\left(t - \dot{\beta}_0 z\right)$. Ak kombinujeme (19.64) a (19.82), možno odvodiť okamžitú nosnú frekvenciu ako časovú deriváciu fázového uhla komplexnej *funkcie E (z, t)*

$$\omega = \omega_o - 2\frac{n_2}{n_o}\dot{\beta}_0 f \frac{\partial f}{\partial t} z \qquad (19.83)$$

Z tejto rovnice jasne vidíme, že impulzy menia svoju frekvenciu aj v dôsledku nelinearít média. Možno teda prijať predpoklad, že disperzia vlákna môže spolu s nelinearitou viesť ku kompresii týchto impulzov.

Ak na jednej strane zmena frekvencie impulzov a na strane druhej disperzia majú vzájomne vyváženú veľkosť, kompresia vyvolaná predchádzajúcimi javmi úplne kompenzuje tendenciu disperzie rozširovať impulzy tak, že vo výsledku impulzy presne zachovávajú svoju šírku. Na základe predchádzajúceho rozboru vidíme tiež, prečo solitony vyšších rádov pulzujú. V tom prípade zmena frekvencie optickej nosnej vlny a vplyv kompresie nie sú v dokonalej súhre v každom časovom okamihu. V dôsledku toho sa impulzy periodicky skracujú a rozširujú v závislosti od toho, čo pôsobí viac (tendencia ku kompresii alebo ku rozširovaniu impulzu).

Priblíženie tejto myšlienky z hľadiska špičkovej amplitúdy optického impulzu požadovanej pre vybudenie optických solitonov urobíme na nasledovnom príklade. Pre čisté kremičité sklo je nelineárny činiteľ lomu rovný $n_2 = 6{,}1x10^{-23}$ m^2/V^2. Predpokladáme, že efektívna stopa vidu má polomer $r = 5\mu m$, takže $A_{eff} = 7{,}85x10^{-11} m^2$. Na vlnovej dĺžke $\lambda = 1{,}5\mu m$ je $\ddot{\beta} = -20 p\sec^2/km$ obr.19.14. Ak $n_o = 1{,}46$ a $\lambda = 1{,}5\mu m$, potom $\beta = 6{,}12x10^4 cm^{-1}$. Nech šírka impulzu je $\Delta t = 10 p\sec$. Pre tieto hodnoty vychádza z (19.80) a (19.81) špičkový impulzný výkon 375 mV. Požadovaný špičkový výkon klesá v nepriamej úmernosti ku kvadrátu impulznej šírky, teda 10-krát dlhšie impulzy požadujú len 3,75 mV špičkového výkonu. Požadovaný špičkový výkon tiež klesá lineárne so znižovaním hodnoty $|\ddot{\beta}|$. Umiestnením pracovnej vlnovej dĺžky bližšie k nulovej disperzii sa teda tiež redukuje požadovaný špičkový výkon.

Tento príklad potvrdil, že výkonové požiadavky sú zvládnuteľné s existujúcimi laserovými zdrojmi.

Na vybudenie solitonu prvého rádu musí mať vstupný impulz do vlákna tvar a amplitúdu v zmysle vzťahov (19.76) až (19.78). Ak je energia malá, nevyformujú sa solitony a svetelný impulz sa bude rozširovať v dôsledku disperzného vplyvu. Ak je energia vysoká alebo impulzy široké či úzke, soliton s vhodnou energiou a tvarom impulzu sa síce bude tvarovať, ale zvyšková energia sa bude správať ako falošný impulz. Keďže sa falošný impulz šíri vo vlákne pozdĺž so solitónmi, ale s rozdielnou disperziou, ich prítomnosť môže viesť k nežiaducim skresleniam signálu. Ak sa soliton vytvorí, bude utlmený mechanizmom vláknových strát. Pre charakterizovanie stupňa tlmenia je užitočné zaviesť kvantitu

$$z_o = \frac{\pi}{2}\frac{r^2}{|\ddot{\beta}|} \approx 0{,}5\frac{\Delta t^2}{|\ddot{\beta}_0|}, \qquad (19.84)$$

čo je úzko zviazané s hodnotou $1/a$ v rovnici (19.77). Pre koeficient vláknových strát α, ktorý zodpovedá $z_o \le 1/\alpha$, ak soliton bude nastavený zodpovedajúc (19.79) a (19.80), súčin $W_e \Delta t$ zostáva konštantný. Ak stratový koeficient je veľký $z_o \ge \frac{1}{\alpha}$ je soliton nechránený z hľadiska jeho jedinečných vlastností, ale sa stáva normálnym svetelným impulzom rozširovaným disperziou. Tento rozbor vyjadruje, že prenos solitonu na veľké vzdialenosti požaduje pre jeho udržanie opakované zosilňovanie svetelných impulzov pomocou optických zosilňovačov.

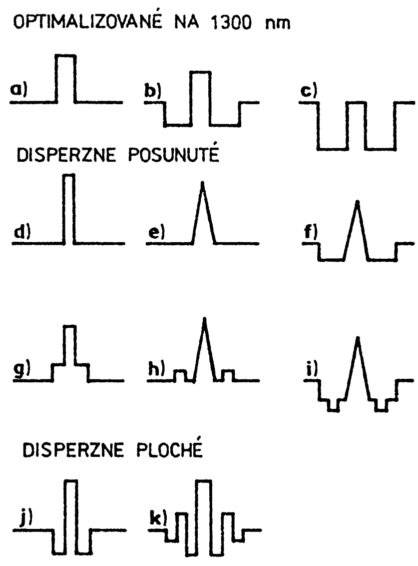
Solitonové komunikačné systémy majú v porovnaní s klasickými optickými systémami niekoľko výhod. Nie sú potrebnéne vysoko náročné jednovidové lasery. Tieto lasery a ich obvody pre riadenie výkonu budú lacnejšie ako regeneratívne opakovače potrebné pre obnovu tvaru impulzov v normálnych systémoch regenerácie s opto-elektronickým a elektro-optickým prevodom. Kapacita systémov sa môže zväčšovať vlnovým multiplexovaním. Chybovosť prenosu v solitonových systémoch môže byť veľmi nízka, pretože prijímané impulzy sú obyčajne ostrejšie (výraznejšie) ako v konvenčných systémoch.

19.7. Rozbor základných vlastností telekomunikačných optických vlákien

19.7.1 Jednovidové vlákna (Single Mode - SM)

Jednovidové vlákna získali široké uplatnenie ako prenosové médium v telekomunikačných sieťach. Príčiny sú nasledovné:

- predpokladá sa, že novo-inštalované káble sa budú využívať viac ako 20 rokov,
- jednovidové vlákna majú najväčšiu šírku prenášaného pásma,
- majú najlepšie predpoklady zvládnuť prenosové požiadavky na budúce širokopásmové služby z rýchlych koncových zariadení, s využitím vlnového multiplexu alebo koherentnej prenosovej techniky,



Obr. 19.15. Typické profily indexu lomu rôznych druhov jednovidových optických vlákien

- poskytujú špičkovú prenosovú kvalitu, okrem iného aj z toho dôvodu, že v nich nevznikajú vidové šumy,
- sú kompatibilné s technológiou integrovanej optiky.

Jednovidové optické vlákna sa dajú konštruovať tak, aby mali nízke tlmenie, vhodné disperzné charakteristiky, nízke straty v spojkách a nízke straty v dôsledku makro a mikroohybov.

Z hľadiska disperznej charakteristiky sa rozlišujú monovidové vlákna:

- konvenčné vlákna, optimalizované do oblasti 1300 nm (Conventional Fibres - CF)
- s posunutým minimom disperzie (Dispersion Shifted Fibres - DSF)
- s plochým priebehom disperzie (Dispersion Flattened Fibres - DFF)

Profily indexu lomu týchto vlákien sú na obr. 19.15

Konvenčné jednovidové vlákna, optimalizované na 1 300 nm

(Conventional Fibres - CF)

Najbežnejšie používané jednovidové vlákna sú vlákna s profilom indexu lomu blízkym step-indexovému priebehu, ktoré sú disperzne optimalizované pre oblasť vlnových dĺžok 1300 nm. Vlákna majú plášť s konštantnou hodnotou indexu lomu „Matched - Cladding“ (MC) alebo plášť s hodnotou indexu lomu, zníženou v okolí jadra „Depresed - Cladding“ (DC).

V prípade MC vlákien má oblasť mimo jadra nemeniaci sa index lomu, obyčajne takej hodnoty, ako je hodnota indexu lomu čistého kremíka. V prípade, že jadro je z čistého kremenného skla nižší index lomu obalu sa dosahuje dotovaním fluoridom. Typická hodnota priemeru poľa, je v prípade MC vlákien okolo 10 μm a pomerný index lomu býva okolo 0,3 %. Zmena užívateľských požiadaviek viedla k návrhu MC vlákien s redukovaným priemerom poľa okolo 9,5 μm a pomerným indexom lomu 0,37 % pre dosiahnutie lepších charakteristík v oblasti vlnových dĺžok v pásme 1 550 nm pri ohybe vlákna . Vlastnosti vlákna sú závislé od priemeru oblasti so zníženým indexom lomu a jeho zníženi. Typická hodnota priemeru poľa u jednovidových DC vlákien je 9 μm a pomerné indexy lomu sú 0,25 % a 0,12 % . Ako MC tak aj DC jednovidové vlákna opísané v predchádzajúcom sú definované v odporúčaní CCITT G.652 tabuľka 19.1 a predstavujú väčšinu jednovidových vlákien používaných v telekomunikačných sieťach.

Tab. 19.1

Parametre jednovidových vlákien na základe odporúčania CCITT G.652

Vonkajší priemer	*125 μm (± 2,4 % max)*
Priemer vidového poľa	*9 - 10 μm ± 10 % nominálnej hodnoty*
Hraničná vlnová dĺžka	*1 100 - 1 280 nm*
Test na ohyb na 1 550 nm	*≤ 1 dB krajné straty pre 100 závitov priemere 7,5 cm*
Disperzia	*≤ 3,5 ps/nm.km medzi 1 285 a 1 330 nm* *≤ 6 ps/nm.km medzi 1 270 a 1 340 nm* *≤ 20 ps/nm.km na 1 550 nm*

Pri podmienke 1 295 $\leq \lambda_0 \leq$ *1 322 nm má byť strmosť zmeny disperzie* $S_0 \leq$ *0,095 ps/nm.km*

Vlákna s posunutou disperznou charakteristikou

(Dispersion Shifted Fibres - DSF)

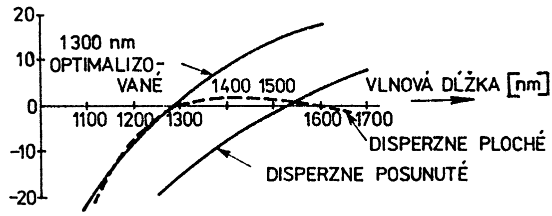
Vlnová dĺžka, pri ktorej má vlákno minimálnu dispeziu, sa pri SM vláknach môže posúvať do oblasti najmenších strát vhodnou súhrou materiálovej a vlnovodovej disperzie. To sa môže dosiahnuť napríklad redukciou priemeru jadra vlákna, sprevádzanou zväčšovaním rozdielov indexov lomu. Pri návrhu je snaha dosiahnuť čo najmenšie tlmenie, disperziu, priemer poľa a dosiahnuť čo najmenší vplyv ohybu na tlmenie. Viacero známych profilov, ktoré tieto požiadavky spĺňajú, je znázornené na obr. 19,15. Pozornosť si zaslúžia profily, ktoré majú úzke jadro s vysokou numerickou apertúrou ako aj vlákna s trojuholníkovým profilom indexu lomu. Tento je vhodnejší z hľadiska dosiahnutia väčšieho modifikovaného priemeru jadra vlákna a nižších strát ako pri jednoduchom step-indexom disperzne posunutom vlákne. Oblasť so zníženým indexom lomu okolo jadra spôsobuje lepšie „uväznenie“ vidov. Podobné výsledky sa dosiahli aj s návrhmi dvojitých stepindexových disperzne posunutých vlákien. Prídavné tlmenie je javom vznikajúcim pri redukcii citlivosti na ohyb na vlnovej dĺžke 1550 nm. Ostatné faktory ako presné radiálne vedenie poľa a hraničná vlnová dĺžka tiež ovplyvňujú vlastnosti vlákien. Pre DSF vlákna je typický priemer poľa medzi 7 a 9 μm na vlnovej dĺžke 1550 nm. Tlmenie 0,21 dB/km na 1550 nm, ktoré sa dosahuje v sériovo vyrábaných disperzne posunutých vláknach je porovnateľné s tlmením konvenčných vlákien na tejto vlnovej dĺžke.

Jednovidové vlákna s plochým priebehom disperzie

(Dispersion Flattened Fibres - DFF)

Tieto vlákna s malou disperziou v celej oblasti nízkeho tlmenia medzi 1300 a 1600 nm uvoľňujú požiadavky na spektrálne vlastnosti zdrojov a dovoľujú prenos informácií s veľmi vysokými prenosovými rýchlosťami so širokým výberom použitých vlnových dĺžok. U jednovidových vlákien s plochým priebehom disperzie sa dosiahla nízka disperzia (≤ 2 ps/nm.km) v celom spomínanom pásme vlnových dĺžok. Typické profily indexu lomu DFF vlákien sú tiež znázornené na obr.19.15. Vývoj sa koncen-troval na nájdenie optima priemeru vidového poľa a zdokonalenie citlivosti na ohyb. Použitie DFF – jedno-vidových vlákien vo verejných sieťach bude závisieť od ich kompa-tibility a ceny v porov-naní s konvenčnými SM vlák-nami.

Disperzné charakteris-tiky predchádzajúcich typov jednovidových optických vlá-kien sú na obr.19.16.



Obr. 19.16. Disperzné charakteristiky jednovidových vlákien

Vlákna kompenzujúce disperziu

Od polovice 90-tych rokov sa zvýšil záujem o kompenzáciu disperzie už inštalovaných konvenčných optických vlákien tým, že sa za vlákno zaradí ďalšie vlákno s opačnou disperziou, takže kompenzuje disperziu pôvodného vlákna. Robí sa tak z viacerých dôvodov:

- v telekomunikačných sieťach už boli inštalované desaťtisícky kilometrov káblov s konvenčnými optickými vláknami,
- neustále sa zvyšujú požiadavky na prenosové rýchlosti a na konci storočia bude bežné v chrbticových sieťach prenášať na jednej vlnovej dĺžke optického žiarenia prenosové rýchlosti 10-ky Gbit/s na vzdialenosť niekoľko tisíc km,
- začínajú sa vytvárať celooptické siete s optickými zosilňovačmi na báze erbiom dopovaných vlákien, ktoré majú zosilňovací efekt práve na vlnovej dĺžke 1550 nm, kde disperzia konvenčných vlákien je približne 20 ps/nm.km.

Už aj z týchto faktov vyplýva vhodnosť kompenzovať disperziu položených optických vlákien, aby tieto mohli byť využívané na vyššie prenosové rýchlosti. Je to aj z toho dôvodu, že konvenčné optické vlákna sú cenovo najvýhodnejšie v porovnaní s vláknami s posunutou disperznou charakteristikou a s vláknami s plochou disperznou charakteristikou.

Dosahuje sa to vhodným profilom indexu lomu, čím sa dosiahne požadovaný tvar vlnovodovej, a teda celkovej disperzie optického vlákna. Dĺžka vlákien kompenzujúcich disperziu býva len niekoľko desiatok alebo stoviek metrov. To samozrejme kladie zvýšené požiadavky na charakteristiky ich profilu indexu lomu. Takéto vlákna obyčajne majú optické prispôsobenie na vstupe a výstupe, aby nedochádzalo ku zbytočným stratám.

Optické vlákna kompenzujúce disperziu sú predmetom výskumu.

19.7.2 Prenosové charakteristiky jednovidových vlákien

Hneď na začiatku treba poznamenať, že prenosové charakteristiky optických vlákien hrajú dôležitú úlohu pri určovaní ich oblasti aplikácie. Táto časť má teda dať prehľad o niektorých relevantných parametroch jednovidových vlákien, ktoré sa využívajú pri ich praktických aplikáciách.

Hraničná vlnová dĺžka (Cut-Off Wave Lenght)

Jednovidová prevádzka nad teoretickou hraničnou vlnovou dĺžkou $\lambda_{c,teor}$ je určená polomerom jadra vlákna „*a*“, indexom lomu „*n*“ a pomerom indexov lomu jadra a plášťa Δ podľa vzťahu

$$\lambda_{c,teor} = \frac{2\pi.a.n(2\Delta)^{1/2}}{V} \tag{19.84}$$

kde V = 2,405 pre stepindexové vlákna. Pretože prítomnosť prvého vyššieho vidu LP_{11} blízko hraničnej vlnovej dĺžky výrazne závisí od dĺžky vlákna, bola definovaná podľa odporúčania G.652 CCITT hraničná vlnová dĺžka, ktorá sa nameria na 2 m vlákna navinutom na cievke o polomere 14 cm. Odporúčaná skutočná hraničná vlnová dĺžka λ_c v pásme 1100 až 1280 nm zabezpečuje, že sa vyhýbame problémom vidových šumov a disperzným problémom v pásme vlnových dĺžok nad 1300 nm.

V reálnych optických vláknach v dôsledku fluktuácie parametrov vlákna je v rôznych miestach vo vlákne hraničná vlnová dĺžka rôzna. V dôsledku toho môže byť druhý vid tlmený aj v oblasti vlnových dĺžok, pri ktorých v iných úsekoch prechádza bez strát. Preto je hraničná vlnová dĺžka závislá od dĺžky vlákna a klesá s jeho dĺžkou podľa vzťahu

$$d\lambda_c = -m \log \frac{L}{2} \tag{19.85}$$

kde dλ_c je pokles hraničnej vlnovej dĺžky voči hodnote danej teoretickým vzťahom (19.84), *m* závisí od typu vlákna (okrem iného aj na štatistike výskytu odchýlok) a *L* je dĺžka vlákna v metroch. Typické hodnoty pre *m* sú v pásme 20 až 60 nm, pričom MC vláknach sú tieto hodnoty nižšie ako pri DC vláknach. Okrem typu vlákna je hodnota *m* závislá od káblovania a podmienok uloženia kábla.

Pretože káblované vlákna rôznej dĺžky v rôznych prevádzkových podmienkach majú široko sa meniacu hraničnú vlnovú dĺžku, musí sa dávať pozor na to, aby hraničná vlnová dĺžka kratších vláknových sekcií, s ktorými sa môžeme stretávať v praktických systémoch, ako napr. sú káblové opakovacie úseky, zostávala pod vlnovou dĺžkou, na ktorej systém pracuje, aby sa zabránilo vzniku vidových šumov [19.3]. Zatiaľ čo CCITT definovalo horný limit pre hraničnú vlnovú dĺžku 1280 nm, skutočné hraničné vlnové dĺžky nad 1330 nm sa niekedy objavujú v káblovaných vláknach, kde ako dĺžka, tak aj ohyby alebo skrútenie vlákna v kábli posúvajú efektívnu hraničnú vlnovú dĺžku nad vlnovú dĺžku, na ktorej systém pracuje.

Priemer vidového poľa

Priemer vidového poľa (Mode Field Diameter - MFD) jednovidových vlákien je dôležitý z hľadiska prieniku poľa do plášťa vlákien v závislosti od vlnovej dĺžky a je preto lepším meradlom funkčných vlastností vlákien ako priemer jadra vlákna. Pre step-indexové, ktoré pracujú blízko hraničnej vlnovej dĺžky, ale ešte v jednovidovej oblasti, možno pole veľmi dobre aproximovať Gaussovským priebehom. Priemer vidového poľa sa jednoducho určuje ako priemer, pri ktorom výkon poľa poklesne na hodnotu $1/e^2$. Gaussovský priebeh najlepšie zodpovedá rozdeleniu výkonu v jadre vlákien so skokovou zmenou indexu lomu.

Tlmenie jednovidových vlákien

Niektoré poznámky k tlmeniu boli už uvedené v paragrafe 19.3. Teraz sa budeme tejto otázke venovať viac z hľadiska jednovidových vlákien. Tlmenie jednovidových vlákien je v prvom rade zapríčinené Rayleighovým rozptylom, ktorý klesá so štvrtou mocninou vlnovej dĺžky. Na druhej strane pri vlnových dĺžkach vyšších ako 1600 nm prudko narastá absorbcia v dôsledku vibrácie častíc Si-O a Ge-O. Straty na kovových iónoch sú v súčasnosti v priemyselne vyrábaných vláknach zanedbateľné a na vlnových dĺžkach okolo 1550 nm sa bežne dosahuje tlmenie medzi 0,15 a 0,16 dB/km. Priemerné straty v priemyselne vyrábaných vláknach sú 0,35 dB/km na vlnovej dĺžke 1300 nm a 0,21 dB/km na vlnovej dĺžke 1550 nm, ako pre MC tak aj DC vlákna. Straty na OH iónoch na vlnovej dĺžke 1380 nm môžu byť prakticky eliminované vhodnou dehydratáciou preformy a bývajú typicky okolo 0,5 až 2 dB/km.

Ako bolo naznačené v predchádzajúcich častiach, makro- a mikro-ohybové straty sú jeden z dôležitých faktov pri návrhu SM vlákien. Zvýšenie strát v dôsledku makro- a mikro-ohybov môže vznikať v oblasti 1550 nm a môže sa prejavovať aj v kábloch v normálnych prevádzkových podmienkach. Jednovidové vlákna sú viac citlivé na ohybové straty pri väčších polomeroch vidového poľa a menšej hraničnej vlnovej dĺžke relatívne k prevádzkovej vlnovej dĺžke.

Pre aplikácie na krátke vzdialenosti ako napr. účastnícke slučky, sa môžu použiť aj jednovidové vlákna optimalizované na vlnovú dĺžku 1300 nm. Efekt vidových šumov môže byť významne redukovaný použitím krátkych sekcií jednovidových vlákien, v ktorých môže byť hraničná vlnová dĺžka aj pod hranicou 800 nm.

Disperzie jednovidových vlákien

Disperzia jednovidových vlákien pozostáva hlavne z materiálovej a vlnovodovej disperzie

$$D_{tot} = D_{mat} + D_{vl} \quad \text{(ps/nm.km)} \tag{19.86}$$

V prípade prenosu signálov s vysokými prenosovými rýchlosťami a použití úzkopásmových generátorov optického žiarenia sa môže prejaviť výrazne aj polarizačná disperzia, ktorá nie je temer vôbec závislá od šírky pásma generátora optického signálu a vzhľadom na svoj náhodný charakter závislý najmä od nehomogenity vlákna, nie je priamoúmerná ani dĺžke optického vlákna. Preto je vhodné v tomto prípade spočítať celkovú disperziu vláknového úseku pre danú šírku pásma generátora ako súčet materiálovej a vlnovodovej disperzie a potom pripočítať hodnotu polarizačnej disperzie daného úseku vlákna.

V štandardných SM vláknach je celková disperzia určená hlavne materiálovou disperziou, ktorá je u čistého kremenného skla nulová okolo vlnových dĺžok 1270 nm (pozri kapitolu 4). V prípade germániových a niekoľko ďalších dopantov sa táto vlnová dĺžka posúva smerom k vyšším vlnovým dĺžkam. Vlnovodová disperzia sa stáva viac významná pre menšie priemery jadra a /alebo rozdiely v indexoch lomu, s výsledným efektom posunu vlnovej dĺžky s nulovou disperziou do vyšších vlnových dĺžok. Disperzia v okolí 1300 nm (ak je známa vlnová dĺžka s nulovou disperziou a strmosť zmeny disperzie S_0) sa počíta podľa nasledovného vzťahu

$$D(\lambda) = \frac{\lambda S_0}{4}\left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4\right] \tag{19.87}$$

Typické hodnoty pre S_0 sú 0,092 pre štandardné SM vlákna a medzi 0,06 a 0,08 ps/nm.km pre niektoré vlákna s posunutou disperziou. Podľa CCITT, odporúčanie G 652-pozri tab. 19.1 je definovaná maximálna hodnota disperzie v pásme 1285 - 1330 nm 3,5 ps/nm.km.

Šírka pásma jednovidových vlákien je úmerná prevrátenej hodnote disperzie.

19.7.3 Mnohovidové vlákna (Multi-Mode - MM)

Typy vlákien

V dôsledku vyšších strát a značne menšej šírke pásma v porovnaní so SM vláknami, sa mnohovidové vlákna používajú hlavne pre prenos na krátke vzdialenosti, ako napríklad v lokálnych sieťach (LAN) a v dátových linkách, kde sa kladie dôraz na nízko cenové spojky a konektory a jednoduché, teda nízko cenové O/E a E/O prevodníky. Ich potenciálne použitie v budúcich účastníckych sieťach sa ešte stále študuje. Treba tiež poznamenať, že mnohovidové vláknové medzispojkové káble sa používajú na pripojenie vlákna na fotodetektor v prenosových systémoch s jednovidovými vláknami a pre rôzne účely, kde sa takýmto spôsobom dosiahnu menšie straty pri spájaní vlákien. Mnohovidové vlákna môžu byť rozdelené do nasledovných skupín:

- Vlákna s gradientným priebehom indexu lomu s 50 μm jadrom a 125 μm plášťom (50/125 vlákna) a typickou numerickou apertúrou 0,20 až 0,24. Tieto vlákna boli pôvodne určené pre telekomunikačné použitie na vlnových dĺžkach 850 a 1300 nm a sú jediné mnohovidové vlákna, ktoré boli štandardizované v CCITT (odporúčanie G.651).
- Vlákna s gradientným profilom indexu lomu s priemerom jadra 62,5 μm a typickou numerickou apertúrou NA = 0,26 do 0,29. Tieto vlákna boli vyvíjané pre použitie na veľké vzdialenosti v 850 a 1300 nm pásmach vlnových dĺžok, ale teraz sa používajú hlavne v niektorých aplikaciách v lokálnych sieťach.
- Vlákna s gradientným profilom indexu lomu s 85 μm jadrom a 125 μm vonkajším priemerom obalu a typickou numerickou apertúrou 0,26 - 0,30. Tieto vlákna boli špeciálne vyvíjané pre systémy na krátke vzdialenosti a LAN siete.
- Vlákna s gradientným indexom lomu s 100 μm jadrom a 140 μm obalom a numerickou apertúrou 0,29. Tieto vlákna boli vyvíjané v prvom rade pre nízko cenové aplikácie na krátke vzdialenosti s vysokou účinnosťou prechodu energie na spojkách pri práci s LED, ale sú použiteľné aj v pásme vlnových dĺžok 1300 nm.
- Rôzne typy mnohovidových step-indexových vlákien s priemerom jadra 200 μm, a to buď polymérové alebo z kremenného skla. Plášť môže byť zo skla alebo z polymeru. Celoplastové vlákna tejto kategórie majú tlmenie okolo 100 dB/km. Najlepšie vlákna, ktoré boli takto realizované mali tlmeie okolo 20 dB/km. Takéto vlákna sa najčastejšie používajú v palubných sieťach dopravných prostriedkov.

Tlmenie MM vlákien

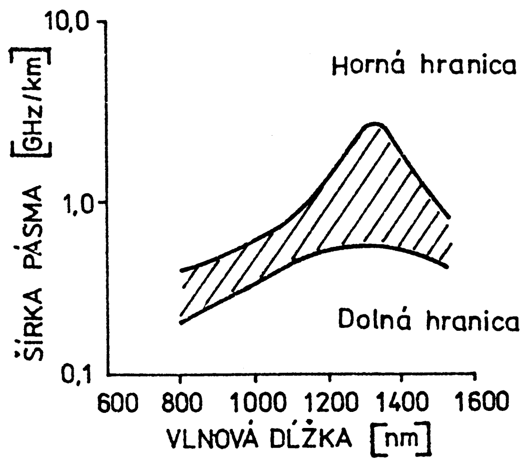
Základné údaje o tlmení MM vlákien boli dané v časti 19.3. Straty MM vlákien majú tie isté základné limitácie ako SM vlákna a sú dané Rayleighovým rozptylom a tlmením v dôsledku absorbcie v infračervenej oblasti. Straty MM vlákien sú vo všeobecnosti väčšie ako vlákien SM, v dôsledku vyššej koncentrácie dopantov a výslednej väčšej skladbe fluktuačného rozptylu a tiež v dôsledku možného vyššieho tlmenia vidov vyšších rádov, ktoré je zapríčinené ich ľahším prienikom na hranicu jadro-plášť alebo vyššou citlivosťou vidov na mikroohybové straty.

V dôsledku toho, že vidy sú tlmené rozdielnym spôsobom, straty MM vlákien závisia od vybudenia vlákna ako aj od vlastností vlákna. Vlastné straty sa dostanú len pre ustálené podmienky šírenia vidov, ktoré nastanú pri šírení svetla optickým vláknom určitej dĺžky. Podmienky ustáleného šírenia vidov sa dostanú buď dostatočne riadenými podmienkami naviazania vidov alebo použitím vidového filtra.

Diferenciálne straty vidov, fenomén zmiešania vidov, pôsobenie efektívnej numerickej apertúry, efektívneho priemeru plášťa a rozdielne disperzné charakteristiky jednotlivých vidov robia ťažkosti pri správnom určení prenosových charakteristík mnohovidových optických vlákien v prípade neustáleného šírenia sa vidov.

Disperzia a šírka pásma v mnohovidových vláknach

Skreslenie signálu v mnohovidových vláknach je spôsobené ako vidovou, tak aj materiálovou disperziou. Za predpokladu rovnakého výkonu na všetkých vidoch boli odvodené jednoduché vzťahy pre rozšírenie impulzu v mnohovidových vláknach. V reálnych prenosových systémoch, ktoré používajú LED diódy, existuje komplex vzťahov medzi materiálovou disperziou vlákna, šírkou pásma zdrojov, spektálnou charakteristikou tlmenia vlákna a skutočnými podmienkami budenia. Na obr. 19.17 je znázornená šírka pásma typických komerčných mnohovidových vlákien 50/125 μm ako funkcia vlnovej dĺžky.



Obr. 19.17. Šírka pásma MM vlákien v závislosti od vlnovej dĺžky

Profil indexu lomu sa volí tak, že šírka pásma je optimálna v pásme vlnových dĺžok 1300 nm. Teoreticky sa môžu dosiahnuť šírky pásma 10 GHz/km. Prakticky však boli dosiahnuté len šírky pásma okolo 5 GHz/km. Komerčne vyrábané mnohovidové vlákna však majú šírku pásma maximálne 1 - 2 GHz/km. V dôsledku odlišností profilov indexu lomu rôznych vlákien, rozdielnym stratám, konverzie vidov, nedokonalých spojok a viazania vidov pri šírení svetla optickým vláknom, sú charakteristicky mnohovidových vlákien viac nejednoznačné ako charakteristiky málovidových vlákien. Niektoré charakteristiky kabelovaných vlákien také, ako napr. ustálená dispribúcia vidov, straty, šírka pásma, môžu byť odlišné od charakteristík nekabelových vlákien. Šírka pásma kabelového úseku mnohovidových vlákien pri ustálenom šírení vidkov je približne daná vzťahom

$$BW(L) = BW_0 (L / L_0)^{\gamma} \tag{19.88}$$

kde BW_0 je šírka pásma sekcie dĺžky L_0 a $\gamma \in (0.5;1)$ označuje koeficient tvarovania šírky pásma. V podmienkach ustáleného šírenia vidov možno straty považovať za aditívne.

19.7.4 Mnohojadrové a iné špeciálne vlákna

Vlákna s viac ako jedným jadrom sa môžu využívať pre priestorové multiplexovanie namiesto mnohovláknového multiplexovania alebo sa môžu využívať pre riadené spájanie (väzbenie) medzi dvoma alebo viacerými optickými vlnovodmi. Aj keď by takéto vlákna boli veľmi atraktívne napríklad v účastníckych slučkách, v dôsledku výrobných problémov týchto vlákien z hľadiska dosiahnutia dostatočne veľkého tlmenia presluchu a technologickým problémom pri spájaní a konektorovaní, nerozšírilo sa praktické využívanie týchto vlákien.

Dvojjadrové vlákna sú účelné pre interferometrické senzory, ako deliče výkonu, vlnové multiplexory. Vlákna s aktívnymi alebo nelineárnymi vlastnosťami sa používajú v optických zosilňovačoch využívajúc stimulovaného Ramanovho rozptylu alebo štvorvlnového zmiešavania - „Four-Wave Mixing“. Vlákna dotované neodynom, erbiom a ďalšími vzácnymi prvkami majú najrôznejšie vlastnosti, ktoré možno využívať napr. pre vláknové senzory, optické zosilňovače a vláknové lasery.

V dôsledku ich kompatibility s prenosovými vláknami (zvlášť jednovidovými), komponenty vyrábané z takýchto vlákien sú atraktívne pre realizáciu rôznych pasívnych prvkov ako napr. väzobných prvkov, interferometrov, vlnovodelených multiplexorov, polarizátorov a optických spínačov.

19.8 Zhrnutie a trendy

Výskum a vývoj optických vlákien viedol k limitovanému počtu masovo vyrábaných vlákien používaných vo verejných sieťach a k rôznemu druhu vlákien využívaných pre špeciálne účely. Súčasný trend je využiť čo najviac jednovidové vlákna pre čo najviac telekomunikačných aplikácií. Mnohovidové vlákna zostávajú významné pre aplikácie na krátke vzdialenosti a v lokálnych sieťach, avšak aj v týchto aplikáciách sa stále viac začínajú používať jednovidové vlákna.

Pozornosť sa venuje vývoju nízkocenových jednovidových vlákien pre účastnícke slučky. Ďalší vývoj sa orientuje na štandardizáciu disperzne posunutých a disperzne plochých optických jednovidových vlákien a tiež na vývoj nízkotratových vlákien zachovávajúcich polarizáciu pre koherentné prenosové systémy na stredné a krátke vzdialenosti, ako aj na vláknové komponenty pre senzorové aplikácie a vlákna kompenzujúce disperziu.

Vlákna s aktívnymi a nelineárnymi vlastnosťami rozšíria oblasť ich použitia špeciálne v oblasti vláknových laserov, zosilňovačov a senzorov. Otázka postupu vývoja vlákien pre strednú infračervenú oblasť sa ukáže v budúcnosti.

Literatúra

[1] KAO, K.C., HOCKHAM, G.A.: Dielectric Surface Waveguides or Optical Communications, Proc. Inst. Elec. Lett., vol. 113, pp. 1151-1158, July 1966
[2] GRAU,G.: Optische Nachrichtentechnik, Springer-Verlag, 1981
[3] DADO M.: Optoelektronika v telekomunikáciách, ALFA, Bratisklava, 1988
[4] NAMIHIRA, Y., MAEDA, J.: Comparison of Various Polarisation Mode Dispersion Mesurement Methods in Optical Fibres, Electron. Lett., vol.28, pp. 2265-2266, 1992
[5] HASEGAWA, A., CODAMA, Y.: Signal Transmision by Optical Solitons in Monomode Fibre, Proc. IEEE, 69, pp. 1145-1150, 1981

Namiesto záveru

Teraz, keď sme sa zoznámili s niektorými princípmi a základnými zákonmi optiky, mohol by byť zaujímavý stručný pohľad na to, ako znalosti „o svetle“ vznikali a rástli. Takýto pohľad je užitočný najmä preto, lebo konfrontáciou súčasných vedomosti (i keď sme sa zoznámili iba s ich malou časťou) s objavmi elementárnych poznatkov vyniká „**objaviteľský princíp ľudského ducha**“, princíp, ktorý bol hybnou silou rozvoja poznania, a ktorý je a bude hybnou silou rozvoja poznania i v budúcnosti.

Kam v histórii položiť počiatky optiky závisí od toho, čo budeme pod optikou rozumieť. Ak sa budeme pýtať, kedy si ľudia uvedomovali základné zákony optiky, musíme odpovedať, že to bolo veľmi dávno. Už pri vytyčovaní pyramíd ich stavitelia intuitívne predpokladali, že sa svetlo šíri priamočiaro. Ten istý predpoklad použili stavitelia neolitických „zameriavacích“ stavieb ako je známy Hengstone a podobne. Zrejme dosť dávno poznali i zákony odrazu a lomu. Svedčí o tom napríklad legenda, podľa ktorej Archimedes mal zapáliť nepriateľskú flotilu pomocou odrazu slnečného svetla na sústave vyleštených štítov. (S nadsádzkou môžeme povedať, že to bola predzvesť adaptívnej optiky, objavenej o dve tisícročia neskôr.) Tiež sa traduje, že Nero sa díval na horiaci Rím cez „zelený smaragd“. Bol krátkozraký a smaragd mal vybrúsený tak, aby korigoval jeho krátkozrakosť, alebo si absorpciou (červeného) svetla v zelenom kameni chránil zrak pred tepelnými účinkami žiarenia požiaru?

Leonardo da Vinci - pravdepodobne už okolo roku 1500 - správne chápal podstatu vzniku obrazu v zrkadle: „...obraz v zrkadle je ako ozvena“. Zdá sa tiež, že sa da Vinci zaoberal i možnosťou konštrukcie ďalekohľadu. Každopádne približne o sto rokov neskôr Galileo Galilei a krátko za ním Kepler, ďalekohľad skonštruovali. Galileo sa svetlu venoval nielen v súvise s konštrukciou ďalekohľadu, pokúšal sa určiť i rýchlosť šírenia sa svetla. Jeho výsledok bol prekvapivý: „... rýchlosť svetla je nekonečná, alebo veľmi veľká“. To všetko sa odohralo takmer dve storočia predtým než ľudia spoznali, aká je podstata svetla.

Dokonca ani tvorca klasickej fyziky Isaac Newton, napriek tomu, že poznal rozklad svetla na monochromatické zložky, že poznal interferenciu a difrakciu svetla, nevedel, že svetlo sú vlny. Domnieval sa, že svetlo je prúd častíc, ktoré prechádzajú „priehľadnými“ telesami. Až Ch. Huygens vyslovil „undulačnú“ (vlnovú) hypotézu, ktorú svojím dôkladným štúdiom difrakčných javov potvrdil vynikajúci francúzsky bádateľ A. Fresnel.

V období rozmachu klasickej fyziky sa na základe nepravidelnosti pozorovanej doby obehu Jupiterových mesiacov (v roku 1675) Römerovi podarilo určiť rýchlosť svetla. O niečo neskôr bola takto získaná hodnota 300 000 km/s potvrdená i pozemskými meraniami. Avšak napriek tomu sa skutočná podstata svetla ešte nepoznala. Napríklad sám Fresnel sa domnieval, že svetlo sú vlny „pružného éteru“. Na to, aby sa zistila podstata svetla, bolo potrebné počkať na rozvoj náuky o elektrine a magnetizme.

Vynikajúci francúzsky bádateľ M. Faraday, vedec bez oficiálneho vzdelania (s vedou sa stretol najprv ako pomocník knihára a neskôr ako pomocný pracovník, dnes by sme povedali laborant) v roku 1840 objavil zákon elektromagnetickej indukcie. Tento zákon mal nedozerny význam pre rozvoj techniky. Je na ňom založená napríklad činnosť generátorov elektrického prúdu, ako i transformátorov striedavého napätia. Tento zákon ale bol dôležitý i pre rozvoj fyziky. Na jeho základe (s využitím vtedy známych zákonov elektrostatiky a magnetostatiky) anglický fyzik J. C. Maxwell (1831-1879) sformuloval rovnice, ktoré úplne popisujú elektrické a magnetické javy. Z týchto rovníc, okrem iného, vyplynula diferenciálna rovnica pre intenzitu elektrického a magnetického poľa, ktorá je zhodná s rovnicou známou v mechanike ako vlnová rovnica (popisujúca napríklad šírenie sa zvuku). To znamenalo, že môžu existovať elektromagnetické vlny. Ako sme videli v prvej kapitole, táto rovnica obsahuje konštanty, na základe ktorých bolo možno stanoviť rýchlosť šírenia sa, vtedy ešte hypotetických, elektromagnetických vĺn. Z Maxwellovej teórie vyplýva, že ich rýchlosť šírenia sa je rovná 300 000 km/s, takže táto vypočítaná hodnota sa rovnala hodnote, ktorá bola predtým nameraná. Bol to prvý náznak, že svetlo je elektromagnetické vlnenie. Poznamenajme, že to bolo v dobe, keď existencia elektromagnetických vĺn nebola ešte experimentálne dokázaná. Pokusy, ktorými sa overila existencia elektromagnetických vĺn, až neskôr úspešne vykonal nemecký fyzik H. Hertz. Náročnosť a obtiažnosť jeho pokusov ktorými dokázal existenciu elektromagnetických vĺn bola taká veľká, že napriek veľkej sláve ktorú mu výsledky priniesli (alebo práve preto?) vyhlásil, že „... pokusy s elektromagnetickými vlnami sú také náročné, že nemôžu mať žiadny praktický význam.“

Na rozhraní 19. a 20. storočia ďalší nemecký fyzik Max Planck odvodil zákon popisujúci vyžarovanie svetla čiernymi telesami. Bolo to v období rozvoja Edisonových žiaroviek a ich výrobcovia mali vážny záujem o dosiahnutie čo najvyššej účinnosti. Záujem o túto oblasť bádania bol teda motivovaný i praktickými záujmami. Planckov výsledok mal ale závažnú cenu najmä pre samotnú fyziku. Na to, aby Planck dostal vzorec z ktorého by vyplývali hodnoty spektrálnej hustoty svetla vyžiareného čiernym telesom zodpovedajúce hodnotám získaným experimentálne, musel vysloviť neočakávaný predpoklad: že čierne teleso vyžaruje svetlo v konečných dávkach, v „kvantách“. Energetická hodnota takéhoto kvanta je rovná $h.\nu$, kde h je takzvaná Planckova konštanta a ν je frekvencia vyžiareného svetla. Krátko na to Albert Einstein (pri výklade experimentálne pozorovaného „fotoelektrického“ javu) rozšíril Planckov predpoklad. Podľa Einsteinovho predpokladu sa svetlo nielen vyžaruje po kvantách, ale sa v kvantách i absorbuje. Nemôže sa teda absorbovať ľubovoľne malé množstvo svetelnej energie. Buď sa absorbuje kvantum veľkosti $h.\nu$, alebo sa neabsorbuje nič. Na základe toho, že sa svetlo vyžaruje i absorbuje po kvantách, je možné si predstavovať, že „**existuje**“ v elementárnych množstvách, v kvantách. Takéto kvantá svetla dostali názov „fotóny“. Uvedená predstava svetla je v rozpore s klasickou predstavou elektromagnetickej vlny, podľa ktorej amplitúda sa môže meniť spojite, takže pri ľubovoľnom trvaní prenosu energie prostredníctvom svetelnej vlny sa môže preniesť ľubovoľné množstvo energie. Klasická elektromagnetická vlna teda nie je kvantovaná. Napriek tomu, že „kvantová“ teória sa experimentálne potvrdila, klasická elektromagnetická teória (z ktorej kvantovanie nevyplýva, a teda je v rozpore s kvantovou teóriou), dobre popisuje **šírenie sa** svetla. Dochádzame tak do zvláštnej situácie - ani kvantová, ale ani vlnová predstava nemôže bezozvyšku popísať optické javy v celej šírke. Vynára sa tak potreba „dualistického“ chápania svetla, podľa ktorej pri istých procesoch (absorpcia svetla, vyžarovanie) sa uplatňujú kvantové vlastnosti svetla, a pri iných procesoch (difrakcia, interferencia) sa prejavujú jeho vlnové vlastnosti. Neskôr sa ukázalo, že takúto vlastnosť má nielen svetlo, ale i tie „objekty“, ktoré boli tradične považované za častice. To už ale súvisí s tzv. kvantovou, alebo iným menom, vlnovou mechanikou.

„Kvantové“ postuláty prvýkrát ucelenejším spôsobom sformuloval dánsky fyzik Niels Bohr pri výklade spektier niektorých jednoduchých prvkov. Jeho predstava, že energetické hladiny atómov sú diskrétne, a že pri prechode atómu z jedného energetického stavu do druhého sa vyžiari fotón s energiou rovnajúcou sa rozdielu energií príslušných hladín atómu, viedla k neuveriteľne dobrej zhode s hodnotami experimentálne pozorovaných spektrálnych čiar niektorých prvkov. Pozorovaná zhoda výrazne podporovala domnienku, že nejde o náhodu. Neskôr sa ukázalo, že princíp kvantovania vyplýva z toho, že elementárne častice - ako sú elektróny, protóny a ďalšie - sú popísané vlnovými funkciami, ktorých vlnové dĺžky nemôžu byť ľubovoľné. Musia byť také, aby vlnové funkcie spĺňali isté okrajové podmienky súvisiace so situáciou, v ktorej sa častice nachádzajú, analogicky okrajovým podmienkam, ktoré spĺňajú svetelné vlny, napríklad vo vlnovodoch. Okrem uvedeného dôsledku pre rozvoj kvantovej mechaniky mali Bohrove práce cenu pre rozvoj **spektroskópie**. (Spektroskopia je disciplína, ktorá sa zaoberá určovaním chemického zloženia svietiacich objektov na základe vlnových dĺžok objektom vyžarovaného svetla. Vďaka jej bezkontaktnosti je vhodná nielen na určovanie chemického zloženia vzoriek tým, že sa prinútia svietiť napríklad v plameni vhodne upravených horákov, ale i na určovanie zloženia hviezd a iných astronomických objektov.)

V polovici tohto storočia rozvoj optiky pokračoval rozmanitými smermi. Anglický fyzik maďarského pôvodu D. Gábor v štyridsiatych rokoch objavil holografiu, v šesťdesiatych rokoch boli vyvinuté prvé lasery, rozvinula sa nelineárna optika a bolo urobené mnoho ďalších objavov. Medzi nimi i možno najjednoduchší objav s gigantickými dôsledkami - optické vlákna. Význam tohto objavu pochopíme lepšie, keď si pripomenieme, že vznikom fyziky pevných látok sa otvorila cesta k vytvoreniu integrovaných mikroelektronických prvkov, ktoré umožnili vznik počítačov, v ktorých sa neuveriteľne rýchlo spracováva neuveriteľné množstvo informácií. Objavením optických vlákien sa umožnil prenos informácií. A to prenos s takou rýchlosťou a na také vzdialenosti, že umožňujú okrem iné prenos informácií medzi počítačmi doslova na celej zemeguli. Kombinácia týchto dvoch objavov pravdepodobne znamená pre vývoj civilizácie obrat analogický k obratu, ktorý spôsobilo vynájdenie kníhtlače.

Pri načrtnutej histórii vývoja optiky sme sa nezastavili pri takých „detailoch“, ako je rozvoj zobrazovacej optiky, napríklad optiky pre fotografické prístroje. Vráťme sa k nemu, pretože práve na tomto poli sa uplatnil bádateľ pracujúci vo Viedni a pochádzajúci zo Slovenska, Jozef Petzval. Ako sme uviedli v kapitole 13, Petzval sa zaslúžil o rozvoj optiky tým, že našiel spôsob výpočtu sústavy šošoviek, ktorá umožňuje dostatočne kvalitné zobrazovanie i prostredníctvom lúčov prechádzajúcich vo väčšej vzdialenosti od optickej osi než to bolo u vtedajších objektívov. Urobil tak v r. 1840, v čase rozvoja fotografie (presnejšie daguerotypie, ktorá je predchodcom dnešnej fotografie). Jeho výpočty umožnili vytvoriť objektívy s väčšou svetelnosťou a tým výrazne skrátiť doby expozície potrebné pri fotografovaní. Dosiahnuté skrátenie bolo také výrazné, že sa bez nadsádzky dá povedať, že Petzval svojimi prácami umožnil praktické použitie fotografie.

Na záver snáď poznamenajme, že optike je jedno, kto urobil ten či onen krok. A v istej miere to je (oprávnene) jedno celému svetu. Nášho krajana spomíname preto, aby sme dopredu dali protiargument tým, ktorí si myslia, že my sme odsúdení k tomu, aby sme boli iba konzumentmi výsledkov iných.

Uvedený stručný pohľad na vývoj optiky predložený namiesto záveru nie je úplný. Chýbajú v ňom väzby „fyzikálneho poznania“ na tú stránku našej civilizácie, ktorá sa nazýva „technika“. A práve snaha o dosiahnutie toho, aby sa väzba fyzikálneho a technického poznania dostala do povedomia čitateľa stála v pozadí nášho úsilia pri písaní jednotlivých kapitol predloženej knihy. Boli by sme preto radi, keby si čitatelia tieto väzby uvedomili a keby im to pomohlo pri aplikácii fyzikálnych (v tomto prípade optických) metód a poznatkov v ich praxi.

Abecedný register

Prof. Ing. Milan Dado, CSc., Doc. RNDr. Ivan Turek, CSc.
Doc. RNDr. Július Štelina, CSc., Prof. Ing. Ladislav Bitterer, CSc.
Doc. Ing. Stanislav Turek, CSc., Ing. Eduard Grolmus, CSc.
Ing. Patrick Stibor, PhD.

KAPITOLY Z OPTIKY PRE TECHNIKOV

Vydala Žilinská univerzita v Žiline, Moyzesova 20
Zodp. red. PhDr. Albert Jurčišin
Tech. red. Mária Závodská
Návrh obálky Miroslav Pfliegel
Foto na obálke Cyril Králik

Vytlačilo EDIS - vydavateľstvo ŽU, J. M. Hurbana 15, Žilina
v auguste 1998 ako svoju 819. publikáciu
348 strán; 160 obrázkov; 6 tabuliek; AH 24,21; VH 24,89
typ písma Times New Roman CE; prvé vydanie, náklad 350 výtlačkov
ISBN 80-7100-390-5